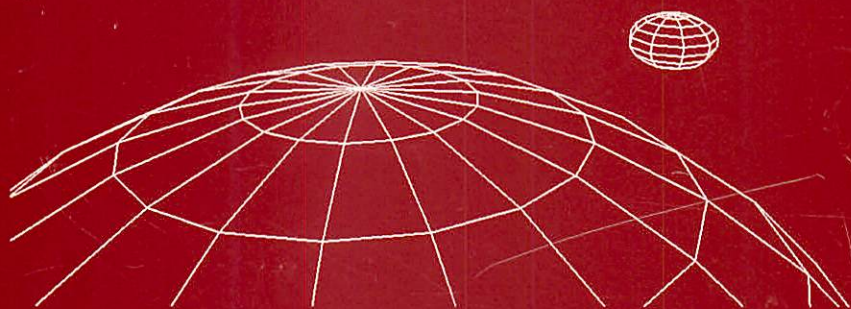


A Fool in Space

木村 栄 没後60年記念



Proceedings of the 36th Symposium on Celestial Mechanics
March 1–3, 2004 at Seiun-So, Hakone, Kanagawa, Japan
Kiyotaka TANIKAWA, Hideyoshi ARAKIDA
Tadato YAMAMOTO, & Masaya SAITO



箱根天体力学 N 体力学研究会 平成 16 年 3 月 1 日 (月) - 3 日 (水) 箱根町強羅静雲荘にて

箱根天体力学N体力学研究会集録
平成16年3月1日(月) – 3日(水)
神奈川県足柄下郡箱根町強羅 1320 静雲荘

A Fool in Space
くるくるまわるよ 宇宙の道化

(木村 栄 没後60年記念)

Proceedings of the 36th Symposium on Celestial Mechanics
March 1–3, 2004 at Seiun-So, Hakone, Kanagawa, Japan
Kiyotaka Tanikawa, Hideyoshi Arakida,
Tadato Yamamoto, & Masaya Saito

Preface/序文

スピン(自転運動)は近代日本の数理科学が初めて世界的な貢献を行なったテーマである。成果は木村栄(ひさし)の木村項またはz項として知られている。木村項の解明も実は日本の若生康二郎によってなされ、流体核とマントルとの相互作用へと問題が発展した。最近では、大気による地球自転変動の励起も精密な気象庁データを使って日本で研究されている。数千年間の地球自転変動も過去の天文史料を使った研究が日本で始まった。木村栄の墓が多摩霊園にあることを偶然知った。墓と墓碑の写真を撮ったので、それをこの集録に掲載することにより、木村 栄の偉業を讃えたい。

剛体としての地球の自転研究は日本には第二次世界大戦後長い歴史がある。衛星の自転は惑星の摂動を受けて複雑になり得る。また太陽も自転している。太陽の自転は正則に見えるが、内部はどうなっているのだろうか? 小惑星は平山清次による族(平山族)の発見以来、日本で継続的に研究の行なわれている対象である。光電観測や衝突実験により、小惑星の自転分布も研究対象となり、サンプルリターンも予定され、小惑星の起源、族の起源の研究がいま脚光を浴びている。以上のようないくつかの種類の天体のスピン問題を、関係者が一堂に会して 討議すれば、共通の理解が得られ、きわめて有意義であろうと考えた。

また今回は、8の字三体問題の専門家藤原俊朗氏に招待講演をお願いした。集録原稿は書いていただけなかったが、刺激を受けた。20が口頭講演で、11がポスター発表であった。

今回ははじめての試みとして、集録を web page に載せる。参考にしていただきたい。(http://yso.mtk.nao.ac.jp/~tanikawa/)

平成 17 年春 世話人代表 谷川清隆

Editors/世話人

谷川 清隆 (TANIKAWA, Kiyotaka) tanikawa@exodus.mtk.nao.ac.jp

国立天文台・理論天文学研究系

荒木田英禎 (ARAKIDA, Hideyoshi) h.arakida@nao.ac.jp

国立天文台・天文情報公開センター

山本一登 (YAMAMOTO, Tadato) tadato@oikaze.com

総合研究大学院大学/国立天文台・天文情報公開センター

斎藤 正也 (SAITO, Masaya) saitohms@cc.nao.ac.jp

総合研究大学院大学/国立天文台・理論天文学研究系

Table of Contents

Preface	i
Table of Contents	ii

Invited Talks

Introduction to Rotaional Motion by Andoyer Variables <i>Hiroshi Kinoshita</i>	1
Spin-Orbit Resonances <i>Bouquillon Sébastien</i>	18
Helioseismic measurement of solar rotation <i>Takashi SEKII</i>	25
Rotation of Asteroids <i>Masahisa YANAGISAWA</i>	35

Oral Talks

My Favorite Figure-8 Orbit <i>Masayoshi SEKIGUCHI</i>	42
New Periodic Solutions of the 2n-body Problem <i>Mitsuru Shibayama</i>	52
Classical Coulomb Three-Body Problem: One Dimensional and Two Dimensional <i>Mitsusada M. SANO</i>	59
Structure Change of the Poincare Section due to the Mass Change in the Rectilinear Three-body Problem <i>Masaya Masayoshi Saito and Kiyotaka Tanikawa</i>	68
Oscillatory Orbits in the Standard Mapping <i>Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa</i>	75
New Intermediary Orbit for the Main Problem of the Artificial Satellite Motion <i>Nobuaki SAITO</i>	88
A Solution for the Main Problem of the Artificial Satellite Motion perfectly free from the Critical Inclination Difficulty <i>Takeshi INOUE</i>	110
EFFICIENT ORBIT INTEGRATION BY ORBITAL LONGITUDE METHODS <i>Toshio FUKUSHIMA</i>	123
The Formation of Protoplanets in the Planetesimal Disk <i>Junko Kominami, Hidekazu Tanaka, and Shigeru Ida</i>	130
Time Systems in Ancient China and Japan <i>Mitsuru SÔMA, Kin-aki KAWABATA, and Kiyotaka TANIKAWA</i>	149
Dynamical Evolution of a Globular Cluster System: Limits on its Formation in a Disk Galaxy <i>Tsuyoshi Sakamoto and Masashi Chiba</i>	179
Antonov Problem and Quasi-Equilibrium State in N-body Systems <i>Atsushi TARUYA and Masa-aki SAKAGAMI</i>	211

Posters

Perturbation Model of IERS Conventions 2003 and Orbital Analysis Softwaer con- certo v4 <i>Toshihiro KUBO-OKA, Toshimichi OTSUBO, and Tadahiro GOTOH</i>	249
--	-----

Gravitomagnetic Translational Motion on Gravitational Time Delay <i>Hideyoshi ARAKIDA</i>	259
Quadruply Reversible Periodic Orbits in the Harper Map <i>Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa</i>	267
Symplectic Renormalization Group Method and Its Application for Analyzing Island Structure <i>Shin-iti GOTO</i>	273
A Quasi-Regularization of the Euler Problem by Partitioned Multistep Methods <i>Tadato YAMAMOTO and Toshio FUKUSHIMA</i>	295
Fractal Structure and Self-similar Solution in One-Dimensional Sheet Model with Expansion <i>Takayuki TATEKAWA and Kei-ichi MAEDA</i>	311
Dynamics of gas sphere under self-gravity <i>Souichi MURATA</i>	320
Relation between the critical argument and the alignment of periastron in 55 Cancri planetary system <i>Hiroshi Nakai, Hiroshi Kinoshita, and Jianghui Ji</i>	327
ΔT and the Tidal Acceleration of the Lunar Motion from Eclipses Observed at Plural Sites <i>Kiyotaka Tanikawa and Mitsuru Sôma</i>	340
Symposium Program	353
Author Index and Participant List	356

Introduction to Rotational Motion by Andoyer Variables

アンドワイエー変数を用いた回転力学入門

木下宙 (国立天文台)

Hiroshi Kinoshita (National Astronomical Observatory)

Kinoshita@nao.ac.jp

2-21-1 Osawa, Mitaka, Tokyo, Japan

ABSTRACT

Eulerian angles are frequently used to describe the rotational motion of a rigid body. The equations of motion with use of the Eulerian angles have a complicated form and the treatment and the discussion of the equations of motion is difficult and troublesome. Here we introduce Andoyer variables and express the Hamiltonian with use of them, of which form is very simple and the analytical treatment of the rigid motion becomes much simpler than that with use of the Eulerian angles. Then we show the precession of a symmetric top and the rigid Earth, and the long-periodic motion of a planet as examples of the application of the Andoyer variables.

1 オイラー変数を用いた運動方程式

慣性座標系を $(X - Y - Z)$, 物体に固定した座標系を $(x - y - z)$ とする. ここで $(x - y - z)$ は物体の慣性主軸と一致するように選ぶ. オイラー角 (ϕ, θ, ψ) は図 1 のように定義する. 以下でオイラー変数で表したハミルトニアンを導く.

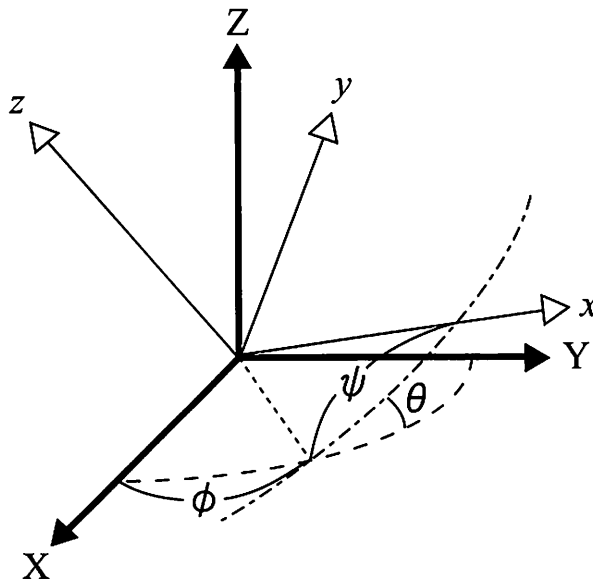


Figure 1 — Eulerian angles (ϕ, θ, ψ) . The coordinate system: $(X - Y - Z)$, inertial frame. $(x - y - z)$, Cartesian coordinate system fixed to the rigid body.

角速度ベクトル ω の $(x-y-z)$ での表現は

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}\quad (1)$$

となる. 角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ は

$$L_x = A\omega_x, L_y = B\omega_y, L_z = C\omega_z \quad (2)$$

である. ここで A, B, C は主慣性モーメントで $A < B < C$ とする. 運動エネルギー T は

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z) \\ &= \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C}\right)\end{aligned}\quad (3)$$

となる. オイラー角に共役な運動量は

$$\begin{aligned}p_\phi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = L_x \sin \theta \sin \psi + L_y \sin \theta \cos \psi + L_z \cos \theta \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = L_x \cos \psi - L_y \sin \psi \\ p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = L_z\end{aligned}\quad (4)$$

である. 式 (4) より角運動量ベクトルをオイラー角とその共役な運動量で表現すると

$$\begin{aligned}L_x &= p_\theta \cos \psi + \frac{1}{\sin \theta}(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \sin \psi \\ L_y &= -p_\theta \sin \psi + \frac{1}{\sin \theta}(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi \\ L_z &= p_\psi\end{aligned}\quad (5)$$

となる. 自由回転運動を記述するハミルトニアン F は運動エネルギーそのものである.

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2A}(p_\theta \cos \psi + \frac{1}{\sin \theta}(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \sin \psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2B}(-p_\theta \sin \psi + \frac{1}{\sin \theta}(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2C}p_\psi^2\end{aligned}\quad (6)$$

である. 角変数 ϕ はサイクリックであるので, 共役な運動量 p_ϕ (角運動量の Z 成分) は保存される.

物体の質量分布が軸対称 ($A = B$) の場合のハミルトニアンは

$$F = \frac{1}{2A}(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta}(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2) + \frac{1}{2C}p_\psi^2 \quad (7)$$

となる。角変数 ψ はサイクリックとなり、共役な運動量 p_ψ (角運動量 z 成分) は保存される。系の自由度は 1 となり、角 θ についてはハミルトニアンから導かれる θ についての運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)(p_\phi \cos \theta - p_\psi)}{A^2 \sin^3 \theta} \quad (8)$$

を解かなければならない。この運動方程式を解くのは非常に面倒であるが、後で述べるアンドワイエー変数による取り扱いから θ は幾何学的な関係から容易に求められる。

2 オイラーの運動方程式

第 1 節では回転運動をオイラー変数で表したハミルトニアンを用いて議論した。回転運動はオイラーの運動方程式を用いて議論されることも多い。慣性系でのオイラーの運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}(\text{外力によるトルク}) \quad (9)$$

である。物体に固定した座標系でのオイラー運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (10)$$

である。式 (2) を運動方程式 (10) に代入して $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ についての方程式を求める。

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\omega_y\omega_z &= N_x, \\ B \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x &= N_y, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x\omega_y &= N_z. \end{aligned} \quad (11)$$

外力 N が無い場合方程式 (11) の解は楕円関数で表現できる。 $A = B$ の場合は式 (11-3) より ω_z は一定となり式 (11-1, 11-2) より ω_x についての運動方程式は

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + \left(\frac{C - A}{A}\omega_z\right)^2\omega_x = 0. \quad (12)$$

となる。これより

$$\omega_x = a \sin(\Omega t + \alpha), \omega_y = a \cos(\Omega t + \alpha), \quad (13)$$

$$\Omega = \left(1 - \frac{C}{A}\right)\omega_z. \quad (14)$$

a, α は積分定数である。角速度ベクトルの運動は求められたが物体の任意の時刻での空間配置を知るには式 (1) を ϕ, θ, ψ についての運動方程式として解かねばならない。これは非常に面倒である。後で見るようにアンドワイエー変数を用いれば、角速度ベクトルばかりでなく物体の空間配置も簡単に求められる (第 3 節参照)。

3 アンドワイアー変数を用いた運動方程式

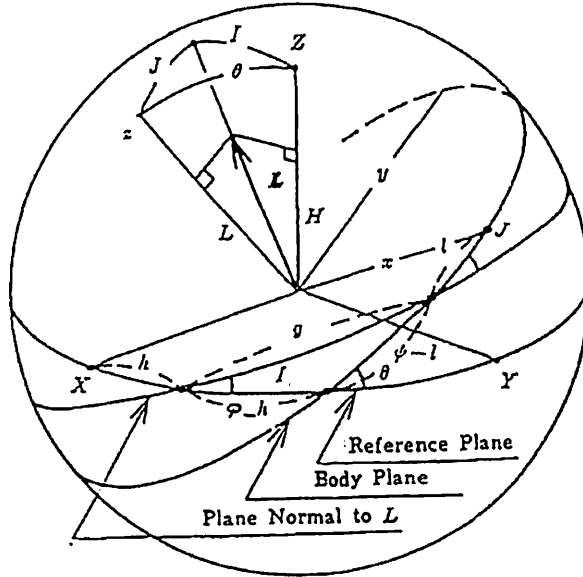


Figure 2 — Andoyer angle variables (l, g, h). ($X-Y-Z$), inertial frame. ($x-y-z$), Cartesian coordinate system fixed to the rigid body. Eulerian angles (φ, θ, ψ).

剛体の角運動ベクトルに垂直な面 (Π) を導入する。X 軸から基準面と面 Π との交点までの角度を h , この交点から面 Π と物体の赤道面との交点までの角度を g , この交点から x までの角度を l (図 2 参照) とする。 l, g, h に正準共役な運動量は

$$\begin{aligned} L &= (\text{角運動量の } z \text{ 成分}) = G \cos I \\ G &= (\text{角運動量}) \\ H &= (\text{角運動量の } Z \text{ 成分}) = G \cos I \end{aligned} \quad (15)$$

となる。この (l, g, h, l, L, G, H) をアンドワイアー (Andoyer) 変数という (Andoyer 1923, Kinoshita 1972)。

自由回転のハミルトニアンは

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} \quad (16)$$

である。角変数 g, h と運動量 H はサイクリックであるので、これらの変数に共役な G, H, h は保存される：

$$G = \text{一定}, H = G \cos I = \text{一定}, h = \text{一定}.$$

上記の関係より I は一定である。このことは角運動量ベクトルが保存されることを示している。自由回転の自由度は 1 となり、積分可能であり、解は楕円関数で表できる (第 5 節参照)。また解を求めなくても、ハミルトニアン (16) を用いて等エネルギー曲線を描くことによって、運動の大局の様子を知ることができる (第 4 節参照)。

物体の質量分布が軸対称であるとき ($A = B$) のハミルトニアンは

$$F = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \quad (17)$$

となる. 角変数 l もサイクリックとなり, 共役な変数 L は一定, すなわち J は一定となる. 運動方程式は

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) = n_l < 0, \quad (18)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial G} = \frac{G}{A} = n_g \quad (19)$$

$$l = n_l t + l_0, \quad (20)$$

$$g = n_g t + g_0. \quad (21)$$

l がオイラー運動 (非剛体の場合にはチャンドラー運動 (極運動の主要成分)) に対応していて, $l + g$ が日周回転運動に対応している. また物体の回転状態を示すオイラー角は図2のオイラー変数とアンドワイアー変数の幾何学的関係から, 球面三角公式を用いて容易に求められる.

4 短軸モード回転と長軸モード回転

第3節で述べたように, 剛体の自由回転の自由度は1であるので, 等エネルギー曲線を描くことによって, 解の大局的運動を知ることができる. 図3は横軸に l , 縦軸に L/G を選んだときの等エネルギー曲線である. 点 ($l = 0, L = 0$) を通る曲線がセパラトリックスである. セパラトリックス上のエネルギーは $F_B = G^2/2B$ である. セパラトリックスで囲まれた領域での運動は長軸の周辺の回転運動である. 点 ($l = \pi/2, L = 0$) は長軸を回転軸とする回転運動でありそのエネルギーは $F_A = G^2/2A$ である. 上記以外の領域での運動は短軸周辺の回転運動である. 点 ($L = G$ すなわち $J = 0$) は短軸を回転軸とする回転運動であり, そのエネルギーは $F_C = G^2/2C$ である. 主慣性モーメント A, B, C には $A < B < C$ なる関係があるので

$$F_C < F_B < F_A \quad (22)$$

である. 短軸周りの回転エネルギーは極小で安定 (永年安定: secular stable) であり, 長軸周りの回転エネルギーは極大である (永年不安定: secular unstable). すなわち短軸モード回転はエネルギーの散逸があると徐々に回転エネルギーを失い角度 J が零, すなわち短軸を軸とする回転運動へと移行する. 一方, 長軸モード回転はエネルギーの散逸がなければ安定 (ordinary stable) であるが, エネルギーの散逸があると不安定 (永年不安定) であり, 徐々に短軸モード回転へと移行してゆく.

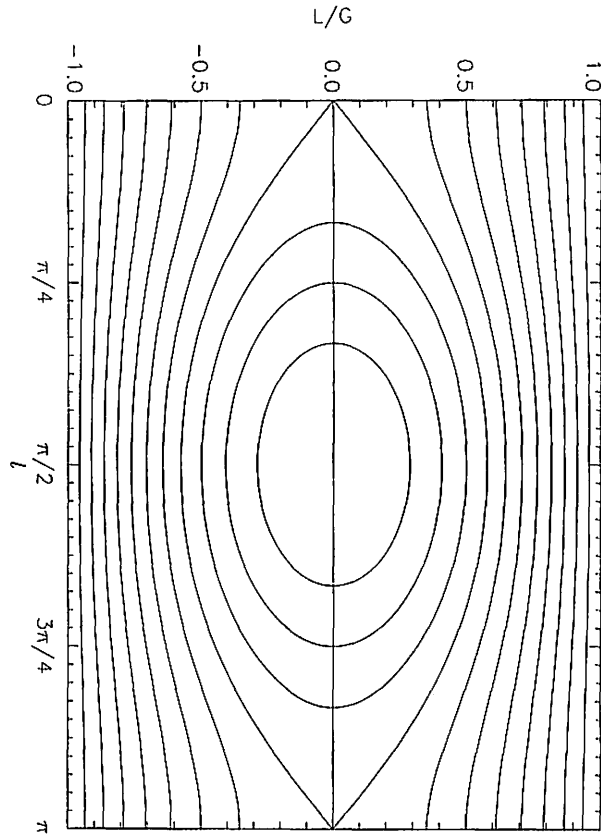


Figure 3 — Equi-Hamiltonian curves of the torque free motion.

図4は慣性楕円体面上での角運動両軸の運動を示してある. 角運動両軸と瞬間回転軸の差は e (式(29))のオーダーであるので, 瞬間回転軸の慣性楕円体面上での運動は図4と定性的な差はない.

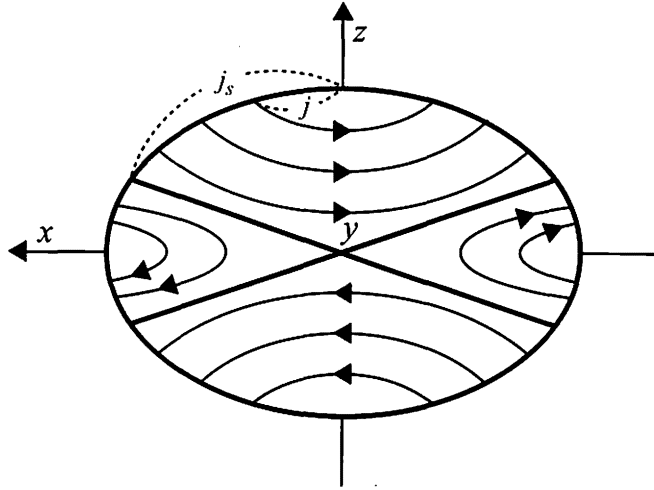


Figure 4 — Trajectories on the inertial ellipsoid of the torque free motions

ハレー彗星が太陽近傍にきたとき、探査機ジオットと地上からの観測からハレー彗星の自転運動が短軸モードか長軸モードのどちらであるかかなりの議論がなされた。上記のエネルギー的考察からハレー彗星の自転は短軸モードであり、ガスの噴出などにより J がかなり大きかったことが予想される。惑星間探査機 NEAR が詳しく観測した小惑星エロスの自転軸は公転面にほぼ垂直で、自転運動は短軸モードであることがわかった (Souchay et al. 2003)。

5 三軸不等楕円体の自由回転運動の解析解

この節と次節での計算の詳細については Kinoshita(1972, 1992) を参照。

5.1 短軸モードの解

以下の表現で cn, sn, dn はヤコビの楕円関数、 Π は第 3 種楕円積分、 am は振幅関数である。

$$L_x/G = \sin J \sin l = \sin j \operatorname{cn} u, \quad (23)$$

$$L_y/G = \sin J \cos l = -\sqrt{(1+e)/(1-e)} \sin j \operatorname{sn} u, \quad (24)$$

$$L_z/G = \cos J = \cos j \operatorname{dn} u, \quad (25)$$

$$g = \frac{G}{C}t + \tilde{g}_0 - G\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\frac{\pi}{2Kn_i}\Pi(\varphi, -2e/(1-e), k). \quad (26)$$

上記表現において

$$\varphi = \operatorname{am} u, u = \frac{2K}{\pi}(\tilde{l} - \pi/2). \quad (27)$$

$$\tilde{l} = n_i t + \pi/2, \tilde{g} = n_{\tilde{g}} t + \tilde{g}_0. \quad (28)$$

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)D, \frac{1}{D} = \frac{1}{C} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \quad (29)$$

である. 主観性モメント A, B, C の関数である e は三軸不等性の大きさをパラメータである. 軸対称 ($A = B$) のとき $e = 0$ となる. 方程式 (26) と (27) に現れる, K は第 1 種完全楕円積分であり, その母数 k は

$$k^2 = \frac{2e}{1-e} \tan^2 j \quad (30)$$

である. 角 j は積分定数の一つであり, 時間変化する角 J の最小値であり, その幾何学的意味は図 4 を参照. 角変数 $\tilde{l}, \tilde{g}$ の平均運動 $n_{\tilde{l}}, n_{\tilde{g}}$ は

$$n_{\tilde{l}} = \frac{\pi G}{2KD} \sqrt{1-e^2} \cos j, \quad (31)$$

$$n_{\tilde{g}} = \frac{1}{2}(1/A + 1/B)G - n_{\tilde{l}}\Lambda_0 + \frac{G}{D} \cos^2 \bar{J} \quad (32)$$

で与えられる. ここで Λ_0 と $\bar{J}$ は

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\pi} [EF(\chi, k') + KE(\chi, k') - KF(\chi, k')], \quad (33)$$

$$\cos \bar{J} = \sqrt{1 - (1+e) \sin^2 j} = \cos j \sqrt{1 - e \tan^2 j} \quad (34)$$

で定義される. 式 (33) の中に現れる E は第 2 種完全楕円積分, $F(\chi, k')$ は第 1 種不完全楕円積分, $E(\chi, k')$ は第 2 種俯瞰全楕円積分,

$$\Lambda_0$$

は Heuman's Lambda function (Byrd and Friedman 1954, p.36) である ($k' = \sqrt{1-k^2}$). $t=0$ のとき式 (28), (27), (24) より $u = 0, l = \pi/2$ となり, 式 (23) から, $J=j$ となるので次の関係式が得られる.

$$\sin j \leq \sin J \leq \sqrt{(1+e)/(1-e)} \sin j. \quad (35)$$

これは角 j が角 J の最小値であることを示している. z 軸から $x-z$ 面上でセパトリックスまでの角度 j_s は

$$\sin j_s = \sqrt{(1-e)/(1+e)}, \quad j \leq j_s. \quad (36)$$

である. j の大きさによって自由回転の運動は表 1 のように分類できる.

ここで角 l と, 対応する角変数 $\tilde{l}$ との関係式を与える.

$$\tan l = \sqrt{(1-e)/(1+e)} \tan \delta, \quad (37)$$

$$\delta = \text{am} \frac{2K}{\pi} (\tilde{l} - \pi/2) + \pi/2. \quad (38)$$

上記の表現は 2 体問題 (ケプラー運動) における真近点離角, 離心近点離角, 平均近点離角の関係と似ている. すなわち l は真近点離角, δ は離心近点離角, $\tilde{l}$ は平均近点離角, e は離心率に対応している.

Table 1: Classification of torque free motions

j	(k^2)	energy	
0 ($0 < j < j_s$)	0 ($0 < k < 1$)	$(G^2/2C)$ (minimum) secular stable	rotation around the short axis
(j_s) ($j_s < j < \pi/2$)	1 ($1 < k < \infty$)	$(G^2/2B)$ secular unstable, ordinary stable	separatrix rotation around the long axis
$(\pi/2)$	(∞)	$(G^2/2A)$ (maximum)	

5.2 長軸モードの解

長軸モードの解は単に短軸モードの解 (23)-(34) において主観性モーメント A を C に, C を A へ置換すればよい. そうすると e, D は

$$e^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) D^*, \quad \frac{1}{D^*} = \frac{1}{A} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} \right), \quad (39)$$

となる.

6 厳密解の展開

前節で求められた解は楕円関数と楕円積分で表現されていて, 周期項の大きさ, 平均運動などのおおざっぱな値を手計算 (電卓など) するのはかなり面倒である. Press et al. (1992) の Numerical Recipes 等に出ている楕円関数関連のサブルーチンを用いて計算プログラムを作ってしまうと上記の解の計算は簡単である.

表 2 に太陽系の惑星 (代表として地球), 衛星 (巨大衛星として月), 彗星 (代表としてハレー彗星), 微小惑星 (代表として Eros) の e, e^* に示す. これからわかるように, 惑星, 巨大衛星の e は小さく, 三軸不等性が大きい微小天体の e は大きい. ただし微小天体が長軸モードで回転していたとすると (このような場合は太陽系には存在しないであろう) e^* は小さい.

6.1 e または e^* が小さいときの展開

まず短軸モード回転で e が小さいときの e について 2 次までの展開を与える.

$$l = \tilde{l} - \frac{1}{4}(\alpha^2 + 1)e \sin 2\tilde{l} + \frac{1}{64}(\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)e^2 \sin 4\tilde{l} + O(e^3), \quad (40)$$

$$g = \tilde{g} + \frac{1}{2}\alpha e \sin 2\tilde{l} - \frac{1}{16}\alpha(\alpha^2 + 1)e^2 \sin 4\tilde{l} + O(e^3), \quad (41)$$

$$L = G \cos \tilde{J} \left[1 - \frac{1}{8}(\alpha^4 - 1)e^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)e \cos 2\tilde{l} + \frac{1}{16}(\alpha^2 - 1)^2 e^2 \cos 4\tilde{l} + O(e^3) \right], \quad (42)$$

Table 2: Triaxiality and Dynamical Ellipticity of the celestial bodies in the solar system: triaxiality ($e = 1/2(1/B - 1/A)/(1/C - 1/2(1/A + 1/B))$), ($e^* = 1/2(1/B - 1/C)/(1/A - 1/2(1/C + 1/B))$), dynamical ellipticity ($H = (2C - A - B)/2C$), here we assume a uniform density distribution except Earth and Moon.

		$(2a \times 2b \times 2c)(\text{km})$	e	H	(e^*)
MI	Phobos	28x22x20	0.719	0.185	0.0889
JIV	Amalthea	270x166x150	0.900	0.276	0.0270
SVII	Hyperion	350x240x200	0.723	0.278	0.0685
SX	Janus	220x190x160	0.445	0.197	0.238
SXI	Epimetheus	140x116x100	0.556	0.197	0.166
SXIII	Telesto	30x26x16	0.311	0.338	0.357
SXVI	Prometheus	140x100x76	0.681	0.305	0.105
SXVII	Pandora	110x86x66	0.562	0.277	0.163
433	Eros	35x16x7	0.919	0.467	0.0215
	Halley	16x8x7.5	0.971	0.324	0.00753
	Earth		0.00328	0.00327	0.987
	Moon		0.214	0.000520	0.478

$$J = \tilde{J} + \frac{1}{16}(2\alpha^2 + 1)e^2 \tan \tilde{J} + \tan \tilde{J} \left(\frac{1}{2}e \cos 2\tilde{l} - \frac{1}{16}\alpha^2 e^2 \cos 4\tilde{l} \right). \quad (43)$$

上記表現で α は

$$\alpha = \sec \tilde{J} = G/\tilde{L} \quad (44)$$

である.

$\tilde{L}$

は角変数

$\tilde{l}$

に正準共役な作用変数であり, また積分定数のひとつである.

$\tilde{J}$

と

j

の関係は

$$\cos \tilde{J} = \cos j \left[1 - \frac{1}{2}e \tan^2 j - \left(\frac{1}{4} \tan^2 j + \frac{3}{16} \tan^4 j \right) e^2 \right] + O(e^3), \quad (45)$$

$$\tilde{J} = j + \frac{1}{2}e \tan j + e^2 \tan j \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} \tan^2 j \right) + O(e^3) \quad (46)$$

で与えられる. 角変数

$\tilde{l}$

と

$\tilde{g}$

の平均運動は

$$n_{\tilde{l}} = \frac{G}{D} \cos \tilde{J} \left[1 - \frac{1}{8}(\alpha^4 + 3)e^2 \right] + O(e^4), \quad (47)$$

$$n_{\tilde{g}} = \frac{1}{2}(1/A + 1/B)G + \frac{G}{4D}(\alpha^2 + 1)e^2 + O(e^4). \quad (48)$$

である. これらの表現はいかなる $\tilde{J}$ ($j < j_s$) にも適用できる. e について 4 次まで展開は Kinoshita(1972) に与えられている. ここでの取り扱いにおける積分定数は G, j , and $\tilde{g}_0$ である. 式 (45) から $\tilde{J}$ を求め, それから平均運動 $n_{\tilde{l}}, n_{\tilde{g}}$ を式 (47) と (48) から計算し, 任意の時刻における l, g, J を式 (40), (41), と (43) より求める.

長軸モードの展開式は式 (40) - (48) で e と D を単に

e^*

と D^* に置き換えればよい.

$\tilde{l}$ についてのフーリエ展開である式 (40) - (43) において各周期項の係数の e についての最小次数は引数に現れる $\tilde{l}$ の係数値の半分である. この性質はケプラー運動の平均近点離角についてのフーリエ展開に現れるダランベールの性質に対応している.

6.2 e または e^* 大きいときの展開

e または e^* 大きいときには前節の展開は収束が遅くて使い物にならない. しかし式 (36) から e が大きいときに角 j は小さい. そこで e のかわりに j を微小パラメーターとして解を展開する (詳細については Kinoshita(1992) を参照) .

$$l = l^* - \frac{1}{4}e\sqrt{(1+e)/(1-e)}j^2\frac{\sin 2\tilde{l}}{1+e\cos 2\tilde{l}} + O(j^4), \quad (49)$$

$$g = \tilde{g} + \frac{G}{Dn_{\tilde{l}}}(-\sqrt{1-e^2}(l^* - \tilde{l}) + \frac{1}{4}(1+e)j^2[\frac{e\sin 2\tilde{l}}{1+e\cos 2\tilde{l}} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}(l^* - \tilde{l})]) + O(j^4), \quad (50)$$

$$L = G(1 - \frac{1}{2}j^2 - \frac{e}{1-e}j^2\cos^2\tilde{l}) + O(j^4), \quad (51)$$

$$J = j\sqrt{1 + \frac{2e}{1-e}\cos^2\tilde{l}} + O(j^3). \quad (52)$$

式 (49) から (52) に現れる

l^*

は次式で定義される.

$$\tan l^* = \sqrt{(1-e)/(1+e)} \tan \tilde{l}. \quad (53)$$

平均運動 $n_{\tilde{l}}, n_{\tilde{g}}$, 作用変数 $\tilde{J}$ は微小パラメーター j で次のように展開できる.

$$n_{\tilde{l}} = \frac{G}{D} \sqrt{1-e^2} \left[1 - \frac{1}{2(1-e)} j^2 \right] + O(j^4), \quad (54)$$

$$n_{\tilde{g}} = \frac{1}{2} (1/A + 1/B) G + \frac{G}{D} (1 - \sqrt{1-e^2}) \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt{(1+e)/(1-e)} j^2 \right] + O(j^4), \quad (55)$$

$$\cos \tilde{J} = \cos j \left[1 - \frac{1}{2} (\sqrt{(1+e)(1-e)} - 1) \tan^2 j \right] + O(j^4), \quad (56)$$

$$\tilde{J} = ((1+e)/(1-e))^{1/4} j + O(j^3). \quad (57)$$

これらの表現はいかなる e を持った回転運動にも適用できる.

6.1 節で述べたと同じように, 積分定数 G, j を用いて式 (54), (55) から平均運動 $n_{\tilde{l}}, n_{\tilde{g}}$ を求め角変数 $\tilde{l}, \tilde{g}$ を計算する. それから式 (53) より l^* , 式 (49), (50), (52) から任意の時刻における l, g, J を求める.

7 応用

7.1 対称独楽の運動

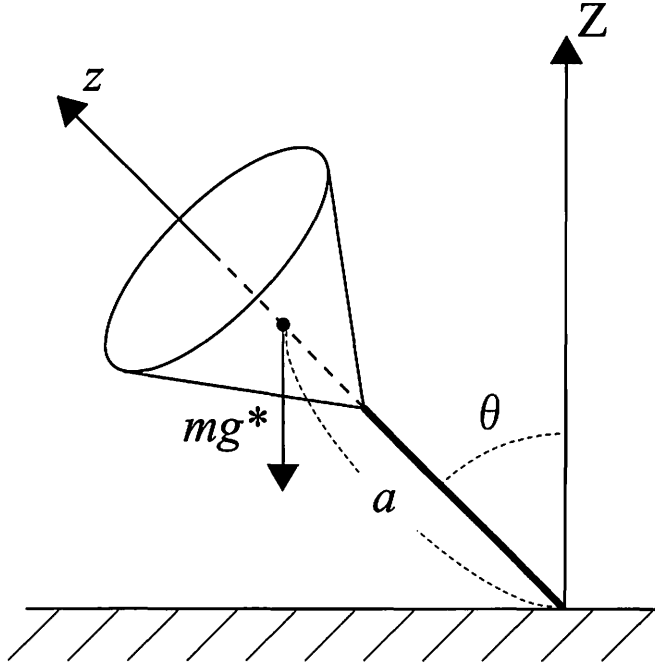


Figure 5 — A symmetric top

対称コマのハミルトニアンは

$$F = F_0 + R, \quad (58)$$

$$F_0 = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C}, \quad (59)$$

$$R = -mg^*a \cos \theta \quad (60)$$

である. ここで F_0 は無摂動系 (自由回転) で R が摂動ポテンシャルである. 球面三角法を用いて (図2 参照) 摂動 R をアンドワイアー変数で表現する.

$$R = mg^*a(\cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g) \quad (61)$$

角変数 l, h はサイクリックであるので, 共役は運動量 L, H は一定となる. h についての運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \\ &= \frac{mg^*a}{G} \left(\cos J + \frac{\cos I}{\sin I} \sin J \cos g \right) \end{aligned} \quad (62)$$

となる. $J \ll 1$ であるから独楽の首振り運動の角速度 (才差運動) は

$$\frac{dh}{dt} \simeq \frac{mg^*a}{G} \simeq \frac{mg^*a}{L} = \frac{mg^*a}{C\omega} \quad (63)$$

である. 式 (63) は短周期項 ((62) の第2項) を消去したことに対応している. 首振り運動の向きは自転運動と同じ向きである. 地球の形状軸の首振り運動 (才差運動) の向きは自転運動の向きと反対である ((7.2 節) 参照).

7.2 地球の才差運動

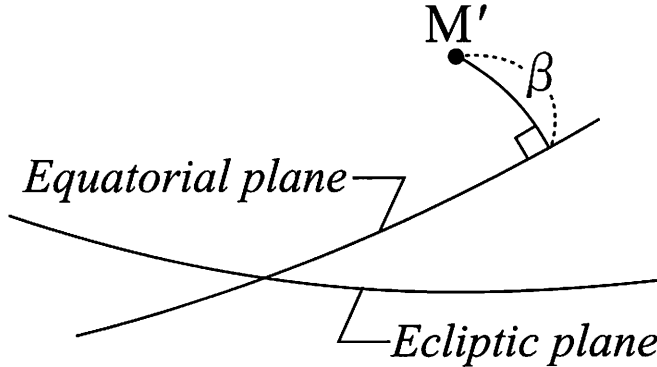


Figure 6 — The precession of the rigid Earth

地球の回転運動のハミルトニアンは

$$F = F_0 + R, \quad (64)$$

$$F = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \quad (65)$$

$$R = \frac{k^2 M'}{r^3} (C - A) P_2(\sin \beta) \quad (66)$$

である（詳しくは Kinoshita(1976) を参照）．ここで F_0 は無摂動系（自由回転）で R が摂動天体（月，太陽）による摂動ポテンシャルである． β は摂動天体の赤緯， M' は摂動天体の質量， k^2 は重力定数．ここで摂動天体は黄道上を運動していると近似し，摂動関数をアンドワイアー変数で表現して短周期項（月と太陽の公転周期に関する項を短周期項とする）を消去すると

$$R^* = -\frac{1}{8} \frac{k^2 M'}{a'^3} (1 - e'^2)^{-3/2} (3 \cos^2 I - 1) (3 \cos^2 J - 1) \quad (67)$$

となる．角変数 l, g, h はサイクリックであり，これらに共役は運動量 L, G, H は一定となり，これより I, J も一定となる．才差運動は

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial H} = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J\right) \frac{k^2 M' (C - A)}{G a'^3} (1 - e'^2)^{-3/2} \cos I \quad (68)$$

で与えられる．ケプラーの第3法則 $k^2 (M' + M_E) = n^2 a'^3$ を用いて

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{C - A}{C} \frac{M'}{M' + M_E} (1 - e'^2)^{-3/2} \frac{n'^2}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J\right) \cos I \quad (69)$$

となる．上記の議論から求められた地球の赤道面の運動は永年摂動に対応している．式 (69) からわかるように才差運動の向きは自転運動の向きと逆になっている．独楽の首振り運動と逆向きになるのは，独楽の運動では重力によるトルクが独楽を倒す向きに働くのに対して，地球の場合には月・太陽によるトルクの向きが自転の向きを起こすように働くからである．周期摂動項から出てくる摂動は章動と呼ばれている．

8 回転座標系に準拠したハミルトニアンとその応用

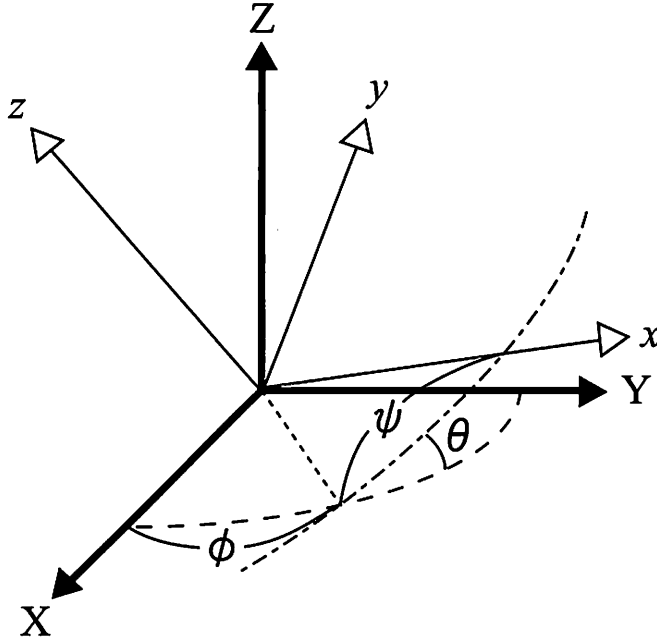


Figure 7 — The coordinate system: $(X - Y - Z)$, the inertial frame. $(x - y - z)$, the rotational frame.

回転座標系 (図 7, $x - y - z$) に準拠したハミルトニアンは

$$K = F + E \quad (70)$$

となる. F は慣性系でのハミルトニアンで E は回転系 ($x - y - z$) に準拠することによる附加項

$$E = -(\omega, \mathbf{L}) \quad (\text{括弧は内積}) \quad (71)$$

である. ここで ω は座標系の回転を表す回転ベクトル, $\mathbf{L}$ は回転座標系に準拠した角運動量ベクトルである.

上記ハミルトニアンは質点の運動, 剛体の回転運動にも適用できる.

上式 (71) の導出は Kinoshita(1993, 2003) を参照.

応用：惑星の長周期回転運動

惑星の回転運動と軌道運動は相互作用している複雑な系である. しかし惑星の回転エネルギーは公転運動のエネルギーに較べて微小なので, 軌道運動は回転運動に影響を及ぼすが回転運動は軌道運動に影響をおよぼさないという制限問題として惑星の回転運動を議論できる.

太陽系の不変面に準拠した惑星の軌道傾斜角を I_p , 昇交点経度を Ω_p とする.

$$p \equiv \sin I_p \sin \Omega_p, q \equiv \sin I_p \cos \Omega_p. \quad (72)$$

惑星の軌道傾斜角は小さいので摂動関数の中で p, q について 3 次以上の項は微小として無視できる. ここでは質量が小さい冥王星は無視し, 水星から海王星までの 8 惑星のみを考慮している. この近似 (惑星永年摂動) のもとで, p, q についての運動方程式は定数係数の線形微分方程式となる. p, q は Brouwer and Clenence(1961) より

$$p = \sum_{j=1}^7 N_j \sin(s_j t + \delta_j), q = \sum_{j=1}^7 N_j \cos(s_j t + \delta_j) \quad (73)$$

のように表現できる. 系の角運動量が保存されているので, 固有値のひとつは零となる. 従って惑星の軌道面の運動は周期が数万年から数百万年の 7 項の長周期項の重ね合わせとなる.

惑星の回転運動を記述する基準面として惑星の公転運動面を選ぶ. そうすると回転座標系に準拠した事による附加項 $E(I_p < 1)(\phi = \Omega_p, \theta = I_p, \psi = -\Omega_p)$ は

$$E = G \sin I \sum_{j=1}^7 N_j s_j \cos(s_j t + \delta_j - h) \quad (74)$$

となる. E は長周期項のみ含んでいるので, 周期項 (短周期項と長周期項) を消去後のハミルトニアン F^* は

$$K^* = F^* = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J\right) \frac{C - A}{C} n^2 (1 - e^2)^{-3/2} (3 \cos^2 I^* - 1) \quad (75)$$

となる。回転する軌道面に準拠した才差運動（永年摂動）は

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial H^*} = \alpha \cos I^*, \quad (76)$$

$$h^* = \alpha \cos I^* t + h_0^*, \quad (77)$$

$$\alpha = -\frac{3}{2} \frac{C - A n^2}{C} \frac{1}{\omega} (1 - e^2)^{-3/2} \quad (78)$$

となる。

周期摂動（長周期運動）は E より出てくる。昇交点の運動は

$$\Delta h = \frac{1}{\sin I^*} \sum_{j=1}^7 \frac{N_j s_j (\alpha - s_j \cos I^*)}{(s_j - \alpha \cos I^*)^2} \sin(s_j t + \delta_j - h^*), \quad (79)$$

軌道面に準拠した軌道傾斜角の長周期変動は

$$\Delta I = - \sum_{j=1}^7 \frac{N_j s_j}{s_j - \alpha \cos I^*} \cos(s_j t + \delta_j - h^*), \quad (80)$$

不変面に準拠した軌道傾斜角の長周期変動は

$$\Delta I' = - \sum_{j=1}^7 \frac{\alpha N_j \cos I^*}{s_j - \alpha \cos I^*} \cos(s_j t + \delta_j - h^*) \quad (81)$$

となる。惑星軌道面の運動に現れてくる s_j と惑星の才差 ($\alpha \cos I^*$) が近接するようになると惑星の自転軸は大きく変動する（永年共鳴）。

上記の式の導出を含む詳細についてはKinoshita(1993, 2003)を参照。Ward(1974)も同じ問題を議論しているが、彼の運動方程式の導出は理解するのはかなり難しい。

図1, 4, 5, 6, 7は山崎大氏, 図3は中井宏氏に作成していただいた。

References

- Andoyer, H.: 1923, *Cour de Mechanique Celeste*, Vol. 1., *Gauthier-Villars*, Paris, p. 54.
- Brouwer, D. and Clemence, G. M.: 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, *Academic Press*, New York.
- Byrd, P.F. and Friedman, P.M.: 1954, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, *Springer-Verlag*, Berlin.
- Kinoshita, H.: 1972, First-Order Perturbation of the Two Finite Body Problem, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 423-457

Kinoshita,H.:1976, Theory of the Rotation of the Rigid Body, *Celest.Mech.*, **15**, 277-326.

Kinoshita, H.: 1992, Analytical Expansions of Torque-Free Motionsn for Short and Long Axis Modes, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **53**, 365-375.

Kinoshita,H.: 1993, Motion of the Orbital Plane of a Satellite due to a Secular Change of the of the Obliquity of its Mother Planet, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **57**, 359-368.

Kinoshita, H.: 2003, A Note on Secular Resonance, in *Proc. 34th symp. Celest. Mech. ed. Kokubo et al.*, **35**, 39-51.

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B.: 1992, Numerical Recipes (Second Edition), *Cambridge University Press*, Cambridge.

Souchay, J., Kinoshita, H., Nakai, H., and Roux, S.: 2003, Precessing Model of Eros 433 Rotation, *ICARUS*, **166**, 285-296.

Ward,W.: 1974, Climatic Variations on Mars 1. Astronomical Theory of Insolation, *J. Geophys. Res.*, **79**, 3375-3386.

Spin-Orbit Resonances

Bouquillon Sébastien

Sebastien.bouquillon@obspm.fr

N.A.O.J.

Tokyo, Mitaka, Osawa 2-21-1

ABSTRACT

The aim of this paper is to expound some important results achieved in the last 30 years about the dynamics of celestial bodies in spin-orbit resonance. First, we identify three distinct categories among these celestial bodies and we explain the differences between these categories. Then, we take a more specific interest in the first category that we name : “spin-orbit resonances of first type”. For celestial bodies in this category, we remind Goldreich and Peale relations (1966) to evaluate their probabilities of resonances capture and the Chirikov criterion (1979) to predict the presence of chaotic zone in their phase space.

Introduction

Soit un corps céleste C_1 orbitant autour d’un autre (comme la Terre autour du Soleil, ou la Lune autour de la Terre, ...). Nous représentons la rotation de ce corps céleste en étudiant la rotation d’un repère R_C lié à ce corps céleste C_1 par rapport à un repère de référence R :

- la réalisation du repère R_C lié à C_1 que nous choisissons est formée des trois axes principaux de C_1 et a pour origine le centre de masse de C_1 : Nous notons $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ les vecteurs unitaires de ces axes principaux liés respectivement, et par ordre croissant, aux moments d’inertie A , B , C . L’axe de vecteur unitaire $\vec{C}$ s’appelle l’axe de figure de C_1 .

- La réalisation du repère de référence R que nous choisissons est définie par deux axes de vecteurs unitaires $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans le plan de l’orbite de ce corps, un axe perpendiculaire à ce plan de vecteur unitaire $\vec{Z}$ et une origine confondue avec le centre de masse du corps central. Le vecteur unitaire $\vec{X}$ est dirigé vers le périastre.

Il est commode de faire également intervenir dans la modélisation mathématique l’axe colinéaire au moment angulaire $\vec{L}$ de ce corps. Ces axes et les angles intervenants dans notre étude sont représentés sur la figure 1.

- L’angle I qui apparaît sur la figure 1, est l’angle entre le moment angulaire $\vec{L}$ du corps C_1 et le vecteur $\vec{Z}$ du repère de référence R . Cette angle I se nomme l’obliquité du corps C_1 sur son orbite.

- L’angle J qui apparaît sur la figure 1, est l’angle entre l’axe de figure du corps C_1 et le moment angulaire $\vec{L}$ du corps C_1 . Il correspond à peu de chose près à l’amplitude du mouvement du pôle de C_1 .

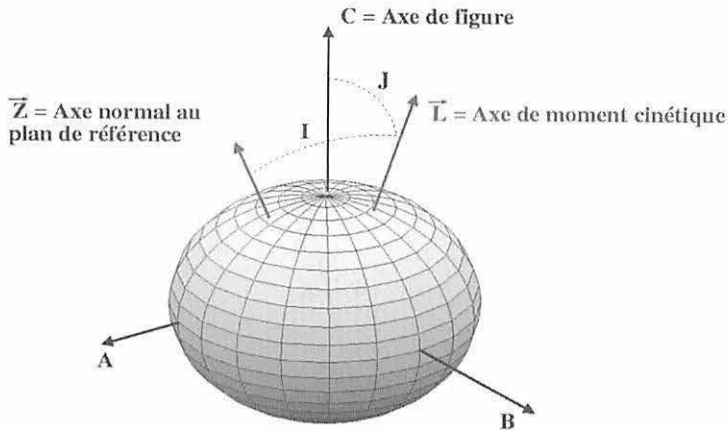


Figure 1: les Axes et les angles I et J

Différents types de résonances spin-orbit

Nous classons les différentes études qui ont été menées sur les résonances spin-orbit en trois grandes catégories:

1— Nous appelons “résonances spin-orbit de première espèce”, les résonances ayant lieu avec des angles I et J constants et nuls. Cela revient à imposer que l’axe de rotation du corps céleste C_1 est confondu avec son axe de figure et que ces deux axes restent toujours perpendiculaires au plan de son orbite. Parmi les études ayant pour sujet cette catégorie de résonance citons les travaux importants de Goldreich P. et Peale S. J. de (1966), (1968) et (1970)

2— Nous appelons “résonances spin-orbit de deuxième espèce”, les résonances ayant lieu avec un angle J constant et nul. Cela revient à imposer que l’axe de rotation du corps céleste C_1 reste toujours confondu avec l’axe de figure de C_1 . Dans ce cas, les équilibres dynamiques possibles du système sont appelés “états de Cassini” par analogie avec le mouvement de rotation de la Lune. Ils sont réalisés pour certaines valeurs constantes et non nulles de l’obliquité I du corps céleste C_1 ; ces valeurs dépendant essentiellement de la triaxialité du corps, de l’excentricité et de l’inclinaison de son orbite. Parmi les études ayant pour sujet cette deuxième catégorie de résonance citons Colombo G. (1966), Peale S. J. (1969) et Beletskii, B. V. B. V. (1972)

3— Nous appelons “résonances spin-orbit de troisième espèce”, le cas le plus général, où le corps est en résonance spin-orbit mais sans aucune hypothèse particulière sur les valeurs des angles I et J . Dans ce cas, des équilibres dynamiques sont également possibles. Ils sont décrits par ce que nous avons appelé les “lois de Cassini étendues” Bouquillon S., Kinoshita H. et Souchay J. (2003).

Résonances spin-orbit de première espèce

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux résonances spin-orbit de première espèce qui, par leur caractère plan, sont d’une modélisation mathématique plus

simple que les deux autres types de résonance. Pour ce type de résonance, nous représentons sur la figure 2 les angles de rotation et de révolution du corps C_1 :

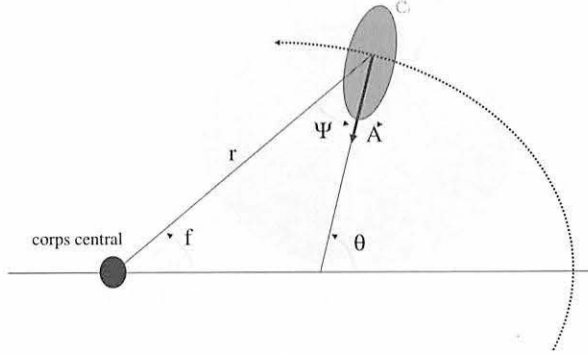


Figure 2: Variables angulaires

L'axe de rotation, le moment angulaire $\vec{L}$ et l'axe de figure de C_1 sont tous confondus et normaux au plan de l'orbite. θ est l'angle mesurant la rotation de C_1 dans le plan de son orbite. f est la longitude de C_1 mesurant sa position sur son orbite. f peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f = M + 2e \sin M + O(e^2)$$

Où M est l'anomalie moyenne et e l'excentricité. Avec ces notations l'équation du mouvement pour θ s'écrit (Danby 1962):

$$C \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 n^2 \left(\frac{B-A}{C} \right) \sin(2(\theta - f)) = T$$

T correspond au couple de marée, n est le moyen mouvement de C_1 , a le demi-grand et r la distance entre le corps central et C_1 qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos M + O(e^2)$$

Soit en remplaçant f et $\frac{a}{r}$ par leur valeur :

$$C \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2} n^2 (B-A) \left[\sin 2(\theta - M) - \frac{e}{2} \sin 2 \left(\theta - \frac{M}{2} \right) + \frac{7e}{2} \sin 2 \left(\theta - \frac{3M}{2} \right) + O(e^2) \right] = T$$

A. Sans effet dissipatif

Dans un premier temps, nous regardons les mouvements de rotation possibles sans dissipation; c'est à dire avec un couple de marée nul ($T = 0$). Ces mouvements possibles de rotation sont représentés sur l'espace des phases de la figure 3. Chacune des courbes correspond à une de ces rotations.

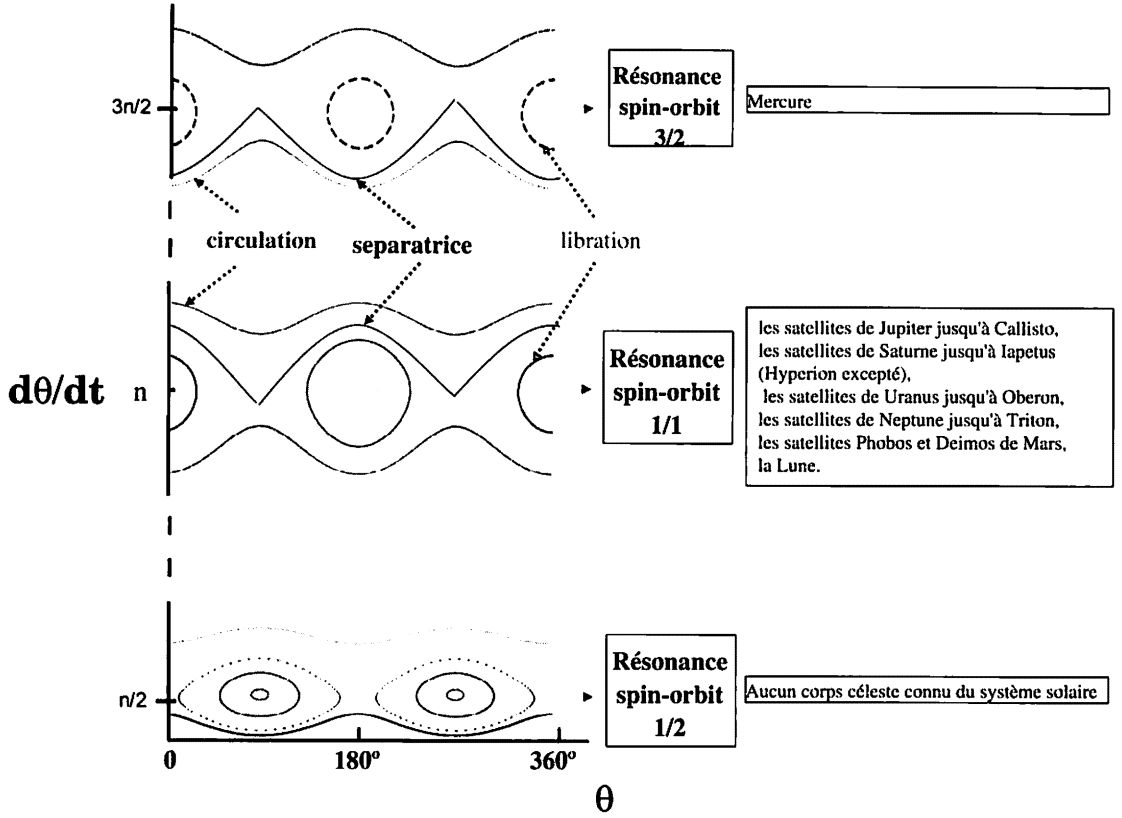


Figure 3: Espace des phases

Nous voyons apparaître deux types de mouvements possibles:

- soit un mouvement libratoire autour de résonances bien particulières : $\dot{\theta} = \frac{1}{2}n$, $\dot{\theta} = n$, $\dot{\theta} = \frac{3}{2}n$, ... $\dot{\theta} = \frac{m}{2}n$ avec m un naturel. Il s'agit de corps C_1 dont la période de rotation moyenne est commensurable à leur demi-période de révolution moyenne.
- soit un mouvement circulaire entre ces zones de résonance.

Aux intersections de ces deux types de mouvement apparaissent des séparatrices. Pour chaque zone de libration, nous avons indiqué sur la figure 3 les corps du système solaire s'y trouvant.

B. L'effet des forces de marée

Que sont les forces de marée et comment modifient-elles les mouvements de rotation observés sur l'espace des phases ci-dessus? Le couple de marée est dû au fait que le corps C_1 est déformé par l'influence gravitationnelle du corps central et que cette déformation n'est pas instantanée du fait de frictions internes (déformation inélastique). C'est l'influence gravitationnelle du corps central sur cette déformation

qui crée un couple de rappel appelé couple de marée. Nous utilisons comme expression de ce couple de marée T , l'expression donnée par Kaula (1964) qui a l'avantage d'une grande simplicité formelle.

$$T = -K \left[(1 - 5e^2) \text{sgn}(\dot{\theta} - n) + \frac{e^2}{4} \text{sgn}(\dot{\theta} - \frac{1}{2}n) + \frac{49e^2}{4} \text{sgn}(\dot{\theta} - \frac{3}{2}n) + O(e^4) \right]$$

Cette expression du couple de marée correspond au cas où le retard de la déformation ne dépend pas de la fréquence de l'onde de marée.

Avec cette expression nous voyons que, pour une excentricité inférieure à 0.235, le couple de marée T s'annule et change de signe pour $\dot{\theta} = n$, entraînant la rotation du corps C_1 vers la résonance 1/1. Dans le cas où l'excentricité est supérieure à 0.235 et inférieure à 0.35 le couple de marée T s'annule et change de signe pour $\dot{\theta} = \frac{3}{2}n$ entraînant la rotation du corps C_1 vers la résonance 3/2. Et ainsi de suite ...

C. Probabilité de capture

Avec les relations ci-dessus, il est possible d'estimer la probabilité que le corps céleste soit capturé par une des résonances spin-orbit de première espèce. Sans rentrer dans le détail de ces relations, nous donnons ici la probabilité de capture pour les premières résonances en fonction de l'excentricité de l'orbite du corps C_1 (Goldreich et Peale 1968) :

$$P(3/2) \simeq \frac{\frac{49}{2}e^2}{+(1 - 5e^2) + \frac{1}{4}e^2 + \frac{49}{4}e^2}$$

$$P(1) \simeq \frac{2(1 - 5e^2)}{(1 - 5e^2) + \frac{1}{4}e^2 - \frac{49}{4}e^2}$$

$$P(1/2) \simeq \frac{-\frac{1}{2}e^2}{-(1 - 5e^2) - \frac{1}{4}e^2 - \frac{49}{4}e^2}$$

Nous remarquons que ces relations sont indépendantes de la forme du corps. C'est dû à la forme simplifiée de notre couple de marée. Des formules plus complexes et plus exactes peuvent être trouvées dans Goldreich et Peale (1968) (prenant en particulier compte de la dépendance entre le retard de la déformation et la fréquence de la déformation)

Avec les relations ci-dessus la probabilité que la Lune aie été capturée dans la résonance 3/2 avec son excentricité actuelle $e = 0.055$ est de 0.07. De même, pour Mercure, la probabilité de capture dans la résonance 3/2 avec son excentricité actuelle $e = 0.2$ est de 0.7. Cela pourrait paraître très satisfaisant, puisque Mercure est effectivement dans la résonance 3/2 (la période de rotation observée pour Mercure est bien 2/3 de sa période de révolution). Malheureusement, quand nous considérons les formules plus précises tenant compte de la dépendance du retard de la déformation avec la fréquence de la déformation, la probabilité pour Mercure retombe à 0.07. La solution à ce problème a été trouvée récemment par Correia et Laskar (2004). Ils ont tenu compte dans le calcul de probabilité du fait que l'excentricité de Mercure avait beaucoup évolué au cours de son histoire. Ils ont alors trouvé une probabilité "plus réaliste" de 0.55.

D. Critère de Chirikov

Une des particularités de rotation des corps proches des résonances spin-orbit que je voudrais encore évoquer ici, est l'apparition de zones chaotiques lorsque des zones de libration viennent à se superposer. Or, la largeur des zones de libration dépend : d'un coefficient mesurant le degré de symétrie de la répartition des masses à l'intérieur de C_1 dans le plan de son orbite (représenté par le coefficient $\frac{B-A}{C}$), de l'excentricité e de son orbite, du moyen mouvement n et de l'ordre de la résonance (cf. figure 4).

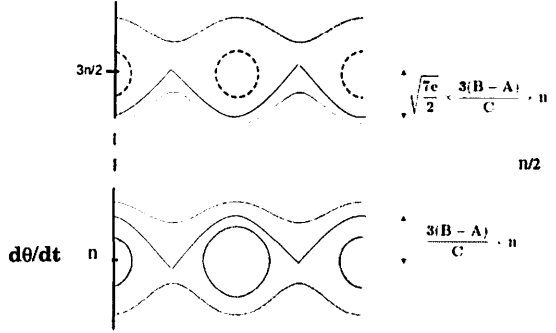


Figure 4: Critère de Chirikov

Chirikov (1979) a démontré, dans un cadre très général, un critère très simple permettant de prédire l'apparition de zones chaotiques proches des séparatrices. Si nous appliquons ce critère au cas des résonances spin-orbit de première espèce, par exemple pour le recouvrement de la résonance 1/1 et 3/2, nous obtenons la condition suivante pour qu'il y ait apparition d'une zone chaotique :

$$\sqrt{\frac{7e}{2}} \times \frac{3(B-A)}{C} \times n + \frac{3(B-A)}{C} \times n \geq \frac{n}{2} \Rightarrow CHAOS$$

Par exemple, pour le satellite de Saturne, Hyperion, avec $\frac{3(B-A)}{C} \approx 0.26$ et $e = 0.1$, le premier terme de l'inégalité ($(\frac{7e}{2})^{-1/2} \times \frac{3(B-A)}{C} \times n + \frac{3(B-A)}{C} \times n$) vaut approximativement $1.2 \times n$, ce qui est plus de deux fois supérieur au critère de Chirikov. Il est donc sûr qu'une large zone chaotique existe pour ce satellite autour de la résonance 1/1. Wisdom, Peale et Mignard (1984) ont montré que la rotation de ce satellite est effectivement chaotique.

References

- [1] Beletskii V. V. : 1972, *Celestial Mechanics* **Vol. 6**, pp 356-378.
- [2] Bouquillon S., Kinoshita H. et Souchay J. : 2003, *Celestial Mechanics* **Vol. 86**, pp 29.
- [3] Chirikov, B. V. : 1979, *Phys. Rep.* **Vol. 52**, pp.263-379.
- [4] Colombo, G.: 1966, *Astron. J.* **Vol. 71**, pp.891.
- [5] Correia M. and Laskar J. : 2004, *Nature* **Vol. 24**, pp.848.

- [6] Danby, J. M. A. : 1962, *Fundamentals of Celestial Mechanics* (The Mac millan Company, New York).
- [7] Kaula, W. M. : 1964, *Rev. Geophys.* Vol. 2, pp. 661.
- [8] Goldreich, P. et Peale, S.: 1966, *Astron. J.* Vol. 71, pp.425.
- [9] Goldreich, P. et Peale, S.: 1968, *ARA&A* Vol. 6, pp.287.
- [10] Goldreich, P. et Peale, S.: 1970, *Astron. J.* Vol. 75, pp.273.
- [11] Peale, S.: 1969, *Astron. J.* Vol.74, pp.483.
- [12] Wisdom, J., Peale S.J. et Mignard F. : 1984, *Icarus* Vol. 58, pp. 137

Helioseismic measurement of solar rotation

Takashi SEKII

sekii@solar.mtk.nao.ac.jp

NAOJ, Mitaka, Tokyo 181-8588, JAPAN

ABSTRACT

Helioseismology has been successful in investigating the otherwise invisible solar interior, and one of its greatest success is in revealing how the interior of the sun rotates. It is briefly reviewed how this is done, what we have learnt, and what they imply.

1 Introduction

The sun, the master of the solar system, rotates. We have been aware of this fact since the time of Fabricius, for around 400 years. Somewhat remarkably, it has been known for almost as long that the sun rotates *differentially* i.e. the equatorial region rotates faster than the polar regions. In both cases, it was sunspot motion that betrayed surface axisymmetric flow of the sun. How the sun rotates *internally*, on the other hand, had not been an observational subject for a long time, simply because the solar interior was — and still is, except metaphorically — invisible to us.

However, the internal rotation of the sun has always been an important issue. The solar activity cycle is thought to be caused by a dynamo mechanism, an interplay between magnetic field and flow, of the latter of which rotation is the main component. Also, although the sun is currently a slow rotator (see Section 2), its rotation is believed to have been much faster, and have been affecting the course of evolution of the sun. The so-called light-element problem, the apparent lack of light elements such as Lithium on the surface of the sun, for example, may be explained only by a mixing mechanism that involves rotation. And any theory of dynamical evolution of stars will have to be able to explain the present-day solar internal rotation. There was also the issue of measuring J_2 moment, in deciding if we need the Brans-Dicke theory of gravitation as opposed to Einstein's theory; a fast spinning core of the sun would invalidate the calculation that 'showed' the latter to be able to explain Mercury's orbit.

If the solar interior is invisible, and its rotation beyond observation and yet so important to astrophysics, why not trying a theoretical/numerical approach? This is prohibitively difficult. The outer 30 per cent (in radius) of the sun is convective because higher opacity in surface ionization zones means photons alone cannot carry all the energy generated inside to outside. Bad news is that this convection is turbulent. Reynolds number is huge, thought to be in order of 10^{12} , which leads to, according to Kolmogorov's argument, the degree of freedom in order of 10^{27} (for Kolmogorov's argument see, e.g., [1]). If one is to take a head-on approach, he needs 10^{27} grid points to simulate the solar convection zone.

It was to this stage that helioseismology entered as a new method of probing the solar interior, to let us 'see' the interior of the sun. In the next section the early

history of helioseismology is briefly presented together with some basic discussion of its diagnostic power. In Section 3 it is outlined how observation of surface velocity field can produce two-dimensional (that is, in radius and in latitude) map of solar angular velocity, and our current knowledge of the sun's rotation is summarized. Section 5 will be dedicated for discussing the future of this line of investigation.

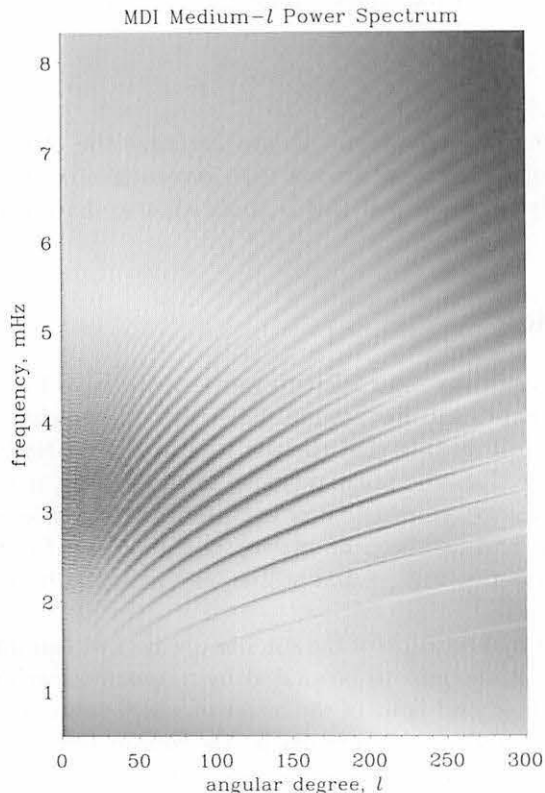


Figure 1 — Powerspectrum of 60-day Doppler velocity data by MDI, as function of spherical harmonic degree (abscissa) and frequency (ordinate). Horizontal wavenumber is $\sqrt{l(l+1)}/R_{\odot}$, where $R_{\odot}$ is the solar radius. The region of the highest power is around the period of 5 minutes (3.3mHz in frequency). The ridges correspond to the position of eigenmodes. [Image courtesy of the SOHO/SOI-MDI project of the Stanford Lockheed Institute for Space Research. SOHO is a project of international cooperation between ESA and NASA.]

2 Helioseismology

2.1 Solar acoustic eigenmodes

It all began in early 1960s, when the sun was discovered to oscillate [2]. Leighton and his collaborators were measuring Doppler velocity field of the sun, which is to say, the line-of-sight component of the solar surface velocity field. Their intention was to study supergranulation, which is another convective structure larger in size,

slower in turn-over speed and harder to detect compared to granulation. During the course of their effort, they found that there was a concentration of temporal power of the velocity field around the period of 5 minutes. This was the discovery of the so-called solar 5-minute oscillation.

It took another decade or so until people came to agree that this oscillation was not a locally-driven (and damped) phenomenon but a manifestation of global acoustic eigenoscillations, also called *p modes* ('pressure modes'). One of the key was the observation by Deubner [3], who found that the concentration of power in two-dimensional Fourier space (one dimension in temporal frequency and another in horizontal wavenumber) was resolved into discrete ridges (see Figure 1 for modern data), which signify eigenoscillations¹.

Since the sun is almost perfectly spherical, we can label its normal mode by radial order n , spherical-harmonic degree l and azimuthal order m ($= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$). However, without any symmetry-breaking agent, there is no special axis, and hence degeneracy with respect to m arises i.e. eigenfrequencies depend only on n and l , which we may write ω_{nl} . By solving an eigenvalue problem, frequency spectrum $\{\omega_{nl}\}$ can be calculated. Horizontal structure of a mode is described by spherical harmonic function Y_{lm} , so the wavenumber is $\sqrt{l(l+1)}/R_{\odot}$ ($R_{\odot}$ is the radius of the sun): l is essentially the horizontal wavenumber. By plotting ω_{nl} as function l , we reproduce the ridge patterns in two-dimensional power spectrum.

Once it was established that we were observing eigenoscillations, however, it was quickly noted that these observation can be used for a diagnostic purpose. In fact, in establishing the above, people were already comparing eigenfrequencies of solar models with observed frequencies: the simplest of all the seismic approaches. Such comparison would tell you how good a model is, or whether a model is better than another. How far one can go on improving a solar model depends on the information content of eigenfrequency spectrum, and on whether one can devise a systematic approach to modify models according to the observed eigenfrequencies.

2.2 Probing the solar interior

So what determines the eigenfrequencies? Any piece of solar plasma is under influence of local gas pressure and gravity. To know how the perturbation to this piece of plasma would develop in time, we have to know how the pressure and gravity would change as results of the perturbation. To know the first is to know the so-called bulk modulus i.e. how hard a piece of fluid element would bounce back when compressed. In terms of quantities more familiar to astronomers, the bulk modulus is ρc^2 , where ρ is density and c is adiabatic soundspeed. To know how the gravity would change, we need to know the distribution of material i.e. ρ as function of position in the sun.

There is also magnetic field, of course, but the effect of magnetic field is small (details of why and to what extent this is so is beyond the scope of the current review).

Then there is rotation. Rotation affects the wave propagation by advection, and by Coriolis force (to a lesser degree, in case of p-mode waves). Although in principle any change in the equilibrium structure due to rotation should also be taken into account, this is negligible since the sun is a slow rotator: the equator of the sun

¹You may ask, why ridges, not points? Because of damping, points become blobs, and a series of such blobs constitutes a ridge. Also, horizontal wavenumber is observed as a discrete number (see Fig.1)

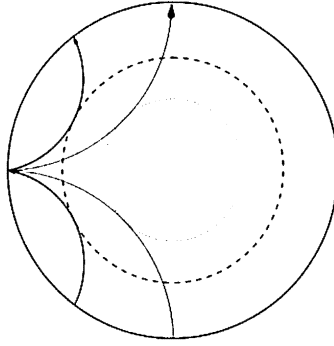


Figure 2 — Schematically drawn p-mode ray paths and their penetration depths. A wave packet travelling inward from the surface refracts back to the surface because of an inward increase in soundspeed. By comparing shallow-penetrating modes (down to dashed circle) and deeply-penetrating modes (down to dotted circle), it is possible to infer physical condition in the region that is between the two circles. In the picture are also drawn rays that travel to a surface point to be reflected inward.

rotates with a period of around 25 days (sidereal), compared to the dynamical time scale of the sun of half an hour. This is even more true in considering effect of rotation on observed oscillations, since we really have to compare the rotation period with that of oscillation, which is typically 5 minutes (why the sun oscillates at such high overtones is, once again, outside the scope of this brief summary). This permits us to use linear perturbation theory to account for the effect of rotation on eigenfrequencies.

Let us forget the magnetic field. The two quantities ρ and c are what *principally* determines wave propagation in the sun and, when combined with proper boundary condition, its eigenfrequencies. Rotation affects the eigenfrequencies too, but since the effect is small, it can be treated as a perturbation. If we look at this situation from the other direction, we can conclude that by studying eigenfrequencies of the sun we can learn the distribution of ρ and c , or the radial structure of the sun, and that by studying fine structure that is brought about by rotation, we can investigate how the solar interior rotates.

How well it can actually be done depends not only on how precisely the frequencies can be measured, but also on how many frequencies are measured. Although this may be intuitive enough, the reason is discussed in the below.

In the sun, deeper one goes and higher the temperature gets. In other words, there is an inward increase of soundspeed². As a result, a packet of soundwave that starts an inward travel from a point on the surface undergoes refraction, eventually to come back to the surface to start the next trip through the solar interior (Fig. 2). Depending on the initial angle, a wavepacket penetrates to a certain depth. The region between the surface and the deepest point that the wavepacket reaches is called *propagation region*. Frequency of a mode comprising such wavepackets reflects physical condition in this propagation region. Different modes will have different penetration depths and hence different propagation regions, thereby sampling the

²Except near the centre, where a steep inward increase in mean molecular weight leads to an inward decrease in soundspeed.

solar interior in different fashions. If we have two modes with only slightly different penetration depths, the small difference in their frequencies will tell us about the thin layer between the two depths. With more modes added, we can probe more layers. Thus, probing the interior of the sun requires a wide variety of modes.

2.3 Rotational splitting

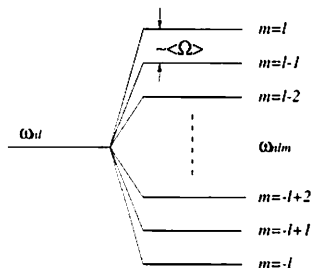


Figure 3 — Eigenfrequency ω_{nl} splits into $(2l + 1)$ distinct frequencies, ω_{nlm} , due to rotation Ω . The split frequencies ω_{nlm} are spaced by averages of rotation rate when rotation is slow.

Let us go into more details on the effect of rotation. The presence of rotation means the spherical symmetry of the system is broken, and eigenfrequencies now depend also on azimuthal order m . We denoted eigenfrequencies by ω_{nl} before, but now we need to use ω_{nlm} . The m -independent frequency ω_{nl} is the frequency at which the mode would have been pulsating, were it not for the rotation. The difference between ω_{nlm} and ω_{nl} is calculated according to linear perturbation theory. The result is:

$$\omega_{nlm} - \omega_{nl} = m \times \langle \Omega \rangle_{nlm} ,$$

where Ω is rotational (angular) frequency which is function of radius r and colatitude θ (the component of flow that depends on azimuthal angle ϕ we do not call ‘rotation’ in the current context) and $\langle \Omega \rangle_{nlm}$ is a certain average of $\Omega(r, \theta)$: the single frequency ω_{nl} ‘splits’ into $2l + 1$ frequencies (Fig. 3). In the case of the sun, the sidereal rotational period of ~ 25 days means that $\langle \Omega \rangle_{nlm}/2\pi \sim 460$ nHz. However, due to different ways by which modes sample the solar interior (Fig. 2), the average varies from mode to mode in a subtle way (hence the subscripts nlm in $\langle \Omega \rangle_{nlm}$). Accordingly,

$$\langle \Omega \rangle_{nlm} = \int dr \int d\theta K_{nlm}(r, \theta) \Omega(r, \theta) ,$$

where $K_{nlm}(r, \theta)$ is the sensitivity function called *splitting kernel* that can be calculated from eigenfunctions. This is the basis of helioseismic measurement of solar internal rotation.

3 Helioseismic measurement of solar rotation

3.1 Observation

One big advantage of solar physics, compared to stellar physics, is that we can observe the sun as a disc. Full-disc observations (sun-as-a-star observations) are

still practiced and do have certain advantages in observing low- l modes which have a broad spatial scale. Also, although so far I have mentioned only Doppler velocity measurement in relation with helioseismology, intensity fluctuation can also be used for seismic study. Still, in outlining the observing procedure in the below, I take the resolved measurement of Doppler velocity as the canonical example.

Measuring Doppler velocity is done by observing an absorption line that is insensitive to magnetic field, for then any change in the shape and position of the line would mainly due to oscillating velocity field (and surface rotation, which can easily be subtracted). By measuring Doppler velocity over the solar disc, we eventually obtain the radial velocity field $v_{\text{rad}}(\theta, \phi, t)$, which we expand in $Y_l^m(\theta, \phi)$:

$$v_{\text{rad}}(\theta, \phi, t) = \sum_{lm} A_{lm}(t) Y_l^m(\theta, \phi) .$$

If for simplicity we assume that v_{rad} is observed all over the solar surface, then

$$A_{lm}(t) = \int d\Omega v_{\text{rad}}(\theta, \phi, t) Y_l^{m*}(\theta, \phi) ,$$

where $d\Omega$ denotes surface element, gives the temporal variation of the spherical harmonic component (l, m) . Then $a_{lm}(\omega)$, the Fourier component of $A_{lm}(t)$ obtained by Fourier transform, or, more typically (but not necessarily), the power spectrum $|a_{lm}(\omega)|^2$ will be examined for peaks that correspond to eigenmodes. A figure like Figure 1 will be obtained by then averaging $|a_{lm}(\omega)|^2$ over m .

A long and continuous observation is required for precise determination of eigenfrequencies through Fourier analysis. In particular, if we are to measure rotational splitting, we need at least observation time of around a month. Small gaps here and there do not hurt very much, but large gaps do, and we need to avoid them. However, even if the weather is good, the sun cannot be observed during night. To solve this problem, some people go to South Pole in summer. Another solution is to have a ground-based network, that operates by installing several telescopes around the world and then observe the sun continuously in effect, after merging data from their sites. And of course, going to space also provides a solution.

The GONG (Global Oscillation Network Group) project [4] is representative of the ground-network effort. It has been operating 6 stations since 1995 in Big Bear (California), Mauna Loa (Hawaii), Learmonth (Australia), Udaipur (India), El Teide (Canary Islands) and Cerro Tololo (Chile). The variety in site longitude cannot deal with bad weather, but still the GONG achieves a duty cycle of about 90 per cent.

The SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) satellite [5] was launched in 1995 with a suite of solar observation instruments on-board, among which were MDI (Michelson Doppler Imager), VIRGO (Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations) and GOLF (Global Oscillations at Low Frequencies). In the context of helioseismology, the main purpose of VIRGO and GOLF are to discover low-frequency, yet-to-be-found, gravity wave (not to be confused with gravitational wave) oscillations (called g modes). The MDI carries out resolved measurement of Doppler velocity (and intensity fluctuation too) for the purpose of p-mode helioseismology.

With these new-generation experiments and more sophisticated method of data analysis, these days eigenfrequencies can be measured with nominal precision of less than a tenth of a μHz . In terms of relative precision, this is of the order of 10^{-5}

or even 10^{-6} , which is rarely seen in other branches of astrophysics. The number of modes observed depends on how one counts it: if one counts the (n, l) pairs, the number is around a few thousands. The number of (n, l, m) triplets would exceed a few hundreds of thousands. Equipped with these massive amount of high-precision data, we can then attempt to uncover what is beneath the photosphere.

3.2 Inversion

At the end of Section 2.1 I mentioned the importance of a systematic method of feeding information acquired by observation to our model. One such device is method of *inversion*. Suppose we have a model of rotation profile $\Omega(r, \theta)$. We can use this profile to compute ω_{nlm} and then judge if the profile matches observation or not. If not, we *may* be able to figure out how to improve the model profile. It would be much better, however, if we can work this backward, to produce an estimate of $\Omega(r, \theta)$ directly from observed set of frequencies $\{\omega_{nlm}\}$. This is what an inversion procedure aims to achieve.

There is a few minor issues concerning the determination of the internal rotation from $\{\omega_{nlm}\}$. First of all, what linear perturbation theory gives is how ω_{nlm} differs from ω_{nl} . However, ω_{nl} , being a hypothetical quantity (the frequency at which the mode would oscillate if the sun were not rotating), it cannot be measured. What can really be used, in fact, is $\omega_{nlm} - \omega_{nl, -m} = 2m \times \langle \Omega \rangle_{nlm}$. Here it is implied that $\langle \Omega \rangle_{nl, -m} = \langle \Omega \rangle_{nl, +m}$, which is guaranteed by symmetry of sensitivity function K_{nlm} (as an additional note, in inversion for soundspeed or density, m -average of ω_{nlm} substitutes for ω_{nl}). The same symmetry, by the way, implies that we are only measuring the component of $\Omega(r, \theta)$ that is north-south symmetric. Second, we do not normally use ω_{nlm} themselves but expand them in a form, for example, such as

$$\omega_{nlm} = \sum_k a_{nlk} \mathcal{P}_k(m/l)$$

with a proper polynomial $\mathcal{P}_k$, and use the expansion coefficients a_{nlk} instead as data. However, all these do not change the fact that $\Omega(r, \theta)$ is linearly related to rotational splitting data, and that we are to solve a linear inverse problem of rotational splitting to infer the internal rotation of the sun. In the below (though only in a few places), I still pretend that ω_{nlm} is the quantity we base our investigation upon.

It is not difficult to see that solving a linear inverse problem eventually comes down to invert matrices, since a linear relation has to be discretized first and the result is a matrix equation. Describing in detail how to proceed from there requires a lot of space; please see [6] and references therein. One important aspect is that if one solves the linear inverse problem via linear processes only, then the ‘solution’ $\hat{\Omega}(r, \theta)$ is related linearly to input data, and hence to the $\Omega(r, \theta)$, except for observational error:

$$\hat{\Omega}(r, \theta) = \int dr' \int d\theta' A(r, \theta; r', \theta') \Omega(r', \theta') + (\text{data error term}) .$$

It is more computational work to obtain the *averaging kernel* $A(r, \theta; r', \theta')$ than to obtain the solution itself, but it is through this function we learn spatial resolution, by examining how sharp the averaging kernel is peaked around (r, θ) or, indeed, if it is peaked around (r, θ) . The latter tells us if we actually ‘missed’ our target in our attempt to estimate the rotation rate at (r, θ) , our *target point*. These diagnostics,

in addition to formal error in $\hat{\Omega}(r, \theta)$, is required to judge how reliable a solution $\hat{\Omega}(r, \theta)$ is.

3.3 Results from MDI

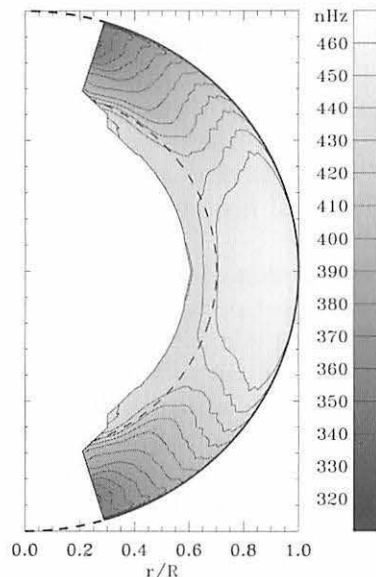


Figure 4 — Internal rotation of the sun inferred by inversion of MDI rotational-splitting data, as a contour map of rotational frequency $\Omega/2\pi$. The inner dotted curve (in fact part of a circle) indicates the base of the solar convection zone. Note that the north-south symmetry is because of the insensitivity of the method to the asymmetric component. Adapted from Schou et al.(1998)

It has just been briefly outlined how one goes from Doppler measurement to the solar rotation. To summarize our current knowledge of the internal rotation of the sun thus obtained, I here present an example of rotation inversion of MDI data (Fig.4). In the below I summarize the features that are of importance and interest.

The solution is plotted only in the outer 50 per cent of the sun, and even there not in the very high latitudes. This is because either of a lack of precision (large error bars) or of a lack of spatial resolution, mainly in the sense that averaging kernels are not centred well around targets. Since not many modes penetrate deep into the sun, we do not have large enough variety of modes to probe the rotation in deeper layers well. With soundspeed inversion, the situation is much better and we can go down to the radius of $\sim 0.1R_{\odot}$. This is because ω_{nl} (or m -average of ω_{nlm}) is more precisely measured than ω_{nlm} . As for the pole, the situation is the same; not many modes have a large amplitudes in high latitudes, hence the poor inversion.

When one look at the solution that is plotted, one thing that strikes eyes is that the pattern of latitudinal differential rotation observed on the surface holds through

the most of the the solar convection zone. Early attempts at dynamical dynamo calculation predicted a cylindrical rotation of the convection zone [7], essentially because of the Taylor-Proudman theorem. This discrepancy has compelled numerical modelling of dynamo to be reconsidered (see below).

In low- to mid-latitude, the rotation reaches its maximum around $r/R_{\odot} \simeq 0.95$, with a sub-photospheric shear layer (a sharp decrease in rotation rate) immediately above. It has been suggested that this layer supports a small-scale dynamo which is most likely not responsible for the 11-year cycle but playing an important role in sustaining (or magnifying) surface magnetic field [8].

If one looks deeper, one notes that differential rotation is weak, if present at all, in the radiative interior. Here, however, the spatial resolution is poor and error bars are large. It would be safer if we say we see no evidence against a near-rigid rotation, rather than we see evidence for.

In between, there is another shear layer at the base of the convection zone, named *tachocline* [9, 10]. Physics of tachocline is currently one of the hottest topic in solar and stellar astrophysical fluid dynamics. First, it can cause additional mixing in the solar interior. Indeed, a soundspeed excess found around the base of convection zone by helioseismology [11] may be explained by decreased amount of helium, as a result of such mixing offsetting an increase of helium by gravitational settling onto such layers. Second, tachocline may be playing an important role in dynamo mechanism. The standard α - ω dynamo has difficulty in explaining equatorward migration of sunspots without the cylindrical rotation and associated relatively large radial gradient of angular velocity in the solar convection zone. As an alternative, an interface dynamo mechanism at the tachocline region has been suggested [12, 13].

4 What's next?

The findings summarized in the last section could not have come via other routes, even if you count discoveries by numerical means as pure discoveries, because of the situation that was explained in Section 1. In this sense, one might say that helioseismology is even more indispensable for study of solar rotation than for study of solar (equilibrium) structure.

Still, we know very little of solar rotation in deep layers, or at polar regions, and these remain as obvious challenges for helioseismologists.

Aside from these, there is the issue of solar cycle variation. With data accumulated for a better part of solar cycle, we can now examine such variation of rotation. Though the signal still seems to be weak, it has been reported that the tachocline region is undergoing a periodic variation, with a period of 1.3 years [14].

Probably the greatest impact of helioseismic measurement of solar rotation was in the field of solar dynamo theory. The first kinematic dynamo calculation (the one that assumes a rotation rate rather than solves everything consistently as in dynamical dynamo) based on the 'observed' rotation rate was done by Dikpati & Charbonneau (1999) [15]. It was found that such a model would predict that sunspots would appear, in the beginning of a cycle, in latitudes too high compared to observation. It was suggested by Nandy & Choudhuri (2002) that meridional flow penetrating deep into the radiative zone can bring down the eruption latitude [16]. This is so-called flux-transport dynamo. Meridional flows have been measured in surface layers [17, 18, 19]. Although difficult, it will be one of the most important

topic to pursue to detect the counter flow in deep layers, to provide observational evidence for such a mechanism.

How about other stars? *Asteroseismology*, seismology of stars, is at last developing fast and there has been a few reports on evidence of differential rotation in White Dwarfs [20] and a β -Cephei variable [21]. However, it will be a long time, if at all, before a detailed map of angular velocity, such as the one we have for the sun, will be available for stars.

References

- [1] Frisch, U. (1995), *Turbulence*, Cambridge University Press
- [2] Leighton, R.B., Noyes, R.W., & Simon, G.W. (1962), ApJ, 135, 474
- [3] Deubner, F.-L. (1975), A&A, 44, 371
- [4] <http://gong.nso.edu/>
- [5] <http://sohowww.nascom.nasa.gov/>
- [6] Sekii, T. (2003), in *New Developments in Astrophysical Fluid Dynamics*, eds. M.J. Thompson and J. Christensen-Dalsgaard, Cambridge University Press, 263
- [7] Glatzmaier, G. (1985), ApJ, 291, 300
- [8] Corbard, T., Dikpati, M., Gilman, P.A., & Thompson, M.J. (2002), in *From Solar Min to Max: Half a Solar Cycle with SOHO*, ed. A. Wilson, ESA Publications Division, 75
- [9] Spiegel, E.A., & Zahn, J.-P. (1992), A&A, 265, 106
- [10] Gough, D.O., & McIntyre, M.E. (1998), Nature, 394, 755
- [11] Gough, D.O., et al. (1996), Science, 272, 1296
- [12] Choudhuri, A. R. (1990), ApJ, 355, 733
- [13] Parker, E. N. (1993), ApJ, 408, 707
- [14] Howe, R., et al. (2000), Science, 287, 2456
- [15] Dikpati, M., & Charbonneau, P. (1999), ApJ, 518, 508
- [16] Nandy, D., & Choudhuri, A. R. (2002), Science, 296, 1671
- [17] Hathaway, D. H., et al. (1996), Science, 272, 1306
- [18] Giles, P. M., Duvall, T. L., Jr., Scherrer, P. H., & Bogart, R. S. (1997), Nature, 390, 52
- [19] Chou, D.-Y., & Dai, D.-C. (2001), ApJ, 559, L175
- [20] Kawaler, S. D., Sekii, T., & Gough, D. O. (1999), ApJ, 516, 349
- [21] Aerts, C., et al. (2003), Science, 300, 1926

小惑星の自転 Rotation of Asteroids

柳澤 正久
Masahisa YANAGISAWA

yanagi@ice.uec.ac.jp

電気通信大学（東京都 調布市）
University of Electro-Communications (UEC), 1-5-1, Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585
JAPAN

ABSTRACT

現在、1000 個ほどの小惑星の自転速度（自転周期）が知られているが、その分布にはいくつかの傾向がある。これらは小惑星の誕生と進化の何らかの記録を留めていると考えられるが、それらは未だ十分に説明されているとは言えない。本論分では二つの点を指摘する。まず第一に、自転速度のヒストグラムはマックスウェル分布に近いが、何故そうなのかに対する明確な説明がない。第二に、100km 以上の小惑星では、大きいほど自転が速いという傾向があるが、それに対して存在する唯一つの説明は、「小惑星は進化と共にその大きさを減じてきた」という仮定の上に成り立っている。このような大きな小惑星は本当にそのサイズを減じてきたのだろうか。

(Rotation rates of about 1000 asteroids are now known. Their statistics would have some record on their formation and evolution, but they have not yet studied fully. I notice two of the problems in this field. First, histograms of asteroidal rotation rates are frequently approximated by Maxwellian distributions. However, I could find no clear explanation in literature why it should be Maxwellian. Second, the bigger the asteroids are, the faster they rotate, for the asteroids larger than about 100km. The only one model that takes into account this tendency is based on the assumption that even large asteroids have lessened their sizes through their evolution. We are not sure now whether they have really reduced their sizes.)

1 はじめに

小惑星の自転周期は、その明るさの時間変化の周期性から求めることができる。小惑星は形が歪で、かつ太陽光を散乱して光っているので、多くの小惑星がそうであるように表面のアルベド（ $\approx$ 反射率）が場所によって違わなくとも、明るさが時間変化するのである。これを観測して得られた結果を Lightcurve と呼ぶ。太陽、小惑星、地球の位置関係が様々な場合についての Lightcurve から、自転軸の方向やその形を推定することもできる。最近では、探査機やレーダー観測、あるいはハッブル宇宙望遠鏡によって得られた画像から直接、自転の情報を得られるようになってきたが、これらの方法が適用できるのは、地球に接近したもの、非常に大きなものなどごく少数の小惑星に限られており、ほとんどの小惑星の自転周期は Lightcurve から決められている。

Lightcurve 観測は 1970 年代から 80 年代にかけて盛んに行われ、明るさの変化が大きく、自転周期の短い（短期間の観測で自転周期を決められる）いわゆる結果を出しやすい小惑星に関してはやり尽くされた感がある。現在では、大型望遠鏡を使っ

てエッジワース・カイパーベルト天体や直径 10km 程度の微小な小惑星など非常に暗い対象の研究がされたり、中小望遠鏡を使つての昔の結果の確認 or 修正や (CCD カメラにより昔より質の高い観測が可能)、新しいところでは、近地球小惑星が研究されたりしている。

有名なデータベースの一つである以下のサイトには、2004 年 2 月 17 日の段階で 1858 個の小惑星についての報告が収められている。

<http://cfa-www.harvard.edu/iau/lists/LightcurveDat.html>

Lightcurve には、周期性のはっきりした信頼性の高いものから、怪しいデータまで様々なものがあり、それぞれの小惑星の自転周期には、次のような Reliability code (信頼指標) が付記されている。

- 1: 違っている可能性が高い (244)。
- 2: 一周期を完全にカバーしない Lightcurve から決められた周期 (711)。
- 3: 間違いない (634)。
- 4: 間違いない。さらに自転軸の方向も推定されている (111)。

() 内は小惑星の数である。合計が 1858 個にならないのは code の付いてない (おそらく暫定的な報告があるに過ぎない) ものもあるからである。

小惑星研究の面白さの一つは、これらの非常に多くのデータをもとに統計的な議論ができることであろう。以下では、そうした議論の中から筆者が個人的に「不思議だ」と思っていることを二つ説明する。

2 自転速度のヒストグラム

まず、上記ホームページのデータを使用して、分かっている自転速度のヒストグラムを作る。少々奇妙なことであるが、Reliability code が 2 以上でも自転周期の上限、もしくは下限しか示されていないことがある。これらの小惑星については、上限の場合には示された値の 1.5 倍、下限の場合には 1.5 分の 1 の自転周期を持つと仮定した。また、自転周期よりは自転速度の方が物理的には意味があるので (角運動量に比例する)、自転周期を地球の 1 日に何回自転するかに変換する。こうして code が 2 以上の 1456 個の小惑星について自転速度のヒストグラムを作成した (図 1)。

分布がマックスウェル分布に近いのが特徴である。熱平衡にある単一の気体の分子速度の分布がマックスウェル分布になるのは有名であるが、何故、10km 程度から数 100km までの様々な大きさ (直径) の小惑星の自転速度の分布がこうなるのだろうか。この分布に言及している論文は数多くあるが (eg. Binzel et al. 1989) [1]、私の知る限りすべての論文でマックスウェル分布は自明のこととして議論が行われている。「衝突進化の十分進んだ系に関してはマックスウェル分布になる」という記述にお目にかかることもある。土星の輪の粒子の運動と自転に関する計算機シミュレーションの結果 [7] が引用されている場合もある。

一方で、統計学的な検定を行うと、必ずしもマックスウェル分布とは言えないらしい (Binzel et al. 1989) [1]。きれいなマックスウェル分布からずれる部分を図 1 の中に矢印で示した。

Rotational Breakup は、これ以上速く回転すると遠心力で強度のない天体だと四散してしまう限界である。これを越える自転速度のものが極めて少ないのは納得のいく事である。例外が何個かあるが、すべて非常に小さい小惑星である (主に近地

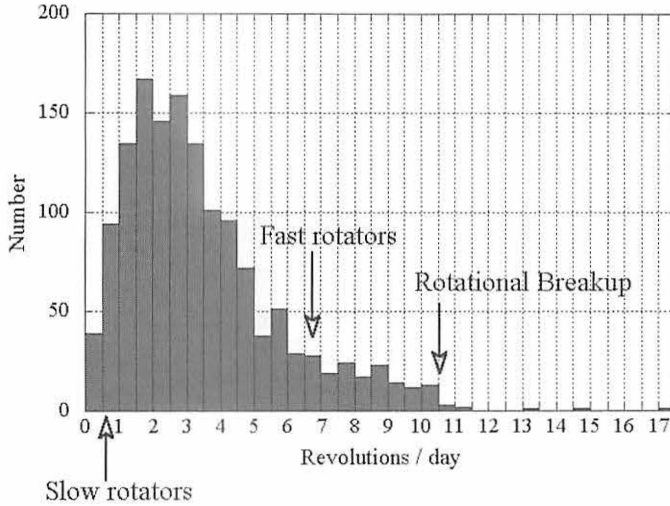


Figure 1: 小惑星の自転速度のヒストグラム。単位は地球の1日に何回自転するか。Reliability code が2以上の1456個の小惑星が含まれている。矢印で示した付記については本文参照。
(Histogram of 1456 asteroidal rotation rates for which Reliability code is equal to or greater than 2. The rotation rate is shown in number of rotations per Earth's day.)

球小惑星)。たぶん一枚岩でできており、その強度で遠心力に打ち勝っているのだろう (see Pravec et al. 2002) [6]。

Slow Rotatorsについては、昔は連小惑星であり、潮汐進化によって自転角運動量がお互いを廻る軌道角運動量に移り自転速度が遅くなったと考えられている [5]。現在では片方が衝突で破壊され、連小惑星でもないのにゆっくり回っている。

そもそも小惑星全体の自転速度に一つのマックスウェル分布を当てはめるのに無理があると考え、いくつかのマックスウェル分布の重ね合わせで図1のような分布を説明しようという考えもある。つまり、小惑星の中には、自転に関して起源や衝突進化の過程の違う2、3のグループがあると考えるのである。自転の速いものの超過 (Fast Rotators) は、こう考えて無理やり説明がする。

また、平均的な自転速度を小惑星の直径の関数として求め、一つ一つの自転速度をそれで割った規格化された自転速度がマックスウェル分布になることを主張している研究もある [6]。小惑星はその衝突進化の過程で、少しずつ大きさを減じながら、しかし、それより短いタイムスケールでそれぞれの大きさに応じたマックスウェル分布に落ち着くと考えているようである。

一方で、セメント球を火薬で破壊して小惑星の衝突破壊を模擬し、破片の回転を測るという実験もなされている。それらの回転速度のヒストグラムは、マックスウェル分布に似てはいるが、統計的に検定するとそうは言い切れならしい [3]。

マックスウェル分布は、自転角速度ベクトルがある広がりをもってランダムに分布していることを表わしているのだが、小惑星の衝突進化では、自転速度と大きさの両方が変化する。小規模な衝突による自転の変化と、カタストロフィックな破壊での破片の回転としての自転の獲得も含まれる。何故これほどまでにマックスウェル分布にこだわるのだろうか。

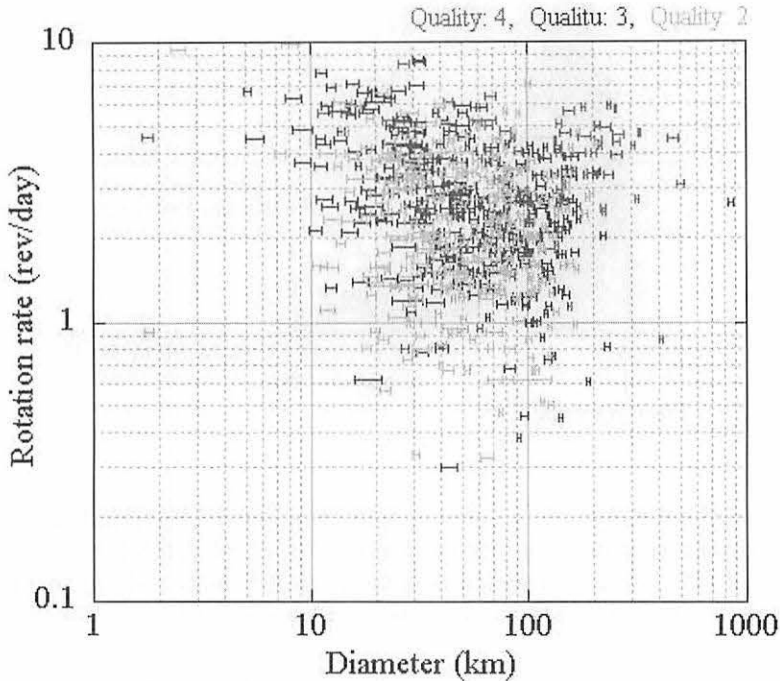


Figure 2: 小惑星の直径と自転速度の関係。788 個の小惑星が含まれている。一つ一つの小惑星に対応するプロットは Reliability code (=Quality code) で色分けしてあるが白黒印刷では判別がむずかしい。(The rotation rates of 788 asteroids plotted against their mean diameters. Three colors correspond to the Reliability codes: 2, 3, and 4.)

3 大きさと自転速度の関係

図 fig:histogram に含まれた小惑星の内、小惑星の直径のデータベース

<http://www.psi.edu/pds/archive/astdata/IMPS/diamalb.tab>

にデータのあるもの 788 個について、直径と自転速度の関係を示したのが図 2 である。小惑星は形が歪なので、直径とはいっても赤外線による観測時の見かけの断面の平均直径である（同じ断面積をもつ円の直径）。

自転速度には大きさ依存性があるようであるが、これを無視して自転速度だけでヒストグラムを作ると図 1 になったのである。さて、まず目に付くのは、100km 以下の小惑星では小さいものほど速く廻っている傾向である。これに関しては、次のように考えることができる。

半径 R の球形小惑星に質量 m 、半径 r のより小さな球形小惑星が衝突するとする。衝突速度は v 、インパクトパラメータは b (図 3 参照) とする。また、密度は共に ρ であるとする。初め的小惑星の自転速度を 0 とし、衝突後にすべての角運動量が大きな小惑星の自転角運動量に変わったとすると、衝突後のその自転角速度 Ω

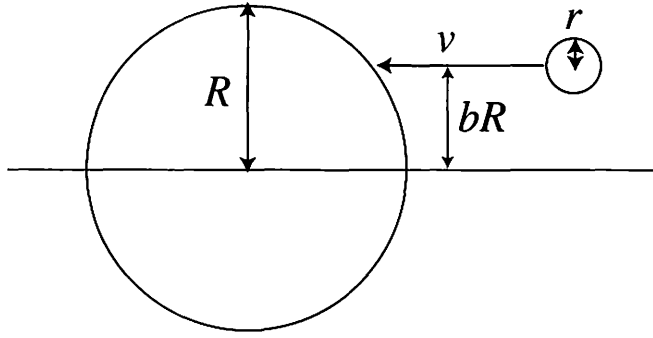


Figure 3: 小惑星へのより小さな小惑星の衝突。図中の b はインパクトパラメータと呼ばれる。(Collision of an asteroid with a projectile of velocity, v and impact parameter b .)

は、

$$\Omega = \frac{bRmv}{I}$$

となる。ここで、 I は大きな小惑星の自転に関する慣性モーメントである。

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$I = \frac{2}{5} \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) R^2$$

を代入して整理すると、

$$\Omega = \frac{5}{2} b v \left(\frac{r}{R} \right)^3 R^{-1}$$

となる。大きな小惑星でも小さな小惑星でも (r/R) はほぼ同じと考えれば、小さな小惑星ほど廻され易いことが分かる。

「小さくなるほど速く廻る」という結果を出している小惑星の自転の進化のモデルはいくつかあるが、Harris (1979) [4] が有名である。彼は次のように考えた。

1. 小惑星は、時々起こるカタストロフィックな衝突により、その度に直径をある割合で減じていく（ただし、この衝突では自転速度は変化しないと仮定する）。
2. カタストロフィックな衝突の間に、数多くの小規模な衝突が起こり、角運動量ベクトルはランダムウォークする。（この過程では衝突体の付加による慣性モーメントの増加も考慮している）

そして、簡単な計算により、小惑星の大きさと平均的な自転速度の関係を求めた。

一方で、100km より大きな小惑星では、大きいほど自転が速くなる傾向がある。これを説明する理論は現在のところ唯一つ Dobrovolskis and Burns (1984) [2] のみである。図4 を使って彼らの考えを説明すると以下ようになる。

1. 自転している小惑星の上で見ると、より小さな天体が衝突したときの衝突破片は、衝突点での鉛直軸に対して対象に放出される（斜め衝突でも円形のクレーターができる。これはこの仮定を支持する）。
2. 慣性空間から見ると、破片速度は自転運動の方向に放出されるものは速く、反対方向のものは遅い。

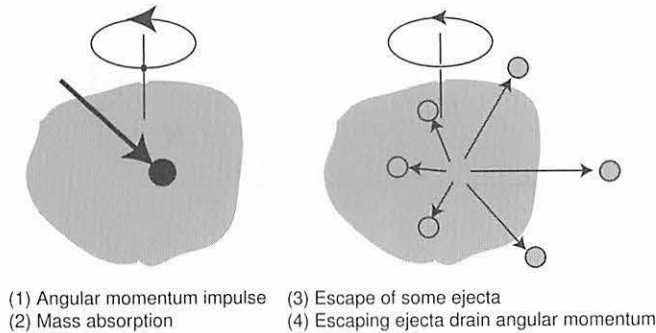


Figure 4: Angular Momentum Drain. 衝突点から対称的に衝突破片が放出されると、自転運動の方向に放出されたものだけが重力圏を脱出することがある。脱出する破片は角運動量を持ち去る。(Angular Momentum Drain. Collisional fragments are ejected symmetrically in asteroidal rotating frame. But, the ejection is not symmetric in the inertia frame. Some fragments escape asteroidal gravity field and remove angular momentum.)

3. 破片の速度と小惑星からの脱出速度が同じくらいの場合、自転方向への放出物は小惑星の重力圏を脱するが、反対方向への放出物は再び表面に落ちてしまうことがある。
4. 重力圏を脱する破片は小惑星の自転角運動量を持ち去る。

彼らは、このアイデアを Harris (1979) [4] と同様のモデルに組み込み、パラメータをうまく選べば、大きさ数 100km の小惑星（適当な自転速度で自転している）が衝突進化でその大きさを減じていく過程で、直径 100km ぐらいまでは自転速度が遅くなっていき、その後再び大きくなっていくことを示した。

ここで私が疑問に思うのは、直径 100km 以上の小惑星が本当にその進化の過程で大きさを減じてきたのだろうかということである。最近では、小惑星は衝突破壊は起こしてもすぐに自己重力によって再集積してしまい、そう簡単には四散しないという事が分かりつつある。もしかすると 100km 以上の小惑星は進化の過程で成長していったのかも知れない。そんな場合についての自転の進化のモデルは今のところない。

4 おわりに

小惑星の自転に関しては、ここで触れた以外にもいくつかの話題がある。自転を調べるための Lightcurve 観測に関係した研究もある。以下に、これらを箇条書きにするが、詳しくは参考文献に含まれている Asteroids II, Asteroids III を参照して欲しい。

- 自転ベクトルの分布は黄道面に垂直なものが卓越している。かつ順行自転が逆行自転に比べがわずかに多いようである。何故か？
- 非主軸回転をしている小さな小惑星が 2、3 個発見されている。主軸回転に変わっていく時間スケールのモデルは正確か？
- トロヤ群小惑星やエッジワース・カイパーベルト天体と、メインベルト小惑星の自転の分布の違いはあるか？

- 連小惑星では自転と公転が同期しているか？
- Lightcurve から求めた小惑星の形は、いくつかのタイプに分類できないか？

最後に、研究会でお世話になった国立天文台の谷川清隆先生および院生の皆様に感謝します。

References

- [1] Binzel, R. P., Farinella, P., Zappala, V., and Cellino, A. 1989. Asteroid rotation rates: Distributions and statistics. In *Asteroids II* (R. P. Binzel, T. Gehrels and M. S. Matthews, Eds.), 416-441. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- [2] Dobrovolskis, A. R. and Burns, J. A. 1984. Angular Momentum Drain: A mechanism for despinning Asteroids. *Icarus* **57**, 464-476.
- [3] Giblin, I., Martelli, G., Farinella, P., Paolicchi, P., Di Martino, M., and Smith, P. N. 1998. The properties of fragments from catastrophic disruption events. *Icarus* **134**, 77-112.
- [4] Harris, A. W. 1979. Asteroid rotation rates II: A theory for the collisional evolution of rotation rates. *Icarus* **40**, 145-153.
- [5] Harris, A. W. 2002. On the slow rotation of asteroids. *Icarus* **156**, 184-190.
- [6] Pravec, P., Harris, A. W., and Michalowski, T. 2002. Asteroid rotations. In *Asteroids III* (W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, and R. P. Binzel, Eds.), 113-122. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- [7] Salo, H. 1987. Numerical simulations of collisions between rotating particles. *Icarus* **70** 37-51.

My Favorite Figure-8 Orbit わたしの8の字入門¹

— N 体問題舞踏解²とその存在証明について —

関口 昌由

masa@kisarazu.ac.jp

木更津工業高等専門学校,
千葉県木更津市清見台東 2-11-1, 〒 292-0041

要約

いわゆる8の字解は三体問題の新しい周期解であると同時に、 N 体問題における舞踏解の代表例であり、その厳密な存在証明が舞踏解研究の発端となった。舞踏解とは重力 N 体問題における周期解の一つのクラスであり、その特徴は空間に固定された閉曲線上を N 体が等時間間隔で数珠繋ぎになって運動することである。本稿では、舞踏解の特徴とその存在証明に用いられた一連の方法を概観し、未解決問題を明らかにすることを目的とする。

1 はじめに — 三体問題の周期解たち —

重力三体問題の周期解としてよく知られているものに、1767年に Euler によって発見された直線解と、1772年に Lagrange によって発見された正三角形解がある³。いずれも中心図形 (central configuration: 三体問題の場合、直線配置3つと正三角形配置2つの計5つしかない [20]) と呼ばれる図形に相似な相対的配置を保ったまま、各質点が共通重心に関してケプラー運動をする解であり、同形解 (homographic solution) と呼ばれる。質量比は任意である。ケプラー運動が円運動のとき、角速度一定の回転系に乗ってこれらの運動を観察すると質点たちは止まって見えることから、相対的平衡解 (relative equilibrium) と呼ばれる。角運動量がゼロの場合は、3体は回転することなく重心を端点とする放射線上で中心図形に相似な図形を保ちながら三体衝突から始まり三体衝突に達する。個々の質点ごとに見ればその運動は1次元ケプラー運動である⁴。いずれにしても、解を表す関数形は陰的な表現であるが明らかとなっている。以後、関数形が明らかな周期解は発見されていない。

他にも周期解は存在し、数値計算を援用することで発見されてきた。1956年に発見された Schubart 軌道は、空間に固定された直線上に3体が並び、中央の質点が左右の質点たちと交互に二体衝突を繰り返すという周期的な運動を行う [15]。三体問題に条件を付加した制限三体問題、Hill 問題、Sitnikov 問題などでは、数値計算で周期解の初期条件を発見することは難しくない。ただし、それらの関数形は明らかではない。また厳密には、数学的存在証明なくして周期解が発見されたとは言い難い。

¹本稿は、箱根天体力学 N 体力学研究会 (2004 年 3 月) で行った講演内容に加筆修正を施したものである。

²一般に choreographic solution あるいは choreography と呼ばれているが、このような訳語を与えてみた。

³[13, 20] など2つの論文 Leonard Euler, 1767, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, pp.144-151 in *Oeuvres*, *Seria Secunda* tome XXV *Commentationes Astronomicae* (page 286) と Joseph-Louis Lagrange, 1772, *Essai sur le Problème des Trois Corps*, *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, tome IX, in vol. 6 of *Oeuvres* (page 292) が引用されている。

⁴この場合の解は homothetic solution と呼ばれる。平行相似解という訳語もある [8] が、個人的には放射相似解と呼びたい。以後、述語の和訳は筆者の私見に基づく。

三体問題における8の字解は、まず Moore[12] によって数値的緩和法で発見された。Moore は、周期 T の $\mathbb{R}^2$ 上の周期軌道を $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ 上の組み紐ととらえて分類することを提唱し、どのような周期軌道が $1/r^a$ 型ポテンシャル下で実現可能か数値計算で調べた。その中で、8の字軌道がニュートン型ポテンシャル下で実現可能であることを明らかにしたのである。その後 Chenciner & Montgomery[3] によって厳密な存在証明が与えられた。その証明は直接法に基づいている。さらに Simó[18] は N 体問題で多くの舞踏解を数値的に発見したが、その多くは未だ存在証明が与えられていない。一方、Chen[2] は、4体問題と6体問題で可算無限個の舞踏解の存在証明に成功した。本研究では柴山充瑠氏によって $2n$ 体問題における舞踏解の存在証明が報告された。

第2節では、8の字解の特徴を纏める。第3節では、証明の概略について説明する。第4節では、 N 体舞踏解に関する研究を紹介する。

2 三体問題の8の字解

文字通り、8の字形の曲線上を等質量の3体が追いかけてくを⁵することが、最大の特徴であると言える。以下にこのことを詳細に記述しよう。

軌道の形 (Figure 1 参照) はレムニスケート

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \quad (1)$$

に非常に近いが、一致しない [19]。実際、(1) 式に Jacobi の楕円関数を用いてパラメータ付け

$$x(t) = \frac{\operatorname{sn}(t)}{1 + \operatorname{cn}^2(t)}, \quad y(t) = \frac{\operatorname{sn}(t)\operatorname{cn}(t)}{1 + \operatorname{cn}^2(t)},$$

を行い、運動方程式を満足するようなポテンシャルを求めると、Newton ポテンシャルにはならない [5]。軌道の形が x, y の両座標軸に関して対称であることから x と y の偶数次式で表されるべきだが、6次式や8次式で近似しても誤差が残る [19]。各葉が星形⁶であること [3] と凸であること [6] は示されたが、8の字軌道を表す関数は未知である。

8の字軌道上を運動する3体は直線配置と二等辺三角形配置を交互に巡回する。各質点は軌道に沿って Figure 1 に示された数字の順に周回する。時刻 $t = 0$ で3体が直線配置 (0-4-7) にあったとしよう。すなわち m_1 が数字0の位置に、 m_2 が4の位置に、 m_3 が7の位置にあったとすると、時刻 $t = t_0$ において3体は二等辺三角形配置 (1-5-8) に移る。ただし、 $T = 12t_0$ は8の字解の周期である。その後3体は時刻

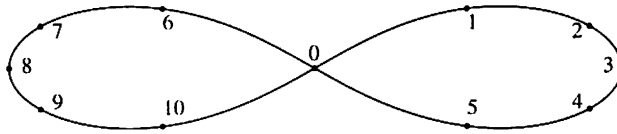


Figure 1 — 三体問題における8の字解の軌道
Simó[18] が求めた初期値を利用して計算した。

⁵Simó[16] によって作成された優れたアニメーションを楽しめる。

⁶star-shape: 原点 (この場合は2葉の接点) から無限遠に引いた半直線が1回しか弧と交わらないこと。

$t = 2t_0$ で、直線配置 (2-0-9) に移る。以下同様に 3 体は等時間間隔で連鎖的に追跡する。すなわち、時刻 t における質点 m_i の座標を $q_i(t)$ であらわすと、

$$q_2(t) = q_1 \left(t + \frac{T}{3} \right), \quad q_3(t) = q_1 \left(t + \frac{2T}{3} \right), \quad (2)$$

が成立する。周期 T にわたる 3 体の配置の変化を Table 1 にまとめた。また、速度に関しても著しい対称性がある。直線配置にあるとき、3 体の速度ベクトルは全て平行で原点にある質点の速度だけが反対向きで大きさは他の 2 倍になる。言い換えると角運動量がゼロである [3]。さらに、3 体の各速度ベクトルを延長した直線たちが常に 1 点で交わる (三接線定理 [5]) ことも示された。4 節で述べる SF 型ポテンシャルの場合、三法線定理も成立する⁷。

時刻	m_1	m_2	m_3	配置	時刻	m_1	m_2	m_3	配置
0	0	4	7	C (E_1)	$6t_0$	0	9	2	C (E_1)
t_0	1	5	8	I (I_3^+)	$7t_0$	6	10	3	I (I_3^-)
$2t_0$	2	0	9	C (E_2)	$8t_0$	7	0	4	C (E_2)
$3t_0$	3	6	10	I (I_1^-)	$9t_0$	8	1	5	I (I_1^+)
$4t_0$	4	7	0	C (E_3)	$10t_0$	9	2	0	C (E_3)
$5t_0$	5	8	1	I (I_2^+)	$11t_0$	10	3	6	I (I_2^-)
					$12t_0$	0	4	7	C (E_1)

Table 1 — 8 の字解上での配置の推移

記号 t_0 は周期 T の 12 分の 1 を表す。数字は Figure 1 に現れる位置を示している。記号 I は二等辺三角形配置、記号 C は直線配置を示す。括弧内の記号は形状球面 (Figure 2) 上の点を表す。

Saari の予想に依れば、慣性モーメントが一定となる運動は同形解である。その逆は明らかに真ではなく、実際 8 の字解で慣性モーメントは定数とならないものの、ほぼ一定の値を取る。また、ポテンシャルも軌道に沿ってほぼ一定の値を取る。この性質は、Chenciner & Montgomery の存在証明にとって有利に働いた。

通常、直接法で存在証明出来る周期解は不安定であるのに対し、特に他の舞踏解が全て不安定であるのに対し、8 の字解は安定である。直線配置をポアンカレ断面にとってポアンカレ写像を定義すると、その固有値がすべて純虚数になるという意味で 8 の字解は線形安定であり、角運動量ゼロの超曲面上に限定した数値計算によれば、8 の字解の周囲に永遠に脱出できないと思われる軌道集合が観察できる [19]。これを Montgomery [13] は KAM 安定であると述べている、すなわち周期解近傍の解が周期解を離れるのに非常に長い時間がかかり、その速度は周期解からの距離に関するいかなるべき級数でも検出することが出来ない。また、質量を変化させての安定領域の探索もなされたが、見いだされた領域は非常に小さい。

安定であれば、宇宙に 8 の字軌道を描く天体を見いだすことも期待できるが、それを連星対連星散乱の結果として生成する確率は非常に小さい [9]。

Simó [19] の数値計算によれば、8 の字解の近傍には別の周期解が存在する。8 の字解は角運動量がゼロなので、彼はまず角運動量ゼロの超曲面上を探索した。ここで見つかった周期解は衛星舞踏解 (satellite choreography) と名付けられた。次に角運動量非ゼロの条件で探索され、発見された周期解は、相対舞踏解 (relative choreography) と名付けられた。相対舞踏解は、ある定角速度の回転系で観察すれば、まさしく舞踏解となる。

⁷ 本研究会で藤原俊朗氏が講演され、集録にも寄稿されることと思うので、そちらを参照されたい。

3 証明の概略

主に、Chenciner & Montgomery[3] の証明の概略を紹介する。最後に Chen[1] による証明の改良を紹介する。

3.1 直接法

変分原理によれば、作用

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (3)$$

を最小化する⁸無衝突経路は運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad (4)$$

の解となる。ただし、 $\mathcal{L}$ はラグランジアン

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|},$$

である。

適当な関数空間 $\mathcal{C}$ の上で関数列 $x_n \in \mathcal{C}$ を取り、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x_n) = \inf_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{A}(x), \quad (5)$$

を満たすならば、この列を最小化列と呼ぶ。最小化列 $\{x_n\}$ の部分列のうちで、ある $x_* \in \mathcal{C}$ に収束するものを取り出す。 x_* が $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x_n) \geq \mathcal{A}(x_*)$ を満足し無衝突であるならば、 $\mathcal{C}$ 上に解が存在することを証明したと言える。以上を、変分法における直接法、と呼ぶ。そのような x_* の存在は、Arzelà-Ascoli 定理⁹の直接の帰結として保証されるので、 x_* が無衝突であることを示すことが残る。そのためにまず、衝突を含む任意の経路 x_{coll} について作用の下限 $\mathcal{A}_{coll}$ を求める。衝突を含まない経路 $x_{test} \in \mathcal{C}$ を選び、

$$\mathcal{A}(x_{test}) < \mathcal{A}_{coll} \equiv \inf \mathcal{A}(x_{coll}). \quad (6)$$

を示せばよい。なぜなら、 $\mathcal{A}(x_*) \leq \mathcal{A}(x_{test})$ が成立するからである。

3.2 配位空間の次元の遁減

重心を原点に固定することで、並進で一致する配置を同一視する。回転で一致する配置を同一視する。仮に拡大縮小で一致する配置を同一視するならば、全ての三角形配置は $\mathbb{R}^2$ に位相同形になる。なぜならば、質点 m_1, m_2 を点 $(1, 0), (-1, 0)$ に固定すると、質点 m_3 の位置座標 (x, y) ですべての三角形を尽くせるからである。この平面に無限遠点を加えたものは2次元球面と同一視できる。この球面を形状球面 (Figure 2) と呼ぶ。この場合、無限遠点は m_1 と m_2 の二体衝突に相当する。

⁸minimize の訳語である。講演時は「極小化ではないのか」という質問を受けたが、直接法の文脈では「最小化」で通用している。実際、考慮している関数空間に限れば「極小化」より適切であると考え。

⁹コンパクト空間上一様有界で同程度連続な関数の族は、一様収束する部分列を持つ。

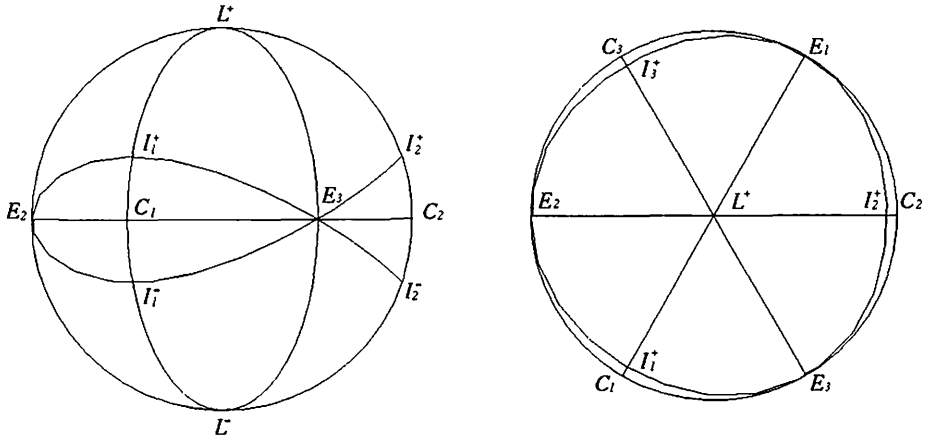


Figure 2 — 形状球面の子午線面 (左) と赤道面 (右)

子午線 $L^+E_1L^-$, $L^+C_1L^-$ は $r_{ij} = r_{ik}$ なる二等辺三角形配置、赤道は直線配置をそれぞれ表す。一方、 E_i で赤道と交差する曲線は 8 の字解軌道の投影を概念的に表したものである。 $L^\pm$ はラグランジュ配置、 E_i は m_i を中点におくオイラー配置、 I_i^+ (I_i^-) は L^+ (L^-) と同じ側にある $r_{ij} = r_{ik}$ なる二等辺三角形配置、 C_i は $r_{jk} = 0$ なる二体衝突である。

従って三体問題の配位空間は、形状球面と三角形の大きさを表すパラメータ (ここでは慣性モーメント) との直積空間、すなわち $\mathbb{R}^3$ と位相同形形であると考えて良い。この場合、原点は全衝突を表す。この空間を既約配位空間と呼ぶ。

形状球面上に 8 の字解を投影すると、Figure 2 に示されるような曲線が得られると考えられる。対称性を考慮すると、軌道は互いに合同な 12 の軌道片からなる。従って 1 つの軌道片の存在を証明すれば、8 の字解の存在証明は完了する。その軌道片とは 2 つの多様体 $\mathcal{I}_i$ と $\mathcal{E}_j$ を結ぶ曲線片である。ただし $\mathcal{I}_i$ と $\mathcal{E}_j$ はそれぞれ、 $r_{ij} = r_{ik}$ なる二等辺三角形配置全体からなる集合と m_j を中心とするオイラー配置全体からなる集合それぞれに、配位空間の計量から誘導された計量を与えて得られる多様体である。既約配位空間では $\mathcal{I}_i$ は大円 $L^+E_iL^-C_iL^+$ を含む平面、 $\mathcal{E}_j$ は原点から E_j を通って無限遠に延びる直線としてそれぞれ表される。この曲線片は隣接する曲線片と滑らかに接続する、すなわち境界を構成する多様体 $\mathcal{I}_i$ と $\mathcal{E}_j$ に垂直に達するという境界条件を満たす¹⁰。そこで、時間 t_0 で 2 つの多様体 $\mathcal{I}_i$ と $\mathcal{E}_j$ を結ぶ曲線全体の集合を $\mathcal{C}$ としよう。

3.3 衝突を含む経路上の作用

3 体のうち 2 体が任意の曲線を描き、残る 1 体が無限遠に脱出する固定点の列をたどるような経路の列 $x^{(n)}$ を考える。このとき、 $x^{(n)}$ 上の作用 $\mathcal{A}_n$ は単調に減少する。極限 $n \rightarrow \infty$ で、 $x^{(n)}$ は二体問題の配置に漸近し、その作用の値も二体問題のそれに漸近する。二体問題では、作用の最小値はケプラー楕円で実現される。このことは、次の定理による。

定理 (Gordon [7])

原点を取り除いた平面上、時間 T で閉じる非可縮な閉曲線たちからなる関数

¹⁰Palais の対称的臨界性の原理による。4 節参照のこと。

空間 Λ_T を考える。ケプラー作用

$$\int \mu \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} + \frac{\alpha}{\|x\|} dt$$

の Λ_T における下限は周期 T の任意のケプラー楕円によって実現され、 $\partial\Lambda_T$ における下限は周期 T の1次元ケプラー運動 (衝突放逐運動) によって実現される。どちらも、その下限値は

$$\mathcal{A}_{Kepler} \equiv 3 \left(\frac{\mu \alpha^2 \pi^2}{2} T \right)^{1/3}$$

である。ただし、 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $\alpha = m_1 m_2$ である。

注目すべきことは、衝突放逐軌道も作用を最小化するということである。よって $\mathcal{A}_{coll} = \mathcal{A}_{Kepler}$ とすればよい。

3.4 テスト経路の設定

慣性モーメントが一定値 I_0 である配位の全体からなる多様体を $S(I_0)$ とする。 I_0 でパラメータ付けられた $S(I_0)$ たちの集合 $\mathcal{S} \equiv \{S(I_0) \mid I_0 \in \mathbb{R}^+\}$ を考える。形状球面も $\mathcal{S}$ の要素であるとして良い。ポテンシャル $U = \sum_{i < j} m_i m_j / \|q_i - q_j\|$ を $S(I_0)$ 上に制限したものを U_0 と書こう。オイラー点 E_i はすべて U_0 の臨界点、特に鞍点になり、ポテンシャルの値も一致する。すなわち、

$$U_0(E_i) = U_0(E), \quad (i = 1, 2, 3).$$

そして、 U_0 の等高線はすべての E_i において自分自身と交差する。その曲線、すなわち $S(I_0)$ 上の U_0 の等高線 x_0 は、8の字解の軌道とよく似ている。この曲線 x_0 をテスト経路に設定する。相点は一定速度で経路 x_0 上を運動するものとする。このようなテスト経路 x_0 の全体は $\mathcal{C}$ の部分集合をなし、 I_0 をパラメータとする。この集合上で作用を最小化する経路を x_{test} とすればよい。

3.5 作用の評価

Chenciner & Montgomery[3] は不等式 (6) に必要十分な不等式 $l_0 < \pi/5$ を得た。ただし、 l_0 は慣性モーメント $I_0 = 1$ のときのテスト経路の長さである。実際 l_0 は、Simó の近似計算によれば、

$$\frac{\pi}{5.082553924511} \leq l_0 \leq \frac{\pi}{5.082553924509}$$

を満たす。以上によって、8の字解の存在証明を完了した。

各作用の値は Simó の数値計算によって求められている。質量を全て1とし、周期を $T = 2\pi/12$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{Kepler} &= (3/2)^{2/3} \pi / 2 = 2.0583255 \dots, \\ \mathcal{A}_{test} &= (225 \pi l_0^2 / 32)^{1/3} = 2.0359863 \dots, \\ \mathcal{A}_{figure8} &= 2.0309938 \dots \end{aligned}$$

となる。

3.6 Chen による改良

Chen[1] は Gordon の定理に依らずに、 $\mathcal{A}_{coll}$ を解析的に評価し、

$$\mathcal{A}_{coll} = 2.87T^{1/3}$$

を得た。ただし、 T は周期である。このためテスト経路に沿う作用を甘く評価できた。すなわち、等ポテンシャルテスト経路の代わりに大円の孤をテスト経路に採用し、

$$\mathcal{A}(x_{test}) = 2.64T^{1/3}$$

を得た。彼の方法のメリットはテスト経路に沿う作用を数値積分せずに得られたこと、およびそのため不等式 (6) の証明が簡略化されたことである。

4 N 体舞踏解

一般に舞踏解を二つに分けることが出来る。単舞踏解 (simple choreography) は、一つの閉曲線上を全ての質点が等時間間隔で運動する周期解であり、多重舞踏解 (multiple choreography) は、複数の閉曲線上をそれぞれ 2 つ以上の質点が等時間間隔で運動する周期解である。なお、同形解の円運動の場合もまた、閉曲線上を質点が等時間間隔で運動するという条件を満たすが、この場合は自明な舞踏解 (trivial choreography) と呼ばれる。

本節ではまず、Chenciner たち [4] や Simó[18, 19] が発見した N 体単舞踏解¹¹について紹介し、続いて Chen[2] が存在証明をした N 体多重舞踏解を紹介する。

4.1 単舞踏解

Gerver は、円軌道と 8 の字軌道をリサージュ曲線として一般化することに気づき、ただちに最初の 4 体舞踏解を発見した。その存在はコンピューター支援のもと証明された [10]。Gerver の解は一般化されて連鎖舞踏解 (chain choreography) と呼ばれる。連鎖舞踏解は、線形連鎖 (linear chain) と呼ばれる。その軌道は、円周をある固定した対称軸のまわりに k 回ねじって得られる閉曲線であり、 k 個の 2 重点を持ち、 $k+1$ 枚の葉を軸をつなげて並べたような図形である。その葉は泡 (bubble) と呼ばれる。泡が k 個ある線形連鎖は、 k -連鎖 (k -chain) と呼ばれる。8 の字は円周をある対称軸に関して 1 回ねじって得られる曲線、と見なせば、8 の字解もこのクラスに含めることができる。8 の字解は 2-連鎖である。Gerver の解は、8 の字を同じ対称軸に関してさらにもう 1 回ねじって得られる、2 個の 2 重点を持つ閉曲線¹²上を 4 つの等質量質点が常に平行四辺形を保ちながら運動するという解である。Gerver 解は 3-連鎖である。連鎖舞踏解は、このような操作を経て得られる曲線上を N 質点が運動する解である。

ある線形連鎖曲線とそれを描く質点の個数は 1 対 1 対応ではない。たとえば、8 の字曲線を描く解は 3 体の場合だけではない。 $N \leq 799$ なる N 体問題で、8 の字解が見つかっている。以下の定理が成立する。

定理 (Simó[18])

$N \geq 3$ のとき、 N 体線形連鎖の個数は $2^{N-3} + 2^{[(N-3)/2]}$ である。

¹¹ 軌道の図は [16, 17] で見つけることができる。

¹² 超 8 の字 (supereight) と呼ぶこともあるらしい。

線形連鎖以外にも数多くの舞踏解が見つかった。その解曲線たちは、前述の「ねじり」という操作のほか、「折り畳み」という操作で生成される。たとえば、8の字の2葉の大きさを偏らせて、小さい葉を大きい葉の中に折り畳むと、NTTのカンパニーロゴのような別の閉曲線が得られる。そのような曲線が実際に解として実現可能か否かは Moore と同じように数値的緩和法で確認することが出来る。一般に(衛星舞踏解や相対舞踏解を除いて) N 体舞踏解の個数は N とともに指数関数的に増大する。

次の条件を満たすポテンシャルを SF 型ポテンシャルと呼ぶ。

強い力の条件 (Strong Force Condition)

ポテンシャル $U(r)$ は次の性質を満足する。

$$\text{ある正数 } c \text{ と } \delta \text{ が存在して、 } r < \delta \text{ ならば } U(r) \geq \frac{c}{r^2}.$$

Moore[12] は、SF 型ポテンシャルでは、任意の閉曲線が解として実現可能であることを指摘した。実際、次の定理が証明された。

定理 ([4] の定理 2.2)

SF 型ポテンシャル¹³では、任意の $N \geq 3$ に対して N 体問題に 8 の字解が存在する。

このような SF 型ポテンシャルの性質を使うことで、ニュートン型ポテンシャル下での舞踏解の探索が効率的になった。つまり、SF 型ポテンシャル下で得られた周期解を、少しずつポテンシャルを変化させながら延長していくのである。多くの周期解はその過程で消滅したが、それでもニュートン型ポテンシャル下で生き残った舞踏解は少なくなかった。

4.2 多重舞踏解

Chen は、全質量が 1 であるような N 体問題で可算無限個の単舞踏解と多重舞踏解の構成法を示し、4 体問題と 6 体問題で実際にその存在を証明した。その証明における基本戦略も直接法である。なお、同じ論法で非可算無限個の準周期解の構成法も示したのは興味深い。

彼の示した舞踏解の軌道をここに図示しないのは筆者の怠慢でありご容赦願いたい。代わりに昔懐かしい話から連想していただきたい。商品名は知らないが、祭りの夜店で見かけた玩具である。それはプラスチックの四角い板といくつかの歯車のセットで、板にはいくつかの大きな穴があいており、穴の縁はギザギザになっている。歯車の径は穴の径より小さいが、その歯は穴のギザギザとかみ合うようになっている。そしてその歯車には小さな穴がいくつか開いているのである。紙の上に板を置き、歯車の縁を穴の縁に合わせて置く。歯車の小さな穴にボールペンの芯を差し込み、歯車を縁に沿って転がすと、美しい曲線が表れてくる。別の小さな穴で同じことを行くと、別の曲線を描くことが出来る。単純で不思議な玩具であった。

その玩具で描かれる曲線を連想していただきたい。そこに描かれる曲線はある角の回転に関して不変である。この不変性を用いると、考察すべき関数空間をかなり小さくすることができる。閉曲線の一部だけを取り出してきて考えるのである。その中で、作用の最小化曲線を見いだせば、それは元々の広い空間でも作用を最小にする。その理論的根拠は次の原理である。

¹³なお、ニュートン型ポテンシャルの場合は未解決問題である。

対称的臨界性原理 (Palais[14])

関数空間 H 上の汎関数 $\mathcal{A}$ が直交変換群 G に関して不変であるとする。このとき、 G で不変な H の部分空間上に制限された $\mathcal{A}$ の臨界点は H 上の $\mathcal{A}$ の臨界点でもある。

関数空間 H とは経路の集合と思って頂きたい。ただし、論文 [2] では、角 $2\pi/d$ ($d \geq 1$) の回転と時間 T の前進が相殺するような経路の集合に限定している。 d が有理数ならその曲線は閉曲線となり周期解に対応し、無理数なら閉曲線とならず準周期解に対応する。また直交変換として、回転変換だけでなく時間反転・質点の交換等の組合せも想定する。

また、次の定理は、衝突を排除する上で重要な役割を果たす。

定理 (Marchal[11])

両端を $\mathbb{R}^{2N}$ のある 2 点に固定した曲線たちのなす関数空間上の作用

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} K(\dot{x}) + U(x) dt$$

を考える。ただし、 K と U はそれぞれ運動エネルギーとニュートン型ポテンシャルである。このとき、 $\mathcal{A}$ を最小化する曲線は (t_1, t_2) で無衝突である。

この定理では、時間区間の両端で衝突を経験することを否定していない。従って、両端で衝突を経験する経路の集合に対して作用の下限を求めれば十分である。

衝突を含む経路に沿った作用の評価のために開発された二体分解法 (binary decomposition) を紹介しよう。 N 体系を考えるにあたって、相互作用の組に注目する。ある質点に注目すると、相互作用の相手は $N - 1$ 個ある。そこで、この質点を質量 $1/(N - 1)$ の質点が $N - 1$ 個集まって出来たものと見なす。すると、この N 体系は等質量 $1/(N - 1)$ の連星 $N(N - 1)/2$ 組の集合と見なせる。従って、作用はケプラー作用の和として表せることになる。Gordon の定理によれば、経路が衝突を含んでいてもケプラー作用はケプラー楕円で最小になる。

テスト経路の設定にあたっては、経路を極表示し動径と偏角をフーリエ級数で表現した。とはいえ 4 体問題では、動経を定数 + コサイン 1 項、偏角を時間の 1 次関数 + サイン 1 項、6 体問題では、動経を定数 + コサイン 3 項、偏角を時間の 1 次関数 + サイン 2 項という単純な表現である。ただし、その経路が前述の直交変換群に対して不変になるように工夫はしてある。要は、そのテスト経路に沿って作用を計算したとき、衝突を含む場合の作用より小さな値をとればよいのである。以上の経路によって、4 体問題でも 6 体問題でも $d \geq 3.55$ で十分な不等式が示された。

これは、可算無限個の 2 重舞踏解の存在と非可算無限個の準周期解の存在を意味する。

References

- [1] Chen, K.C., 2001, *On Chenciner-Montgomery's Orbit in the Three-Body Problem*, Discrete Contin. Dynam. Sys. **7**, 85–90.
- [2] Chen, K.C., 2003, *Variational Methods on Periodic and Quasi-periodic Solutions for the N-Body Problem*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23**, 1691–1715.
- [3] Chenciner, A. and Montgomery, R., 2000, *A Remarkable Periodic Solution of the Three-Body Problem in the case of Equal Masses*, Ann. Math. **152**, 881–901.

- [4] Chenciner, A., Gerver, J., Montgomery, R. and Simó, C., 2002, *Simple Choreographic Motions of N Bodies: A Preliminary Study*, Geometry, Mechanics, and Dynamics: Volume in Honor of the 60th Birthday of J. E. Marsden, Springer, New York, 287–308.
- [5] Fujiwara, T., Fukuda, H. and Ozaki, H., 2003, *Choreographic Three Bodies on the Lemniscate*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 2791–2800.
- [6] Fujiwara, T. and Montgomery, R., *Convexity in the Figure Eight Solution to the Three-Body Problem*, <http://arxiv.org/abs/math/0308252>
- [7] Gordon, W.B., 1977, *A Minimizing Property of Keplerian Orbits*, Amer. J. Math. **99**, 961–971.
- [8] 萩原雄祐, 1976, 天体力学の基礎, p.164, 生産技術センター
- [9] Heggie, D.C., 2000, *A New Outcome of Binary-Binary Scattering*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **318**, L61–L63.
- [10] Kapela, T., and Zgliczyński, P., 2003, *The Existence of Simple Choreographies for the N -body Problem — a computer assisted proof*, Nonlinearity, **16**, 1899–1918.
- [11] Marchal, C., 2002, *How the Method of Minimization of Action Avoids Singularities*, Celest. Mech. Dynam. Astron. **83**, 325–353.
- [12] Moore, C., 1993, *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675–3679.
- [13] Montgomery, R., 2001, *A New Solution to the Three-Body Problem*, Notices AMS **48**, 471–481.
- [14] Palais, R., 1979, *The Principle of Symmetric Criticality*, Comm. Math. Phys. **69**, 19–30.
- [15] Schubart, J., 1956, *Numerische Aufsuchung Periodischer Lösungen im Dreikörperproblem*, Astron. Nachr. **283**, 17–22.
- [16] Simó, C., 2000, *Choreographies of the Planar Three Body Problem*, <http://www.maia.ub.es/dsg/3body.html>
- [17] Simó, C., 2000, *N -body Choreographies*, <http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>
- [18] Simó, C., 2001, *New Families of Solutions in N -body Problems*, Proceedings of European Congress of Mathematics (Barcelona), Progress in Math. **201**, Birkhauser, 101–115.
- [19] Simó, C., 2002, *Dynamical Properties of the Figure Eight Solution of the Three-Body Problem*, Contemp. Math. **292**, 209–228.
- [20] Wintner, A., 1941, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math. series, vol. 5, Princeton Univ. Press, chap. 5.

New Periodic Solutions of the 2n-body Problem

Mitsuru Shibayama

1 Main theorem

Consider 2n-body problem with equal masses in the plane:

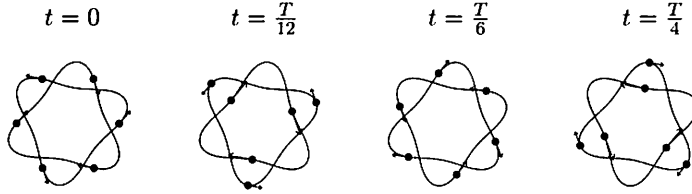
$$\ddot{x}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \quad x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbf{R}^2 = \mathbf{C} \quad (1)$$

Main Theorem. For any $T > 0$ and each $n = 3, 4, 5$, there is a T -periodic solution $x_1, \dots, x_{2n}$ of the 2n-body problem(1) that satisfies the following properties: There is a smooth closed curve $\alpha_1 : [0, T] \rightarrow \mathbf{C}$ such that let $\bar{T} = \frac{T}{n}$, $\alpha_2(t) = \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right) \alpha_1(-t)$, then

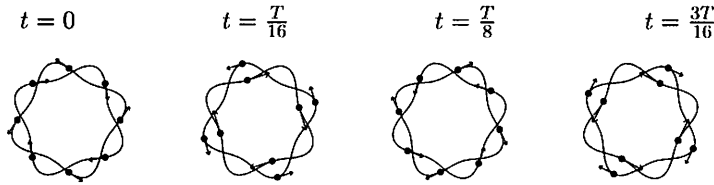
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1(t), \quad x_2(t) = \alpha_1(t + \bar{T}), \dots, \quad x_n(t) = \alpha_1(t + (n-1)\bar{T}) \\ x_{n+1}(t) &= \alpha_2(t), \quad x_{n+2}(t) = \alpha_2(t + \bar{T}), \dots, \quad x_{2n}(t) = \alpha_2(t + (n-1)\bar{T}). \end{aligned}$$

Further curve α_1 is invariant under the action of the dihedral group D_n , its angular momentum is always positive (i.e. $\alpha_1 \wedge \dot{\alpha}_1 > 0$).

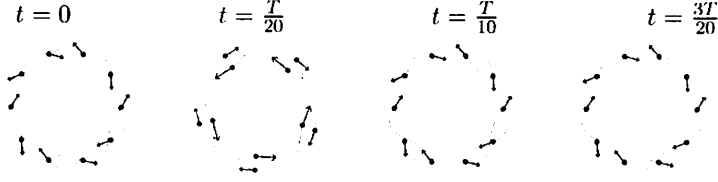
example 1.1. The case of n=3(6body)



example 1.2. The case of n=4(8body).



example 1.3. The case of $n=5$ (10body)



2 Proof

2.1 Symmetry

We will discuss the case of general n . Give $2n$ -body problem the following restriction:

$$\begin{aligned} x_2 &= \omega x_1, & x_3 &= \omega x_2, & \cdots, & x_n &= \omega x_{n-1} \\ x_{n+2} &= \omega x_{n+1}, & x_{n+3} &= \omega x_{n+2}, & \cdots, & x_{2n} &= \omega x_{2n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

where $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, which means that $x_1, \dots, x_n$ and $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ always form vertices of regular n -gon. Under the restriction of (2), let $q_1 = x_1, q_2 = x_{n+1}$, then the equation(1) become

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \ddot{q}_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} \end{cases} \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2) &= a_n \left(\frac{1}{|q_1|} + \frac{1}{|q_2|} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{|q_1 - \omega^j q_2|} \\ &\quad \left(a_n = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|\sin \frac{\pi j}{n}|} \right). \end{aligned}$$

Conversely if for the solution of the new equation(3) we define $x_1, \dots, x_{2n}$ by the symmetry (2) and $q_1 = x_1, q_2 = x_{n+1}$, then it becomes the solution of $2n$ -body problem(1).

Let Lagrangian be

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= \frac{1}{2} K(\dot{q}_1, \dot{q}_2) + U(q_1, q_2) \\ (K(\dot{q}_1, \dot{q}_2) &:= |\dot{q}_1|^2 + |\dot{q}_2|^2). \end{aligned}$$

Then the equation (3) is equivalent with the variational problem about the following action integral.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \{ \mathbf{q} : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^4 \} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{q} &\longmapsto \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Quotient space and variational problem there

We consider the action of S^1 to $\mathbf{C}^2$. Define the action by

$$z \cdot (q_1, q_2) = (zq_1, zq_2), \quad z \in S^1, (q_1, q_2) \in \mathbf{C}^2.$$

Consider the quotient space $\mathbf{C}^2/S^1$ by the action. The following map realize the projection to $\mathbf{C}^2/S^1$.

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{C}^2/S^1 (\text{homeo., diffeo. except } (q_1, q_2) = (0, 0)) \\ (q_1, q_2) &\longmapsto (u_1, u_2, u_3) := (|q_1|^2 - |q_2|^2, 2\Re(q_1 \bar{q}_2), 2\Im(q_1 \bar{q}_2)) \end{aligned}$$

The potential energy U is well-defined on $\mathbf{R}^3 \cong \mathbf{C}^2/S^1$. In fact

$$\begin{aligned} U(u_1, u_2, u_3) &= \sqrt{2} a_n \left(\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|} + u_1} + \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|} - u_1} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{u}\| - u_2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - u_3 \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}} \\ (u_1, u_2, u_3) &\in \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

In other hand, we decompose the kinetic energy to the sum of two components:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= K_{red}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + K_{rot}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in T\mathbf{C}^2 \\ K_{red}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &:= \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{(\mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{q}})^2}{\|\mathbf{q}\|^2}, \quad K_{rot}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{(\mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{q}})^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \end{aligned}$$

where $\mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{q}} = \Im(q_1 \bar{\dot{q}}_1 + q_2 \bar{\dot{q}}_2)$ (i.e. total angular momentum). K_{red} is well-defined on the quotient space. In fact

$$K_{red}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\|\dot{\mathbf{u}}\|^2}{4\|\mathbf{u}\|} \quad (\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \in T\mathbf{R}^3.$$

In other hand, if angular momentum is 0, then K_{rot} is also 0.

2.3 Construction of the solution

In the quotient space the subsets which mean collisions are

$$\begin{aligned} A_{\pm} &:= \{(\pm s, 0, 0) \mid s \in \mathbf{R}_{\geq 0}\} \\ B_{2j} &:= \left\{ \left(0, s \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), s \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right) \mid s \in \mathbf{R}_{\geq 0} \right\} \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$A_{\pm}$ represent such collisions that a regular n -gon collapses into a origin. B_{2j} represent such collisions that two regular n -gons are one on the top of the other. And

$$B_{2j-1} := \left\{ \left(0, s \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right), s \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) \right) \mid s \in \mathbf{R}_{\geq 0} \right\} \quad (j = 1, \dots, n)$$

mean that all articles form vertices of regular $2n$ -gon. The planes

$$C_{2j} := \left\langle (1, 0, 0), \left(0, \cos \left(\frac{\pi j}{n} \right), \sin \left(\frac{\pi j}{n} \right) \right) \right\rangle \quad (j = 1, \dots, 2n)$$

mean that two regular n -gon are positive scalar times each other. Let

$$\Lambda = \{ \mathbf{u} : [0, \bar{T}] \rightarrow \mathbf{R}^3 | \mathbf{u}(0) \in B_1, \mathbf{u}(\bar{T}) \in C_0 \}, \quad (5)$$

then we can apply theory of variation(direct method) to see the existence of minimizer on Λ . Take the minimizer on Λ . i.e. it is $\mathbf{u}_* \in \bar{\Lambda} = \Lambda$ satisfies $\inf_{\mathbf{u} \in \Lambda} \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}_*)$.

Then by the first variational formula, we can get

$$\dot{\mathbf{u}}_*(0) \perp B_1, \quad \dot{\mathbf{u}}_*(\bar{T}) \perp C_0. \quad (6)$$

Therefore the curve $\mathbf{u}_*$ can be extended in any length. Consequencely we can get closed curve which rewrite $\mathbf{u}_*$. It must be curve to which π project a solution of equation(3).

2.4 The behavior of the solution

Using the symmetry and $K_{rot} \equiv 0$, we can prove the following properties.

Proposition 2.1. *Let*

$$\pi(q_1, q_2) = \mathbf{u}_*, \quad K_{rot}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \equiv 0,$$

then

$$q_1(t + 4\bar{T}) = \exp \left(\frac{2\pi i}{n} \right) q_1(t), \quad (7)$$

$$q_2(t + 4\bar{T}) = \exp \left(-\frac{2\pi i}{n} \right) q_2(t), \quad (8)$$

$$q_1(t) = \exp \left(-\frac{\pi i}{n} \right) q_2(-t) \quad (9)$$

$$q_1 \wedge \dot{q}_1 > 0, \quad q_2 \wedge \dot{q}_2 < 0 \quad (10)$$

2.5 The exclusion of the collision

To prove that the minimizer is collision-free, it is enough to show that there exists a $\mathbf{u}_{test} \in \Lambda$ such that

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_{test}) < \mathcal{A}(\mathbf{u}_{col}),$$

for any collision curve $\mathbf{u}_{col} \in \Lambda$. Because if it is found, then by

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_*) \leq \mathcal{A}(\mathbf{u}_{test}) < \mathcal{A}(\mathbf{u}_{col}),$$

$\mathbf{u}_*$ must not have collision. We estimate $\mathcal{A}(\mathbf{u}_{col})$ mathematically. And we use a numerical solution as $\mathbf{u}_{test}$ and compute $\mathcal{A}(\mathbf{u}_{test})$ by computer assisted proof. The result is the following. Let $\bar{T} = 1$.

$$M_n < \mathcal{A}(\mathbf{u}_{col}) \\ I_n < \mathcal{A}(\mathbf{u}_{test}) < S_n$$

n	I_n	S_n	M_n
3	3.2551	3.2556	3.46184
4	3.5938	3.5946	3.68317
5	3.8345	3.8355	3.84426

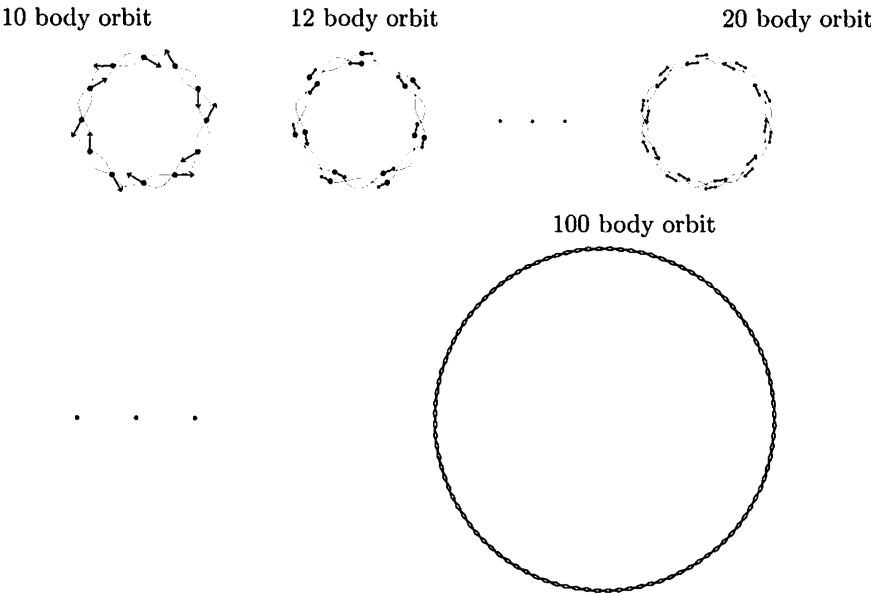
□

3 Extensions

The proof of the following conjectures is done once possibility of collision is excluded.

3.1 General $2n$ -body

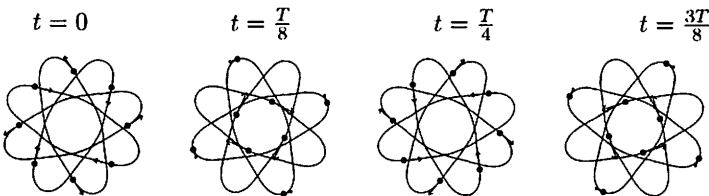
example 3.1. The case of $n = 6, 7, \dots, 10, \dots, 50(12, 14, \dots, 20, \dots, 100\text{body})$

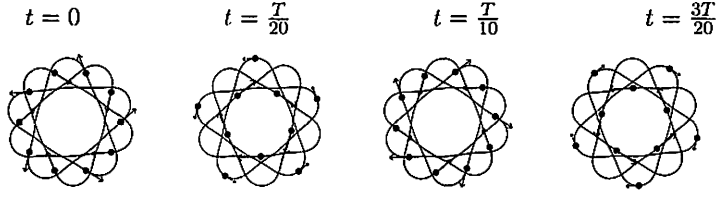


3.2 The other boundary condition

Taking the other C_j instead of C_0 ,

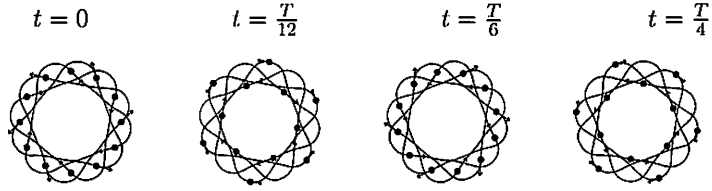
example 3.2. The case of $n=4(8\text{body})$



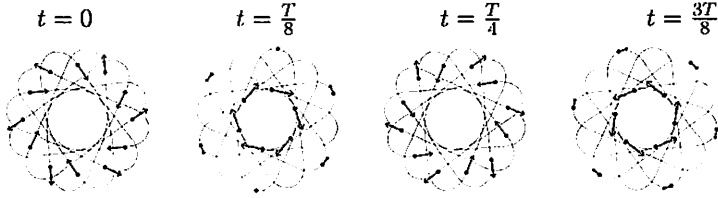


example 3.3. The case of $n=5$ (10body)

example 3.4. The case of $n=6$ (12body)



example 3.5. The case of $n=6$ (12body)



3.3 $2n + 1$ -body

We put another particle with any mass on the center of the previous orbit, so we can get odd body orbits.

3.4 The case of non-equal masses

$x_1, \dots, x_n$ have mass 1. $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ have mass m ($m \geq 0$). It was thought that there exist similar orbits. They probably converge to the trivial circular motion for n body as $m \rightarrow 0$

References

- [1] K. -C. Chen, Action-minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses, *Arch. Rational Mech. Ann.* **158**(2001), 293-318
- [2] K. -C. Chen, Binary decompositions for planar N-body problems and symmetric periodic solutions. *Arch. Rational Mech. Ann.* **170** (2003), 247-276.
- [3] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.* **152**(2000), 881-901.
- [4] D. Ferrario and S. Terracini, On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem, preprint, <http://arxiv.org/abs/math.DS/0302022>
- [5] T. Kapela and P. Zgliczyński, The existence of simple choreographies for N-body problem - a computer assisted proof, *Nonlinearity*, **16** (2003), 1899-1918. 1993.
- [6] R. Montgomery, A new solution to the three-body problem, *Notice of Amer. Math. Soc.*, **48**(5)(2001), 471-481.
- [7] C. Simó, New families of solutions in n-body problems, *Euro. Cong. of Math.*, **1** (Barcelona, 2000), 101-115.
- [8] <http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>(animation of choreography)
- [9] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Second edition.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Classical Coulomb Three-Body Problem: One Dimensional and Two Dimensional

Mitsusada M. SANO

sano@phys.h.kyoto-u.ac.jp

*Graduate School of Human and Environmental Studies,
Kyoto University,
Sakyo, Kyoto 606-8501 JAPAN*

ABSTRACT

McGehee's blow up technique is applied to classical Coulomb three-body problem. The dynamics of a series of atom and ions, i.e., H^- , He , Li^+ , Be^{2+} , ... are examined. First the two dimensional case with infinite nucleus mass is considered (i.e., Born-Oppenheimer approximation). A set of regularized equations of motion is derived and the triple collision manifold(TCM) is constructed. Compared with the case of celestial mechanics, the TCM for the Coulomb system differs from that for celestial mechanics. In the collinear configuration, both TCMs are topologically equivalent. But in the isosceles configuration, they are different drastically. This difference is due to the repulsive interaction between electrons. Second the collinear eZe configuration with finite masses is considered. With the analytical result and the numerical computation, it is elucidated that the dynamics on the TCM ($E = 0$ or $r = I^{1/2} = 0$) determines the dynamics for $E < 0$ (negative total energy), where I is the moment of inertia. In particular, it is shown that for sufficiently large mass ratio $\xi = m_n/m_e$, the dynamics in the collinear eZe configuration is hyperbolic. m_n and m_e are the mass of nucleus and the mass of electron, respectively. This situation holds for H^- , He , Li^+ , Be^{2+} , Thus, it implies that the dynamics of these atom and ions in the collinear eZe configuration is hyperbolic.

1 Two dimensional case with infinite nucleus mass

The system consists of two electrons(negatively charged, charge 1) and one nucleus(positively charged, charge Z). We assume that the nucleus has infinite mass. The Hamiltonian in a dimensionless form in the hyperspherical coordinates with zero total angular momentum is given by

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left\{ p_r^2 + \frac{4}{r^2} p_\theta^2 + \frac{4p_\alpha^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} + \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} - \frac{1}{Z(1 - \sin(\theta) \cos(\alpha))^{1/2}} \right\} \\ &= T + \frac{1}{r} V(\theta, \alpha), \end{aligned} \tag{1.1}$$

where

$$V(\theta, \alpha) = -\frac{1}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} - \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} + \frac{1}{Z(1 - \sin(\theta) \cos(\alpha))^{1/2}}. \tag{1.2}$$

where $r_1 = r \cos(\frac{1}{2}\theta)$ (or $r_2 = r \sin(\frac{1}{2}\theta)$) represents the distances between nucleus and electron 1 (or 2). $r = (r_1^2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}}$ is the hyperradius. $\theta = \arctan(r_2/r_1)$ is the hyperangle which is valued as $0 \leq \theta \leq \pi$. α is the angle between the vector from the nucleus to the electron 1 and the vector from the nucleus to the electron 2. We employ the scaling transformation

$$u = r^{1/2}p_r, \quad x = r^{-1/2}p_\theta, \quad w = r^{-1/2}p_\alpha, \quad (1.3)$$

and the time transformation $d\tau = r^{-3/2}dt$ (i.e., the McGehee's blow-up transformation)[3]. In order to regularize binary collisions between nucleus and electron, we set

$$v = \sin(\theta)x, \quad (1.4)$$

and employ the time transformation.

$$\frac{d\tau}{dt'} = \sin(\theta). \quad (1.5)$$

The energy relation finally becomes

$$\sin^2(\theta)u^2 + 4v^2 + 4w^2 + 2\sin^2(\theta)V(\theta, \alpha) - 2\sin^2(\theta)rE = 0. \quad (1.6)$$

The equations of motion are given by

$$\frac{dr}{dt'} = \sin(\theta)ru, \quad (1.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt'} = 4v, \quad (1.8)$$

$$\frac{d\alpha}{dt'} = \frac{4w}{\sin(\theta)}, \quad (1.9)$$

$$\frac{du}{dt'} = -\sin(\theta) \left(\frac{1}{2}u^2 + V(\theta, \alpha) - 2rE \right), \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt'} = & -\sin(\theta) \cos(\theta)(u^2 + 2V(\theta, \alpha) - 2rE) \\ & - \frac{1}{2} \sin(\theta)uv - \sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} V(\theta, \alpha), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{dw}{dt'} = -\frac{1}{2} \sin(\theta)uw - \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \alpha} V(\theta, \alpha). \quad (1.12)$$

For the detail of the derivation, see [5]. The triple collision manifold (TCM) is obtained by setting $r = 0$ and/or $E = 0$ in Eq.(1.6).

$$\sin^2(\theta)u^2 + 4v^2 + 4w^2 + 2\sin^2(\theta)V(\theta, \alpha) = 0. \quad (1.13)$$

The flow on the TCM is given by

$$\frac{d\theta}{dt'} = 4v, \quad (1.14)$$

$$\frac{d\alpha}{dt'} = \frac{4w}{\sin(\theta)}, \quad (1.15)$$

$$\frac{du}{dt'} = -\sin(\theta) \left(\frac{1}{2}u^2 + V(\theta, \alpha) \right), \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt'} = & -\sin(\theta) \cos(\theta)(u^2 + 2V(\theta, \alpha)) \\ & - \frac{1}{2} \sin(\theta)uv - \sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} V(\theta, \alpha), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\frac{dw}{dt'} = -\frac{1}{2} \sin(\theta)uw - \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \alpha} V(\theta, \alpha). \quad (1.18)$$

The total flow Eq.(1.7-1.12) has only two equilibrium points.

$$(r, \theta, \alpha, u, v, w) = \left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, u^{(+)}, 0, 0\right) \text{ and } \left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, u^{(-)}, 0, 0\right). \quad (1.19)$$

where $u^{(\pm)} = \pm \sqrt{-2V(\frac{\pi}{2}, \pi)}$. This is very different from the case of celestial mechanics. If we restrict the system to the collinear eZe configuration (i.e., $\alpha = \pi$), the corresponding TCM is topologically equivalent to sphere with four holes.

$$\sin^2(\theta)u^2 + 4v^2 + 2\sin^2(\theta)V(\theta, \alpha = \pi) = 0. \quad (1.20)$$

This is identical to one obtained by Bai, Gu and Yuan[1]. It is topologically equivalent to the McGehee's result in celestial mechanics [3]. However, if we restrict the system to the isosceles configuration (i.e., $\theta = \frac{\pi}{2}$)¹, the corresponding TCM is topologically equivalent to sphere.

$$u^2 + 4w^2 + 2V(\theta = \frac{\pi}{2}, \alpha) = 0. \quad (1.21)$$

This is very different from the isosceles case of celestial mechanics investigated by Devaney[2]. This difference comes from the repulsive interaction between electrons. This is essential difference between celestial system and Coulomb system.

Our analysis is based on the assumption that the nucleus has infinite mass. Thus, we can not immediately conclude about the existence of non-collisional singularities in Coulomb system. However, Xia's example of non-collisional singularity in celestial mechanics is found by examine the TCM for the isosceles configuration. Therefore, if for the system with finite masses, the TCM for the isosceles case in Coulomb system topologically differs from that of the isosceles case in the celestial mechanics, it can be expected that Xia's type of non-collisional singularities does not exist for Coulomb system.

2 One dimensional case with finite masses

We consider the system which consists of two electrons and one nucleus with charge Z . We set that the mass of electron is 1 and the mass of nucleus is ξ . Assume that

¹In atomic physics, this configuration is called the Wannier ridge configuration.

three particles are on a line with the order eZe, namely electron-nucleus-electron(1-2-3). After certain scaling which is typical for Coulomb system, the Hamiltonian is given by

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2\xi} + \frac{p_3^2}{2} - \frac{1}{|q_1 - q_2|} - \frac{1}{|q_3 - q_2|} + \frac{1}{Z|q_3 - q_1|}. \quad (2.1)$$

We employ McGehee's original transformation to this Hamiltonian system. For the detail of the derivation, see [3] and [4]. Fixing the total momentum and the center of mass, six variables are mapped to four variables, namely $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \mapsto (r, s, v, w)$. r is the square root of the moment of inertia $I = q_1 + \xi q_2 + q_3$, i.e., the size of the configuration of three particle. The variable s parametrizes the configuration of three particles. s is valued as $s \in [-1, 1]$. When $s = -1$ (or 1), the particle 1(or 3) collides with the particle 2, respectively. v and w are the functions of momenta p_1 , p_2 , and p_3 . After McGehee's transformation, we have the following energy relation.

$$1 - s^2 - w^2 = \frac{(1 - s^2)^2}{W(s)}(v^2 - 2rE). \quad (2.2)$$

The equations of motion become

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\lambda(1 - s^2)}{W(s)^{1/2}}rv, \quad (2.3)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2}W(s)^{1/2} \left[1 - \frac{1 - s^2}{W(s)}(v^2 - 4rE) \right], \quad (2.4)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = w, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & -s + \frac{2s(1 - s^2)}{W(s)}(v^2 - 4rE) + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)}(1 - s^2 - w^2) \\ & - \frac{\lambda(1 - s^2)}{2W(s)^{1/2}}vw. \end{aligned} \quad (2.6)$$

The TCM is obtained by setting $r = 0$ and/or $E = 0$.

$$w^2 + s^2 + (1 - s^2)^2 W(s)^{-1} v^2 = 1, \quad (2.7)$$

where

$$\begin{aligned} W(s) = & 2(1 - s^2) \sin(2\lambda) \left[\frac{1}{(b_2 - b_1) \sin(\lambda(1 + s))} \right. \\ & + \frac{1}{(a_3 - a_2) \sin(\lambda(1 - s))} \\ & \left. - \frac{1}{Z\{(b_2 - b_1) \sin(\lambda(1 + s)) + (a_3 - a_2) \sin(\lambda(1 - s))\}} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\cos(2\lambda) = \frac{1}{\xi + 1}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}}, -\frac{1}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}}, \frac{1 + \xi}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}} \right), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1 + \xi}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}}, \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}}, \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi)(2 + \xi)}} \right). \quad (2.11)$$

The TCM is topologically equivalent to sphere with four holes. The schematic figure is given in Fig.1(a). The flow on the TCM is given by

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2} W(s)^{1/2} \left[1 - \frac{1-s^2}{W(s)} v^2 \right], \quad (2.12)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = w, \quad (2.13)$$

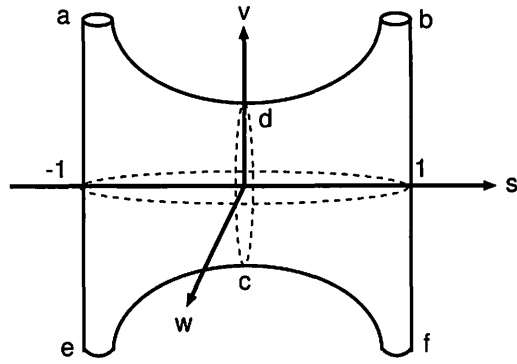
$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & -s + \frac{2s(1-s^2)}{W(s)} v^2 + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)} (1-s^2-w^2) \\ & - \frac{\lambda}{2} \frac{1-s^2}{W(s)^{1/2}} vw. \end{aligned} \quad (2.14)$$

For $E < 0$, the orbits run on and/or inside the TCM. For $E > 0$, the orbits run on and/or outside the TCM. For $E = 0$, the orbits run just on the TCM. The total flow has two equilibrium points. The result of the stability analysis of these two equilibrium points is summarized in Fig.1(b). One unstable manifold and one stable manifold of two equilibrium points are just on the TCM. These wind around the TCM. We are interested in the ξ -dependence of the dynamics of this system. The following thing is an important property: **When $\xi \rightarrow 0$, the flow on the TCM winds around the body of the TCM infinitely often.**

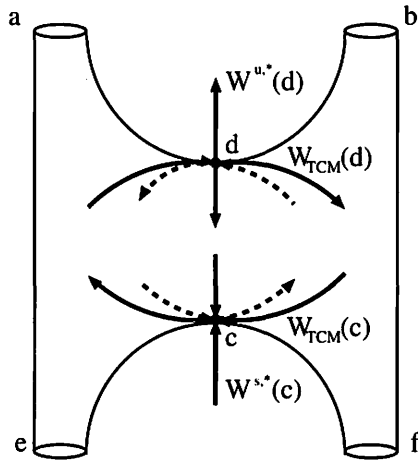
For actual atomic system, ξ is large, namely the opposite limit of the above property. We numerically calculate one branch of the unstable manifold on the TCM (we call $\mathcal{W}^{usm,(1)}(c)$) of the equilibrium point c . Numerical calculation shows that larger ξ , less often $\mathcal{W}^{usm,(1)}(c)$ winds around the body of the TCM. The winding number of $\mathcal{W}^{usm,(1)}(c)$ around the body of the TCM (we call this $W(\mathcal{W}^{usm,(1)}(c))$) is actually almost saturated for relatively small ξ , i.e., $\xi \sim O(10)$ for $Z = 1, 2, 3, 4, 5$.

Next let us elucidate the geometrical structure of the triple collision orbits. By labeling binary collisions, we can construct a symbolic dynamics for our system. Using the method of [7, 8], we can specify the position of the triple collision orbits on the Poincaré section. For instance, the Poincaré section is taken at $s = 0$ plane in (s, v, w) -coordinates. For the system with $\xi = 1$ and $Z = 1$ (this corresponds to positronium negative ion), there are two tori on the Poincaré section $s = 0$ which are connected inside of the TCM. These tori probably correspond to the Schubart orbits in celestial problem[6]. Triple collision orbits form curves on the Poincaré section. We call these curves the triple collision curves. Triple collision orbits experience triple collisions in past and/or in future. The triple collision curves which experience triple collision in future ($\mathcal{C}_{TC}$) and the triple collision curves which experience triple collision in past ($\mathcal{C}_{TC}^t$) cross each other on the Poincaré section except near the tori. The triple collision curves are accumulated at ten points in the Poincaré section. The accumulation points are just on the TCM, i.e., $w^2 + W(0)^{-1}v^2 = 1$. These accumulation points are just on the stable and unstable manifolds of two equilibrium points c and d on the TCM. It is numerically confirmed that the unstable manifolds on the Poincaré section are near parallel to $\mathcal{C}_{TC}$ and the stable manifolds on the Poincaré section are near parallel to $\mathcal{C}_{TC}^t$. Thus the crossings between $\mathcal{C}_{TC}$ and $\mathcal{C}_{TC}^t$ implies hyperbolicity for the Poincaré map. Thus near the tori, the crossing of them is avoided. The tori are the defects in the web structure of $\mathcal{C}_{TC}$ and $\mathcal{C}_{TC}^t$. In Fig.2, the triple collision curves are depicted for $(Z, \xi) = (1, 1)$.

In Fig.3(a), we depict the triple collision curves for $(Z, \xi) = (1, 7)$. The triple collision curves transversely cross each other. In Fig.3(b), $\mathcal{W}^{usm,(1)}(c)$ is depicted



(a)



(b)

Fig. 1— Triple collision manifold: (a)Triple collision manifold. There are two equilibrium points c and d . (b) Stable and unstable manifolds of the equilibrium points c and d . [Reprinted with permission from M.M.Sano, *Journal of Physics A: Mathematical and General* Vol. 37 (2004), p. 803, "The classical Coulomb three-body problem in the collinear eZe configuration", Copyright ©(2004) IOP Publishing Ltd.]

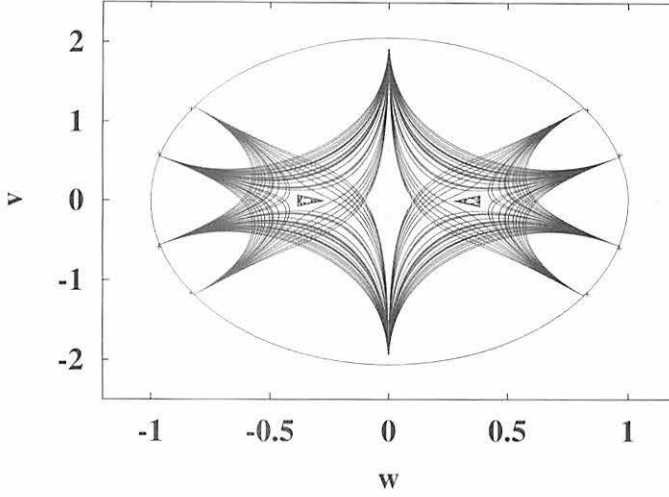


Fig. 2— Triple collision curves on the Poincaré section: $(Z, \xi) = (1, 1)$. [Reprinted with permission from M.M.Sano, *Journal of Physics A: Mathematical and General* Vol. 37 (2004), p. 803, "The classical Coulomb three-body problem in the collinear eZe configuration", Copyright ©(2004) IOP Publishing Ltd.]

together with the triple collision curves on the Poincaré section for $(Z, \xi) = (1, 7)$. It is clearly seen that the number of the accumulation points is six and the accumulation points are the crossing points of $\mathcal{W}^{usm,(1)}(c)$ with $s = 0$.

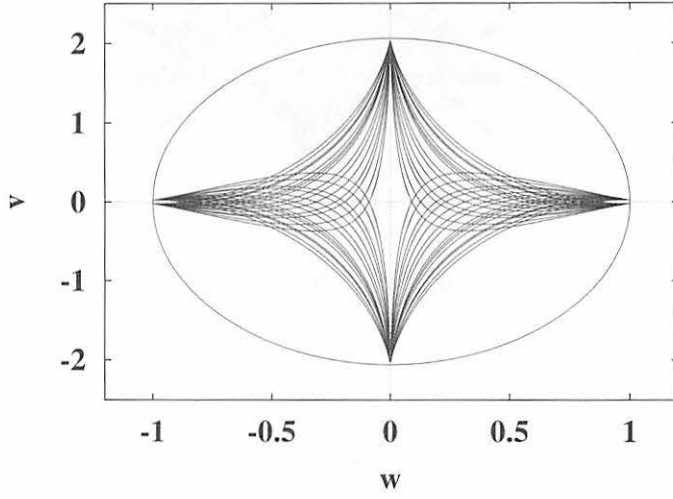
For the system with large ξ , for instance He, $\mathcal{C}_{TC}$ and $\mathcal{C}_{TC}^t$ cross transversally. There is no defect, i.e., no torus. In this case, the accumulation points are six. For Helium, these accumulation points are also just on the stable and unstable manifolds of two equilibrium points c and d on the TCM. The winding number $W(\mathcal{W}^{usm,(1)}(c))$ around the body of the TCM is decreased compared with the case of $\xi = 1$ and $Z = 1$. Therefore, the winding number $W(\mathcal{W}^{usm,(1)}(c))$ monitors the dynamics inside the TCM (i.e., $E < 0$), especially the existence of tori.

We summarize the results from numerical investigation.

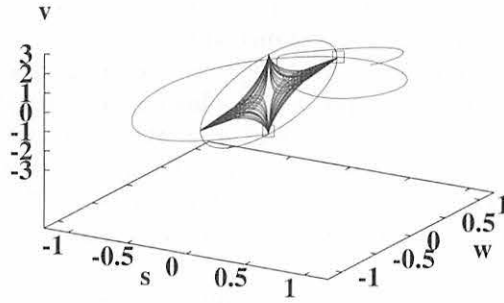
Conjecture 1: There exists the threshold value $\xi_c(Z)$ such that for $\xi > \xi_c(Z)$, the system is hyperbolic.

This implies that the classical dynamics of $H^-, He, Li^+, Be^{2+}, \dots$ in the collinear eZe configuration is hyperbolic.

Conjecture 2: At $\xi = \xi_c(Z)$, the stable manifold on the TCM of the equilibrium point c degenerates the unstable manifold on the TCM of the equilibrium point d . At $\xi = \xi_c(Z)$, the unstable manifold on the TCM of the equilibrium point c degenerates the stable manifold on the TCM of the equilibrium point d . Thus, at $\xi = \xi_c(Z)$, they totally degenerate (heteroclinic connection).



(a)



(b)

Fig. 3— Triple collision curves and unstable manifold of the critical point c : (a)Triple collision curves on the Poincar'e section: $(Z, \xi) = (1, 7)$ (b) one branch of the unstable manifold of the critical point c and triple collision curves. [Reprinted with permission from M.M.Sano, *Journal of Physics A: Mathematical and General* Vol. 37 (2004), p. 803, "The classical Coulomb three-body problem in the collinear eZe configuration", Copyright ©(2004) IOP Publishing Ltd.]

The detail in this section is found in [4] and [5].

Acknowledgements

The author thanks Professor Kiyotaka Tanikawa for enlighting discussions on three-body problems in celestial mechanics.

References

- [1] Z.-Q. Bai, Y. Gu and J.-M. Yuan, *Physica D* **118**, 17 (1998).
- [2] D.L. Devaney, *Invent.Math.* **60**, 249 (1980).
- [3] R. McGehee, *Invent. Math.* **27**, 191 (1974).
- [4] M.M. Sano, *J.Phys.A* **37**, 803 (2004).
- [5] M.M. Sano, “Classical Coulomb Three-Body Problem”, the proceedings of the conference “Geometrical Structures of Phase Space in Multi-Dimensional Chaos: Applications to Chemical Reaction Dynamics in Complex Systems”, Kyoto Japan, 2003, to appear in *Adv.Chem.Phys.* (2005).
- [6] J. Schubart, *Astron.Nachr.* **283**, 17 (1956).
- [7] K. Tanikawa and S. Mikkola, *Celst.Mech.Dyn.Astron.* **76**, 23 (2000).
- [8] K. Tanikawa and S. Mikkola, *Chaos* **10**, 649 (2000).
- [9] Z. Xia, *Ann.Math.* **135**, 411 (1992).

Structure Change of the Poincaré Section due to the Mass Change in the Rectilinear Three-body Problem

¹Masaya Masayoshi Saito and ²Kiyotaka Tanikawa

^{1,2}*Department of Astronomical Science, SOKENDAI the graduate university, Osawa 2-21-1,
Mikata, Tokyo, JAPAN*

^{1,2}*Department of Theoretical Astronomy, National Astronomical Observatory, Osawa 2-21-1,
Mikata, Tokyo, JAPAN*

ABSTRACT

In this paper, we deal with the system of gravitational Newtonian three bodies on a line. We introduce symbol sequences representing the collisional history of orbits and study the change of the Poincaré section due to the change of masses of the system.

1 Introduction

A three-body system consists of three particles that attract each other according to the Newton law. The motion of the three-body system is generally chaotic and unstable in the sense that its behavior has sensitive dependence on initial conditions. This chaotic property is considered to come from violent phenomena related to triple collision. In order to systematically study the chaotic property, one usually takes systems with special symmetry with zero angular momentum. The rectilinear three-body system, where three particles move on a line, is one of such symmetric systems. This system with two degrees of freedom is the target of the present study.

For a fixed value of energy, the phase space of the system is a three-dimensional hyper-surface. So, if we take an appropriate two-dimensional surface, most of the solution curves cross this surface. The choice of this Poincaré surface of section is described in [1]. The structure on the section has been studied using the Poincaré map([4]; hereafter HM1993). According to HM1993, the Poincaré section is divided into three basic regions. First, there exists the Schubart region which is the stable region for the periodic orbit called the Schubart orbit. The Schubart region is surrounded by the chaotic scattering region where the interplay time is so sensitive to the initial values that HM1993 could not see any structure in this region. Further outside, there exists the fast escaping region where the system disintegrates into a binary and a single particle after several binary collisions. This region consists of scallop-like sub-regions. The number of sub-regions increases with the decrease of the mass of the central particle (HM1993).

Tanikawa and Mikkola([5]; hereafter TM2000a) studied the structure of the Poincaré section for the equal mass case using symbol sequences which record the collisional history of orbits. In fact, TM2000a used the Poincaré section as the initial condition surface and associated with each point of the surface its future history including

¹saitohms@cc.nao.ac.jp

²tanikawa@exodus.mtk.nao.ac.jp

the final motion. Then, TM2000a succeeded in showing that the chaotic scattering region is filled with points whose orbits end up with triple collision and that these points form well stratified curves. The TM2000a's fine structure of the Poincaré section for the equal mass case shows that (1) stratified triple collision curves make a *sector* together with the sub-region of the chaotic scattering region below the strata; (2) four sectors surround the Schubart region. The number of the sectors seems to increase together with the number of the sub-regions of the fast escaping region[5] as the mass of the central particle decreases.

The purpose of the present report is to confirm this conjecture and to describe the change of features of the surface of section.

2 Method

We introduce the equations of motion, the Poincaré section, and parameters describing masses of the particles (MH1989). Then, we introduce symbol sequences recording the collisional history of orbits (TM2000a).

Let (m_1, m_0, m_2) denote the masses of the three particles from the left on the line. Let (q_1, q_2) be the mutual distances $\overline{m_1 m_0}$ and $\overline{m_0 m_2}$, and (p_1, p_2) the conjugate momenta to (q_1, q_2) . The Hamiltonian H is written as

$$\begin{aligned} H &= K - U, \\ K &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) p_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) p_2^2 - \frac{p_1 p_2}{m_0} \\ U &= \frac{m_1 m_0}{q_1} + \frac{m_0 m_2}{q_2} + \frac{m_1 m_2}{q_1 + q_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

where K is the kinetic energy and U is the force function.

In this paper, we consider the case that total energy E is negative and set $E = -1$. We here adopt variables used in MH1989. For the convenience of the readers, we repeat the formulation. Let us consider the canonical transformation $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$, the time transformation $t \rightarrow t'$, and the function Γ which are defined in the following:

$$q_i = Q_i^2, \quad p_i = 2p_i Q_i \quad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

$$dt = q_1 q_2 dt' \tag{2.3}$$

$$\Gamma = q_1 q_2 (H - E). \tag{2.4}$$

Under these transformations, the equations of motion are transformed into the

canonical equations with the Hamiltonian Γ and independent variable t' , that is,

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_1}{dt'} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial P_1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) P_1 Q_2^2 - \frac{1}{4m_0} P_2 Q_1 Q_2 \\
 \frac{dQ_2}{dt'} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial P_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) P_2 Q_1^2 - \frac{1}{4m_0} P_1 Q_1 Q_2 \\
 \frac{dP_1}{dt'} &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_0} \right) P_2^2 Q_1 + \frac{1}{4m_0} P_1 P_2 Q_2 + \\
 &\quad 2m_0 m_2 Q_1 + 2m_1 m_2 \frac{Q_1 Q_2^4}{(Q_1^2 + Q_2^2)^2} + 2Q_1 Q_2^2 E \\
 \frac{dP_2}{dt'} &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) P_1^2 Q_2 + \frac{1}{4m_0} P_1 P_2 Q_1 + \\
 &\quad 2m_0 m_1 Q_2 + 2m_1 m_2 \frac{Q_1^4 Q_2}{(Q_1^2 + Q_2^2)^2} + 2Q_1^2 Q_2 E. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

The transformed equations (2.5) show that binary collision ($Q_1 = 0, Q_2 \neq 0$ or $Q_2 = 0, Q_1 \neq 0$) is regularised, whereas triple collision ($Q_1 = Q_2 = 0$) is still singular. The solution for (2.5) is continued beyond binary collision. A binary collision is interpreted as an elastic bounces in the physical coordinates.

The equations of motion allow a solution $q_1(t) = \Lambda q_2(t)$ for all t where Λ is a constant depending on masses. This is called the *homothetic solution*[9]. The intersection of the energy hyper-surface $H(q, p) = E$ and the hyper-surface $q_1 = \Lambda q_2$ is a two-dimensional surface. We take this surface as the Poincaré section Π . In the following, we introduce coordinates (θ, R) on Π . The variable R is defined by

$$R = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)|_{q_1 = \Lambda q_2}. \quad (2.6)$$

If R is given, the value of K is determined via $U(q_1, q_2)$: $K = E + U$ ($q_1 = 2\Lambda R/(1 + \Lambda)$, $q_2 = 2R/(1 + \Lambda)$). For this value of K , the parameter θ determines the ratio of $\dot{q}_1$ to $\dot{q}_2$:

$$\sqrt{K} \cos \theta = \sqrt{A - \kappa r_2^2} \dot{q}_1 - \sqrt{B - \kappa r_1^2} \dot{q}_2 \quad (2.7)$$

$$\sqrt{K} \sin \theta = r_2 \sqrt{\kappa} \dot{q}_1 - r_1 \sqrt{\kappa} \dot{q}_2, \quad (2.8)$$

where

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{m_1(m_0 + m_2)}{2M}, \quad B = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{2M}, \\
 r_1 &= \frac{2\tau}{\tau + 1}, \quad r_2 = \frac{2}{\tau + 1}, \quad \kappa = \frac{4AB - C^2}{4(Ar_1^2 + Br_2^2 + Cr_1r_2)}.
 \end{aligned}$$

We assume the total mass of the particles to be unity without loss of generality and introduce parameters (a, b) to represent the mass of the particles:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 1 - a - b, \quad m_0 = 1 + 2a, \quad m_2 = 1 - a + b, \\
 -0.5 &\leq a \leq 1.5, \quad 0 \leq b \leq 1.
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Here, we set $m_2 \leq m_1$, which corresponds to $b \leq 0$.

There are three types of collision in our system: left-centre ($q_1 = 0, q_2 \neq 0$), centre-right ($q_2 = 0, q_1 \neq 0$), and triple ($q_1 = 0 = q_2 = 0$) collisions. Let us denote these collisions by symbols '1', '2', and '0', respectively. An orbit of the extended equation (2.5) repeats binary collisions. These collisions can be recorded as the sequence of the symbols. We study the evolution of orbits using the symbol sequences instead of orbit itself. In our preliminary research[32], we introduced cylinders (sets of symbol sequences with given words where a word is a finite sequence of symbols) $S_{c,j}$ and S_c :

$$S_{c,j} \equiv \begin{cases} \{(21)^i(2)^j \cdots | i \geq 0, j \geq 1\} & \text{for } c = 2i + 1 \\ \{(21)^i(1)^j \cdots | i \geq 1, j \geq 1\} & \text{for } c = 2i \end{cases} \quad (2.10)$$

$$S_c \equiv \bigcup_{j < \infty} S_{c,j}. \quad (2.11)$$

The Schubart region is composed of the points whose symbol sequences belong to S_∞ , whereas sub-regions of the fast escaping region are $S_{1,\infty}, S_{2,\infty}, \dots$. We call the suffices of $S_{c,\infty}$ and S_c *region numbers*, and write these numbers in the Poincaré section to denote the corresponding regions.

Our research for the Poincaré section is based on numerical integration of orbits. The orbit integrations are carried out for

$$(\theta, R) = (180^\circ \times \frac{i}{540}, R_{\max} \times \frac{j}{300}), \text{ where } i = 0, \dots, 539, j = 1, \dots, 300.$$

The equation (2.5) is integrated by DIFSY1 routine which implements Bulirsch-Stoer method[11]. The integrations are stopped at the 64th digit of symbol sequences.

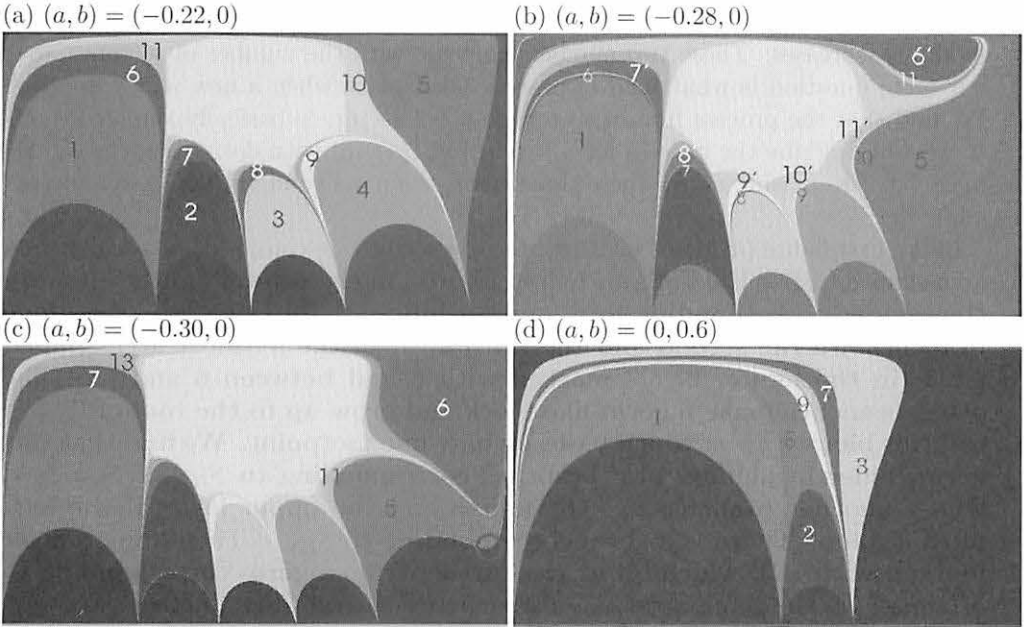


Figure 1 — The partition of the Poincaré Section

3 Numerical results and description of the change

In this section, we show the process that the structure of the Poincaré section Π changes as the mass parameter changes. Before we follow the process, we illustrate the typical structure of Π using Fig.1 where the horizontal and vertical axes correspond to $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ and $0 \leq R \leq R_{\max}$. Comparison of panels of Fig. 1 shows that the Poincaré section is divided into similar regions for different masses. The central green region is the Schubart region. Its symbol sequences match S_∞ . Numbers in the figures represent the suffices of S_c . Then, the distribution of these numbers shows that the chaotic scattering regions have well organized structures. Bottom regions of scallop-like form are the sub-regions of the fast escape region, that is, $S_{c,\infty}$, $c = 1, 2, 3, 4, 5$ for three panels (a), (b) and (c), whereas $c = 1, 2, 3$ for the panel (d) (regions with smaller c stay at smaller θ). Let us look at panel (a) ($a, b = (-0.22, 0)$) as an example. There are five sub-regions of the fast escaping region painted black. Above each of five sub-regions, numbered regions are piled up, and these together seem to make a unit. We call such a unit of regions a *sector* and the stratum of the piled-up regions the *chaotic scattering block* (CSB). There are five sectors and these sectors surround the Schubart region. A CSB is of arch-like shape and its two terminals are points on the θ -axis. There are the five such points, which we call *footpoints*. There is an important property for region numbers of a CSB. A CSB is composed of the regions whose numbers are mutually congruent modulo 5. For example, the leftmost CSB comprises the regions $S_1 \cup S_6 \cup S_{11} \cup \dots = \cup_{k=0}^\infty S_{5k+1}$.

We have shown the structures on the Poincaré section when the number of sectors is five. Although we do not show here figures, we have confirmed that there exist sectors for other mass parameters and their number increases as the central mass decreases. Corresponding to this, the number of footpoints and the number of modulus increases. These two numbers coincide with the number of sectors. Now, our main question is what kind of process takes place when a new sector appears. We find that the process from n sectors to $n + 1$ sectors is basically similar for any n , we will describe the process for $n = 5$ in Fig.1(a)–(c) with decreasing the central mass (i.e., decreasing a). In these three cases, the mass configuration is symmetric: $m_0 = m_2$.

In the first figure ($a, b = (-0.22, 0)$), the five sectors are composed of a scallop and arch-shaped CSBs. The CSBs are well stratified. In the second figure ($-0.28, 0$), the regions corresponding to S_6 and S_{11} bifurcate into two branches. One branches are the second and the third layer of the leftmost arch-shaped CSB (in the figure, layers marked with 6 and between 6 and 7'). The other branches make a germ-like block and grow up to the roof of Π . We call this block a *germ*, which bases on only one footpoint. We find that this germ, indeed, includes also branches corresponding to $S_{16}, \dots, S_{5k+1}, \dots$, whose another branches are the fourth and the upper layer of the leftmost scallop. There is a germ corresponding to $S_{11}, \dots$ (including a layer marked with 11'), which bifurcates further from a germ corresponding to $S_6, S_{11}, \dots$. The germs appear also around arch-shaped CSBs in other sectors. A germ is mapped to (the part of) another germ by Poincaré map[32]. The germ grows up to the roof and finally touches the θ -axis. The third figure ($-0.30, 0$) captures the situation right before the touch. The tip of the germ pushes down the fifth arch-shaped CSB from inside. The fifth CSB covers the roof of Π . When the tip touch the θ -axis, the tip becomes the new (sixth) footpoint and the germ becomes

the lowest stratum of the new arch-shaped CSB. Thereupon, the new CSB replaces the fifth CSB as the CSB covering the roof.

As we have seen in the above, the formation of the new CSB completes at the moment when the new footpoint appears. In [32] using McGehee's variable[10], we confirmed that a footpoint is an intersection of a triple collision orbit with the surface of section if an initial point tends to $\lim_{R \rightarrow 0}(R, \theta)$ and that a new footpoint appears at a mass parameter where the flow on the triple collision manifold is totally degenerate. Simo[8] found these mass parameters by means of numerical integration of McGehee's equations of motion.

Let us briefly remark on asymmetric mass cases where the right particle is heavier than the left particle. The structure of the Poincaré section changes in a similar manner if the number of sectors increases. However, regions with c even shrink or disappear as the mass asymmetry increases (i.e., b increases). We show a case $(a, b) = (0, 0.6)$ in Fig.1(d). The regions with even $c \geq 4$ disappears. The cylinder S_c with even c corresponds to the orbit for which the heavier particle m_2 is ejected. The shrinkage and disappearance of regions with even c imply that the heavier particle is hardly ejected in high asymmetric systems.

4 Conclusion

We have studied the process that the structure of the Poincaré section changes as varying the mass parameters. The Poincaré section is divided into the Schubart region and sectors surrounding it. A sector is composed of a scallop-like block (a sub-region of the fast escaping region) and arch-shaped CSB. We have obtained the following results:

- The region numbers of regions which compose of an arch-shaped CSB are mutually congruent modulo the number of sectors.
- As decreasing the central mass, a stratum of regions bifurcates from the left-most CSB. This stratum of germ-like shape grows until it becomes a new CSB.
- As decreasing the central mass further, the number of the CSBs increases one by one.

Acknowledgments

Numerical integration are carried out using the code developed by Prof. Seppo Mikkola. This code was executed on general common use computer system at the Astronomical Data Analysis Center, ADAC, of the National Astronomical Observatory of Japan, NAOJ. We would like to express our deepest gratitude to Prof. Seppo Mikkola and ADAC.

References

- [1] S.Mikkola and J.Hietarinta, A numerical investigation of the one-dimensional Newtonian three-body problem I, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 46, 1-18(1989)

- [2] S.Mikkola and J.Hietarinta, A numerical investigation of the one-dimensional Newtonian three-body problem II, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 47, 321-331(1990)
- [3] S.Mikkola and J.Hietarinta, A numerical investigation of the one-dimensional Newtonian three-body problem III, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 51, 379-394(1991)
- [4] J.Hietarinta and S.Mikkola (HM1993), Chaos in the one-dimensional gravitational three-body problem, *CHAOS* 3, 183-203(1993)
- [5] K.Tanikawa and S.Mikkola (TM2000a), Triple collisions in the one-dimensional three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 76, 23-34(2000)
- [6] K.Tanikawa and S.Mikkola, One-dimensional three-body problem via symbolic dynamics, *CHAOS* 10, 649-657(2000)
- [7] Saito & Tanikawa, Collinear Three-Body Problem with Non-Equal Masses by Symbolic Dynamics, *ASP Conference Series* 316, 63-69(2004)
- [8] C. Simó, Mass for which triple collision regularizable, *Celestial Mechanics* 21, 25-36(1980)
- [9] M.Irigoyen et F.Nahon, Les mouvements rectilignes dans le problème des trois corps lorsque la constante des forces vives est nulle, *Astronomy & Astrophysics* 17, 286-295(1972)
- [10] R.McGehee, Triple collision in the collinear three body problem, *Inventiones Mathematicae* 27, 191-227(1974)
- [11] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 722-724(1999)

標準写像における振動解 Oscillatory Orbits in the Standard Mapping

Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

*Teikyo Heisei University, Ichihara, Chiba, 290-0193, Japan
National Astronomical Observatory of Japan, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan*

ABSTRACT

Oscillatory motion is unbounded but returns infinitely many times to finite positions. The existence of this motion has been predicted and proved to exist in the three-body problem. In the present paper, we prove its existence in the standard mapping, using orbits of the accelerator mode and non-Birkhoff periodic orbits. This motion appears as soon as the last Kolmogorov-Arnold-Moser curve disintegrates. Ref.(22) is a complete version of this manuscript.

振動運動は非有界であるが、有限位置へ何度でも戻ってくる。この運動が存在することは三体問題で予想され、証明された。本論文では、標準写像にも存在することを証明する。証明には、加速モードの起動と非バーコフ周期解の存在を利用する。この運動はコルモゴロフ-アーノルド-モザー曲線が消失するやいなや出現する。参考文献 [22] には詳しい証明がある。

1 Introduction

Chazy¹⁾ は重力 3 体問題の解の分類において、非常に特殊な解（今日でいう振動解）が存在することを論理的な帰結として導いた。Sitnikov²⁾ は制限 3 体問題において振動解を始めて見出した。この系は質量の等しい 2 体が $x-y$ 平面上で楕円軌道を描いている。両者の重心に原点を置く。原点を通る z 軸上に質量がゼロの第 3 体を置く。Sitnikov は、この第 3 体の運動として振動解を与える初期条件が存在することを証明した。この問題は現在では Sitnikov 問題と呼ばれている。

標準写像における振動解を考えるにおいて、Sitnikov 問題は参考になるので簡単に紹介する。第 3 体は $x-y$ 平面を横切るときに他の 2 体よりより大きな力を受ける。この結果、第 3 体は加速されたり減速されたりする。特に加速された場合、第 3 体は $x-y$ 平面より遠くまで行って戻ってくる。場合によっては無限遠に達することもある。このような軌道を脱出軌道と呼ぶことにする。以下では軌道は脱出軌道でないとする。これらの軌道を放出軌道と呼ぶ。放出軌道の第 n 回目の放出における第 3 体と $x-y$ 平面との距離の最大値を $r(t_n)$ とする。 t_n は離散的な時間を表す。 $n \rightarrow \infty$ としたとき、 $r(t_n) \rightarrow \infty$ を与える初期点が存在することを Sitnikov は示した。この問題は Alekseev³⁾, Easton-McGehee⁴⁾ によって 3 体問題への拡張された。Moser⁵⁾ は写像を用いた方法でこの問題を解析している。最近 Xia⁶⁾ によって Arnold 拡散と振動解の関係が議論されている。また別の制限 3 体問題においても、振動解の存在は数値計算を利用した方法で確認されている。^{7),8)}

標準写像における加速モード⁹⁻¹¹⁾ は 3 体問題の脱出軌道に相当する。また加速モードは最後の Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 曲線が崩壊した直後から存在する。¹²⁾ 加速モードの軌道点の近傍には、ノンバーコフ型の周期軌道の点が存在する。これらは 3 体問題の放出軌道に対応すると考えられる。これらの事実より加速モードが存在するならば振動解も存在するのではないかという予想がたつ。この論文の目的はこの予想が正しいことを証明することにある。

ここで扱う標準写像 T は円筒面 ($\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1$ with $x \in \mathbf{S}^1, y \in \mathbf{R}^1$) で次のように定義されている。

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n), x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \quad (1.1)$$

ここで $f(x) = a \sin x$ ($a > 0$) である。この写像には 2 つの不動点がある。一つは $P = (0, 0)$ でサドルである。もう一つの $Q = (\pi, 0)$ は楕円点または反射を伴うサドルである。 T は 2 つの対合 G と H または g と h によって下記のように分解できる。^{(13), (14)}

$$T = H \circ G = h \circ g, \quad (1.2)$$

$$G : x \leftarrow -x, y \leftarrow y + f(x), \quad (1.3)$$

$$H : x \leftarrow y - x, y \leftarrow y, \quad (1.4)$$

$$g : x \leftarrow x, y \leftarrow -y - f(x), \quad (1.5)$$

$$h : x \leftarrow x - y, y \leftarrow -y. \quad (1.6)$$

x に関して $\text{mod}(x, 2\pi)$ についていることに注意する。対合の関数形より対合 G と H は左右の対称性を表し、対合 g と h は上下の対称性を表していることが分かる。対合の不動点の集合は対称線と呼ばれる。それぞれの対合に関する対称線は次のように得られる。

$$G : x = 0, \pi, \quad (1.7)$$

$$H : y = 2(x + n\pi), \quad (1.8)$$

$$g : y = 2n\pi - f(x)/2, \quad (1.9)$$

$$h : y = 2n\pi. \quad (1.10)$$

ただし $n \in \mathbf{Z}$ である。§3 において、 G と h の対称線を通る 2 重対称周期軌道の極限として振動解の初期点を見出す。

すべての議論は円筒面の持ち上げである普遍被覆面 ($\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$) で行う。煩雑さを避けるために普遍被覆面でも座標に関して同様の記号 x と y を用いる。

最後に標準写像における振動解の定義を与える。

定義 1: $O(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ [$z_n = (x_n, y_n)$] を初期点 z_0 から出発した未来への軌道とする。この軌道が下記の条件を満たすとき、この軌道は振動解と呼ばれる。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} |y_n| < \infty. \quad (1.11)$$

異なったタイプの振動解があるが、この論文では下記の振動解の存在することを証明する。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n < \infty \ (y_n > 0). \quad (1.12)$$

§2 では、証明で使用する様々な基本事項を紹介する。加速モードと 2 重対称周期軌道の関係を §3 で述べる。振動解の存在の証明は §4 で行う。section 基本事項

1.1 非バーコフ型周期軌道

周期軌道の回転数は普遍被覆面での運動で定義される。回転数が p/q ($p \neq 0$) の軌道は普遍被覆面において $|p|$ 個の異なった軌道がある。 z の軌道を $o(z) = \{T^k z : k \in \mathbf{Z}\}$ とする。普遍被覆面において $|p|$ 個の異なった軌道の集合を $eo(z) = \{T^k z + (2\pi l, 0) : k, l \in \mathbf{Z}\}$ と記して、 z の拡張軌道と呼ぶことにする。拡張軌道より任意に 2 点 r と s

を選ぶ. この2点に関して下記の条件 (式 (13)) が満たされるとき, この軌道をバーコフ型周期軌道と呼ぶ. この条件を満たさない2点のペアが存在するならば, この軌道はノンバークフ型周期軌道と呼ばれる.

$$\pi_1(r) < \pi_1(s) \rightarrow \pi_1(Tr) < \pi_1(Ts). \quad (1.13)$$

対称線を通るノンバークフ型周期軌道を対称ノンバークフ型周期軌道 (SNBO) と呼ぶ. また回転数を表現に含めて p/q -SNBO と略記する. 同様の表現を対称バークフ型周期軌道にも使用する. ここで p/q -SNBO について分かっていることを命題 1 としてまとめておく.

命題 1.

- [1] p/q -SNBO はサドル・ノード分岐で生じる.
- [2] p/q -SNBO の軌道点は Lipschitz 曲線上にない.
- [3] 回転数 $(np)/(nq)$ をもつ対称周期軌道の Aubry グラフ^{16),17)} が p/q -SBO の Aubry グラフと 2 点以上で交差するならば, この周期軌道は $(np)/(nq)$ -SNBO である.

1.2 ホモクリニックローブと対称線上の区間

円筒面における 2 つの不動点を $P \equiv P_{0,0}$ と $Q \equiv Q_{0,0}$ と記し, これらの不変被覆面への持ちあげを $P_{i,j} = (2\pi i, 2\pi j)$ と $Q_{i,j} = (2\pi i + \pi, 2\pi j)$ と記すことにする. ここで i, j は任意の整数である. 各サドル $P_{i,j}$ の安定多様体と不安定多様体のブランチに名前を付けよう. 左側からサドルへ入る安定多様体のブランチを $W_s^l(P_{i,j})$ と, 右側から入るブランチを $W_s^r(P_{i,j})$ とする. 同様にサドルから左側へ出て行く不安定多様体のブランチを $W_u^l(P_{i,j})$ と, 右側へ出て行くブランチを $W_u^r(P_{i,j})$ とする. 以下において, ある 1 次元曲線 C の一部である開弧を $(A, B)_C$ と, 閉弧を $[A, B]_C$ と記す. 場合によっては $(A, B) \subset C$ または $[A, B] \subset C$ と書く.

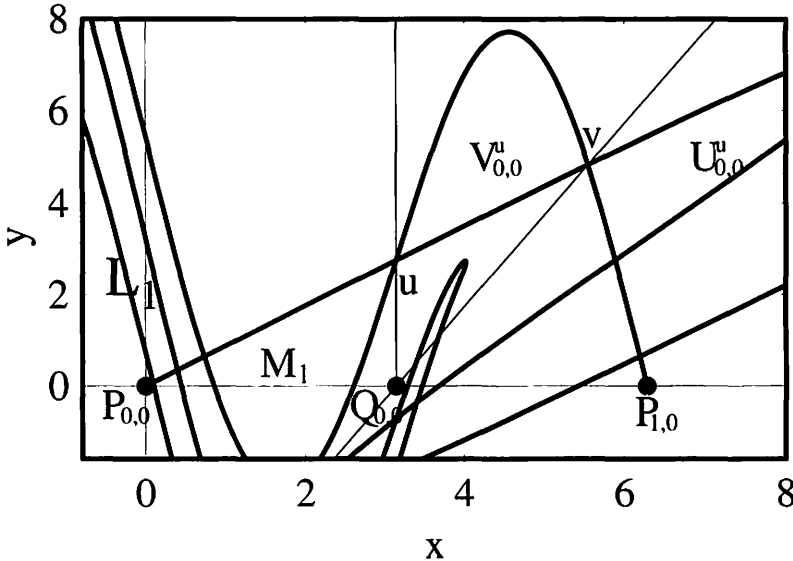


Figure 1 — ホモクリニックローブ $U_{0,0}^u$ と $V_{0,0}^u$. 2 つの開区間 L_1 と M_1 も描かれている ($a = 2\pi$).

サドル $P_{0,0}$ から $W_u^r(P_{0,0})$ に沿って進んだとき対称線 $\{x = \pi, y > 0\}$ と始めて交差した点を u とし, $W_u^r(P_{0,0})$ が対称線 $\{y = 2(x - \pi), y > 0\}$ と初めて交差した点

を v とする. $a > 0$ ではこれらの交点が存在することは証明されている.¹⁸⁾ 2つの交点 u, v において $W_s^l(P_{1,0})$ と $W_u^r(P_{0,0})$ が横断的に交差していることも証明されている.¹⁹⁾

$[u, v]_{W_s^r(P_{0,0})}$ と $[u, v]_{W_s^l(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域を $V_{0,0}^u$ と, また $[v, Tu]_{W_u^r(P_{0,0})} (\equiv \Gamma_u)$ と $[v, Tu]_{W_s^l(P_{1,0})} (\equiv \Gamma_s)$ で囲まれた開領域を $U_{0,0}^u$ とする.

次に $W_u^l(P_{1,0})$ と $\{x = \pi, y < 0\}$ の交点を u' と定義し, $W_u^l(P_{1,0})$ と $\{y = 2(x - \pi), y < 0\}$ の交点を v' とする. $[u', v']_{W_u^l(P_{1,0})}$ と $[u', v']_{W_s^r(P_{0,0})}$ で囲まれた開領域を $V_{0,0}^d$ と定義し, $[v', Tu']_{W_u^l(P_{1,0})}$ と $[v', Tu']_{W_s^r(P_{0,0})}$ で囲まれた開領域を $U_{0,0}^d$ とする. 境界を含めたホモクリニックローブ $V_{0,0}^u$ と $U_{0,0}^u$ ($V_{0,0}^d$ と $U_{0,0}^d$) は回転木戸と呼ばれる.²⁰⁾ 最後に $[P_{0,0}, v]_{W_s^r(P_{0,0})}$, $[v, P_{1,0}]_{W_s^l(P_{1,0})}$, $[P_{1,0}, v']_{W_u^l(P_{1,0})}$ 並びに $[v', P_{1,0}]_{W_s^r(P_{0,0})}$ で囲まれた開領域を $Z_{0,0}$ とする.

対称線 $\{x = 0, 0 < y < 2\pi\}$ の中で開区間 I_i ($i \geq 1$) を定義する.^{14), 15)}

$$I_i = T^{-i}V_{0,0}^u \cap \{x = 0, 0 < y < 2\pi\}. \quad (1.14)$$

I_i は単連結区間であることに注意する. また区間 I_i が存在すれば, すべての区間 I_j ($j > i$) が存在することはラムダ補題²¹⁾ より示される. t_i を $[I_i]$ の下端とし, t_{i+1} を $[I_{i+1}]$ 上端とする. ここで t_i と t_{i+1} の間の開区間を L_i とする (図1を参照のこと). 次に L_j と $[t_j, t_{j+1}]_{W_s^l(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域を Ω_j とする. 定義より, 下記の関係が得られる.

$$T^{j+1}\Omega_j \supset U_{0,0}^u. \quad (1.15)$$

同様にして, 対称線 $\{y = 0, 0 < x < \pi\}$ の中に開区間 M_i ($i \geq 1$) を定義する.

$$M_i = T^{-i}U_{0,0}^u \cap \{y = 0, 0 < x < \pi\}. \quad (1.16)$$

M_i が存在すれば, すべての M_j ($j > i$) が存在する.

最後に I_i を x 方向に $2m_x\pi$ シフトし, 更に y 方向に $2m_y\pi$ シフトした区間を $I_i^{m_x, m_y}$ と書く. また $I_i^{0,0}$ を簡単に I_i と書くことにする. 他の区間に対しても同様の記号を使用する.

1.3 2重対称周期軌道

振動解の証明で2重対称周期軌道を利用する. よってここで2重対称周期軌道の説明を行う. 2重対称周期軌道とは, 軌道の一つの点が G または H の対称線上にあり, 別の点が g または h の対称線上にある周期軌道である. 命題2に2重対称周期軌道の性質を纏めておく.¹⁴⁾ $z_0 = (x_0, y_0)$ を軌道のある点とする. $z_k = (x_k, y_k) = T^k z_0$ と記す.

命題2. 標準写像では下記の2重対称周期軌道が存在する.

- (i) $z_0 = Gz_0$ かつ $z_k = hz_k$ ならば $o(z_0)$ の周期は $4k - 2$ ($k = 2, 3, \dots$) である.
 - (ii) $z_0 = Hz_0$ かつ $z_k = gz_k$ ならば $o(z_0)$ の周期は $4k + 2$ ($k = 1, 2, \dots$) である.
 - (iii) $z_0 = Gz_0$ かつ $z_k = gz_k$ ならば $o(z_0)$ の周期は $4k$ ($k = 1, 2, \dots$) である.
 - (iv) $z_0 = Hz_0$ かつ $z_k = hz_k$, ならば $o(z_0)$ の周期は $4k$ ($k = 1, 2, \dots$) である.
- 但し z_1 から z_{k-1} までいかなる対称線も通らないとする.

命題2に掲げた2重対称周期軌道を DRPO と書く. また周期を明記する場合は q -DRPO と書くことにする. DRPO の回転数に関する性質を命題3として示す.

命題3. 命題2のDRPOは下記の回転数 ν をもつ.

- (i) $y_k = 2m\pi$ ならば, $\nu = m(4k - 2)/(4k - 2)$.

(ii) $y_k = 2m\pi - f(x_k)/2$ ならば, $\nu = m(4k+2)/(4k+2)$.

(iii) $y_k = 2m\pi - f(x_k)/2$ ならば, $\nu = m(4k)/(4k)$.

(iv) $y_k = 2m\pi$ ならば, $\nu = m(4k)/(4k)$.

証明: ここでは (i) と (ii) の証明を行う. (iii) と (iv) は同様にして行えるので省略する.

(i) 関係式 $hz_k = z_k$ より, $hz_i = z_{2k-i}$ ($1 \leq i \leq 2k-1$) と $y_i + y_{2k-i} = 4m\pi$ が得られる. z_{2k-1} は G の対称線の上にあるので, 次の関係が得られる.

$$x_{4k-2} - x_0 = 2(x_{2k-1} - x_0) = 2 \sum_{i=1}^{2k-1} y_i = 2(4(k-1)m + 2m)\pi = 2\pi m q. \quad (1.17)$$

この関係より (i) の回転数が得られる.

(ii) 関係式 $hz_i = z_{2k+1-i}$ ($0 \leq i \leq 2k+1$) より, $y_i + y_{2k+1-i} = 4m\pi$ の関係が得られる. H に関する対称性より $y_i + y_{6k+3-i} = 4m\pi$ ($2k+1 \leq i \leq 4k+2$) が得られる. これらより次の関係が得られる.

$$x_{2k+1} - x_0 = \sum_{i=0}^{2k+1} y_i - y_0, \quad x_{4k+2} - x_{2k+1} = \sum_{i=2k+1}^{4k+2} y_i - y_{2k+1}. \quad (1.18)$$

よって $x_{4k+2} - x_0 = 2m\pi(4k+2) = 2\pi m q$ が成立するので, (ii) の回転数が得られる. Q.E.D.

証明で使用する DRPO は G と h の対称線を通る DRPO である. 初期値は G の対称線の $x=0$ であり, かつ k 番目の位置は h の対称線の $y=2m\pi$ であるとする. またこの間に他の対称線を通ることはないとする. G に関する対称性より, 半周期後は $x=2m\pi(2k-1)$ にある. これより G の表現が得られる. また $H=TG$ より H の表現が決まる. h の対称線は $y=2m\pi$ であることと, $hz_{k-n} = z_{k+n}$ を利用して, h の表現が得られる. 最後に $g=hT$ より g の表現が決まる. 以上より 4 つの対合の表現が得られる. 結果を以下に示す.

$$G : x_{4k-n-2} = -x_n + 2\pi m(4k-2), \quad (1.19)$$

$$y_{4k-n-2} = y_n + f(x_n), \quad (1.20)$$

$$H : x_{4k-n-1} = -x_n + y_n + 2\pi m(4k-2), \quad (1.21)$$

$$y_{4k-n-1} = y_n, \quad (1.22)$$

$$g : x_{2k-n-1} = x_n + 2\pi m(2k-2n-1), \quad (1.23)$$

$$y_{2k-n-1} = -y_n - f(x_n) + 4\pi m, \quad (1.24)$$

$$h : x_{2k-n} = x_n - y_n + 2\pi m(2k-2n+1), \quad (1.25)$$

$$y_{2k-n} = -y_n + 4\pi m. \quad (1.26)$$

ここで $0 \leq n \leq 4k-2$ である.

1.4 加速モード

標準写像では異常拡散が生じることがある. 異常拡散はいわゆる加速モードに起因している. 加速モードは 3 体問題における脱出軌道に対応する. 加速モードは振動解を理解するために必要な軌道であるので, 以下で簡単にその性質を述べることにする.

加速モードは、トーラス面で定義された標準写像では y 方向に回転する周期軌道として扱うことができる。トーラス面で定義された標準写像を $\hat{T}$ と書く。 $\hat{T}$ は2つの対合 $\hat{g}$ と $\hat{h}$ の積、つまり $\hat{T} = \hat{h} \circ \hat{g}$ と書かれる。ここで対合は次のように定義される。

$$\hat{g}: x \leftarrow x, y \leftarrow -y - f(x), \quad (1.27)$$

$$\hat{h}: x \leftarrow x - y, y \leftarrow -y. \quad (1.28)$$

これらの対合の不動点の集合として得られる対称線を以下に示す。

$$\hat{g}: y = -f(x)/2, y = \pi - f(x)/2, \quad (1.29)$$

$$\hat{h}: y = 0. \quad (1.30)$$

円筒面に持ち上げられた対合を g と h と書く。これらの対合の対称線は次のように得られる。

$$g: y = n\pi - f(x)/2. \quad (1.31)$$

$$h: y = 2n\pi, \quad (1.32)$$

但し $n \in \mathbb{Z}$ 。トーラス面で周期軌道である加速モードを円筒面に持ち上げると周期軌道にならない。これは y 座標が増加するとその分だけ x 方向への移動距離が増加するためである。つまり加速モードは円筒面をぐるぐる巻きながら $y \rightarrow \infty$ または $y \rightarrow -\infty$ へと向かう。これより加速モードが3体問題の脱出軌道に相当することが分かる。

ここでは対称線 $y = 0$ の区間 $\{0 < x < \pi, y = 0\}$ より出発し、対称線 $y = \pi - f(x)/2$ を通る対称な加速モード (SAMO) のみを考える。この SAMO は最初の1周期 q の間に x 方向に $2m_x\pi$ 進み、 y 方向へは $2m_y\pi$ だけ常に進む。このことを明示するために、この加速モードを q^{m_x, m_y} -SAMO と記すことにする。 $q^{m_x, 1}$ -SAMO の場合は、簡単に q^{m_x} -SAMO と略すことにする。定理1のSAMOの出現順序は文献(12)において証明されている。

定理1. 下記の順序関係が成立する。

$M_1:$	1^1	$\rightarrow$	3^2	$\rightarrow$	5^3	$\rightarrow$	7^4	$\rightarrow \dots$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$M_2:$	3^2	$\rightarrow$	5^3	$\rightarrow$	7^4	$\rightarrow$	9^5	$\rightarrow \dots$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$M_3:$	5^3	$\rightarrow$	7^4	$\rightarrow$	9^5	$\rightarrow$	11^6	$\rightarrow \dots$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	

(注意) 右矢印と下矢印は2つのSAMOの間の出現順序関係を与えている。例として $1^1 \in M_1 \rightarrow 3^2 \in M_2$ は「区間 M_1 に 1^1 -SAMO の点が存在すれば、区間 M_2 に 3^2 -SAMO の点が存在する」を意味する。 M_i から出発する $q^{(q+1)/2}$ -SAMO は $T^{(q-1)/2}M_i$ と対称線 $y = \pi - f(x)/2$ ($y > 0$) との最初の接触で生じる。この分岐はサドル・ノード分岐である。 $M_1 \rightarrow M_2$ についても、区間 M_1 があれば M_2 があると読む。

$q^{(q+1)/2}$ -SAMO の z_1 から $z_{(q-1)/2}$ までの軌道の点は $\{y > 0\}$ の領域にある。これは $q^{(q+1)/2}$ -SAMO が、 $T^{(q-1)/2}M_i$ と対称線 $y = \pi - f(x)/2$ ($y > 0$) との最初の接触

で生じることを利用して証明できる. 詳細は文献 (22) に述べられている. この事実と SAMO に関して良く知られている事実を性質 1 にまとめておく.

性質 1. 定理 1 における初期値に関して $z_0 \in M_i$ を満たす SAMO に対して, $y_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $y_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow -\infty$) が成立する. また $y_n > 0$ ($n \geq 1$) かつ $y_n < 0$ ($n \leq -1$). 初期値に関して $z_0 \in HM_i$ を満たす SAMO に対して, $y_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $y_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow -\infty$) が成立する. また $y_n < 0$ ($n \geq 1$) かつ $y_n > 0$ ($n \leq -1$).

定理 1 の SAMO を区別するために行列表示を利用する. 例として要素 (i, j) ($i \geq 1, j \geq 1$) は, 周期が $q_{i,j} = 2i + 2j - 3$ である $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO を示している. 次に $a_c(i, j)$ を $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO がサドル・ノード分岐で生じる臨界値とする. 臨界値に関して次の関係が成立する.¹²⁾

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_c(i, j) = a_c. \quad (1.33)$$

ここで a_c は最後の KAM 曲線が崩壊する臨界値である.

初期値 $z_0 = (x_0, 0)$ を満たす $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO の軌道点 $z_{mq_{i,j}}$ の位置は次のように得られる.

$$z_{mq_{i,j}} = (m(mq_{i,j} + 1)\pi + x_0, 2m\pi) \in M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2, m}. \quad (1.34)$$

但し $m \geq 1$.

命題 4. 周期 $q_{i,j} = 2i + 2j - 3$ ($j \geq i \geq 1$) の $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO の点が M_i に存在すれば, 区間 I_j が存在する.

証明. 軌道点 z_k ($k = i + j - 2$) が対称線 $y = \pi - f(x)/2$ 上にある $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO の軌道点を $z_l = (x_l, y_l)$ と書く. この軌道を記述する対合は下記のように得られる.

$$\hat{g}: x_{2k-n} = x_n + 2\pi(k-n), \quad y_{2k-n} = 2\pi - y_n - f(x_n), \quad (1.35)$$

$$\hat{h}: x_{2k+1-n} = x_n - y_n + 2\pi(k-n+1), \quad y_{2k-n} = 2\pi - y_n. \quad (1.36)$$

ここで $0 \leq n \leq 2k+1$. y 座標値が増大すると x 座標値も増大する. 式 (1.35) より, 関係 $x_{k+1} = x_{k-1} + 2\pi$ が得られる. z_l ($l \geq 1$) は $\{y > 0\}$ (性質 1 を見よ) にあるので, $x_i < x_{k-1} < x_{k+1}$ と $x_{k+1} - x_i > 2\pi$ が成立することが分かる. $\pi < x_i < 2\pi$ なので, $T^{k+1-i}U_{0,0}^u$ は $\{x > 2\pi\}$ にあることが分かる. よって $T^{k+1-i}U_{0,0}^u$ は $\{x = 2\pi, y > 0\}$ と交差する. これは $I_j^{1,0}$ の存在を意味するので, $I_j = I_j^{0,0}$ の存在が証明された. (Q.E.D.)

2 SAMO と DRPO との関係

ここでは SAMO と DRPO の関係を明らかにする. 区間 L_j に初期点をもつ DRPO の間に成立する関係を最初に調べる. 特に初期点の位置関係に注目する. 区間 M_i から出発する周期 $q_{i,j} = 2i + 2j - 3$ をもつ $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO が存在すれば, 区間 L_j ($j \geq 1$) は存在する (命題 4 を見よ). $m \geq 1$ が満たされているとする. $T^k L_j$ ($k \geq j+1$) と対称線 $y = 2m\pi$ との交点は 回転数 $(4k-2)m/(4k-2)$ の $(4k-2)$ -DRPO の点である (命題 3 を見よ). つまり SAMO の存在は DRPO の存在を導く.

命題 5. $j \geq i \geq 1$ を仮定する. 周期 $q_{i,j} = 2i + 2j - 3$ の $q_{i,j}^{(q_{i,j}+1)/2}$ -SAMO が存在すれば, 任意の $m \geq 1$ に対して少なくとも 2 つの $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO ($k_{i,j,m} =$

$mq_{i,j} + j - i + 1$ が存在する. 2つの DRPO の軌道を $O(\hat{z}_0^m)$, $O(\tilde{z}_0^m)$ とする. ここで $(0, A_m) \in L_j$ と $(0, B_m) \in L_j$ ($A_m > B_m$) を, $O(\hat{z}_0^m)$ と $O(\tilde{z}_0^m)$ の初期点とする. 但し m は対称線 $y = 2m\pi$ を表している. この対称線上に $\hat{z}_{k_{i,j},m}^m$ と $\tilde{z}_{k_{i,j},m}^m$ がある. それぞれの $m \geq 1$ に対して, 適切な $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO のペアをとれば下記の関係が成立する.

$$B_1 < B_2 < \cdots < B_m < \cdots < A_m < \cdots < A_2 < A_1. \quad (2.1)$$

証明. 最初に, $T^{k_{i,j},m} L_j$ は $M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2,m}$ と交差していて, 少なくとも2つの $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO が存在していることを証明する. z_0 は $T^{-i}U_{00}^u$ に含まれている. 式 (1.15) より, $T^{j+1}L_j$ は U_{00}^u に含まれていないことが分かる. 式 (1.34) より, $z_{mq_{i,j}}$ は $M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2,m}$ に存在していることが分かる. このことは $T^{mq_{i,j}-i}U_{00}^u \cap M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2,m} \neq \emptyset$ を意味している. 更に, この関係より $T^{k_{i,j},m} L_j$ は $M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2,m}$ と2個以上の点で交差していることを導く. これらは $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO の点である.

次に $T^{k_{i,j},m} L_j \cap M_i^{m(mq_{i,j}+1)/2,m} \neq \emptyset$ ($m \geq 1$) を仮定し, $B_m < B_{m+1} < A_{m+1} < A_m$ の関係を導く. SAMO の点 $z_{(m+1)q_{i,j}}$ は $M_i^{(m+1)((m+1)q_{i,j}+1)/2,m+1} \subset \{y = 2(m+1)\pi\}$ にある. ここで $Z_1 = \hat{z}_{k_{i,j},m}^m$, $Z_2 = \tilde{z}_{k_{i,j},m}^m$ とする. 式 (1.26) より, $T^{q_{i,j}}Z_1$ と $T^{q_{i,j}}Z_2$ は $y = 2(m+1)\pi$ の下部にある. 開弧 $(Z_2, Z_1) \in T^{k_{i,j},m} L_j$ は $y = 2m\pi$ の上部に部分弧をもつ. この事実は, $T^{q_{i,j}}(Z_2, Z_1)$ が $M_i^{(m+1)((m+1)q_{i,j}+1)/2,m+1}$ と交差していることを示している. これらの交差点を Z'_1 と Z'_2 ($\pi_1(Z'_1) > \pi_1(Z'_2)$) とする. これらの点は $(4k_{i,j,m+1} - 2)$ -DRPO の点であり, これらの初期点は L_j にある. 初期点を $\hat{z}_0^{m+1} = (0, A_{m+1})$, $\tilde{z}_0^{m+1} = (0, B_{m+1})$ と書くならば, これらの間の関係である $B_m < B_{m+1} < A_{m+1} < A_m$ が得られる. Q.E.D.

命題 6. 各々の i, j, m に対して, 式 (2.1) の $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO が存在する. そして軌道は $\{y > 0\}$ の領域にある. これらの DRPO は引き返し点を持たない SNBO である.

証明. 第1の主張の証明を行う.

$\hat{z}_{k_{i,j},m}^m$ と $\tilde{z}_{k_{i,j},m}^m$ が唯一である場合を考える. 簡単のために $\hat{z}_{k_{i,j},m}^m$ のみを考える. $O(\hat{z}_0)$ が x 軸の下部と通るとして矛盾を出す. 仮定と DRPO の性質より, $\pi_2(\hat{z}_l) < 0$ を満たす整数 l' ($i+1 < l' < k_{i,j,m}$) が存在する. よって, ある n に対して $\hat{z}_l \in V_{n,0}^u$ であるような l ($i+1 < l < l'$) が存在する. これは $T^{l+1}L_j$ が $V_{n,0}^u$ の中の点と $TV_{n,0}^u$ の中の点を結ぶ弧を持つことを導く. この弧 (γ) は $U_{n,0}^u$ の境界である不安定多様体の左に位置する. この結果, $U_{n,0}^u$ は y 座標として $y = 2m\pi$ より上部にある点を持つので, γ は $y = 2m\pi$ と交差する. これらの交差点は $(4(j+1) - 2)$ -DRPO の点である. これは $(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO が γ の中に点を持つことを意味していて矛盾である.

次に $\hat{z}_{k_{i,j},m}^m$ と $\tilde{z}_{k_{i,j},m}^m$ に相当する点が複数ある場合を考える. この場合は, $\hat{z}_{k_{i,j},m}^m$ として $T^{k_{i,j},m} L_j$ に沿って移動したとき $T^{k_{i,j},m} t_{j+1}$ に最も近い点を選ぶ. また $T^{k_{i,j},m} L_j$ に沿って移動したとき $T^{k_{i,j},m} t_j$ に最も近い点を $\tilde{z}_{k_{i,j},m}^m$ として選ぶ. $O(\hat{z}_0)$ が x 軸の下部を通るとして矛盾を出す. このためには前に行った方法を繰り返せばよい.

$(4k_{i,j,m} - 2)$ -DRPO の点 $\hat{z}_0$ は $y = 2m\pi$ の下部にある. そして, $\hat{z}_{2k_{i,j},m}$ は $y = 2m\pi$ の上部にある. これらの事実と2重対称性を利用すると, DRPO の Aubry グラフと $m/1$ -BO の Aubry グラフは1周期の間に2点で交差する. これより DRPO は NBO であることが分かる. 式 (2.1) を満たす DRPO は対称軌道で $y < 0$ の領域に点をもたない. よって DRPO は引き返し点を持たない SNBO である. Q.E.D.

これからは, $i = j$ を満たす SAMO と DRPO を考える. この条件を満たす DRPO

に対して次の2つの命題が成立する.

命題 7. 命題 5 における DRPO に対して下記の関係が成立する. 但し DRPO は命題 6 の性質をもつとする. 初期点を $z_0 = (0, B_m)$ とする.

$$|\pi_1(z_{-4q_{i,i}})| = \pi_1(z_{4q_{i,i}}) < 24\pi q_{i,i} \quad (m = 2), \quad (2.2)$$

$$|\pi_1(z_{-4q_{i,i}})| = \pi_1(z_{4q_{i,i}}) < 30\pi q_{i,i} \quad (m = 3), \quad (2.3)$$

$$|\pi_1(z_{-4q_{i,i}})| = \pi_1(z_{4q_{i,i}}) < 8m\pi q_{i,i} \quad (m \geq 4). \quad (2.4)$$

証明. (1) $m = 2$. $z_{2q_{i,i}+1}$ は $y = 4\pi$ の上に存在する. これは, 2つの関係式 $\pi_2(z_k) \leq 4\pi$ ($0 \leq k \leq 2q_{i,i} + 1$) と $4\pi < \pi_2(z_k) < 8\pi$ ($2q_{i,i} + 2 \leq k \leq 4q_{i,i} + 2$) を導く. 第2の式を導くために h に関する対称性を用いた. よって次の関係を得る.

$$\pi_1(z_{4q_{i,i}}) = \sum_{k=1}^{4q_{i,i}} \pi_2(z_k) < 4\pi \times 2q_{i,i} + 8\pi \times 2q_{i,i} = 24\pi q_{i,i}. \quad (2.5)$$

第1の関係は G の対称性を利用して得られた.

(2) $m = 3$. $z_{3q_{i,i}+1}$ は $y = 6\pi$ の上にある. このことより $\pi_2(z_k) \leq 6\pi$ ($0 \leq k \leq 3q_{i,i} + 1$) と $6\pi < \pi_2(z_k) < 12\pi$ ($3q_{i,i} + 2 \leq k \leq 6q_{i,i} + 2$) が導かれる. よって, $\pi_1(z_{4q_{i,i}}) < 6\pi \times 3q_{i,i} + 12\pi \times q_{i,i} = 30\pi q_{i,i}$ が得られる.

(3) $m \geq 4$. $z_{mq_{i,i}+1}$ は $y = 2m\pi$ の上にある. これより $\pi_2(z_k) \leq 2m\pi$ ($0 \leq k \leq mq_{i,i} + 1$) が導かれる. よって $\pi_1(z_{4q_{i,i}}) < 2m\pi \times 4q_{i,i} = 8m\pi q_{i,i}$ が得られて証明は終わる. Q.E.D.

命題 8. 命題 5 の DRPO を考える. 但しこれらは命題 6 の性質をもつとする. $z_0 = (0, B_m)$, $\hat{z}_0 = (0, B_{m+1})$ とする. ここで B_m と B_{m+1} は式 (2.1) を満たすとする. z_0 と $\hat{z}_0$ から出発した DRPO に対して下記の関係が成立する.

$$\pi_1(z_{4mq_{i,i}+2}) + 2\pi < \pi_1(\hat{z}_{4mq_{i,i}+2}). \quad (2.6)$$

但し $m \geq 1$.

証明. $m = 1$ の場合は, $\pi_1(z_{4q_{i,i}+2}) = 2\pi(4q_{i,i} + 2)$ と $\pi_1(\hat{z}_{8q_{i,i}+2}) = 4\pi(8q_{i,i} + 2)$ の関係が成立することは知っている. よって式 (2.2) を用いて, 次式が得られる.

$$\pi_1(\hat{z}_{8q_{i,i}+2}) - 24\pi q_{i,i} < \pi_1(\hat{z}_{4q_{i,i}+2}). \quad (2.7)$$

次の関係が成立することは簡単に分かる.

$$\pi_1(z_{4q_{i,i}+2}) + 2\pi < \pi_1(\hat{z}_{8q_{i,i}+2}) - 24\pi q_{i,i}. \quad (2.8)$$

これらの関係をまとめると, 式 (2.6) が得られる. $m \geq 2$ の場合の証明も同様に行えるので省略する. Q.E.D.

3 振動解の存在の証明

ここで振動解の存在の証明を行う. 定理 1 の対角成分にある SAMO を利用する. これらの SAMO は周期が $q_{ii} = 4i - 3$ ($i = 1, 2, \dots$) の $q_{ii}^{(q_{ii}+1)/2}$ -SAMO である.

Theorem 2. 任意の $i \geq 1$ において区間 M_i に $q_{ii}^{(q_{ii}+1)/2}$ -SAMO の点が存在すれば, 区間 L_i に初期点をもちかつ式 (1.12) を満たす振動解が存在する.

$i \rightarrow \infty$ の極限では、臨界値 $a_c(i, i)$ は a_c に漸近する [式 (1.33) を参照のこと]. つまり振動解は最後の KAM 曲線の崩壊直後に出現することが分かる. これを系 1 として記しておく.

系 1. $a > a_c$ において振動解は存在している.

定理 2 の証明. 定理 2 の仮定と命題 4 より区間 I_i は存在している. 区間 L_i も当然存在している. よって $i = j$ の場合に命題 5 の式 (2.1) の順序関係が得られる. ここで $k_i^m \equiv mq_{ii}^m + 1$ を定義する. この場合, 周期 $q_i^m = 4k_i^m - 2$ の q_i^m -DRPO には $(0, A_m)$ から出発する軌道と $(0, B_m)$ から出発する軌道があることに注意する. 次に弧 $[B_m, B_{m+1}]_{L_i}$ を Γ_m^B と, 弧 $[A_{m+1}, A_m]_{L_i}$ を Γ_m^A とする. 以下では, 任意の $m \geq 1$ に対しての弧 Γ_m^B を考える. 振動解の存在の証明は弧 Γ_m^B を用いて行う. Γ_m^A を用いても同様に行える. よって Γ_m^B を Γ_m と略すことにする. $T^{q_i^m} \Gamma_m$ の振る舞いをこれから調べる. $T^{q_i^m} \Gamma_m$ の一つの端点は q_i^m -DRPO の軌道点 $z_{q_i^m} = z_0 \pmod{2\pi}$ であり, もう一つの端点は q_i^{m+1} -DRPO の軌道点 $z'_{q_i^m}$ である.

q_i^m -DRPO の軌道点 $z_{q_i^m}$ はサドル $P_{mq_i^m, 0}$ を通る垂直な対称線上にある. なぜなら 1 周期が完了しているからである. $P_{mq_i^m, 0}$ の近傍における $W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ と $W_u^r(P_{mq_i^m-1, 0})$ の交差の様子は図 2 に描かれている. $[C, D] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ と $[C, D] \subset W_u^r(P_{mq_i^m-1, 0})$ で囲まれた開領域を R とする. 同様に $[C, F] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ と $[C, F] \subset W_u^r(P_{mq_i^m-1, 0})$ で囲まれた開領域を S とする. 点 $z_{q_i^m}$ は $R \cap S$ の内部にある. 円で示された SAMO の初期点は TS の中にある.

図 2 で描かれているように $T^{q_i^m} \Gamma_m$ は $[C, D] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ と交差している. このことを証明する. $T^{q_i^m} \Gamma_m$ は $[C, D] \subset W_u^r(P_{mq_i^m-1, 0})$ とは交差しない. もし交差点 t を持つとすると $T^{-q_i^m} t$ は $P_{mq_i^m-1, 0}$ の近傍の $W_u^r(P_{mq_i^m-1, 0})$ 上にあり, その x 座標の値は $2\pi(mq_i^m - 1)$ より大きい. 一方では $T^{-q_i^m} t$ は $\{x = 0\}$ 上にある. これは矛盾である.

次に命題 8 より

$$\pi_1(z_{q_i^m}) + 2\pi < \pi_1(z'_{q_i^m}). \quad (3.1)$$

が得られる. もし $z'_{mq_i^m}$ が R に含まれていなければ主張は証明される. 実際, 4 つの弧 CH, HG, GE ならびに EC で囲まれた R' は $z'_{mq_i^m}$ を含まない. なぜなら R' の各点に関して $x \leq 2\pi mq_i^m$ が成立するからである. 領域 $R \setminus R'$ は $V_{mq_i^m-1, 0}^u$ の未来への像である. 命題 6 の証明から $z'_{mq_i^m}$ は $R \setminus R'$ の中には存在しないことが導かれる. それゆえに R は $z'_{mq_i^m}$ を含まない.

z を $T^{q_i^m} \Gamma_m$ と $[C, D] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ との交差点とする. $z_{q_i^m}$ から弧 $[z_{q_i^m}, z] \subset T^{q_i^m} \Gamma_m$ を逆方向に延ばし, 延ばした弧が $[E, F] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ と交差する点を w とする. $[w, z_{q_i^m}] \cup [z_{q_i^m}, z]$ は単連結弧で $R \cap S$ に含まれる. 弧 $[w, z_{q_i^m}]$ は $T^{q_i^m} \Gamma_m$ の弧である必要はない. $[w, z_{q_i^m}] \cup [z_{q_i^m}, z]$ と $[w, z] \subset W_s^l(P_{mq_i^m+1, 0})$ で囲まれた開領域の像は SAMO の初期点 (図 2 の丸印) を含む. このことは $T^{mq_{i,i}+1}[w, z_{q_i^m}] \cup [z_{q_i^m}, z]$ が $M_i^{mq_i^m+m(mq_{i,i}+1)/2, m}$ と 2 点以上で交差していることを導く. 式 (1.34) を利用して軌道点の順番を意味する添字の値を決める. 交点の一つは $T^{mq_{i,i}+1}z_{q_i^m}$ で, 他の点 r は $T^{mq_{i,i}+1}(z_{q_i^m}, z]$ と $M_i^{mq_i^m+m(mq_{i,i}+1)/2, m}$ の交点である.

$\xi = [z_{q_i^m+mq_{i,i}+1}, r] \subset T^{mq_{i,i}+1}[z_{q_i^m}, w] \cup [z_{q_i^m}, z]$ を定義する. $T^{q_{i,i}}z_{q_i^m+mq_{i,i}+1}$ は $y = 2(m+1)\pi$ の下部にあり, SAMO の点は $M_i^{mq_i^m+(m+1)((m+1)q_{i,i}+1)/2, m+1}$ にあることより, $T^{q_{i,i}}\xi$ は $M_i^{mq_i^m+(m+1)((m+1)q_{i,i}+1)/2, m+1}$ と 2 点以上で交差することが分かる. これらの交差点は $(4(q_i^m + (m+1)q_{i,i}) + 2)$ -DRPO の点である. この手順を繰り返すことで $(4(q_i^m + nq_{i,i}) + 2)$ -DRPO ($n \geq m+1$) の存在が証明できる. これらの初

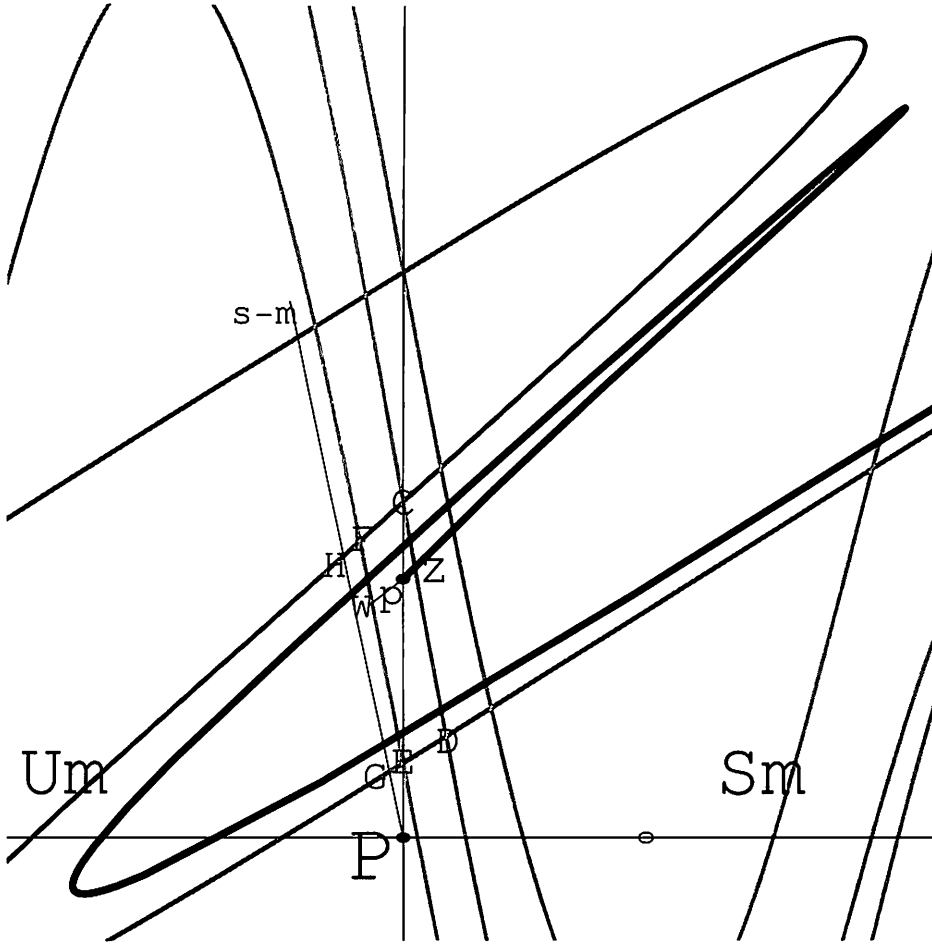


Figure 2 — $z_{q_i^m}(p$ と記されている) の近傍の $T^{q_i^m} \Gamma$ は太い線で描かれている. "Sm" は安定多様体 $W_s^l(P_{mq_i^m+1,0})$ を示し, "s-m" は別の安定多様体 $W_s^l(P_{mq_i^m,0})$ を示している. "Um" は不安定多様体 $W_u^l(P_{mq_i^m-1,0})$ を示している. 円は $q_{i,i}^{(q_{i,i}+1)/2}$ -SAMO の初期点の一つを表している.

期点 $(0, A_n^{(m)})$ と $(0, B_n^{(m)})$ は区間 $[B_m, B_{m+1}] \in L_i$ に含まれる. そして $A_n^{(m)}$ と $B_n^{(m)}$ は次の順序関係を満たす.

$$B_m < B_2^{(m)} < B_3^{(m)} < \cdots < A_3^{(m)} < A_2^{(m)} < B_{m+1}. \quad (3.2)$$

次に, 区間 $\Gamma = [B_l^{(m)}, B_{l+1}^{(m)}] \in L_i$ ($l \geq m+1$) に対しても上記と同じ手順を繰り返す. $(0, B_l^{(m)})$ から出発する DRPO の周期は $q_i^{m,l} = 4(q_i^m + lq_{i,i} + 1) - 2$ で, $(0, B_{l+1}^{(m)})$ から出発する DRPO の周期は $q_i^{m,l} + 4q_{i,i}$ であることに注意する. $T^{q_i^{m,l}} \Gamma$ の構造を調べよう. 端点の一つは $q_i^{m,l}$ -DRPO の $z_{q_i^{m,l}}^{m,l}$ であり, もう一つは $(q_i^{m,l} + 4q_{i,i})$ -DRPO の $z_{q_i^{m,l}}^{m,l}$ である. よって次の関係が成立する.

$$\pi_1(z_{q_i^{m,l}}^{m,l}) + 2\pi < \pi_1(z_{q_i^{m,l}}^{m,l}). \quad (3.3)$$

式 (3.3) の証明は式 (3.1) の証明と同じなので省略する. 式 (3.2) を導く手順を繰り返すと, 下記の関係を得る.

$$B_l^{(m)} < B_2^{(m,l)} < B_3^{(m,l)} < \cdots < A_3^{(m,l)} < A_2^{(m,l)} < B_{l+1}^{(m)}. \quad (3.4)$$

式 (3.4) の添字 (m, l) は DRPO の初期点が存在する区間を指定している. 任意の区間 $[B_{l'}^{(m,l)}, B_{l'+1}^{(m,l)}]$ ($l' \geq l+1$) にも同様の手法を適用できる. その結果

$$B_{l'}^{(m,l)} < B_2^{(m,l,l')} < B_3^{(m,l,l')} < \cdots < A_3^{(m,l,l')} < A_2^{(m,l,l')} < B_{l'+1}^{(m,l)}. \quad (3.5)$$

が得られる. 上記の手順を再度繰り返して下記の順序関係を得る.

$$B_{n_1} < B_{n_2}^{(n_1)} < B_{n_3}^{(n_1, n_2)} < B_{n_4}^{(n_1, n_2, n_3)} < \cdots, \quad (3.6)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty. \quad (3.7)$$

上記の構成から明らかなように, 区間は縮小していることが分かる. その結果, 上記の列 (式 (50)) は集積点 B^* をもつ. 初期点 $(0, B^*)$ から出発する軌道は振動解の定義を満たす. 以上で定理 2 は証明された. Q.E.D.

定理 2 の直接の結果として系 2 を得る.

系 2. 拡散振動解が存在し, その初期点の集合は非可算無限集合である.

証明. 定理 2 の証明では, 区間を縮小していく各段階で $B_{n_j}^{(n_1, n_2, \dots, n_{j-1})}$ から $B_{n_{j+1}}^{(n_1, n_2, \dots, n_j)}$ を構成した. このときに $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ を満たし, かつ選ばれた整数はランダムであるとする. このような手順で構成された初期点から出発した軌道が, 3 体問題で導入された拡散振動解⁶⁾ である. また各段階で各区間 L_i より有限の長さの区間が抜かれる. 無限の操作の後に残る集合はカントール集合である. これより拡散振動解の初期点の集合は非可算無限集合である. Q.E.D.

References

- [1] J. Chazy, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème Série **39** (1922), 29.
- [2] K. Sitnikov, Dokl. Akad. Nauk. USSR **133** (1960), 303.

- [3] V. M. Alekseev, Math. USSR-Sb **5** (1968), 73; Math. USSR-Sb **6** (1968), 505; Math. USSR-Sb **7** (1969), 1.
- [4] R. Easton and R. McGehee, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 211.
- [5] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Mathematical Studies, Vol. 77 (Princeton Univ. Press, 1973).
- [6] Z. Xia, J. Diff. Eqs. **110** (1994), 289.
- [7] K. Tanikawa and H. Umehara, Celest. Mech. Dynam. Astron. **70** (1997), 167.
- [8] K. Tanikawa, Celest. Mech. Dynam. Astron. **76** (2000), 157.
- [9] B. V. Chirikov, Phys. Repts. **52** (1979), 263.
- [10] Y. H. Ichikawa, T. Kamimura and T. Hatori, in *Statistical physics & chaos in fusion plasmas*, Ed. C. W. Horton, Jr. and L. E. Reichl (Wiley, 1984). p. 21.
- [11] Y. H. Ichikawa, T. Kamimura and T. Hatori, Physica **D 29** (1987), 247.
- [12] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **108** (2002), 669.
- [13] R. DeVogelaere, in *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*, Vol. IV (Princeton Univ. Press, 1958). 53.
- [14] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, J. Math. Phys. **30** (1989), 608.
- [15] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 1117.
- [16] S. Aubry and P. Y. LeDaeron, Physica **8D** (1983), 381.
- [17] V. Bangert, in *Dynamics Reported*, Vol. 1. (John Wiley & Sons and B. G. Teubner, 1988).
- [18] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *Chaos* **12** (2002), 33.
- [19] V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannski and M. B. Tabanov, Physica **D40** (1989), 235.
- [20] R. S. MacKay, J. D. Meiss and I. C. Percival, Physica **D13** (1984), 55.
S. Wiggins, *Chaotic transport in dynamical systems* (Springer-Verlag, 1991).
- [21] J. Palis and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction* (Springer-Verlag, 1982).
- [22] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 689.

人工衛星の主問題に対する新しい中間軌道

New Intermediary Orbit for the Main Problem of the Artificial Satellite Motion

Nobuaki SAITO

otias@cc.kyoto-su.ac.jp

*Department of Physics, Kyoto Sangyo University,
Kamigamo-Motoyama, Kita-ku, Kyoto 603-8555, JAPAN*

ABSTRACT

The aim of the present investigations is to make clear the property of long periodic perturbations and small divisors in the theory of motion of an artificial satellite.

For this purpose, it is sufficient to discuss the problem, without any loss of generality, under the following limitation for the force field of the Earth:

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right),$$

where the quantity μ stands for the product of the gravitational constant and the Earth's mass, a_e the equatorial radius of the Earth, J_2 is a dynamical constant of the order of 10^{-3} , a small quantity compared with the main gravitational influence of the Earth on the motion of an artificial satellite. The quantities (r, θ, ϕ) represent the polar coordinates of an artificial satellite with respect to the center of mass of the Earth: r the radius vector, θ the latitude and ϕ the longitude. In the function U , there is not the longitude ϕ because one supposes the axial symmetry for the mass distribution of the Earth around its rotational axis.

In order to obtain a suitable intermediary orbit, we introduce the following “artificial” force field:

$$U_0 = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \varepsilon c_m - \frac{\varepsilon c_\theta}{r^2} - \frac{\varepsilon c_\phi}{r^2 \cos^2 \theta}.$$

Here, εc_m , εc_θ and εc_ϕ are indetermined constants of the order of 10^{-3} . Our intermediary orbit has a great merit compared with that of Garfinkel (1958). In his case, it is inevitable to introduce elliptic functions and elliptic integrations[1]. On the contrary, our intermediary orbit is expressed only by simple and closed trigonometric functions.

We construct the equations for the variation of the elements, caused by the disturbing force $U_0 - U$, which are contained as the integration constants in the intermediary orbit. We solve the equations approximately and then establish a theory of motion.

With the aid of the indetermined constants, we are able to eliminate whole secular variations of the first order of the quantity J_2 . In the element of “the argument of the perigee”, there is no secular variation. This means that there does not exist any long periodic perturbations and small divisors.

We tried to extend the theory of motion up to the second order. Here also, in the element of “the argument of the perigee”, there is no secular variation. This means that there does not exist any long periodic perturbations and small divisors.

By means of the same procedure, we can make disappear all secular variations up to second order without “the longitude of the ascending node”.

One of the indeterminated constants has the same singularity as the critical inclination. These undesirable circumstances are easily surmounted by different choice for the indeterminated constants. This artifice will be given separately.

はじめに

人工衛星の運動理論においては、長周期変化の齟齬小分母の存在が理論の構築を困難なものにしている。これを存在させる臨界軌道傾斜角の近傍では、その近傍においてのみ有効となる運動理論が構築されている [2]。この困難は 2 体問題の系を人工系に選ぶ限り、避けて通る事が出来ない [3][4]。人工系として 2 体問題の系以外のものを採用した場合にも、この小分母の問題が完全に解決されたとは言い難い [5]。以上の状況から、小分母の困難は人工衛星の運動理論において、回避する事の出来ない困難とする見方が存在する [6]。実は、人工系として適切な系を設定するならば、長周期変化の出現を見る事も無く、従って小分母の困難も存在しない事になるのである。

我々は、そうした人工系の力の場を表す関数 U_0 を、3 個の未定定数を含む次の形で与える：

$$U_0 = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \varepsilon c_m - \frac{\varepsilon c_\theta}{r^2} - \frac{\varepsilon c_\phi}{r^2 \cos^2 \theta}$$

得られた中間軌道は三角関数のみで表されている。この中間軌道が含む積分定数に対する要素変化の式を、問題の小分母が現れない形に解く事を考える。微小定数 J_2 の 1 次の大きさでは、この目的は達成され得る。更に 2 次の大きさの近似理論の構築をも試みる。

1 運動方程式

地球の力の場を表す関数 U を、次の形に限る事にする：

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 P_2(\sin \theta) \right\} \quad (1.1)$$

ここに、 (r, θ, ϕ) は地球の質量中心を原点とする人工衛星の極座標を表す。 r は地心距離を、 θ は赤緯、 ϕ は赤経を表すとする。力の場に、軸対称性を仮定したので、赤経 ϕ は関数 U の中には現れない事になる。 a_e は地球の赤道半径、 J_2 は地球の質量分布に依存する 10^{-3} の大きさの微小定数である。 μ は万有引力定数 G と地球の質量 M_e との積を表し、 P_2 は 2 次の Legendre 多項式を表す：

$$\mu \equiv GM_e \quad (1.2)$$

$$P_2(\sin \theta) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

上記の力の場の下、運動方程式は、次の Hamilton 関数 $\mathcal{H}$ によって以下の形に表される：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 P_2(\sin \theta) \right\} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, & \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}, & \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi}, & \frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ここに, (p_r, p_θ, p_ϕ) はそれぞれ (r, θ, ϕ) に共役な運動量である. 単純化された力場の下においても, 厳密解を得るのは困難である為, 人工系の方法 [7] に訴えて逐次近似を行なう事になる.

2 中間軌道

人工系の力場を表す関数 U_0 を, 3 個の未定定数 $(\varepsilon c_m, \varepsilon c_\theta, \varepsilon c_\phi)$ を含む次の形で与える:

$$U_0(r, \theta) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \varepsilon c_m + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon c_\theta}{r^2} + \frac{\varepsilon c_\phi}{r^2 \cos^2 \theta} \right) \tag{2.1}$$

この 3 個の未定定数は共に, 微小定数 J_2 と同じ 10^{-3} の大きさを持つとする. これに対応する, 人工系の Hamilton 関数 $\mathcal{H}_0$ は次の形をとる:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2 - \varepsilon c_\theta}{r^2} + \frac{p_\phi^2 - \varepsilon c_\phi}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{\mu}{r} (1 - \varepsilon c_m) \tag{2.2}$$

この様に, U_0 に含ませた未定定数のうちの $(\varepsilon c_\theta, \varepsilon c_\phi)$ は, それぞれ正準運動量 (p_θ, p_ϕ) の大きさに差をとる形となっている. この表式中の 3 個の未定定数を全て零に等しくすれば, 楕円軌道を与えるものとなる. 未定定数を含ませた上記の $\mathcal{H}_0$ が与える軌道を, Hamilton-Jacobi の偏微分方程式を解き, 得る事にする. 以下においては, 一連の計算を列挙して行く.

Hamilton-Jacobi の偏微分方程式:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 - \varepsilon c_\theta \right\} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \varepsilon c_\phi \right\} \right] + \\
& -\frac{\mu}{r} (1 - \varepsilon c_m) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

求める未知関数 W に次の形を要請する:

$$W = -Et + \alpha_\phi \phi + \int p_r(r) dr + \int p_\theta(\theta) d\theta \tag{2.4}$$

$$p_r(r) = \sqrt{2E + \frac{2\mu}{r} (1 - \varepsilon c_m) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} \tag{2.5}$$

$$p_\theta(\theta) = \sqrt{\alpha_\psi^2 + \varepsilon c_\theta - \frac{\alpha_\phi^2 - \varepsilon c_\phi}{\cos^2 \theta}} \tag{2.6}$$

ここに $(E, \alpha_\psi, \alpha_\phi)$ は積分定数である. 解表式は, 新たな積分定数を $(\beta_t, \beta_\psi, \beta_\phi)$ とする時, 次の形をとる:

$$\beta_t = \frac{\partial W}{\partial E}, \quad \beta_\psi = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi}, \quad \beta_\phi = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\phi} \tag{2.7}$$

これらは (2.4) 式で与えた W の下で, 以下の様に表される :

$$\int \frac{dr}{p_r(r)} = t + \beta_t \quad (2.8)$$

$$\int \frac{\alpha_\psi}{p_\theta(\theta)} d\theta - \int \frac{\alpha_\psi}{r^2 p_r(r)} dr = \beta_\psi \quad (2.9)$$

$$\phi - \int \frac{\alpha_\phi}{p_\theta(\theta) \cos^2 \theta} d\theta = \beta_\phi \quad (2.10)$$

積分定数 $(E, \alpha_\psi, \alpha_\phi)$ および $(\beta_t, \beta_\psi, \beta_\phi)$ と軌道要素 $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau)$ との関係式を次で与える :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\tilde{\mu}}{2a}, & \beta_t &= -\tau \\ \alpha_\psi &= \sqrt{\tilde{\mu}a(1-e^2)}, & \beta_\psi &= \omega \\ \tilde{\alpha}_\phi &= \tilde{\alpha}_\psi \cos i, & \beta_\phi &= \Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

すると (2.8)(2.9)(2.10) は, それぞれ以下の表式に書ける :

$$\sqrt{\frac{a}{\tilde{\mu}}} \int \frac{r}{\sqrt{-r^2 + 2ar - ap}} dr = t - \tau \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\kappa_\psi \sin i} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin i}\right)^2}} \cos \theta d\theta - a\eta \int \frac{dr}{r\sqrt{-r^2 + 2ar - ap}} = \omega \quad (2.13)$$

$$\phi - \frac{1}{\kappa_\phi \tan i} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tan \theta}{\tan i}\right)^2} \cos^2 \theta} d\theta = \Omega \quad (2.14)$$

利便性を図る目的で, 次の記号を定義導入した :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &\equiv \mu(1 - \varepsilon c_m), & \tilde{\alpha}_\psi &\equiv \sqrt{\alpha_\psi^2 + \varepsilon c_\theta}, & \kappa_\psi &\equiv \frac{\tilde{\alpha}_\psi}{\alpha_\psi} \\ \tilde{n} &\equiv \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{a^3}}, & \tilde{\alpha}_\phi &\equiv \sqrt{\alpha_\phi^2 - \varepsilon c_\phi}, & \kappa_\phi &\equiv \frac{\tilde{\alpha}_\phi}{\alpha_\phi} \\ p &\equiv a(1 - c^2) \\ \eta &\equiv \sqrt{1 - c^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.12)(2.13)(2.14) 式で表された積分計算を実行する. この時, (2.12) 式の積分計算には次式 (2.16) の変数変換を, (2.13) 式の r に関する積分計算には次式 (2.17) の変数変換を行なうと容易に実行出来るものとなる :

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (2.16)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (2.17)$$

積分計算実行により, それぞれ以下の表式が得られる:

$$\frac{u - e \sin u}{\tilde{n}} = t - \tau \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\kappa_\psi} \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\sin i} \right) - f = \omega \quad (2.19)$$

$$\phi - \frac{1}{\kappa_\phi} \sin^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{\tan i} \right) = \Omega \quad (2.20)$$

得られた解表式を整理する. 我々の設定した人工系が与える中間軌道は, 以下の表式となる:

$$u - e \sin u = \tilde{n}(t - \tau) \quad (2.21)$$

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2} \quad (2.22)$$

$$r = a(1 - e \cos u) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (2.23)$$

$$\sin \theta = \sin i \sin \{ \kappa_\psi(\omega + f) \} \quad (2.24)$$

$$\tan \{ \kappa_\phi(\phi - \Omega) \} = \cos i \tan \{ \kappa_\psi(\omega + f) \} \quad (2.25)$$

上記表式中の軌道要素 $(a, e, i; \Omega, \omega, \tau)$ は, 楕円軌道の Kepler 要素とは異なる, それに類似の要素である. この要素を **Kepler 的要素** と呼び, 両者の区別を行う事にする. 人工系の力の場を表す関数 U_0 に含ませた 3 個の未定定数 $(\varepsilon_{c_m}, \varepsilon_{c_\theta}, \varepsilon_{c_\phi})$ は, この表式中の $\tilde{n}$ および三角関数の引数に収まっている $(\kappa_\psi, \kappa_\phi)$ に以下の形で含まれている:

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{\mu(1 - \varepsilon_{c_m})}{a^3}} \quad (2.26)$$

$$\kappa_\psi = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{c_\theta}}{\mu(1 - \varepsilon_{c_m})p}}, \quad \kappa_\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{c_\phi}}{\{\mu(1 - \varepsilon_{c_m})p + \varepsilon_{c_\theta}\} \cos^2 i}}} \quad (2.27)$$

Garfinkel(1958) の中間軌道には楕円関数および楕円積分を必要した [1]. 我々の中間軌道には, それらを一切必要とせず, 三角関数のみで閉じた形に表現される. この事は, 我々の中間軌道の特筆すべき優れた特徴である.

ここで, 我々の中間軌道の角振動数について調べておく事にする. (r, θ, ϕ) のそれぞれに対する角振動数 $(\nu_r, \nu_\theta, \nu_\phi)$ は次式で与えられる:

$$\nu_r = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_r}, \quad \nu_\theta = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_\theta}, \quad \nu_\phi = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_\phi} \quad (2.28)$$

ここに $\mathcal{H}_0$ は (2.2) 式に表されている, 我々が設定した人工系の Hamilton 関数である. (I_r, I_θ, I_ϕ) はそれぞれ次式で定義される作用変数である:

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr, \quad I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta, \quad I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi \quad (2.29)$$

この一周期にわたる積分を実行すれば, それぞれ次の様に求まる:

$$I_r = \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{-2E}} - \alpha_\psi \quad (2.30)$$

$$I_\theta = \tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\phi \quad (2.31)$$

$$I_\phi = \alpha_\phi \quad (2.32)$$

この作用変数 (I_r, I_θ, I_ϕ) によって $\mathcal{H}_0$ を表すと、次式の様に根号の箱入れの形となる：

$$\mathcal{H}_0 = E = -\frac{\tilde{\mu}^2}{2\left(I_r + \sqrt{\left(I_\theta + \sqrt{I_\phi^2 - \varepsilon c_\phi}\right)^2 - \varepsilon c_\theta}\right)^2} \quad (2.33)$$

作用変数表示にしたならば、(2.28) 式の計算を実行し、角振動数はそれぞれ次の様に求まる：

$$\nu_r = \tilde{n}, \quad \nu_\theta = \kappa_\psi \tilde{n}, \quad \nu_\phi = \frac{\kappa_\psi}{\kappa_\phi} \tilde{n} \quad (2.34)$$

これを見れば、角振動数同士が次の関係を持っている事が分かる：

$$\frac{\nu_\theta}{\nu_r} = \kappa_\psi, \quad \frac{\nu_\phi}{\nu_\theta} = \frac{1}{\kappa_\phi}, \quad \frac{\nu_\phi}{\nu_r} = \frac{\kappa_\psi}{\kappa_\phi} \quad (2.35)$$

3 個の未定定数 ($\varepsilon c_m, \varepsilon c_\theta, \varepsilon c_\phi$) を全て零にすると、(2.27) 式より、量 (κ_ψ, κ_ϕ) が共に 1 となり、3 つの角振動数は全て等しくなる。我々は、未定定数に有意な値を与え、角振動数を異ならせる事になる。

3 要素変化の式

解くべき初発の運動方程式を、我々が与えた中間軌道の軌道要素を新変数とする、要素変化の式に書き換える。その要素に、次で与えられる正準変数 **Delaunay 的要素** を用いる事にする：

$$\begin{aligned} L &= \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{-2E}}, & l &= \tilde{n}(t + \beta_l) \\ G &= \alpha_\psi, & g &= \beta_\psi \\ H &= \alpha_\phi, & h &= \beta_\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

これらの要素は (2.11)(2.15) 式によって **Kepler 的要素** で表すと、楕円軌道の場合と類似の次の表式となる：

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\tilde{\mu}a}, & l &= \tilde{n}(t - \tau) \\ G &= \sqrt{\tilde{\mu}a(1 - e^2)}, & g &= \omega \\ H &= \frac{\kappa_\psi}{\kappa_\phi} \sqrt{\tilde{\mu}a(1 - e^2)} \cos i, & h &= \Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

初発の運動方程式 (1.5) は、この中間軌道の要素 ($L, G, H; l, g, h$) を用いて以下の様に表される：

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\mu^2}{2L^2} + \varepsilon R \\
 &= \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\mu}{r} \left\{ J_2 \left(\frac{a_c}{r} \right)^2 P_2(\sin \theta) - \varepsilon c_m \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon c_\theta}{r^2} + \frac{\varepsilon c_\phi}{r^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

ここに摂動関数 εR は, 与えられた Hamilton 関数 $\mathcal{H}$ から人工系の Hamilton 関数 $\mathcal{H}_0$ を差し引いた $\varepsilon \mathcal{H}$ の, 符号を異にしたものである:

$$\varepsilon R = -\varepsilon \mathcal{H}, \quad \varepsilon \mathcal{H} \equiv \mathcal{H} - \mathcal{H}_0 \quad (3.5)$$

要素変化の式 (3.3) を逐次近似法によって解き, 近似理論の構築を行う事になる.

4 摂動計算

摂動の手法には **von Zeipel** の方法を適用し, 短周期項の消去が行われた新 Hamilton 関数 F^* を (F_0^*, F_1^*, F_2^*) まで, 短周期変化を定める正準変換の母関数 S を (S_0, S_1) まで決定する. ここに脚符は, 微小定数 J_2 の幂の大きさを表すものとする. 変換式および変換の母関数 S は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\partial S}{\partial l}, & G &= \frac{\partial S}{\partial g}, & H &= \frac{\partial S}{\partial h} \\
 l^* &= \frac{\partial S}{\partial L^*}, & g^* &= \frac{\partial S}{\partial G^*}, & h^* &= \frac{\partial S}{\partial H^*}
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 S &= S(L^*, G^*, H^*; l, g, h) \\
 &= L^* l + G^* g + H^* h + S_1 + S_2 + \dots \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

上記の正準変換により, 次の新しい方程式系に移行する事になる:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial l^*}, & \frac{dl^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial L^*} \\
 \frac{dG^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial g^*}, & \frac{dg^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial G^*} \\
 \frac{dH^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial h^*}, & \frac{dh^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial H^*}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

新 Hamilton 関数 F^* は, その引数に平均近点離角 l^* を含ませない次の形で与えられる:

$$\begin{aligned}
 F^* &= F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) \\
 &= F_0^*(L^*) + F_1^* + F_2^* + \dots \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

変換には時間 t を含まず, 次の Hamilton 関数保存の関係式が成立する:

$$F(L, G, H; l, g, -) - F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) = 0 \quad (4.5)$$

この F および F^* を, それぞれ点 $(L^*, G^*, H^*; l, g, h)$ の周りで Taylor 展開に訴える :

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}, \frac{\partial S}{\partial h}; l, g, -\right) &= F(L^*, G^*, H^*; l, g, h) + \\
 &+ \frac{1}{1!} \left[\left(\delta L \frac{\partial}{\partial L} + \delta G \frac{\partial}{\partial G} + \delta H \frac{\partial}{\partial H} \right)^1 F \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[\left(\delta L \frac{\partial}{\partial L} + \delta G \frac{\partial}{\partial G} + \delta H \frac{\partial}{\partial H} \right)^2 F \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \cdots \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^*\left(L^*, G^*, H^*; -, \frac{\partial S}{\partial G^*}, -\right) &= F^*(L^*, G^*, H^*; l, g, h) + \\
 &+ \frac{1}{1!} \left[\delta g^* \frac{\partial F^*}{\partial g^*} \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \frac{1}{2!} \left[(\delta g^*)^2 \frac{\partial^2 F^*}{\partial g^{*2}} \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \cdots \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

ここに脚符 $(L^*, G^*, H^*; l, g, h)$ は, 微分演算の後に, 引数をその量で置き換える事を意味するものとする. 記号 $(\delta L, \delta G, \delta H, \delta g^*)$ は, 以下で定義した量である :

$$\begin{aligned}
 \delta L &\equiv L - L^*, & \delta G &\equiv G - G^*, & \delta H &\equiv H - H^* \\
 \delta g^* &\equiv g^* - g
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Taylor 展開実行後の (4.5) 式は, 次の様に表す事が出来る :

$$F(L^*, G^*, H^*, l, g, h) - F^*(L^*, G^*, H^*, l, g, h) + \mathcal{K} = 0 \quad (4.9)$$

ここに記号 $\mathcal{K}$ は, 次で定義した量を表す :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &\equiv \frac{1}{1!} \left[\left(\delta L \frac{\partial}{\partial L} + \delta G \frac{\partial}{\partial G} + \delta H \frac{\partial}{\partial H} \right)^1 F - \delta g^* \frac{\partial F^*}{\partial g^*} \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[\left(\delta L \frac{\partial}{\partial L} + \delta G \frac{\partial}{\partial G} + \delta H \frac{\partial}{\partial H} \right)^2 F - (\delta g^*)^2 \frac{\partial^2 F^*}{\partial g^{*2}} \right]_{(L^*, G^*, H^*; l, g, h)} + \cdots \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

続いて, (4.9) 式の各項を微小定数 J_2 の冪級数に展開する. その際, 旧 Hamilton 関数 F に含まれる未定定数 $(\varepsilon c_m, \varepsilon c_\theta, \varepsilon c_\phi)$ をそれぞれ次の様に冪級数に展開する [8] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon c_m &= J_2 c_m^{(1)} + J_2^2 c_m^{(2)} + \cdots \\
 \varepsilon c_\theta &= J_2 c_\theta^{(1)} + J_2^2 c_\theta^{(2)} + \cdots \\
 \varepsilon c_\phi &= J_2 c_\phi^{(1)} + J_2^2 c_\phi^{(2)} + \cdots
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

微小定数 J_2 の同冪ごとに方程式 (4.9) を満足させる様に要請すれば, 次なる方程式の系列が得られる :

$$\begin{aligned}
 O(J_2^0) : & F_0(L^*) = F_0^* \\
 O(J_2^1) : & \frac{\partial F_0}{\partial L^*} \frac{\partial S_1}{\partial l} + F_1 = F_1^* \\
 O(J_2^2) : & \frac{\partial F_0}{\partial L^*} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L^{*2}} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L^*} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G^*} \frac{\partial S_1}{\partial g} + F_2 = F_2^* + \frac{\partial F_1^*}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G^*}
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

新 Hamilton 関数 F^* は (4.4) 式で与えた仮定に従い, l^* に関する短周期項を含ませない様に, 次式左部の時間平均操作によってそれを消去した部分を担わせて決定する. 母関数 S は, その短周期項を担う様に決定する:

$$\begin{aligned} O(J_2^0): F_0^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_0 dl, & S_0 &= L^* l + G^* g + H^* h \\ O(J_2^1): F_1^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1 dl, & S_1 &= - \left(\frac{\partial F_0}{\partial L^*} \right)^{-1} \int (\mathcal{F}_1 - F_1^*) dl \\ O(J_2^2): F_2^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2 dl \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここに記号 $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ は, それぞれ次で定義した量を表す:

$$\mathcal{F}_0 \equiv F_0 \quad (4.14)$$

$$\mathcal{F}_1 \equiv F_1 + \mathcal{K}_1 - \frac{\partial F_0}{\partial L^*} \frac{\partial S_1}{\partial l} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{F}_2 \equiv F_2 + \mathcal{K}_2 - \frac{\partial F_0}{\partial L^*} \frac{\partial S_2}{\partial l} \quad (4.16)$$

次の量を表す記号 (ξ, ψ, ϑ) :

$$\xi \equiv 1 + e \cos f \quad (4.17)$$

$$\psi \equiv g + f \quad (4.18)$$

$$\vartheta \equiv \frac{H}{G} \quad (4.19)$$

を定義導入し, 旧 Hamilton 関数 (F_0, F_1, F_2) および決定した新 Hamilton 関数 (F_0^*, F_1^*, F_2^*) と母関数 (S_0, S_1) を以下に記しておく:

旧 Hamilton 関数 (F_0, F_1, F_2) :

$$F_0 = + \frac{\mu^2}{2L^{*2}} \quad (4.20)$$

$$F_1 = - J_2 \frac{\mu^4 a_e^2}{G^{*6}} \left[-\frac{1}{2} \xi^{*3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \xi^{*3} \sin^2 \psi \right] + \quad (4.21)$$

$$+ J_2 c_m^{(1)} \frac{\mu^2}{G^{*2}} \xi^* - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2}{2G^{*4}} \xi^{*2} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{2G^{*4}} \frac{\xi^{*2}}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi}$$

$$F_2 = + J_2^2 c_m^{(1)} \mu^4 a_e^2 \left[-\frac{3}{2} \xi^{*3} + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \xi^{*3} \sin^2 \psi \right] + \quad (4.22)$$

$$- J_2^2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{G^{*8}} \left[-\frac{3}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*3} \sin^2 \psi + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \xi^{*3} \psi \sin 2\psi \right] +$$

$$- J_2^2 c_\phi^{(1)} \frac{3\mu^4 a_e^2}{2G^{*8}} \xi^{*3} \sin^2 \psi +$$

$$+ J_2^2 c_m^{(2)} \frac{\mu^2}{G^{*2}} \xi^* - J_2^2 c_\theta^{(2)} \frac{\mu^2}{2G^{*4}} \xi^{*2} - J_2^2 c_\phi^{(2)} \frac{\mu^2}{2G^{*4}} \frac{\xi^{*2}}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} +$$

$$- (J_2 c_m^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{G^{*2}} \xi^* - (J_2 c_\phi^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{2G^{*6}} \frac{\xi^{*2} \sin^2 \psi}{(\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi)^2} +$$

$$+ J_2^2 c_m^{(1)} c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2}{G^{*4}} \xi^{*2} +$$

$$+ J_2^2 c_m^{(1)} c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{G^{*4}} \frac{\xi^{*2}}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} +$$

$$- J_2^2 c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{G^{*6}} \left[\frac{1}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \frac{\xi^{*2} \sin^2 \psi}{(\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi)^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \frac{\xi^{*2} \psi \sin 2\psi}{(\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi)^2} \right]$$

新 Hamilton 関数 (F_0^*, F_1^*, F_2^*) :

$$F_0^* = + \frac{\mu^2}{2L^{*2}} \quad (4.23)$$

$$F_1^* = - J_2 \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*3} G^{*3}} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \quad (4.24)$$

$$+ J_2 c_m^{(1)} \frac{\mu^2}{L^{*2}} - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} G^*} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} H^*}$$

$$F_2^* = + J_2^2 \frac{\mu^6 a_e^4}{L^{*10}} \left[\frac{15}{128} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - \frac{18}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \quad (4.25)$$

$$+ \frac{3}{32} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - 6 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 9 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) - \frac{15}{128} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \left(1 - 2 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 7 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) +$$

$$- \frac{3}{64} \left(\frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \right) \left(1 - 16 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 15 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) \cos 2g \right] +$$

$$+ J_2^2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*8}} \left[\frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(\frac{3}{8} - \frac{9}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{2e^*}{3} \right) \cos 2g \right] +$$

$$+ J_2^2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*4} G^{*3} H^*} \left(\frac{3}{8} - \frac{9}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) +$$

$$+ J_2^2 c_m^{(2)} \frac{\mu^2}{L^{*2}} - J_2^2 c_\theta^{(2)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} G^*} - J_2^2 c_\phi^{(2)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} H^*} +$$

$$- (J_2 c_m^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{2L^{*2}} + (J_2 c_\theta^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{8L^{*4} G^{*2}} \left(3 + \frac{L^*}{G^*} \right) + (J_2 c_\phi^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{8L^{*4} H^{*2}} \left(3 - \frac{L^*}{H^*} \right) +$$

$$+ J_2^2 c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \left(\frac{3\mu^2}{4L^{*4} G^* H^*} - \frac{\mu^2}{4L^{*3} G^{*3}} \frac{1}{\cos^2 g + \vartheta^{*2} \sin^2 g} \right)$$

母関数 (S_0, S_1) :

$$S_0 = + L^* l + G^* g + H^* h \quad (4.26)$$

$$S_1 = + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*3}} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) (f - l + e^* \sin f) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \times \quad (4.27)$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \sin (2g + 2f) + \frac{e^*}{2} \sin (2g + f) + \frac{e^*}{6} \sin (2g + 3f) \right] \right\} +$$

$$+ J_2 c_m^{(1)} L^* (u - l) - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{1}{2G^*} (f - l) - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2H^*} \left[\tan^{-1} (\vartheta^* \tan \psi) - l \right]$$

5 1 次近似理論の構築

ここで、微小定数 J_2 に関する 2 次の量を無視する事によって得られる運動理論の構築を行なう。先ずは、新 Hamilton 関数 $(F_0^* + F_1^*)$, その下での要素変化の式、母関

数 ($S_0 + S_1$) および解表式を, 順に書き表した後に, 未定定数の決定を行う事にする.

新 Hamilton 関数 ($F_0^* + F_1^*$):

$$\begin{aligned} F_0^* + F_1^* = & + \frac{\mu^2}{2L^{*2}} - J_2 \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*3} G^{*3}} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\ & + J_2 c_m^{(1)} \frac{\mu^2}{L^{*2}} - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} G^*} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} H^*} \end{aligned} \quad (5.1)$$

要素変化の式 ($L^*, G^*, H^*; l^*, g^*, h^*$):

$$\frac{dL^*}{dt} = \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial t^*} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{dG^*}{dt} = \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial g^*} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial h^*} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{dl^*}{dt} = - \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial L^*} \quad (5.5)$$

$$= n^* - J_2 \frac{3}{4} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*4} G^{*3}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + J_2 c_m^{(1)} \frac{2\mu^2}{L^{*3}} - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} G^*} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} H^*}$$

$$\frac{dg^*}{dt} = - \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial G^*} \quad (5.6)$$

$$= -J_2 \frac{3}{4} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*3} G^{*4}} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} G^{*2}}$$

$$\frac{dh^*}{dt} = - \frac{\partial(F_0^* + F_1^*)}{\partial H^*} \quad (5.7)$$

$$= -J_2 \frac{3}{2} \frac{\mu^4 a_e^2 H^*}{L^{*3} G^{*5}} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{2L^{*3} H^{*2}}$$

母関数 ($S_0 + S_1$):

$$S_0 + S_1 = L^* l + G^* g + H^* h + \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*3}} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) (f - l + e^* \sin f) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \times \right. \\ & \times \left[\frac{1}{2} \sin(2g + 2f) + \frac{e^*}{2} \sin(2g + f) + \frac{e^*}{6} \sin(2g + 3f) \right] \Big\} + \\ & + J_2 c_m^{(1)} L^* (u - l) - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{1}{2G^*} (f - l) - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2H^*} \left[\tan^{-1}(\vartheta^* \tan \psi) - l \right] \end{aligned}$$

解表式 $(L, G, H; l, g, h)$:

$$L = L^* + \frac{\partial S_1}{\partial l} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} &= L^* + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*3}} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(\frac{L^{*6}}{G^{*6}} \xi^{*3} - \frac{L^{*3}}{G^{*3}} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \xi^{*3} \cos 2\psi \right] + \\ &\quad + J_2 c_m^{(1)} L^* \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* - 1 \right) + \\ &\quad - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{1}{2L^*} \left(\frac{L^{*4}}{G^{*4}} \xi^{*2} - \frac{L^*}{G^*} \right) + \\ &\quad - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2L^*} \left(\frac{L^{*4}}{G^{*4}} \frac{\xi^{*2}}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} - \frac{L^*}{H^*} \right) \end{aligned}$$

$$G = G^* + \frac{\partial S_1}{\partial g} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &= G^* + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*3}} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left[\cos(2g + 2f) + e^* \cos(2g + f) + \frac{e^*}{3} \cos(2g + 3f) \right] + \\ &\quad - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2G^*} \frac{1}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

$$H = H^* \quad (5.11)$$

$$l = l^* - \frac{\partial S_1}{\partial L^*} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} &= l^* - J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*3} G^{*2} e^*} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} + \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + 1 \right) \sin f + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \times \right. \\ &\times \left[\left(-\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} - \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + 1 \right) \sin(2g + f) + \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} + \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + \frac{1}{3} \right) \sin(2g + 3f) \right] \Big\} + \\ &\quad - J_2 c_m^{(1)} \left(u - l + \frac{G^*}{L^* e^*} \sin f \right) + \\ &\quad + J_2 c_\theta^{(1)} \frac{1}{2 L^* G^* e^*} (1 + \xi^*) \sin f + \\ &\quad + J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2 L^* G^* e^*} \frac{(1 + \xi^*) \sin f}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

$$g = g^* - \frac{\partial S_1}{\partial G^*} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &= g^* + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*2} G^{*2} e^*} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} + \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + 1 \right) \sin f + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \times \right. \\ &\times \left[\left(-\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} - \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + 1 \right) \sin(2g + f) + \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^{*2} + \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \xi^* + \frac{1}{3} \right) \sin(2g + 3f) \right] \Big\} + \\ &\quad + J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*4}} \left\{ \left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) (f - l + e^* \sin f) + \left(\frac{9}{4} - \frac{15}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{2} \sin(2g + 2f) + \frac{e^*}{2} \sin(2g + f) + \frac{e^*}{6} \sin(2g + 3f) \right] \Big\} + \\ &\quad + J_2 c_m^{(1)} \frac{1}{e^*} \sin f + \\ &\quad - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{1}{2 G^{*2} e^*} \left[(f - l) e^* + (1 + \xi^*) \sin f \right] + \\ &\quad - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2 G^{*2} e^*} \left[\frac{(1 + \xi^*) \sin \psi}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} + \frac{e^*}{2} \frac{\sin 2\psi}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} \right] \end{aligned}$$

$$h = h^* - \frac{\partial S_1}{\partial H^*} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} &= h^* - \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*4}} \times \\ &\times \left[f - l + e^* \sin f - \frac{1}{2} \sin(2g + 2f) - \frac{e^*}{2} \sin(2g + f) - \frac{e^*}{6} \sin(2g + 3f) \right] \frac{H^*}{G^*} + \\ &\quad + J_2 c_\phi^{(1)} \frac{1}{2 H^*} \left[\tan^{-1}(\vartheta^* \tan \psi) - l - \frac{H^*}{2 G^*} \frac{\sin 2\psi}{\cos^2 \psi + \vartheta^{*2} \sin^2 \psi} \right] \end{aligned}$$

未定定数の決定 — その1 —

角変数に関する要素変化の式 (5.5)(5.6)(5.7) において、次式が全て成立する様に、

未定定数 ($c_m^{(1)}, c_\theta^{(1)}, c_\phi^{(1)}$) を決定する：

$$\frac{dl^*}{dt} - n^* = 0, \quad \frac{dg^*}{dt} = 0, \quad \frac{dh^*}{dt} = 0 \quad (5.15)$$

未定定数にそれぞれ以下の値を与えれば、これを成立させる事が出来る：

$$c_m^{(1)} = -\frac{\mu^2 a_e^2}{2L^* G^{*3}} + c_\theta^{(1)} \frac{3}{4L^* G^*} + c_\phi^{(1)} \frac{3}{4L^* H^*} \quad (5.16)$$

$$c_\theta^{(1)} = -\frac{3\mu^2 a_e^2}{2G^{*2}} \left(1 - 5\frac{H^{*2}}{G^{*2}}\right) \quad (5.17)$$

$$c_\phi^{(1)} = -3\frac{\mu^2 a_e^2 H^{*3}}{G^{*5}} \quad (5.18)$$

要素変化の式 (5.2)(5.3)(5.4) より、作用変数 (L^*, G^*, H^*) は全て定数となっている。(5.15) 式が成立する事により、角変数 (l^*, g^*, h^*) は永年摂動を一切含まない。楕円軌道の場合、(5.15) 式を成立させる未定定数は存在しない。この為、角変数 g^* が永年摂動を必然的に持ち、この存在によって長周期摂動を発生させる事になる。角変数 g^* の永年摂動を、未定定数 $c_\theta^{(1)}$ に (5.17) 式の値を与える事によって消去し、長周期摂動の発生を防ぐ。こうする事により、長周期摂動も小分母も存在しなくなる。

6 2次近似理論の構築の試み

1 次近似理論では、角変数 g^* に永年摂動を与えず、それによって長周期摂動の存在を消す形で理論の構築を行なった。この要領で、2 次近似理論の構築を試みる事にする。1 次の場合と異なるのは、以下に示す様に、新 Hamilton 関数 F_2^* の引数に g^* を含む事である：

$$F^* = F_0^* + F_1^* + F_2^* \quad (6.1)$$

$$F_0^* = F_0^*(L^*, -, -; -, -, -) \quad (6.2)$$

$$F_1^* = F_1^*(L^*, G^*, H^*; -, -, -) \quad (6.3)$$

$$F_2^* = F_2^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) \quad (6.4)$$

要素変化の式は、以下の通りである：

$$\begin{aligned} \frac{dL^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial l^*}, & \frac{dl^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial L^*} \\ \frac{dG^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial g^*}, & \frac{dg^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial G^*} \\ \frac{dH^*}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial h^*}, & \frac{dh^*}{dt} &= -\frac{\partial F^*}{\partial H^*} \end{aligned} \quad (6.5)$$

先ずは、長周期摂動の存在を消す為、角変数 g^* に 1 次および 2 次の永年摂動を与えない様に、次式の成立を求める：

$$\frac{dg^*}{dt} = -\frac{\partial F_1^*}{\partial G^*} - \frac{\partial F_2^*}{\partial G^*} = 0 \quad (6.6)$$

この成立は、未定定数 $c_\theta^{(1)}$ および $c_\theta^{(2)}$ によって 1 次の場合と同様に可能となる。

1 次の場合と比べて、要素変化の式 (6.5) の作用変数 G^* の部分が、(6.4) 式で強調されている様に、 F_2^* の引数に g^* を含む為、異なっている。何か処置を講じなければ、 G^* に永年変化を伴ってしまう事になる。この事を気掛かりとしながら、(6.5) 式の作用変数の部分を具体的に書き表してみれば以下の通りとなる。

要素変化の式 (L^*, G^*, H^*) :

$$\frac{dL^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial t^*} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{dG^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial g^*} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} O(J_2^2) \triangleright = & +J_2^2 \frac{3}{32} \frac{\mu^6 a_c^4}{L^{*10}} \left(\frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \right) \left(1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(1 - 15 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \sin 2g^* + \\ & -J_2^2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^4 a_c^2}{L^{*3} G^{*5}} \left(1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left(\frac{3}{4} - e^* \right) \sin 2g^* + \\ & -J_2^2 c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2}{4L^{*3} G^{*3}} \left(1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \frac{\sin 2g^*}{(\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2} \\ \frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial h^*} = & 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

これを見れば、作用変数 L^* および H^* は、1 次の場合と同様に定数を与えている。問題の G^* の変化式の中には、未定定数 $c_\theta^{(1)}$ と $c_\phi^{(1)}$ が積の形で含まれている事が確認出来る。このうち $c_\theta^{(1)}$ は長周期摂動の存在を消す為に、既に (6.6) 式を満たす様に決定されている。そこで、もう一方の $c_\phi^{(1)}$ に、微小定数 J_2 の 2 次の大きさで発生する G^* の永年変化を回避する役割を与える事にする。 $c_\phi^{(1)}$ がこの役割を果たす事によって、次式が成し遂げられる：

$$\frac{dG^*}{dt} = 0 \quad (6.10)$$

この成立に $c_\phi^{(1)}$ を使用してしまう為、微小定数 J_2 の 1 次の大きさで発生する角変数 h^* の永年変化を許容しなければならない。

後は、残る未定定数 ($c_m^{(1)}, c_\theta^{(2)}, c_\phi^{(2)}$) によって、次式を満足させる事が出来る：

$$\frac{dl^*}{dt} - n^* = 0, \quad \frac{dh_2^*}{dt} = 0 \quad (6.11)$$

要素変化の式 (6.5) の角変数の部分を具体的に書き表した表式と、上記の決定方法に基づき、決定した ($c_m^{(1)}, c_\theta^{(1)}, c_\phi^{(1)}; c_m^{(2)}, c_\theta^{(2)}, c_\phi^{(2)}$) を以下に記しておく事にする：

要素変化の式 l^* :

$$\frac{dl^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial L^*} \quad (6.12)$$

$$O(J_2^0)_{\triangleright} = +n +$$

$$\begin{aligned} O(J_2^1)_{\triangleright} &= -J_2 \frac{3}{4} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*4} G^{*3}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + J_2 c_m^{(1)} \frac{2\mu^2}{L^{*3}} - J_2 c_\theta^{(1)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} G^*} - J_2 c_\phi^{(1)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} H^*} + \\ O(J_2^2)_{\triangleright} &= +J_2^2 \frac{\mu^6 a_e^4}{L^{*11}} \left[\frac{75}{128} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - \frac{18}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \frac{3}{8} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - 6 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 9 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\ &\quad - \frac{45}{128} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \left(1 - 2 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 7 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \\ &\quad \left. - \frac{15}{64} \left(\frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{3}{5} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \right) \left(1 - 16 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 15 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) \cos 2g^* \right] + \\ &\quad + J_2^2 c_\theta^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*9}} \left[\frac{3}{2} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{9}{8} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{e^*} \left(\frac{L^{*3}}{G^{*3}} + \frac{9e^*}{16} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{3}{4} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \right) \left(1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cos 2g^* \right] + \\ &\quad + J_2^2 c_\phi^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*5} G^{*3} H^*} \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\ &\quad + J_2^2 c_m^{(2)} \frac{2\mu^2}{L^{*3}} - J_2^2 c_\theta^{(2)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} G^*} - J_2^2 c_\phi^{(2)} \frac{3\mu^2}{2L^{*4} H^*} + \\ &\quad - (J_2 c_m^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{L^{*3}} + \\ &\quad - (J_2 c_\theta^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{L^{*5} G^{*2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{8} \frac{L^*}{G^*} \right) - (J_2 c_\phi^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{L^{*5} H^{*2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8} \frac{L^*}{H^*} \right) + \\ &\quad + J_2^2 c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \left(\frac{3\mu^2}{L^{*5} G^* H^*} - \frac{3\mu^2}{4L^{*4} G^{*3}} \frac{1}{\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*} \right) \end{aligned}$$

要素変化の式 g^* :

$$\frac{dg^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial G^*} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} O(J_2^1)_{\triangleright} &= -J_2 \frac{3}{4} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*3} G^{*4}} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - J_2 c_{\theta}^{(1)} \frac{\mu^2}{2 L^{*3} G^{*2}} + \\ O(J_2^2)_{\triangleright} &+ J_2^2 \frac{\mu^6 a_e^4}{L^{*11}} \left\{ \frac{75}{128} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{126}{25} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{9}{5} \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \frac{9}{16} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \left(1 - 8 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 15 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\ &- \frac{105}{128} \frac{L^{*8}}{G^{*8}} \left(1 - \frac{18}{7} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 11 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \left[-\frac{15}{64} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{112}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 27 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{21}{64} \frac{L^{*8}}{G^{*8}} \left(1 - \frac{144}{7} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{165}{7} \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) \right] \cos 2g^* \right\} + \\ &+ J_2^2 c_{\theta}^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*9}} \left\{ \frac{3}{2} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - \frac{9}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{15}{8} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - 7 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{2}{e^*} \times \right. \\ &\times \left[\frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{15e^*}{16} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{7}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - \frac{5}{4} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{7}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \right] \cos 2g^* \Big\} + \\ &+ J_2^2 c_{\phi}^{(1)} \frac{9}{8} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*4} G^{*4} H^*} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\ &- J_2^2 c_{\theta}^{(2)} \frac{\mu^2}{2 L^{*3} G^{*2}} + \\ &+ (J_2 c_{\theta}^{(1)})^2 \frac{\mu^2}{L^{*4} G^{*3}} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \frac{L^*}{G^*} \right) + \\ &+ J_2^2 c_{\theta}^{(1)} c_{\phi}^{(1)} \left(\frac{3\mu^2}{4 L^{*4} G^{*2} H^*} - \frac{\mu^2}{4 L^{*3} G^{*4}} \frac{3 \cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*}{(\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2} \right) \end{aligned}$$

要素変化の式 h^* :

$$\frac{dh^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial H^*} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} O(J_2^1)_{\triangleright} &= -J_2 \frac{3}{2} \frac{\mu^4 a_e^2 H^*}{L^{*3} G^{*5}} - J_2 c_{\phi}^{(1)} \frac{\mu^2}{2 L^{*3} H^{*2}} + \\ O(J_2^2)_{\triangleright} &+ J_2^2 \frac{\mu^6 a_e^4}{L^{*11}} \left[\frac{27}{32} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{5}{9} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{9}{8} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \right. \\ &- \frac{15}{32} \frac{L^{*8}}{G^{*8}} \left(1 + 7 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{L^{*6}}{G^{*6}} - \frac{L^{*8}}{G^{*8}} \right) \left(1 - \frac{15}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cos 2g^* \left. \right] \frac{H^*}{G^*} + \\ &+ J_2^2 c_{\theta}^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*9}} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{L^{*5}}{G^{*5}} + \frac{5}{3} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \right) + \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(\frac{3}{4} - e^* \right) \cos 2g^* \right] \frac{H^*}{G^*} + \\ &+ J_2^2 c_{\phi}^{(1)} \frac{\mu^4 a_e^2}{L^{*4} G^{*3} H^{*2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\ &- J_2^2 c_{\phi}^{(2)} \frac{\mu^2}{2 L^{*3} H^{*2}} + \\ &+ (J_2 c_{\phi}^{(1)})^2 \frac{3\mu^2}{4 L^{*4} H^{*3}} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \frac{L^*}{H^*} \right) + \\ &+ J_2^2 c_{\theta}^{(1)} c_{\phi}^{(1)} \left(\frac{3\mu^2}{4 L^{*4} H^{*3}} - \frac{\mu^2}{2 L^{*3} G^{*4}} \frac{\sin^2 g^*}{(\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2} \right) \frac{H^*}{G^*} \end{aligned}$$

未定定数の決定 — その 2 —

$(c_m^{(1)}, c_{\theta}^{(1)}, c_{\phi}^{(1)})$:

$$c_m^{(1)} = -\frac{\mu^2 a_e^2}{2 L^* G^{*3}} + c_{\theta}^{(1)} \frac{3}{4 L^* G^*} + c_{\phi}^{(1)} \frac{3}{4 L^* H^*} \quad (6.15)$$

$$c_{\theta}^{(1)} = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*2}} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} c_{\phi}^{(1)} &= + \frac{1}{c_{\theta}^{(1)}} \frac{3}{8} \frac{\mu^4 a_e^4}{L^{*4}} \left(\frac{L^{*2}}{G^{*2}} - \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \right) \left(1 - 15 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) (\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2 + \\ &- \frac{\mu^2 a_e^2}{G^{*2}} (3 - 4e^*) (\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

$(c_m^{(2)}, c_\theta^{(2)}, c_\phi^{(2)}) :$

$$\begin{aligned}
 c_m^{(2)} = & -\frac{\mu^4 a_e^4}{L^{*8}} \left[\frac{75}{256} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - \frac{18}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\
 & + \frac{3}{16} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - 6 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 9 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) - \frac{45}{256} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \left(1 - 2 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 7 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \\
 & - \frac{15}{128} \left(\frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{3}{5} \frac{L^{*7}}{G^{*7}} \right) \left(1 - 16 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 15 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) \cos 2g^* \Big] + \\
 & - c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*6}} \left[\frac{3}{4} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{9}{16} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{1}{e^*} \times \right. \\
 & \times \left(\frac{L^{*3}}{G^{*3}} + \frac{9e^*}{16} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} - \frac{3}{4} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \right) \left(1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cos 2g^* \Big] + \\
 & - c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*2} G^{*3} H^*} \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\
 & + c_\theta^{(2)} \frac{3}{4L^* G^*} + c_\phi^{(2)} \frac{3}{4L^* H^*} + \\
 & + (c_m^{(1)})^2 \frac{1}{2} + (c_\theta^{(1)})^2 \frac{1}{L^{*2} G^{*2}} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{16} \frac{L^*}{G^*} \right) + (c_\phi^{(1)})^2 \frac{1}{L^{*2} H^{*2}} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16} \frac{L^*}{H^*} \right) \\
 & - c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \left(\frac{3}{2L^{*2} G^* H^*} - \frac{3}{8L^* G^{*3}} \frac{1}{\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*} \right)
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
 c_\theta^{(2)} = & + \frac{\mu^4 a_e^4}{L^{*6}} \left\{ \frac{75}{64} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{126}{25} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{9}{5} \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \frac{9}{8} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - 8 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 15 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\
 & - \frac{105}{64} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{18}{7} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 11 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \left[-\frac{15}{32} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{112}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + 27 \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) + \right. \\
 & + \frac{21}{32} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 - \frac{144}{7} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} + \frac{165}{7} \frac{H^{*4}}{G^{*4}} \right) \Big] \cos 2g^* \Big\} + \\
 & + c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2 a_e^2}{L^{*4}} \left\{ 3 \frac{L^{*3}}{G^{*3}} \left(1 - \frac{9}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{15}{4} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - 7 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{4}{e^*} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{L^{*2}}{G^{*2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{15e^*}{16} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{7}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - \frac{5}{4} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{7}{5} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \right] \cos 2g^* \Big\} + \\
 & + c_\phi^{(1)} \frac{9}{4} \frac{\mu^2 a_e^2}{L^* G^{*2} H^*} \left(1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\
 & + (c_\theta^{(1)})^2 \frac{1}{L^* G^*} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \frac{L^*}{G^*} \right) + \\
 & + c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \left(\frac{3}{2L^* H^*} - \frac{1}{2G^{*2}} \frac{3 \cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*}{(\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
 c_\phi^{(2)} = & + \frac{\mu^4 a_c^4}{L^{*6}} \left[\frac{27}{16} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(1 - \frac{5}{9} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \frac{9}{4} \frac{L^{*5}}{G^{*5}} \left(1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \right. \\
 & - \frac{15}{16} \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \left(1 + 7 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) - 3 \left(\frac{L^{*4}}{G^{*4}} - \frac{L^{*6}}{G^{*6}} \right) \left(1 - \frac{15}{8} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cos 2g^* \left. \right] \frac{H^{*3}}{G^{*3}} + \\
 & + c_\theta^{(1)} \frac{\mu^2 a_c^2}{L^{*4}} \left[\frac{9}{2} \left(\frac{L^{*3}}{G^{*3}} + \frac{5}{3} \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \right) + \frac{L^{*4}}{G^{*4}} \left(\frac{3}{2} - \frac{e^*}{2} \right) \cos 2g^* \right] \frac{H^{*3}}{G^{*3}} + \\
 & + c_\phi^{(1)} \frac{\mu^2 a_c^2}{L^* G^{*3}} \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) + \\
 & + (c_\phi^{(1)})^2 \frac{3}{2L^* H^*} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \frac{L^*}{H^*} \right) + \\
 & + c_\theta^{(1)} c_\phi^{(1)} \left(\frac{3}{2L^* G^*} - \frac{1}{G^{*2}} \frac{\sin^2 g^*}{(\cos^2 g^* + \vartheta^{*2} \sin^2 g^*)^2} \frac{H^{*3}}{G^{*3}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

考察 — 未定定数の決定 —

未定定数の中には、他の未定定数を含む形で従属的に決定したものがある。この決定が、運動理論の適用範囲に小さな制限を付ける事になった。

未定定数 $c_\phi^{(1)}$ は (6.17) 式の様に、分母に $c_\theta^{(1)}$ を存在させる形で決定した。この $c_\theta^{(1)}$ は (6.16) 式の値を持ち、これが零を与える近傍で $c_\phi^{(1)}$ が有意に決定出来ない。 $c_\theta^{(1)}$ の値が零となるのは、軌道傾斜角 i が次の角度 i_c の時である。ここでは考察範囲を ($0^\circ \leq i \leq 90^\circ$) に限定しておく事にする：

$$1 - 5 \cos^2 i_c = 0 \tag{6.21}$$

$$i_c = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 63.^\circ 43' 49'' \tag{6.22}$$

以下においては、理論の適用限界を見積もっておく事にしよう。問題となる量 ($1 - 5 \cos^2 i$) が、次の小さな値になってしまう軌道傾斜角 i をそれぞれ (i_1, i_2) とする：

$$1 - 5 \cos^2 i_1 = +J_2 \ (\cong 10^{-3}), \quad 1 - 5 \cos^2 i_2 = +\sqrt{J_2} \tag{6.23}$$

この時 (i_1, i_2) は、それぞれ i_c の近傍に次の様に位置する：

$$|i_c - i_1| \cong 0.^\circ 014, \quad |i_c - i_2| \cong 0.^\circ 46 \tag{6.24}$$

従って、次の制限が付けられる事になる：

$$|i_c - i| \geq 0.^\circ 46 \tag{6.25}$$

この制限を満たさない軌道傾斜角 i に対しては、未定定数に、ここで決定した値とは異なる値を与えれば有効な理論を構築する事が出来る。

結論

未定定数を含む、三角関数のみで表される中間軌道を考えた。未定定数に適切な値を与える事によって、次の様な結果が得られた：

- (i) 微小定数 J_2 の 1 次の大きさに限定する時,
全ての要素が永年摂動を一切含まない様にする事が出来た.
ここでは, 長周期摂動も無ければ, 小分母も存在し無い.
- (ii) 微小定数 J_2 に関する 2 次の運動理論の構築を試みた.
ひとつの角要素を除いて, 全ての要素を,
永年摂動を含まない形に導く事が出来た.

2 次まで求められた未定定数は, 中間軌道を,
高い精度で真の運動を表現可能なものにしてくれた.

References

- [1] Garfinkel,B., (1958), On the motion of a satellite of an oblate planet, *The Astronomical Journal*, **63**, 88-96.
- [2] Hori,G., (1960), The motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination, *The Astronomical Journal*, **65**, 291-300.
- [3] Kozai,Y., (1959), The motion of a close Earth satellite, *The Astronomical Journal*, **64**, 367-377.
- [4] Brouwer,D., (1959), Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, *The Astronomical Journal*, **64**, 378-397.
- [5] Garfinkel,B., (1959), The orbit of a satellite of an oblate planet, *The Astronomical Journal*, **64**, 353-367.
- [6] Message,P.J., Hori,G., Garfinkel,B., (1962), On the critical case in the motion of an artificial satellite, *The Observatory*, **82**, No.929, 168-170.
- [7] 井上 猛, (1995), 定数変化法と云うもの, 第 27 回天体力学研究会集録, 155-161.
- [8] Inoue,T., (1967), Etude du Mouvement d'un Satellite Artificiel par La Méthode de L'orbite Intermédiaire, *The Science Reports of The Tôhoku University Series I*, Vol. L, No.2, Japan, 108-132.

A Solution for the Main Problem of the Artificial Satellite Motion perfectly free from the Critical Inclination Difficulty

Takeshi INOUE

takinoue@cc.kyoto-su.ac.jp

Kyoto Sangyo University, Motoyama, Kamigamo, Kita-ku, Kyoto, 603-8555, Japan

ABSTRACT

Even the restricted problem, namely the main problem for an artificial satellite motion is not solved exactly. Astronomers were obliged to apply the method of successive approximations. Usually, they solve the problem of two bodies and then calculate the perturbations for the Keplerian orbital elements. In this case, one encounters inevitably the inconvenience of small divisors, i.e. the difficulty of the critical inclination.

There is no reason that one should choose the Keplerian orbit as the starting orbit. The method of “an artificial system”, in other words the method of the variation of arbitrary constants, makes us to find the new variables and the functional relations between the old variables and the new variables. An artificial system gives an intermediary orbit as the starting orbit. The integration constants of the artificial system play the role of the new variables.

The differential equations for these new variables are equivalent to the starting differential equations of motion. The variations for the new variables depend on the choice of the artificial systems. This means that a suitable choice of artificial systems enables us to release from the inconvenience of small divisors.

$$\begin{aligned} \text{The true motion} &= \{\text{An intermediary orbit}\} + \\ &+ \{\text{The perturbations for the elements of this intermediary orbit}\} \end{aligned}$$

Under these considerations, the present author proposes as the desirable artificial system a force function with one parameter which permits to eliminate totally secular and long periodic perturbations, that is there is no critical inclination difficulty.

1 はじめに

本小論に於て、中間軌道の方法が如何に有用なものであるかを示したいと思う。広い意味では、楕円軌道 (Kepler 運動) も中間軌道の一つであると言う見方も出来るであろうが、我々は狭い意味での中間軌道と云う事に限ってこの言葉を使う事にする。その時に、中間軌道なるもの、常に楕円軌道よりも優れて真の運動に肉薄し得るものでなければならないこと言うまでも無い事である。

具体性を持たせる目的で、人工衛星の問題を扱う事にする。通常の運動理論には、短周期変化・永年変化および小分母を伴う長周期変化が理論構成の変数に含まれている。

ここでは、地球の力の場を表わす函数 $U(r, \theta, \phi)$ を次の形に限る事にする。中間軌道の方法の卓越する処を示すには、これで充分と考えられるからである。

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (1.1)$$

ここに、 r, θ, ϕ は地球の質量中心を原点とする人工衛星の極座標を表わす。 r は地心距離を表わし、 θ は赤緯を ϕ は赤経を表わすとする。力の場に、軸対称性を仮定したので、赤経 ϕ は函数 U の中には現われない事になって居る。

量 μ は、万有引力定数と地球質量との積で与えられるものである。量 a_e は、地球の赤道半径を表わす。量 J_2 は、地球の力の場の、球対称からの力学的な偏倚を表わすもので 10^{-3} の大きさを有して居る。

上の様に、単純化された力の場の下でも、厳密解を得るのは困難である。そこで勢い「人工系の方法」に訴えて逐次近似を行なう事になる。斯かる方法に立脚した先行研究の幾つかをしてみる事にしよう。人工系を与える力の場を U_0 と表記する。
(甲) Kozai (1959), Brouwer (1959)

$$U_0 = \frac{\mu}{r} \quad (1.2)$$

人工系の解は楕円軌道

(乙) Garfinkel (1958)

$$U_0 = \frac{\mu}{r} (1 + c_3) + \frac{c_2 + c_1 \sin^2 \theta}{r^2} \quad (1.3)$$

純粋定数 c_1, c_2, c_3 を含む中間軌道

(丙) Aksnes (Garfinkel and Aksnes, 1970)

$$U_0 = \frac{\mu}{r} + \mu J_2 \tilde{c}_1 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (1.4)$$

力学定数 $\tilde{c}_1$ を含む中間軌道

(丁) Inoue (1967)

$$U_0 = \frac{\mu}{r} + \frac{\varepsilon \nu_1}{r} + \frac{\varepsilon \lambda_0 + \varepsilon \lambda_2 \sin^2 \theta + \varepsilon \lambda_4 \sin^4 \theta}{r^2} + \frac{\varepsilon \nu_3}{r^3} \quad (1.5)$$

純粋定数 $\varepsilon \nu_1, \varepsilon \nu_3; \varepsilon \lambda_0, \varepsilon \lambda_2, \varepsilon \lambda_4$ を含む中間軌道

以上を踏まえて本小論では、次の形の力の場を人工系に選び、それに対応する中間軌道に着目して運動理論の構築を試みる：

$$U_0 = \frac{\mu}{r} + \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{r^2} \quad (1.6)$$

量 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ は、Aksnes の場合の力学定数 $\tilde{c}_1$ が持つ働き以上に大きな働きをして呉れる未定量である。

2 人工系の解たる中間軌道

解くべき問題の力の場は (1.1) 式で与えられる。従って、これに対応する Hamilton 函数 K は次の形を取る：

$$K = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2.1)$$

これに対して (1.6) 式に与えられて居る力の場を採用して人工系を考える。此の時に、煩瑣ではあるが人工系の量である事を明示する為に★印を付ける事にする。

$$K^* = \frac{1}{2} \left(p_r^{*2} + \frac{p_\theta^{*2}}{r^{*2}} + \frac{p_\phi^{*2}}{r^{*2} \cos^2 \theta^*} \right) - \frac{\mu}{r^*} - \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{r^{*2}} \quad (2.2)$$

運動方程式は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \frac{dr^*}{dt} &= \frac{\partial K^*}{\partial p_r^*}, & \frac{d\theta^*}{dt} &= \frac{\partial K^*}{\partial p_\theta^*}, & \frac{d\phi^*}{dt} &= \frac{\partial K^*}{\partial p_\phi^*} \\ \frac{dp_r^*}{dt} &= -\frac{\partial K^*}{\partial r^*}, & \frac{dp_\theta^*}{dt} &= -\frac{\partial K^*}{\partial \theta^*}, & \frac{dp_\phi^*}{dt} &= -\frac{\partial K^*}{\partial \phi^*} \end{aligned} \quad (2.3)$$

此の連立方程式は、Hamilton-Jacobi の偏微分方程式を解く方法を選ぶならば、容易に解を書き下す事の出来るものである。Hamilton 函数 K^* の形に着目して、母函数を次の形に仮定する：

$$W^* = -\alpha_r^* t + \alpha_\phi^* \phi^* + \int p_r^* dr^* + \int p_\theta^* d\theta^* \quad (2.4)$$

ここに、 $\alpha_r^*, \alpha_\phi^*$ は正準定数である。変数 $p_r^*, p_\theta^*, p_\phi^*$ は次式で与えられる：

$$p_r^* = \frac{\partial W^*}{\partial r^*}, \quad p_\theta^* = \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*}, \quad p_\phi^* = \frac{\partial W^*}{\partial \phi^*} \quad (2.5)$$

以上に依って、Hamilton-Jacobi の偏微分方程式は次の形に書き表わされる事になる：

$$\frac{\partial W^*}{\partial t} + K^* \left(r^*, \theta^*, \phi^*; \frac{\partial W^*}{\partial r^*}, \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*}, \frac{\partial W^*}{\partial \phi^*} \right) = 0 \quad (2.6)$$

此の方程式を変数分離型に導く事を考える。そこで新たな正準定数 α_θ^* を導入して、 $\frac{\partial W^*}{\partial \theta^*}$ を次の形に表わす：

$$p_\theta^* = \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*} = \sqrt{\alpha_\theta^{*2} + 2\varepsilon \tilde{\nu}_2 - \alpha_\phi^{*2} \sec^2 \theta^*} \quad (2.7)$$

ここでは、次の結果を既に用いている：

$$p_\phi^* = \frac{\partial W^*}{\partial \phi^*} = \alpha_\phi^* \quad (2.8)$$

これに依って、 $\frac{\partial W^*}{\partial r^*}$ が次の形に与えられる事になって居る：

$$p_r^* = \frac{\partial W^*}{\partial r^*} = \sqrt{2\alpha_r^* + \frac{2\mu}{r^*} - \frac{\alpha_\theta^{*2}}{p_r^{*2}}} \quad (2.9)$$

解表式を書き下す為の準備は総て整った。先ずは、次の表式を得る：

$$\beta_r^* = \frac{\partial W^*}{\partial \alpha_r^*} = -t + \int \frac{dr^*}{dp_r^*} + \tilde{x} \int \frac{d\theta^*}{dp_\theta^*} \quad (2.10)$$

$$\beta_\theta^* = \frac{\partial W^*}{\partial \alpha_\theta^*} = - \int \frac{\alpha_\theta^*}{p_r^{*2}} \frac{dr^*}{p_r^*} + \int \frac{\alpha_\theta^*}{p_\theta^*} d\theta^* + \tilde{y} \int \frac{d\theta^*}{p_\theta^*} \quad (2.11)$$

$$\beta_\phi^* = \frac{\partial W^*}{\partial \alpha_\phi^*} = \phi^* - \int \frac{\alpha_\phi^* \sec^2 \theta^* d\theta^*}{p_\theta^*} + \tilde{z} \int \frac{d\theta^*}{p_\theta^*} \quad (2.12)$$

ここに、 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ は次の量を表わす：

$$\tilde{x} \equiv \frac{\partial \varepsilon \tilde{\nu}_2}{\partial \alpha_r^*}, \quad \tilde{y} \equiv \frac{\partial \varepsilon \tilde{\nu}_2}{\partial \alpha_\theta^*}, \quad \tilde{z} \equiv \frac{\partial \varepsilon \tilde{\nu}_2}{\partial \alpha_\phi^*} \quad (2.13)$$

得られた正準定数は以下の六個である：

$$\alpha_r^*, \quad \alpha_\theta^*, \quad \alpha_\phi^*; \quad \beta_r^*, \quad \beta_\theta^*, \quad \beta_\phi^* \quad (2.14)$$

これらを、Kepler 要素に類似の定数 a^* , e^* , i^* ; Ω^* , ω^* , τ^* に置き換える：

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_r^* = -\frac{\mu}{2a^*} \\ \alpha_\theta^* = \sqrt{\mu a^* (1 - e^{*2})} \\ \alpha_\phi^* = \kappa_\theta \sqrt{\mu a^* (1 - e^{*2})} \cos i^* \\ \beta_r^* = -\tau^* \\ \beta_\theta^* = \omega^* \\ \beta_\phi^* = \Omega^* \end{array} \right. \quad (2.15)$$

ここに、 κ_θ は次式で与えられる量である：

$$\kappa_\theta \equiv \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon \tilde{\nu}_2}{\alpha_\theta^{*2}}} \quad (2.16)$$

これらを用いる時は、人工系の解表式が次の形に表わされるのを知る：

$$u^* - e^* \sin u^* = n^*(t - \tau^*) - \tilde{x} \frac{n^*}{\kappa_\theta \alpha_\theta^*} \tilde{\psi} \quad (2.17)$$

$$\tan \frac{f^*}{2} = \sqrt{\frac{1+e^*}{1-e^*}} \tan \frac{u^*}{2} \quad (2.18)$$

$$r^* = a^*(1 - e^* \cos u^*) = \frac{a^*(1 - e^{*2})}{1 + e^* \cos f^*} \quad (2.19)$$

$$\sin \theta^* = \sin i^* \sin \tilde{\psi} \quad (2.20)$$

$$\phi^* = \Omega^* - \tan^{-1} (\cos i^* \tan \tilde{\psi}) - \frac{\tilde{z}}{\kappa_\theta \alpha_\theta^*} \tilde{\psi} \quad (2.21)$$

ここに、次の略記号や関係式を用いた：

$$n^* \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a^{*3}}} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\psi} \equiv \frac{\kappa_\theta \alpha_\theta^*}{\alpha_\theta^* + \tilde{y}} (\omega^* + f^*) \quad (2.23)$$

3 要素変化の式の導出

人工系を記述するのに供された変数 $(r^*, \theta^*, \phi^*; p_r^*, p_\theta^*, p_\phi^*)$ を、初発の系を記述するのに供されて居た変数 $(r, \theta, \phi; p_r, p_\theta, p_\phi)$ に置き換え、人工系の解たる中間軌道に含まれる積分定数 $(a^*, e^*, i^*; \Omega^*, \omega^*, \tau^*)$ を、旧変数 $(r, \theta, \phi; p_r, p_\theta, p_\phi)$ に代る、新変数であるとする「人工系の方法 (井上, 1995)」の適用を図る。所謂「要素変化の式」の導出を図る訳である。

此の要素変化の式を解くには、どうしても逐次近似の方法に頼らざるを得ない。これを手際良く遂行する目的で、von Zeipel-Brouwer の方法を適用する。この目的の為に、新変数を「Kepler 型」のそれから「Delaunay 型」のそれに書き換える。

$$L = \sqrt{\mu a} \quad , \quad G = \sqrt{\mu p} \quad , \quad H = \kappa_\theta \sqrt{\mu p} \cos i \quad (3.1)$$

$$l = \frac{\mu^2}{L^3}(t - \tau) \quad , \quad g = \omega \quad , \quad h = \Omega \quad (3.2)$$

$$(p \equiv a(1 - e^2))$$

これらの新変数 $(L, G, H; l, g, h)$ は、次の正準方程式を満たす事になって居る：

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l} \quad , \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \quad (3.3)$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} \quad , \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G} \quad , \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H} \quad (3.4)$$

此の時に、Hamilton 関数 F は次で与えられる事になって居る：

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{r^2} - \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{p^2} \xi^2 - \frac{\mu}{p} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \xi^3 (\tilde{A} - \tilde{B} \cos 2\psi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 $\xi; \tilde{A}, \tilde{B}$ は次の量を表わす：

$$\xi \equiv \frac{p}{r} = 1 + e \cos f \quad (3.6)$$

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 i \quad , \quad \tilde{B} \equiv \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 i \quad (3.7)$$

上の (3.1) 式から、 $\cos i = \frac{H}{\kappa_\theta G}$ なるのが知れるので、 $\tilde{A}, \tilde{B}$ を次の形に書く事が出来る：

$$\begin{cases} \tilde{A} = A + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{G^2} + \dots \\ \tilde{B} = A + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \frac{\varepsilon \tilde{\nu}_2}{G^2} + \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

ここに、次の略記号を導入した：

$$A \equiv \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \quad , \quad B \equiv \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \quad (3.9)$$

4 摂動計算および一次の未定量の決定

摂動計算を進めて行く上で、微小量 J_2 の一位以上の微小量も対象とせざるを得ないので、未定量 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ を次の形に展開して置く (Inoue, 1967; 斎藤, 2004) :

$$\varepsilon \tilde{\nu}_2 = J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)} + J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)} + \cdots \quad (4.1)$$

先の (2.17) 式に於て、 $\tilde{x}$ が少なくとも J_2 に関して一位の微小量である事から、次の近似計算の可能性を仮定する :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^2 dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^3 df = \eta^3 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^3 dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^3 \xi df = \eta^3 \quad (4.3)$$

量 $J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2$ は、以下の計算に於て一つの「塊」として現われて来るので、以下の置き換えを図る :

$$J \equiv J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \quad (4.4)$$

以上の諸関係を用いる時は、Hamilton 関数 F が、次の形に表わされる事になる :

$$\begin{aligned} F = & \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{(\xi^2 - \eta^3)}{p^2} \left\{ J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)} + \cdots \right\} - \frac{\eta^3}{p^2} \left\{ J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)} + J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)} + \cdots \right\} + \\ & - \frac{\mu}{p} J (\xi^3 - \eta^3) \left\{ A + (\tilde{A} - A) \right\} - \frac{\mu}{p} J \eta^3 A - \frac{\mu}{p} J \eta^3 (\tilde{A} - A) + \\ & + \frac{\mu}{p} J \xi^3 \left\{ B + (\tilde{B} - B) \right\} \cos 2\tilde{\psi} \end{aligned}$$

此の右辺を、永年部と短周期部とに整理して書く。

$$\begin{aligned} F = & \frac{\mu^2}{2L^2} - \left\{ \frac{J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J \eta^3 A \right\} - \left\{ \frac{J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J \eta^3 (\tilde{A} - A) \right\} + \\ & - \frac{J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{p^2} (\xi^2 - \eta^3) - \frac{\mu}{p} J \left\{ (\xi^3 - \eta^3) A - \xi^3 B \cos 2\tilde{\psi} \right\} + \cdots \end{aligned}$$

ここで、 $J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}$ の決定を次式で行なう :

$$\frac{J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J \eta^3 A = 0 \quad (4.5)$$

$$J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)} = -\mu p J A = -\frac{\mu}{p} J_2 a_e^2 A \quad (4.6)$$

此の量は、所謂「力学変数」なのであるから、Hamilton 関数の中に代入しても構わない。その前に、次の表記も得て置こう :

$$\frac{\mu}{p} J \eta^3 (\tilde{A} - A) = \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ A^2 (3\eta^3) + AB(-\eta^3) \right\} \quad (4.7)$$

斯くして、所望の形の Hamilton 函数 F を導く事が出来た。

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu}{p} J \left\{ A(\eta^3 - \xi^3) + B\xi^3 \cos 2\tilde{\psi} \right\} - \frac{J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ A^2(-3\eta^3) + AB(\eta^3) \right\} + \frac{\mu}{p} JA(\xi^2 - \eta^3) \quad (4.8)$$

5 二次の未定量の決定

ここで、von Zeipel-Brouwer 法の適用を図る事にする。函数 $F(L, G, H; \ell, g, -)$ を、点 $(L^*, G^*, H^*; \ell, g, -)$ の周りで Taylor 展開する

函数 $\varepsilon S(L^*, G^*, H^*; \ell, g, -)$ を未知であるとして、新旧両変数の関係を次式で定義する：

$$L = L^* + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell}, \quad G = G^* + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial g}, \quad H = H^* \quad (5.1)$$

$$\ell^* = \ell + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial L^*}, \quad g^* = g + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial G^*}, \quad h^* = h + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial H^*} \quad (5.2)$$

これを用いて展開計算を書く。

$$\begin{aligned} F &= F(L, G, H; \ell, g, -) = F\left(L^* + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell}, G^* + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial g}, H^*; \ell, g, -\right) = \\ &= \frac{\mu^2}{2L^{*2}} + \left\{ -\frac{\mu^2}{L^{*3}} \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} + \varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)} \right\} + \\ &+ \left[\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{L^{*4}} \left\{ \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} \right\}^2 + \frac{\partial \varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)}}{\partial L} \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} + \frac{\partial \varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)}}{\partial G} \frac{\partial \varepsilon S}{\partial g} \right] + \\ &- \frac{J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ A^2(-3\eta^3) + AB(\eta^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここに、次の略記号を用いた：

$$\varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)} \equiv \frac{\mu}{p} J \left[A(\xi^2 - \eta^3) + \left\{ A(\eta^3 - \xi^3) + B\xi^3 \cos 2\tilde{\psi} \right\} \right] \quad (5.4)$$

新旧 Hamilton 函数 F, F^* の間に、次の等式の成立を要求する：

$$F = F(L, G, H; \ell, g, -) = F^* = F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) \quad (5.5)$$

新しい Hamilton 函数 $F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -)$ も、点 $(L^*, G^*, H^*; -, g, -)$ の周りで Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} F^* &= F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) = F^*(L^*, G^*, H^*; -, g + \frac{\partial \varepsilon S}{\partial G^*}, -) = \\ &= F^*(L^*, G^*, H^*; -, g, -) + \frac{\partial F^*}{\partial g^*} \frac{\partial \varepsilon S}{\partial G^*} \end{aligned} \quad (5.6)$$

準備が整ったので、逐次解いて行く。先ず、次の等式を要求する：

$$\left\{ -\frac{\mu^2}{L^{*3}} \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} + \varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)} \right\} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} = \frac{1}{n^*} \varepsilon \mathcal{F}_{(P)}^{(1)} = \frac{\mu}{p} \frac{J}{n^*} \left\{ A(\xi^2 - \xi^3) + B\xi^3 \cos 2\tilde{\psi} \right\} \quad (5.8)$$

$$n^* \equiv \frac{\mu^2}{L^{*3}} \quad (5.9)$$

以下、計算：

$$\begin{aligned} \varepsilon S &= JG^* \left[A(-e \sin f) + B \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\psi} + \frac{1}{2} e \sin (2\tilde{\psi} - f) + \frac{1}{6} e \sin (2\tilde{\psi} + f) \right\} \right] \quad (5.10) \\ \frac{\partial \varepsilon S}{\partial g} &= JG^* B \left\{ \cos 2\tilde{\psi} + e \cos (2\tilde{\psi} - f) + \frac{1}{3} e \cos (2\tilde{\psi} + f) \right\} \quad (5.11) \end{aligned}$$

これらを用いる時は、先の (5.3) 式中の $\left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$ 内の量を計算する事が出来る。結果は次の形を取る：

$$P(L^*, G^*, H^*) + Q(L^*, G^*, H^*) \cos 2g + R(L^*, G^*, H^*; l, g) \quad (5.12)$$

此の事に着目して、未定量 $J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}$ および未知函数 $J_2^2 S^{(2)}$ に対し、次の条件式の成立する事を要求する：

$$\begin{aligned} P(L^*, G^*, H^*) + Q(L^*, G^*, H^*) \cos 2g + \\ - \frac{J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}}{p^2} \eta^3 + \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ A^2(-3\eta^3) + AB(\eta^3) \right\} = 0 \quad (5.13) \end{aligned}$$

$$- \frac{\mu^2}{L^{*3}} \frac{\partial J_2^2 S^{(2)}}{\partial \ell} + R(L^*, G^*, H^*; l, g) = 0 \quad (5.14)$$

但し、未知函数 εS が次の形をして居るとした：

$$\varepsilon S = J_2 S^{(1)} + J_2^2 S^{(2)} \quad (5.15)$$

先の (5.7) 式以下 (5.11) 式に現われる εS は、 $J_2 S^{(1)}$ の意味に解するものとする。

上記条件式 (5.13) に依れば、未定量 $J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}$ が変数 L^*, G^*, H^* および g に依存する事になって居る。真に「人工系の方法」の立場に立つならば、何の不都合も存しては居ない。

量 $P(L^*, G^*, H^*)$ および $Q(L^*, G^*, H^*)$ を具体的に書いてみるならば以下の様

である：

$$P(L^*, G^*, H^*) = \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ \left(\frac{35}{24} \eta^3 + \frac{3}{2} \eta^4 + \frac{5}{24} \eta^5 \right) A^2 + \left(-\frac{5}{24} \eta^3 + \frac{11}{24} \eta^5 \right) A + \right. \\ \left. + \left(\frac{5}{96} \eta^3 - \frac{1}{96} \eta^5 \right) \right\} + \frac{\mu}{p} J^2 \left(-3\eta - \frac{5}{2} \eta^3 \right) A^2 \quad (5.16)$$

$$Q(L^*, G^*, H^*) = \frac{\mu}{p} J^2 e^2 \eta^3 \left(\frac{5}{4} AB - \frac{1}{4} B \right) + \frac{\mu}{p} J^2 \left\{ \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \eta - 4\eta^3 - \frac{20}{3} e \eta^3 \right) AB + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \eta^3 + \frac{2}{3} e \eta^3 \right) B \right\} \quad (5.17)$$

斯くして、未定量 $J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}$ が、次の形に与えられるのが知れた：

$$J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)} \div J^2 = \left[\left(\frac{35}{24} + \frac{3}{2} \eta + \frac{5}{24} \eta^2 \right) A^2 + \left(-\frac{5}{24} + \frac{11}{24} \eta^2 \right) A + \left(\frac{5}{96} - \frac{1}{96} \eta^2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{5}{4} e^2 B^2 - \frac{7}{8} e^2 B \right) \cos 2g \right] + \left(-\frac{3}{\eta^2} - \frac{11}{2} \right) A^2 + \\ + \left\{ \left(-\frac{3}{4\eta^3} - \frac{1}{2\eta^2} - 3 - \frac{20}{3} e \right) B^2 + \left(\frac{3}{8\eta^3} + \frac{1}{4\eta^2} + 2 + 4e \right) B \right\} \cos 2g \quad (5.18)$$

上で、ひとまとめに書かなかったのは、 $\left[\right]$ 内の量が Brouwer (1959) に対応するものになって居るからである。

6 解表式

条件式 (5.7) および (5.13)、(5.14) を課したのであるから、(5.3) 式の形に展開された Hamilton 函数 F は、次の形を取る事になる：

$$F = \frac{\mu}{2L^{*2}} \quad (6.1)$$

等式 (5.5) に依って、(5.6) 式の形に展開された Hamilton 函数 F^* が次の形になって居るのを知る：

$$F^* = \frac{\mu}{2L^{*2}} \quad (6.2)$$

運動方程式：

$$\frac{dL^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \ell^*} = 0 \quad , \quad \frac{dG^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial g^*} = 0 \quad , \quad \frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial h^*} = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{d\ell^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial L^*} = +\frac{\mu^2}{L^{*3}} = n^* \quad (6.4)$$

$$\frac{dg^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial G^*} = 0 \quad , \quad \frac{dh^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial H^*} = 0 \quad (6.5)$$

時刻 t_0 に於ける、これら六個の量の値を、それぞれ $L_0, G_0, H_0; \ell_0, g_0, h_0$ であるとすれば、以下の形の積分が得られる：

$$L^* = L_0 \quad , \quad G^* = G_0 \quad , \quad H^* = H_0 \quad (6.6)$$

$$\ell^* = \ell_0 + n^*(t - t_0) \quad , \quad g^* = g_0 \quad , \quad h^* = h_0 \quad (6.7)$$

これに依って、求めるべき変数 $L, G, H; \ell, g, h$ に対する解表式が、変換の (5.1) 式 (5.2) 式を介して、次の形に与えられるのが知れた：

$$L - L^* = \frac{\partial \varepsilon S}{\partial \ell} = \frac{\mu^2 J_2 a_c^2 L^3}{G^6} \left\{ A(\xi^2 - \xi^3) + B\xi^3 \cos 2\tilde{\psi} \right\} \quad (6.8)$$

$$G - G^* = \frac{\partial \varepsilon S}{\partial g} = \frac{\mu^2 J_2 a_c^2}{G^3} B \left\{ \cos 2\tilde{\psi} + e \cos (2\tilde{\psi} - f) + \frac{1}{3} e \cos (2\tilde{\psi} + f) \right\} \quad (6.9)$$

$$H - H^* = \frac{\partial \varepsilon S}{\partial h} = 0 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \ell - \ell^* = -\frac{\partial \varepsilon S}{\partial L^*} = \frac{\mu^2 J_2 a_c^2}{e^2 L G^3} & \left[A(\xi^2 - e^2) e \sin f + \right. \\ & \left. + B \left\{ \left(-\xi^2 - \xi + \frac{1}{3} \eta^2 \right) e \sin f \cos 2\tilde{\psi} + \frac{2}{3} \eta^2 (1 - \xi) \sin 2\tilde{\psi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} g - g^* = -\frac{\partial \varepsilon S}{\partial G^*} = \frac{\mu^2 J_2 a_c^2}{e^2 G^4} e \sin f & \left[A(-\xi^2 - 5e^2 - e^2 \cos 2\tilde{\psi}) + \right. \\ & + B \left\{ e^2 + \left(\xi^2 + \xi - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^2 \right) \cos 2\tilde{\psi} \right\} \right] + \frac{\mu^2 J_2 a_c^2}{e^2 G^4} \left[A \left(2e^2 \xi - \frac{1}{2} e^2 \right) + \right. \\ & \left. + B \left\{ \frac{2}{3} (1 + e^2) \xi - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^2 \right\} \right] \sin 2\tilde{\psi} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$h - h^* = -\frac{\partial \varepsilon S}{\partial H^*} = \frac{\mu^2 J_2 a_c^2}{G^4} \frac{H}{G} \left\{ \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos 2\tilde{\psi} \right) e \sin f + \left(\xi - \frac{1}{4} \right) \sin 2\tilde{\psi} \right\} \quad (6.13)$$

上で (6.8) 式以下 (6.13) 式までの最右辺の量は、総て $L^*, G^*, H^*; \ell^*, g^*$ で表わされて居るものとする。(表式中では * 印を省略した)

7 未定量 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ の吟味

我々の中間軌道の特徴付ける未定量 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ は、(4.1) 式で捉えた様に、 J_2 の一次の大きな二次の大きさと云う風に決定して行く事になって居る。一次の量 $J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}$ は (4.6) 式で、二次の量 $J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}$ は (5.18) 式で与えられる様に決定されて行った。

これを要するに、 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ は次の形に決定された事になって居る：

$$\varepsilon \tilde{\nu}_2 = J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}(G, H) + J_2^2 \tilde{\nu}_2^{(2)}(L^*, G^*, H^*; g) \quad (7.1)$$

これで見るならば、 $\varepsilon \tilde{\nu}_2$ が J_2 の一次の大きさでは L に無関係なるのが知れる。従って、(2.13) 式で定義した量 $\hat{x}$ は二次以上の微小量と云う事になる。解表式 (6.8)

(6.13) が J_2 の一次の精度である事から、先に (4.2)、(4.3) 式で用いた近似関係が的を射たものであったと云うのが判明した。つまり、(2.17) 式を次の形で近似可能であったと云う訳である：

$$u - e \sin u = \ell \quad (7.2)$$

これを確認して置く。先ず、(2.15) 式 (3.1) 式から次の関係を知る：

$$L = \frac{\mu}{\sqrt{-2\alpha_r}} \quad , \quad G = \alpha_\theta \quad , \quad H = \alpha_\phi \quad (7.3)$$

量 $J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}$ を定める (4.6) 式は、(3.9) 式を考慮する時は次の形となる：

$$J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)} = \frac{\mu J_2 a_e^2}{G^2} \left(\frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} - \frac{1}{4} \right) \quad (7.4)$$

以上から、 J_2 の一次の大きさに限る時、 $\tilde{x} = 0$ なる事が次の計算で容易に確かめられる：

$$\tilde{x} = \frac{\partial J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \alpha_r} = 0 \quad (7.5)$$

これで、(7.2) 式の正当性を確認する事が出来た。

序でに、量 $\tilde{y}$ および $\tilde{z}$ を計算してみれば以下の様になる：

$$\tilde{y} = \frac{\partial J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{\partial G} = \frac{\mu^2 J_2 a_e^2}{G^3} \left(\frac{1}{2} - 3 \frac{H^2}{G^2} \right) \quad (7.6)$$

$$\tilde{z} = \frac{\partial J_2 \tilde{\nu}_2^{(1)}}{\partial H} = \frac{\mu^2 J_2 a_e^2}{G^3} \times \frac{3}{2} \frac{H}{G} \quad (7.7)$$

8 臨界軌道傾斜角考

人工系として、二体問題の系を選び、楕円要素を新変数に選ぶ限り「臨界軌道傾斜角の困難」に遭遇するのであった (Kozai, Brouwer)。Hughes (1981) は数値計算を通して当該問題を論じて居る。一般的に論じたかの印象を与えて居るが、彼の研究は数値計算の結果を楕円軌道の軌道要素に引き移した上で為されたものでしか無い。これでは、件の困難に直面する事になるのは当然の事であって、何ら怪しむには足らない。

Garfinkel と Aksnes の場合は、 $\dot{g}^* = 0$ を導いて居るのであるから、長周期変化は存在しない事になり、小分母の困難に出逢う事も無い筈である。しかし、彼等の理解では、依然として当該困難が残存して居る事になって居る。それは、次の発言を見てみれば、一目瞭然であろう

(Garfinkel, 1974)：

T. Inoue: Do you agree with me if I say that the perturbations depend on the choice of zeroth approximation and, therefore, if one chooses a proper intermediary orbit in the case of the ideal resonance problem, one will obtain a solution free from any singularity?

B. Garfinkel: I do not agree. In my paper in Astron. J. (1964), it was shown that all classical solutions carry a singularity at the critical inclination, regardless of the choice of reference orbit or the choice of the coordinate system.

30年前の発言を振り返ってみれば、我々の理解にも浅い処のあったのが知れる。即ち、今日なら「人工系」と言うべき処を、当時は「zeroth approximation」等と言って居たからである。

更に言うならば、Inoue (1967) の場合、未定定数 $\varepsilon\lambda_1$ の導入が、 $\dot{G}^* = 0$ を可能にして居り、 $\dot{g}^* = 0$ と相俟って、長周期変化も小分母も無い理論を構築して居りながら、その事をはっきりとした形で自覚する事なく看過して来たのは、大いに悔まれる処ではある。

我々が提唱する「人工系の方法」に於ては、積分定数に依存し得る量を、予め中間軌道の中に包含させて置いても一向に構わないのである。従って、本小論で扱った未定量 $\varepsilon\tilde{\nu}_2$ も、多様な形で「人工系の解を記述する積分定数」に依存し得たのである。積分定数に関連する総ての量が、新たな変数に関連する量として、要素変化の式の中に、正しく取り込まれさえすれば済む事になって居るからである (山本, 2000)。

結論

中間軌道の方法の有用性を、人工衛星の主問題を例に、明示する事が出来た。「人工系の方法」の教える処に従って、摂動計算を行なった。先ず、摂動函数の、微小量 J_2 の一次の大きさの永年部を、未定量 $J_2\tilde{\nu}_2^{(1)}$ の助けに依って消去した。更に、二次の摂動函数永年部の消滅を図る為に、正準変換を施した。この目的達成の為に、未定量 $J_2^2\tilde{\nu}_2^{(2)}$ が供された。

短周期摂動は、その精度を、 J_2 の一次の大きさに限ったので、上記の操作で、直ちに自明の系に到達する事が出来、所望の一次の精度での解を書き下す事も出来た。

中間軌道に含まれて居る「未定量 $\varepsilon\tilde{\nu}_2$ 」を、微小量 J_2 に関して二次の大きさまで取り込む形で決定する事が出来たので、『我々の中間軌道は、真の軌道に二次の精度まで近接して居る』と言う事が出来る。

謝辞

京都大学人文科学研究所 COE 研究員の山本一登さんとの対話は、「人工系の方法」に関する理解を、一段と深めて行く上で大いに有効であった。心からの謝意を表したい。

References

- [1] Brouwer, D., (1959), *Solution of the problem of artificial satellite theory without drag*, The Astronomical Journal, **64**, pp.378-397
- [2] Garfinkel, B., (1958), *On the motion of a satellite of an oblate planet*, The Astronomical Journal, **63**, pp.88-96
- [3] Garfinkel, B., (1974), *The global solution in the problem of the critical inclination*, Y. Kozai (ed.) The Stability of the Solar System and of Small Stellar System, pp.125-127
- [4] Garfinkel, B. and K. Aksnes, (1970), *Spherical coordinate intermediaries for an artificial satellite*, The Astronomical Journal, **75**, pp.85-91
- [5] Hughes, S., (1981), *The 'Critical Inclination': Another Look*, Celestial Mechanics, **25**, pp.235-266

- [6] Inoue, T., (1967), *Etude du mouvement d'un satellite artificiel par la méthode de l'orbite intermédiaire*, The Science Reports of the Tôhoku University, Series I, Vol. L, No.2, pp.108-132
- [7] 井上 猛, (1995), 「定数変化法と云うもの」, 第 27 回天体力学研究会集録, pp.155-161
- [8] Kozai, Y., (1959), *The motion of a close Earth satellite*, The Astronomical Journal, **64**, pp.367-377
- [9] 斎藤 信明, (2004), 「人工衛星の主問題に対する新しい中間軌道」, 第 36 回天体力学N体力学研究会集録
- [10] 山本 一登, (2000), 「Schwarzschild 問題の中間軌道による解」, 第 32 回天体力学N体力学研究会集録, pp.159-178

EFFICIENT ORBIT INTEGRATION BY ORBITAL LONGITUDE METHODS

Toshio FUKUSHIMA

Toshio.Fukushima@nao.ac.jp

*National Astronomical Observatory of Japan
2-21-1, Ohsawa, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan*

ABSTRACT

Recently we developed a new formulation of numerical integration of orbital motion named *manifold correction methods* [4, 5, 6, 7, 8, 9]. The main trick is to keep rigorously the consistency of some physical relations such as that of the orbital energy, of the orbital angular momentum, or of the Laplace integral of a binary subsystem. This maintenance is done by applying a sort of correction to the integrated variables at every integration step. Typical methods of correction are certain geometric transformation such as the spatial scaling and the spatial rotation, which are commonly used in the comparison of reference frames, or mathematically-reasonable operations such as the modularization of angle variables into the standard domain $[-\pi, \pi)$. The finally-evolved form of the manifold correction methods is the orbital longitude methods [9, 10, 11, 14], which enable us to conduct an extremely precise integration of orbital motions. In the unperturbed orbits, the integration errors are suppressed at the machine epsilon level for an infinitely long period. In the perturbed cases, on the other hand, the errors initially grow in proportion to the square root of time and then increase more rapidly, the onset time of which depends on the type and the magnitude of perturbations. This feature is also realized for highly eccentric orbits by applying the same idea to the KS-regularization [12, 13, 15, 16]. Especially the introduction of time element greatly enhances the performance of numerical integration of KS-regularized orbits whether the scaling is applied or not.

1 METHODS OF MANIFOLD CORRECTION

In short, the new method is a modern revival of Nacozy's original idea [20] to correct the integrated orbits during the integration process to ensure that they exactly lie on a certain manifold containing the true solution such as an energy-constant hypersurface by a kind of projection operation. It was first named as the methods of *manifold correction* by Murrison [19]. Later Hairer discussed it independently and called it the *projection method* [17].

The simplest example [4] of the manifold correction is to maintain the Kepler energy relation,

$$K = T - U \tag{1.1}$$

where $T \equiv \vec{v}^2/2$ is the kinetic energy and $U \equiv \mu/r$ is the (negative) gravitational potential energy. The correction is achieved to all the binary subsystems by applying the single spatial scaling,

$$(\vec{x}, \vec{v}) \rightarrow (\sigma\vec{x}, \sigma\vec{v}), \tag{1.2}$$

at every integration step. This form of correction was motivated by a theoretical examination of the manner of error growth of a circular motion by the simplest integrator, the Euler method [4]. Here the scale factor σ is determined from the solution of an associated cubic equation,

$$T\sigma^3 - K\sigma - U = 0, \quad (1.3)$$

numerically by means of the Newton method starting from an obvious initial guess $\sigma_0 = 1$.

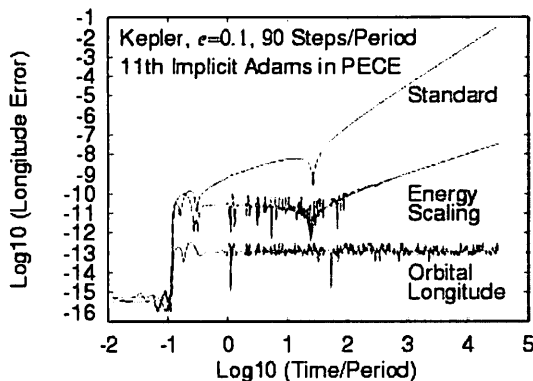


Figure 1 — Illustrated are the errors in the mean longitude at epoch as functions of time in a log-log scale. Integrated was a moderately eccentric ($e = 0.1$) Keplerian orbit by (1) the standard method to integrate directly in rectangular coordinates, (2) the scaling method for Kepler energy consistency [4], and (3) the antifocal longitude method [11]. The adopted integrator was the eleventh order implicit Adams method in the PECE mode (predict, evaluate, correct, evaluate), the step size was fixed through the integration and set as $1/90$ the orbital period, the starting tables were prepared by Gragg's extrapolation method, and the errors were measured by comparing with the reference solutions obtained by the same method, the same integrator, and the same model parameters but with half the step size. Since the order of the integrators are sufficiently high, halving the step size eliminates almost all the truncation errors.

See Figure 1, which compares the error growth of a Keplerian orbit obtained by the standard method to integrate the equation of motion in rectangular coordinates directly and that with the aforementioned single scaling for the Kepler energy, K , which becomes a constant in this unperturbed case. This figure shows that the well-known quadratic increase of the integration errors is reduced to a linear growth, which has been observed for a limited type of integration scheme; the symplectic integrator and the symmetric linear multistep method. The observed difference in the rate of error growth, which was partially enhanced by the introduction of some Encke-like technique to reduce the effect of round-off error accumulation [3], will lead to a large difference in the magnitude of integration error in the long run.

In case of perturbed orbits, the Kepler energy is no more a constant. Then we follow its time development by integrating its equation of motion simultaneously with that of the position and velocity. The good performance of the scaling method

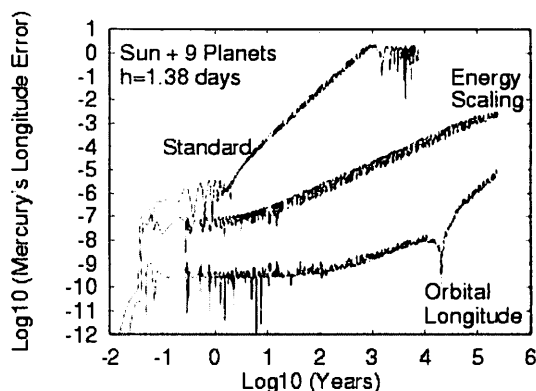


Figure 2 — Same as Figure 1 but for the longitude error of Mercury in the simultaneous integration of the Sun and nine major planets for half a million years. The step size was chosen relatively large as around 1.4 days.

is unchanged as seen in Figure 2, which illustrates an example of n -body integration; Mercury's error growth in the integration of the Sun and nine major planets.

The effectiveness of manifold correction methods is independent on various aspects of the orbit integration such as the method of integration (Runge-Kutta, extrapolation, or linear multistep), the type of base orbits (elliptic, parabolic, or hyperbolic), the kind of perturbations (autonomous or not, conservative or not, velocity-dependent or not, etc.) [4].

2 ORBITAL LONGITUDE METHODS

The Kepler energy is not the only quantity suitable to be monitored for the manifold correction. Any quasi-conserved quantity can be used additionally. Then we refined the single scaling method by adding such quantities as (1) a quantity related to the Laplace integral [5], (2) the orbital angular momentum [6], and (3) the full Laplace integral vector [7]. Such extensions enhance the performance but at the cost of increase of computational effort.

Next we developed some simplified version of the last evolved form, the linear transformation method [7], by reducing the complexity of the manifold correction by some sets of variable transformation [8, 9]. Finally we arrived a method requiring *no* manifold correction, which we named the (original) orbital longitude method [9]. The method uses a set of six variables consisting of (1) $\vec{L}$ as the three rectangular components of the orbital angular momentum, (2) g as a true orbital longitude measured from a certain longitude origin solely determined from $\vec{L}$, and (3) P_A and P_B as the two on-the-plane components of the Laplace integral vector.

To our surprise, the application of the modularization of angle g into the standard range $[-\pi, \pi)$ at every integration step leads to *no* growth of integration error if the integration method is sufficiently precise, say the eleventh order implicit Adams method with the step size as $1/90$ the orbital period [10]. The true longitude is not the only orbital longitude to be used. By replacing it with the antifocal longitude, we enhanced its performance further [11]. Here the antifocal longitude is an orbital

longitude with the coordinate origin as not the primary focus but the secondary one.

See Figure 1 again which shows the superiority of this antifocal longitude method over the standard and the single scaling method. Note that this slowness of the error increase also means that the accumulation of round-off errors, which is usually expected to grow in the 1.5 power of the time, is also suppressed. As far as the author knows, this is the first exception of Brouwer's law [2]. We think that this exceptional phenomenon was caused by transforming the second-order differential equation in rectangular coordinates to the first-order one in the orbital longitude. Its example is the equation of time development of true anomaly in the Keplerian motion,

$$\frac{df}{dt} = \nu(1 + e \cos f)^2 \quad \text{where} \quad \nu \equiv n(1 - e^2)^{-3/2}, \quad (2.1)$$

which is nothing but a rewriting of Kepler's second law or the defining relation of the angular momentum.

In fact, we observed that the presence of the perturbations only enlarges this zero-growth to the square-root-growth as was already observed in Figure 2. This low rate of error growth is understood by the statistical accumulation of zero-mean random errors. Of course, this is only for some initial phases and the actual integration errors will increase more rapidly when the truncation errors become dominant. In any sense, these changes in the manner of error growth has led to a drastic decrease of the overall integration errors as seen in Figures 1 and 2.

Recently, we elaborated these orbital longitude methods by introducing Sundmann's time transformation [14], which enhances the original orbital longitude methods especially in the highly eccentric cases.

3 APPLICATION TO KS-REGULARIZED MOTION

The concept of the manifold correction is not limited to the direct integration in rectangular coordinates. Since the two orbital longitude methods [9, 10, 11] lose their efficiency in highly eccentric cases, we applied the same idea to the Kustaanheimo-Stiefel (KS) regularization.

In terms of the KS-regularized orbital motion, the Kepler energy relation reduced to that of, H , the total energy of the four-dimensional harmonic oscillator, $\vec{u}$, associated to the regularization;

$$H = T + V, \quad (3.1)$$

where $T \equiv (\vec{u}')^2/2$ and $V \equiv -(K/2)\vec{u}^2$ are the kinetic and potential energies of the associated four-dimensional harmonic oscillator, and $'$ denotes the differentiation with respect to the fictitious time, s , the independent variable in the KS regularization. Again the correction is done by the single scaling. This time the scale factor is explicitly evaluated as

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu}{4(T + V)}}. \quad (3.2)$$

In late 1970's, Mikkola invented a similar device to correct the KS variables to maintain the orbital energy (E) and the magnitude of the orbital angular momentum (J) of a binary subsystem. Then Aarseth named it the *EJ scaling* [1]. We confirmed that the single scaling to maintain the Kepler energy consistency in terms of the KS variables is slightly better than the EJ scaling [12]. Next we developed it into the

quadruple scaling method, which adjusts all the four components of the harmonic oscillator associated with the KS regularization [13].

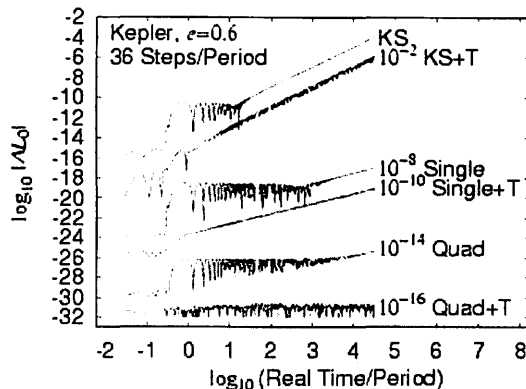


Figure 3 — Similar as Figure 1 but for a highly eccentric ($e = 0.6$) orbit integrated by the methods using the KS regularization; (1) the original KS regularization [21], (2) the single scaling method [13], (3) the quadruple scaling method [13], (4) the KS regularization using the time element in a primitive form, (5) the single scaling using the time element [15], and (6) the quadruple scaling using time element [15]. The symbol ‘+T’ denotes the usage of time element. Most of the curves are multiplied with some factors to avoid an overlap with others. The step size in the fictitious time was fixed through the integration and made so large that one orbital period in the real time is covered by only 36 steps. The order of the Adams method was set as that led to the least errors; the 13th for the two methods of quadruple scaling, and the eleventh for the others.

See Figure 3 showing the performance of these two scaling methods. Again the scaling reduces the error growth rate from quadratic to linear in the long run, although the appearance of some amount of periodic errors are unchanged. The quadruple scaling provides the better performance. However, we should note that this is at the cost of increase of variables to be integrated simultaneously from 10 to 13.

Unfortunately, even the quadruple scaling method could not achieve the zero growth of integration error. Therefore we examined the origin of the quadratic and linear error growth in the KS regularization with and without the scaling.

During the course of investigation, we unexpectedly discovered that the integration error of a harmonic oscillator can be reduced to achieve the zero-growth manner if the integrator adopted is sufficiently precise. Also we found that the cause of total error growth lies in integrating the development equation of physical time

$$t' = r \equiv \tilde{u}^2. \quad (3.3)$$

Once Stiefel and Scheifele [21] proposed to integrate not the physical time, t , but its function named the *time element*, τ , defined as

$$\tau \equiv t - \left(\frac{1}{K} \right) \tilde{u} \cdot (\tilde{u})'. \quad (3.4)$$

A primitive form of the equation of motion of τ becomes as

$$\tau' = r - \left(\frac{1}{K} \right) [(\vec{u})']^2 + \cdots, \quad (3.5)$$

where we omitted the terms reducing to zero in the case of unperturbed motion. Adoption of this primitive form leads to the suppression of periodic part whose appearance is eminent in the initial phases as seen in Figure 3.

On the other hand, if one rewrites the first two terms by using the Kepler energy relation, the above equation of motion is further simplified as

$$\tau' = - \left(\frac{\mu}{2K} \right) + \cdots, \quad (3.6)$$

where the first term remains to be a constant in the limit of unperturbed case. Namely the motion of the time element reduces to a linear function of the fictitious time in the limit of unperturbed orbits, which can be integrated error-free by any kind of proper integrator. We confirmed that the combination of this elaborated form and the quadruple scaling guides us to the zero growth of unperturbed orbit integration in the KS-regularized formulation as was already shown in Figure 3.

In any case, the magnitude of the periodic error observed commonly in the KS regularization integrating the physical time, t , no longer appears after its replacement by the time element, τ .

References

- [1] Aarseth, S.J., 2003, Gravitational N-body simulations, (New York: Cambridge Univ. Press)
- [2] Brouwer, D., 1937, Astron. J., 46, 149
- [3] Fukushima, T., 1996, Astron. J., 112, 1263
- [4] Fukushima, T., 2003a, Astron. J., 126, 1097 (Paper I)
- [5] Fukushima, T., 2003b, Astron. J., 126, 2567 (Paper II)
- [6] Fukushima, T., 2003c, Astron. J., 126, 3138 (Paper III)
- [7] Fukushima, T., 2004a, Astron. J., 127, 3638 (Paper IV)
- [8] Fukushima, T., 2004b, Astron. J., 128, 920 (Paper V)
- [9] Fukushima, T., 2004c, Astron. J., 128, 1446 (Paper VI)
- [10] Fukushima, T., 2004d, submitted to Celest. Mech. Dyn. Astr. (Paper VII)
- [11] Fukushima, T., 2004e, Astron. J., 128, 1455 (Paper VIII)
- [12] Fukushima, T., 2004f, Astron. J., 128, 3114 (Paper IX)
- [13] Fukushima, T., 2004g, Astron. J., 128, 3108 (Paper X)
- [14] Fukushima, T., 2005a, Astron. J., 129, 1171 (Paper XI)

- [15] Fukushima, T., 2005b, *Astron. J.*, 129, No.3 (Paper XII)
- [16] Fukushima, T., 2005c, submitted to *Astron. J.*(Paper XIII)
- [17] Hairer, E., Lubich, C., and Wanner, G. 1999, *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag, Berlin
- [18] Kustaanheimo, P., and Stiefel, E.L., 1965, *J. Reine Angew. Math.* 218, 204
- [19] Murison, M.A. 1989, *Astron. J.*, 97, 1496
- [20] Nacozy, P.E. 1971, *Astrophys. and Space Sci.*, 14, 40
- [21] Stiefel, E.L., and Scheifele, G., 1971, *Linear and Regular Celestial Mechanics*, (New York: Springer)

The Formation of Protoplanets in the Planetesimal Disk

Junko Kominami

E-mail: kominami@geo.titech.ac.jp

Hidekazu Tanaka

Shigeru Ida

*Department of Earth and Planetary Sciences,
Tokyo Institute of Technology,
Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan*

ABSTRACT

We have performed N-body simulations on the stage of protoplanet formation from planetesimals. Generally accepted planet formation theory suggests that protoplanets are formed through accretion of $\sim$ km sized planetesimals. The formation process proceeds in the nebular disk. Hence the bodies in the disk suffer gas drag and interact tidally with the nebula. Such interaction triggers the type I migration. We found that the runaway protoplanet forms a gap in the planetesimal disk. It results in the slow down of the migration by factor of ~ 0.7 , and the accretion rate. However, the shepherding does not last so long. Hence the overall migration time scale can not be changed by the formation of the gap in the planetesimal disk. However, if the depletion of the gas occurs from the inner region of the disk, the planets may survive from migration.

1 Introduction

According to the planet formation scenario, planets are formed through the accretion of smaller bodies. The $\sim$ km sized planetesimals coagulate and runaway accretion takes place to form runaway bodies, which are called protoplanets (Greenberg et al. 1978, Wetherill and Stewart 1989, 1993, Spaute et al. 1991, Barge and Pellat 1991, Kokubo and Ida 1996, Inaba et al. 2001). Such runaway bodies continue to grow oligarchically and form ~ 20 Mars-sized protoplanets in the terrestrial planet region (Kokubo and Ida 1995, 1998, 2000, Weidenschilling et al. 1997). The protoplanets coagulate and form terrestrial planets (Chambers and Wetherill 1998, Agnor et al. 1999). The bodies' highly eccentric and inclined orbits are damped by the residual gas and planetesimals (Agnor and Ward 2002, Kominami and Ida 2002).

Since the above formation takes place in gas disk, the bodies suffer the aerodynamical gas drag (Adachi et al. 1976) and the gravitational drag due to disk-planet interaction (Goldreich and Tremaine 1979, 1980). The protoplanets migrate due to this disk-planet interaction (Ward 1986, Korycansky and Pollack 1993, Tanaka et al. 2002). This type of migration is known as Type I migration. Their eccentricities and inclinations are damped due to the effect as well (Shu et al. 1983, Ward 1988, 1993, Artymowicz 1993, 1994, Ward and Hahn 1994, Tanaka and Ward 2004).

First, the orbital elements of planetesimals are mainly damped by the aerodynamical gas drag, for the bodies are still small. When a body becomes larger than the size of the moon, the gravitational drag dominates the dynamics. The protoplanets

are about Mars-sized, and larger than this critical mass. Hence, the tidal interaction has large effect on formation of protoplanets. The migration time scale for a Mars-sized planet at 1AU is $\sim 7 \times 10^5$ years (Tanaka and Ward 2004). Hence, if the disk-planet interaction is included, planets fall to the sun and can not be formed. Previous N-body simulations have not included disk-planet interaction for simplification. We have included both of the drag forces; the aerodynamical gas drag and gravitational drag, and carried out N-body simulations on formation of protoplanets. We put one runaway body in the planetesimal disk in order to investigate the accretion process. The runaway body induces a wave-like pattern, creating a gap in planetesimal disk. We investigated how this gap effects the accretion and migration of the runaway body. Gap formation leads to a high density region in front of the protoplanet, and it may alter the migration speed and the accretion process from the models that do not consider the gap formation. In the next section, the model and the initial condition are explained. The following section shows the results, the last section is the conclusion and the discussion.

2 Model

2.1 Calculation Method

We integrate orbits with 4th order Hermite scheme (Makino and Aarseth 1992) and hierarchical individual time step (Makino 1991). The equation of motion is written as below.

$$\frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = -\frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_j|^3}\mathbf{r}_j - \sum_{j \neq k} \frac{GM_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) + \mathbf{f}_{\text{gas}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} \quad (2.1)$$

$\mathbf{r}_j$ is the heliocentric position vector of particle j . The first term is gravity of central star, the second term is mutual gravity between the particles, the third one $\mathbf{f}_{\text{gas}}$ is aerodynamical gas drag and the last term $\mathbf{f}_{\text{grav}}$ is drag due to tidal interaction with gas nebula. The last two forces are explained in the next section. Since the total mass of the planetesimals (and the protoplanets) is $\sim 10^{-6}$ times the mass of central star, the indirect term is negligible.

When the distance between two bodies becomes less than their sum of radii, we consider the bodies to merge, assuming perfect accretion. Physical radius of a body is determined by its mass m and internal density ρ_p as

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{m}{\rho_p} \right)^{1/3}. \quad (2.2)$$

We adopt 3gcm^{-3} as for ρ_p .

In order to shorten the calculation time, we enhance the collision by expanding the radii of the bodies only at collision detection by 5 times as in Kokubo and Ida (1996).

2.2 Drag Forces

2.2.1 Aerodynamical Gas Drag

The aerodynamical gas drag force per unit mass takes the form as following (Adachi et al. 1976).

$$\mathbf{f}_{\text{gas}} = -\frac{1}{2m}C_D\pi r\rho_{\text{gas}}|\mathbf{u}|\mathbf{u}. \quad (2.3)$$

C_D is the gas drag coefficient, which we adopt $C_D = 0.5$. r is the body's physical radius, m is the mass and ρ_{gas} is the disk gas density, which is written as below,

$$\rho_{\text{gas}} = 1.4 \times 10^{-9} \left(\frac{r_p}{1\text{AU}} \right)^{-11/4} \text{ (g cm}^{-3}\text{)} \quad (2.4)$$

where r_p is the body's distance from the central star and $\mathbf{u}$ is the relative velocity of the body and the disk gas. For the pressure gradient, the disk gas velocity v_{gas} is slightly slower than the Kepler velocity v_{kep} . We included the effect as following.

$$v_{\text{gas}} = (1 - \eta)v_{\text{kep}} \quad (2.5)$$

where

$$\eta = 0.0019 \left(\frac{r_p}{1\text{AU}} \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

If we adopt minimum mass solar nebula, The time scale for the gas drag to be effective is

$$\tau_{\text{gas}} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{f}_{\text{gas}}|} \simeq 10^6 \left(\frac{m}{M_{\oplus}} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_p}{3\text{g cm}^{-3}} \right)^{2/3} \left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right)^{-1} \left(\frac{r_p}{1\text{AU}} \right)^{13/4} \left(\frac{e}{0.01} \right)^{-1} \text{ years} \quad (2.7)$$

where Σ_{gas} is gas surface density and Σ_{H} is gas surface density of minimum mass nebula.

2.2.2 Gravitational Drag due to Disk-Planet Interaction

A planet in the disk perturbs the disk gas and forms a density wave. It effects the orbital elements of the planet embedded in the disk. Many study have been done to investigate the evolution of the body's eccentricity and inclination (Shu et al. 1983, Ward 1988, 1993, Artymowics 1993, 1994, Ward and Hahn 1994). Tanaka and Ward (2004) carried out linear calculation to investigate three dimensional density wave formed by planets with eccentricity and inclination. They derived the force exerted on the planet embedded in the disk, which damps the eccentricity and inclination. The force per unit mass is written as following.

$$f_{\text{grav},r} = \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right) \left(\frac{a_p \Omega_p}{c} \right)^4 \Sigma_{\text{gas}} a_p^2 \Omega_p (2A_r^c [v_{\theta} - r_p \Omega_K(r_p)] + A_r^s v_r) \quad (2.8)$$

$$f_{\text{grav},\theta} = \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right) \left(\frac{a_p \Omega_p}{c} \right)^4 \Sigma_{\text{gas}} a_p^2 \Omega_p (2A_{\theta}^c [v_{\theta} - r_p \Omega_K(r_p)] + A_{\theta}^s v_r) \quad (2.9)$$

$$f_{\text{grav},z} = \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right) \left(\frac{a_p \Omega_p}{c} \right)^4 \Sigma_{\text{gas}} a_p^2 \Omega_p (2A_z^c v_z + A_z^s z \Omega_p) \quad (2.10)$$

where c is the sound speed, a_p is the semimajor axis and Ω_p is the angular velocity of the planetesimal (protoplanet). v_θ, v_r are azimuthal and radial velocity respectively. The coefficients are

$$A_r^c = 0.057, A_r^s = 0.176, \quad (2.11)$$

$$A_\theta^c = -0.868, A_\theta^s = 0.325, \quad (2.12)$$

$$A_z^c = -1.088, A_z^s = -0.871. \quad (2.13)$$

If we assume minimum mass disk, the time scale for eccentricity and inclination damping due to the disk-planet interaction is

$$\tau_{\text{grav}} = 4 \times 10^2 \left(\frac{r_p}{1\text{AU}} \right)^2 \left(\frac{m_p}{M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right)^{-1} \text{ years} \quad (2.14)$$

The density wave exerts a torque on the planet. If minimum mass model is assumed, the net torque exerted on the planet is negative, and the planet migrates inward (Ward 1986, Korycansky and Pollack 1993, Tanaka et al. 2002). Tanaka et al. (2002) has carried out a linear calculation to calculate the torque in three dimensional disk. Azimuthal force is derived by the torque and takes a form as following, if minimum mass disk model is assumed, !!

$$f_{\text{grav,mig}} = 2.17 \left(\frac{m_p}{M_\oplus} \right) \left(\frac{a_p \Omega_p}{c} \right)^2 \Sigma_{\text{gas}} a_p^3 \Omega_p^2 \quad (2.15)$$

This force is added to the azimuthal component $f_{\text{grav},\theta}$ to express the migration effect. Assuming the minimum mass disk model, the migration time scale is

$$\tau_{\text{grav,mig}} = 7.0 \times 10^4 \left(\frac{m_p}{M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{r_p}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right)^{-1} \text{ years} \quad (2.16)$$

If we equate (2.7) and (2.14), we can acquire the mass that the disk-planet interaction become dominant over aerodynamical gas drag. When the mass reaches $0.003M_\oplus$, disk-planet interaction takes over the gas drag.

2.3 Initial Condition

We carried out 3 simulations. Each of them starts with 8440 planetesimals, ranging from 0.9 AU to 1.1 AU, and one runaway protoplanet at 1.05AU. Protoplanet's mass is 3×10^{26} g and each planetesimal has 3×10^{23} g. The mass distribution follows the minimum mass model. The planetesimal mass is larger than it should be (Inaba et al. 2001) in order to save the number of particles and the simulation time. The aerodynamical gas drag is 40 times that of minimum mass disk in order to express the same strength of drag force on smaller planetesimals. The drag force on 3×10^{23} g body in the 40 times the minimum mass is the same as that on 5×10^{18} g in 1 times the minimum mass nebula. The disk-planet interaction force $\mathbf{f}_{\text{grav}}$ is enhanced in simulation 2 and simulation 3 in order to see the faster evolution. Simulation 1 includes the $\mathbf{f}_{\text{grav}}$ with $\Sigma_{\text{gas}} = \Sigma_{\text{H}}$, simulation 2 includes $\Sigma_{\text{gas}} = 2 \times \Sigma_{\text{H}}$ and simulation 3 is with $\Sigma_{\text{gas}} = 3 \times \Sigma_{\text{H}}$.

3 Result

Figure.1 shows the orbital evolution of simulation 1. It shows the snap shots of particles' eccentricities and semimajor axes. A runaway body initially placed at 1.05 AU opens a gap in planetesimal disk in a time scale of about 10^4 years. A high density region forms in front of the protoplanet. The runaway body seems to shepherd the planetesimal disk. However, smaller runaway bodies start to form in $\sim 3 \times 10^4$ years, and the gap start to break down. The snap shots of simulations 2 and 3 are shown in fig.2 and fig.3 respectively. The number of smaller runaway bodies are less than in simulation 1 in both of the simulations. Since the migration speed is enhanced in simulations 2 and 3, the protoplanet sweeps through the disk in shorter time scale, not waiting for the runaway growth to happen in the planetesimal disk in front of the protoplanet.

Now we would like to see the time evolution of the disk density in specific regions. Figure.4 is a snap shot at $t = 4058$ years of simulation 1. Horizontal line is normalized displacement from where the protoplanet was initially placed as below.

$$\tilde{b} = \frac{a - a_{p,0}}{r_{H,p}} \quad (3.1)$$

where $r_{H,p}$ is the hill radius of the largest runaway body m_p ,

$$r_{H,p} = \left(\frac{m_p}{3M_\odot} \right)^{1/3} a_{p,0}. \quad (3.2)$$

The vertical line is expressed in normalized eccentricities and inclinations as below.

$$(\tilde{e}^2 + \tilde{i}^2)^{1/2} = \frac{(e^2 + i^2)^{1/2} a_{p,0}}{r_{H,p}} \quad (3.3)$$

Four dotted lines are Jacobi energy lines. Jacobi energy (Hayashi et al. 1977) E_J is defined by

$$E_J = \frac{1}{2} (\tilde{e}^2 + \tilde{i}^2) - \frac{3}{8} (\tilde{b} - \tilde{b}_p)^2 + \frac{9}{2}. \quad (3.4)$$

Two lines placed in the middle of the figure, are the lines of $E_J = 0$. The outer lines are $E_J = -25$. We put the outer lines so that they enclose the planetesimal-rich regions. We plotted the total planetesimal mass evolution in the inner region of the protoplanet (between the $E_J = 0$ line and $E_J = -25$ where $\tilde{b} < 0$, from now on, this region is called region A), the outer region of the protoplanet (between the $E_J = 0$ line and $E_J = -25$ where $\tilde{b} > 0$, from now on, this region is called region B), and the region between the $E_J = 0$ lines (region C). Figures 5,6 and 7 are for simulation 1, 2 and 3 respectively. The vertical line is the total planetesimal mass divided by mass of the largest runaway body. In all of these three figures, the top line is for region A, middle line is for region B and the bottom line is for region C. Bottom line of fig.5 drops significantly in $\sim 10^4$ years, indicating that a gap is formed in such time scale. The top line stays at ~ 1 for $\sim 3 \times 10^4$ years. This means that equivalent mass of planetesimals to the protoplanet is shepherded during this period. After that period, the middle line starts to increase and the shepherding breaks down. The time of shepherding-break-down and the formation of smaller runaway bodies' formation is coherent. Hence, in simulation 1, it is reasonable to assume that the

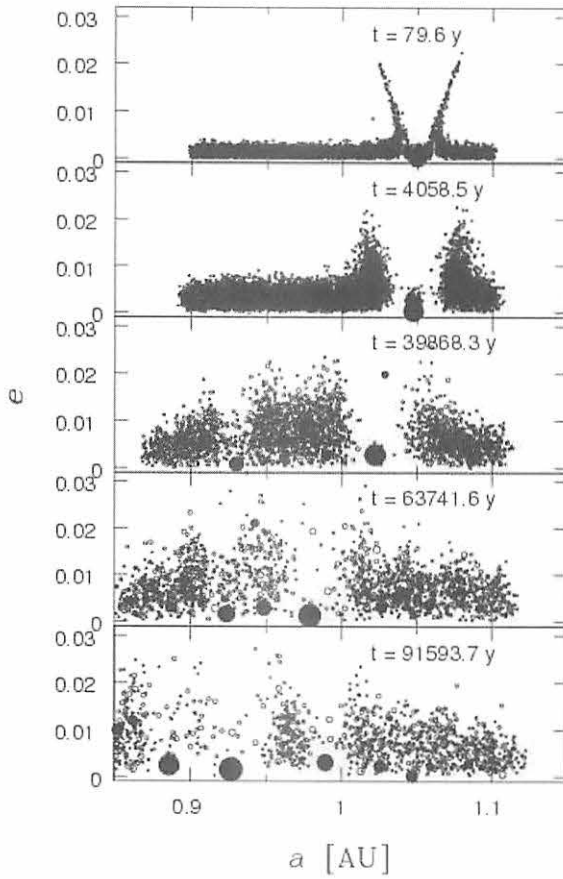


Figure 1 — Orbital evolution of simulation 1. Filled circle indicates the mass is more than 2×10^{25} g.

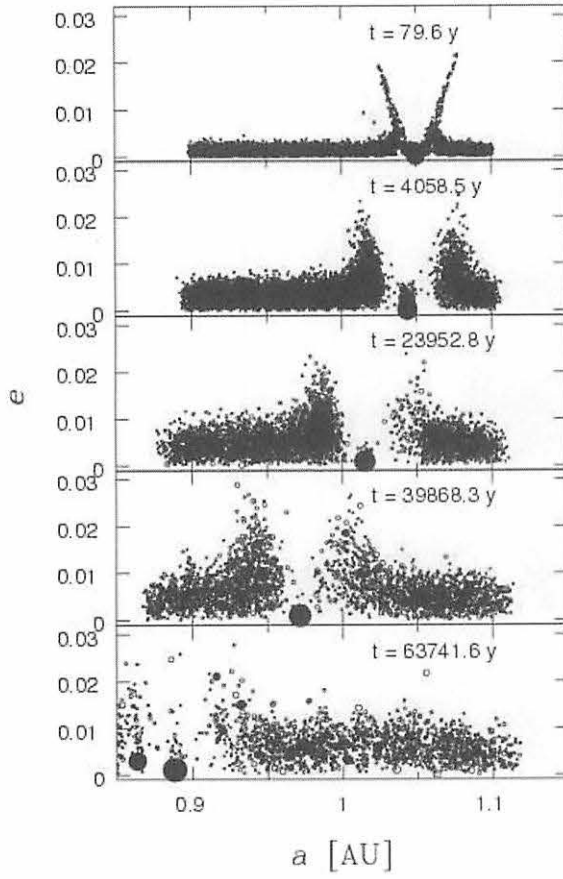


Figure 2 — Orbital evolution of simulation 2.

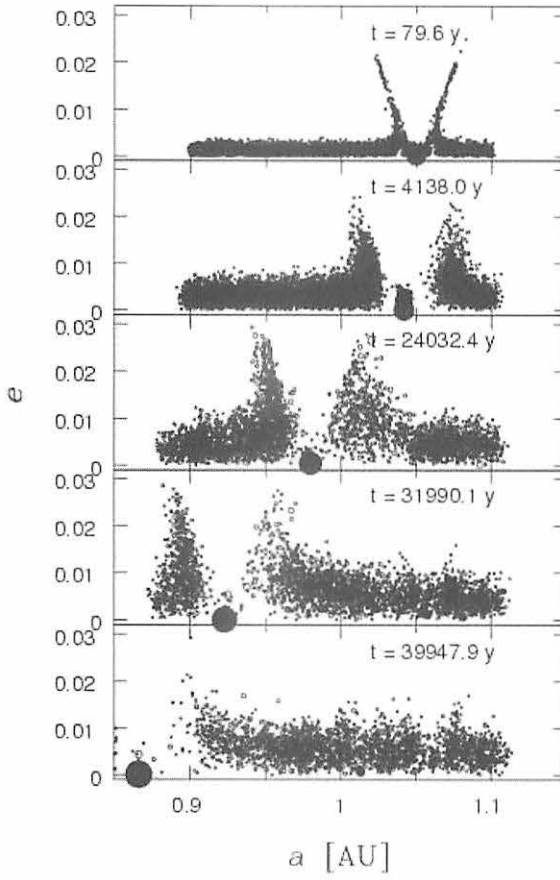


Figure 3 — Orbital evolution of simulation 3.

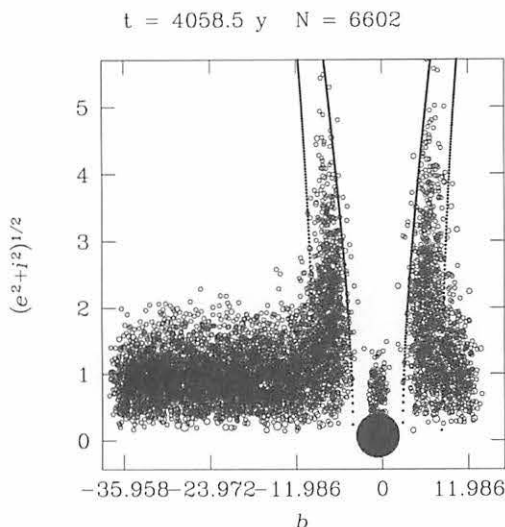


Figure 4 — A snap shot at $t = 4058$ years of simulation 1. The dotted lines are Jacobi Energy lines, from left, $E_J = -25, 0, 0, -25$.

shepherding period is truncated for the runaway growth of smaller bodies in the inner region.

In fig.6 and fig.7, the top lines, which are the lines for region A, reach ~ 1.4 . The higher density is the result of the faster migration. The migration time scale is shorter than the time scale for the runaway growth in the region. However, eventually, the shepherding breaks down in these cases as well. The reason for the phase change from the shepherding to the predator in simulation 2 and 3 seems to be the mass of the protoplanet. At the point when the protoplanet becomes $\gtrsim 4 \times 10^{26}$ g, the shepherding seems to break down in these simulations.

How the disk density evolution effects the protoplanet's growth and migration is indicated in figs.8 to 13. Fig.8 shows the time evolution of the largest runaway body's mass in simulation 1. The dotted line is the analytical estimate, eq.(3.15), in Tanaka and Ida (1999). This estimate is for a protoplanet being a predator, which means that it does not account for the effect of the gap in the planetesimal disk. During the first 3×10^4 years, the growth rate is low compared to the analytical line. This is due to the formation of a gap and decrease of number of planetesimals which the protoplanet can accrete. However, after 3×10^4 years, the growth rate increases to the value of about the same as the analytical value. This change takes place almost simultaneously with the gap-break-down, which is shown in fig.1. Hence, the increase of the growth rate is due to the disappearance of the gap, which is caused by formation of other runaway bodies in the high density region in front of the protoplanet. The period for low accretion rate is $\sim 2 \times 10^4$ years in figs.9 and 10. The time scale for the break down of the gaps in figs.2 and 3 is about the same

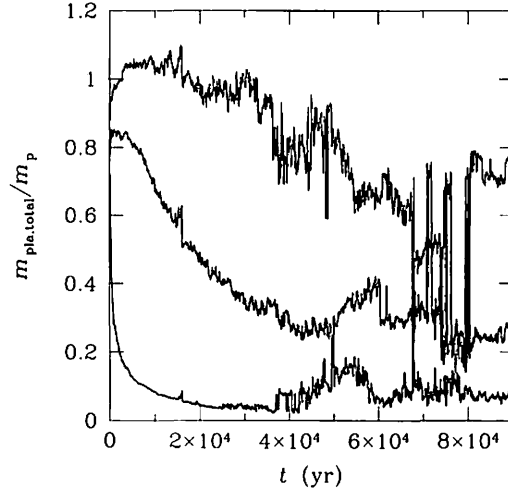


Figure 5 — Time evolution of total planetesimal mass in region A, B and C for simulation 1. Vertical axis is the total planetesimal mass in each region normalized by mass of the largest runaway body. The top line is for region A, middle one is for region B and the bottom line is for region C.

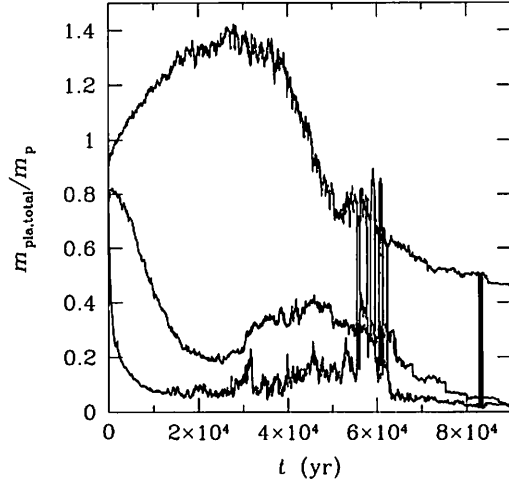


Figure 6 — Time evolution of total planetesimal mass in region A, B and C for simulation 2.

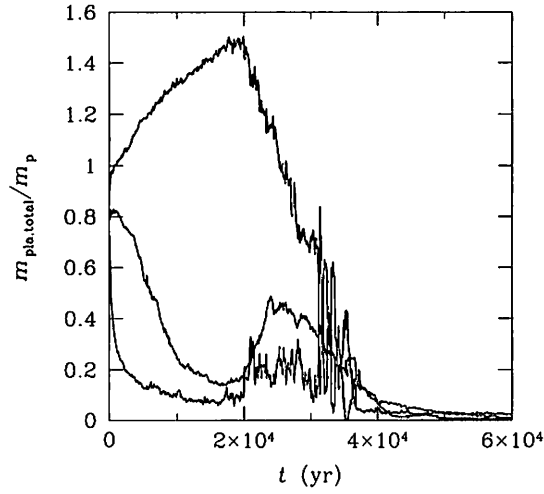


Figure 7 — Time evolution of total planetesimal mass in region A, B and C for simulation 3.

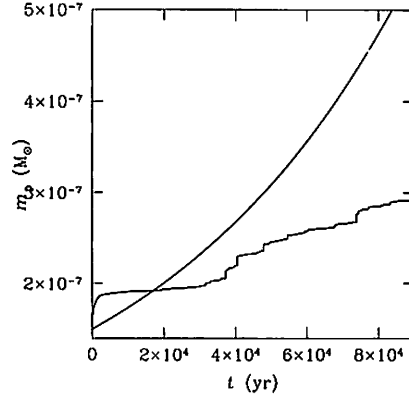


Figure 8 — Time evolution of runaway body's mass for simulation 1. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

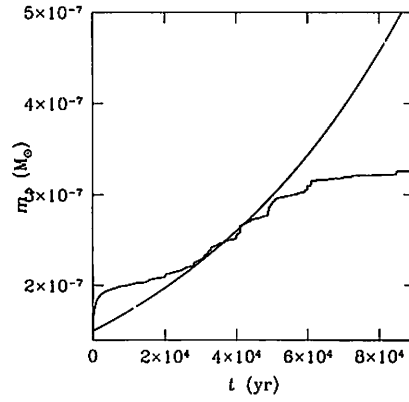


Figure 9 — Time evolution of runaway body's mass for simulation 2. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

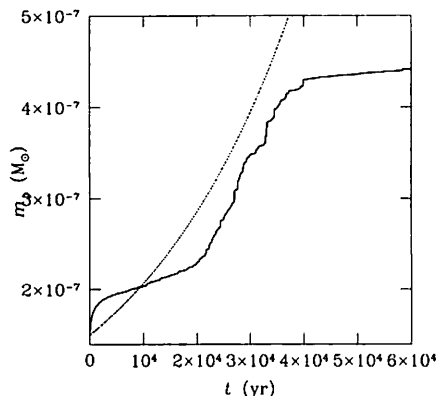


Figure 10 — Time evolution of runaway body’s mass for simulation 3. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

as the accretion rate increase in figs.9 and 10, respectively.

The semimajor axis evolution of the protoplanet in simulation 1 is shown in fig.11. The dotted line is drawn analytically using eq.(2.16). The solid line is the result of the simulation. The gradient of the dotted line is ~ 0.7 times the solid line. The migration speed is moderated because the dense region in the planetesimal disk in region A. The total mass in region A is $\sim 1 - 1.4$ times the protoplanet’s mass during the shepherding. Decrease of angular momentum of the protoplanet is softened by the high planetesimal density region. However, gradually new runaway bodies form in the high density region eating up the gap. Hence the shepherding stops. The shepherding lasts for ~ 30000 years. Similar phenomenon occurs in simulations 2 and 3. The time scale for the shepherding to last is ~ 30000 years and ~ 20000 years respectively. In both cases, shepherding eventually stops and the gradient of the solid lines increase again to the value of the analytical values.

Tanaka and Ida (1999) derived a critical migration time scale, τ_{crit} , for a shepherding to take place (e.g. fig.5 of Tanaka and Ida (1999)). If a body has a mass of 3×10^{26} g and Σ_{gas} for the aerodynamical gas drag is $40\Sigma_{\text{H}}$, the critical migration time scale is,

$$\tau_{\text{crit}} = 3.1 \times 10^5 T_{\text{K}}. \quad (3.5)$$

T_{K} is the Kepler time. τ_{mig} for a body with mass of 3×10^{26} g is

$$\tau_{\text{mig}} = 1.4 \times 10^6 \left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right)^{-1} T_{\text{K}}. \quad (3.6)$$

A protoplanet can shepherd the planetesimals if $\tau_{\text{mig}} > \tau_{\text{crit}}$. Using (3.5) and (3.6), this formulae leads to

$$\left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right) < 4.5. \quad (3.7)$$

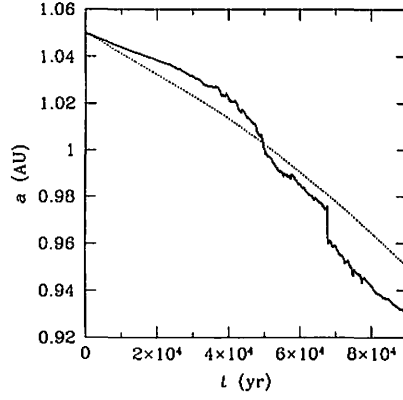


Figure 11 — Time evolution of runaway body's semimajor axis for simulation 1. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

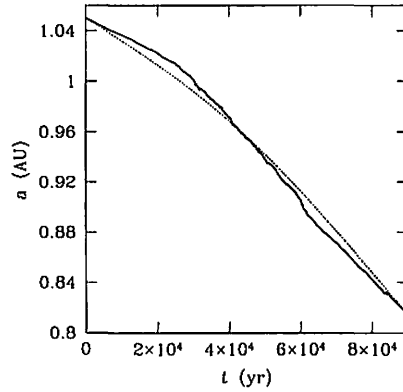


Figure 12 — Time evolution of runaway body's semimajor axis for simulation 2. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

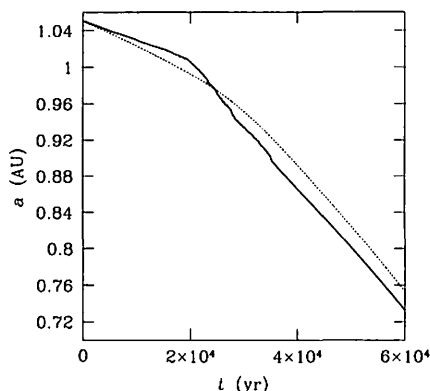


Figure 13 — Time evolution of runaway body’s semimajor axis for simulation 3. Dotted is analytical estimate, and the solid line is the N-body simulation result.

Since in simulations 1, 2 and 3, $\left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}}\right) = 1, 2, 3$ respectively, and satisfy the equation (3.7), it is consistent with Tanaka and Ida (1999) that the shepherding takes place in all of the simulations we have done. We have tried a simulation with $\left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}}\right) = 5$ and obtained a result with no shepherding, therefore no slow down of migration.

Although the shepherding slows the migration for a certain period, it does not sustain for long enough to change the total migration time scale. If this is the case, in order to save the planets from falling to the sun, gas has to be depleted soon enough. Assuming that a body is formed at 1AU and the protoplanets are separated with 10 mutual hill radii, the isolation mass(m_{iso}) is

$$m_{\text{iso}} = 0.16 \left(\frac{\Sigma_{\text{solid}}}{\Sigma_{\text{solid,H}}} \right)^{3/2} M_{\oplus}, \quad (3.8)$$

(Kokubo and Ida 2002). Σ_{solid} is dust surface density of the disk and $\Sigma_{\text{solid,H}}$ is that of the minimum mass disk. Assuming the gas to dust ratio of the disk does not change from 100 and

$$\frac{\Sigma_{\text{solid}}}{\Sigma_{\text{solid,H}}} = \frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}}, \quad (3.9)$$

migration time scale for this isolation mass is the following.

$$\tau_{\text{mig}} = 4.4 \times 10^5 \left(\frac{\Sigma_{\text{gas}}}{\Sigma_{\text{H}}} \right)^{-5/2} \text{ years} \quad (3.10)$$

If (3.10) is longer than the depletion time scale τ_{dep} , the isolation mass can survive. Fig.14 shows in which disk, with what depletion time scale, planets with isolation mass at 1AU can survive. The solid line is drawn by equating (3.10) and τ_{dep} . the dotted line indicates the disk with 1 minimum mass. Planets can survive if

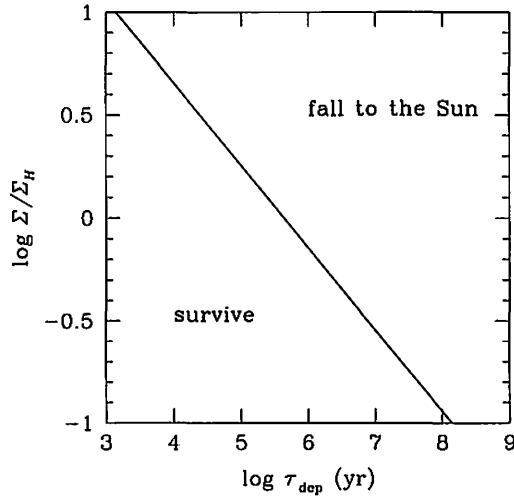


Figure 14 — Planets' survival criterion in terms of the function of gas depletion time scale and the surface density of the disk. Planets at 1AU in the disk above the solid line migrate to the Sun and below the line survive.

the disk has surface density and depletion time scale below the solid line. The observational value for the depletion time scale is $\sim 10^6 - 10^7$ years. If $\tau_{\text{dep}} = 10^6$ years, protoplanets can marginally survive. However, if $\tau_{\text{dep}} = 10^7$ years, planets definitely fall to the sun. The figure shows that the isolation mass at 1AU in a minimum mass disk survives, if the $\tau_{\text{dep}} < 4 \times 10^5$ years.

4 Conclusion and Discussion

We have performed N-body simulations on formation of protoplanets including aerodynamical gas drag and drag force due to disk-planet interaction. The protoplanet opens a gap in the planetesimal disk. The gap decreases the accretion rate and slows the migration rate of the protoplanet.

The low accretion rate keeps the protoplanet's mass small. Since the migration rate is proportional to the mass of the body, the time scale for the protoplanet to remain in the disk will be longer if the accretion rate is kept small. The decreased migration rate due to the formation of high density region in front of the protoplanet, may lengthen the migration time scale as well. However, such shepherding period sustain only for $\sim 2 - 3 \times 10^4$ years, which is not long enough to change the migration time scale itself.

Meanwhile, if the gas depletion time scale is less than 4×10^5 years at 1AU, protoplanets at 1AU may survive in minimum mass disk. The observational value for depletion time scale ($\sim 10^6 - 10^7$ years) is taken by observing the outer region of the disk ($\sim 100\text{AU}$). It is possible for the disk gas to deplete from the inner region. Hence, the gas may deplete in 4×10^5 years at 1AU. There is a work done by Inaba et al. (2003) that says the core of giant planet may form in $\sim 10^6$ years. Assuming the above depletion mechanism, following scenario can be considered. First, protoplanets form around terrestrial planet region, gas depletes in the region, but still abundant in outer region where gas giant planet forms. Giant planet cores form in the outer region and accrete gas. The remaining gas depletes in the outer region in a time scale of the observational value.

Another issue that we have to consider is a turbulence in the disk. Turbulence can alter the migration direction and make the bodies to jump in different places. There are two possible outcomes. One possibility is that such a random walk may slow the inward migration, because the migration direction is not uniform. Another possibility is that since the bodies may jump to a planetesimal abundant region in short period without forming a gap, accretion is enhanced and the migration become faster. Our next step is to include such effect and see how the results change.

Also, this paper only contains one protoplanet. It is more realistic to include several protoplanets. Interaction between the protoplanets may also change the result. This issue is left to future study as well.

References

- [1] Adachi, I., C. Hayashi, and K. Nakazawa 1976. The gas drag effect on the elliptical motion of a solid body in the primordial solar nebula. *Prog. Theor. Phys.*, **56**, 1756-1771.
- [2] Agnor, C. B., R. M. Canup, and H. F. Levison 1999. On the character and consequences of large impacts in the late stage of terrestrial planet formation. *Icarus*, **142**, 219-237.

- [3] Agnor, C. B., and Ward, W. R. 2002. Damping of terrestrial-planet eccentricities by density-wave interactions with a remnant gas disk. *APJ*, **567**, 579-586.
- [4] Artymowicz, P. 1993. Disk-satellite interaction via density wave and the eccentricity evolution of bodies embedded in disks. *Astron. J.*, **419**, 166-180.
- [5] Artymowicz, P. 1994. Orbital Evolution of Bodies Crossing Disks Due to Density and Bending Wave Excitation *ApJ*, **423**, 581.
- [6] Barge, P., and R. Pellat 1991. Mass spectrum and velocity dispersion during planetesimal accumulation. I. Accretion. *Icarus*, **93**, 270-287.
- [7] Chambers, J. E., and G. W. Wetherill 1998. Making the terrestrial planets: N-body integrations of planetary embryos in three dimensions. *Icarus*, **136**, 304-327.
- [8] Goldreich, P., and S. Tremaine 1979. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential *ApJ*, **233**, 857-871
- [9] Goldreich, P., and S. Tremaine 1980. Disk-satellite interactions *ApJ*, **241**, 425-441
- [10] Greenberg, R., J. Wacker, W. K. Hartmann, and C. R. Chapman 1978. Planetesimals to planets: Numerical simulations and collisional evolution. *Icarus*, **35**, 1-26.
- [11] Hayashi, C., K. Nakazawa and I. Adachi 1977. Long-Term Behavior of Planetesimals and the Formation of the Planets *PASJ*, **29**, 163-196.
- [12] Hayashi, C. & K. Nakazawa, and Y. Nakagawa, 1985. Formation of solar system *Protostars and planets*, **II**, 1100-1153.
- [13] Inaba, S., H. Tanaka, K. Nakazawa, G. W. Wetherill, and E. Kokubo 2001. High-accuracy statistical simulation of planetary accretion: II. Comparison with N-body simulation. *Icarus*, **149**, 235-250.
- [14] Kokubo, E., and S. Ida 1995. Orbital evolution of protoplanets embedded in a swarm of planetesimals. *Icarus*, **114**, 247-257.
- [15] Kokubo, E., and S. Ida 1996. On runaway growth of planetesimals. *Icarus*, **123**, 180-191.
- [16] Kokubo, E., and S. Ida 1998. Oligarchic growth of protoplanets. *Icarus*, **131**, 171-178.
- [17] Kokubo, E., and S. Ida 2000. Formation of protoplanets from planetesimals in the solar nebula. *Icarus*, **143**, 15-27.
- [18] Kominami, J., and S. Ida 2002. The effect of tidal interaction with a gas disk on formation of terrestrial planets. *Icarus*, **157**, 43-56
- [19] Korycansky, D. G. and J. B. Pollack 1993. Numerical calculations of the linear response of a gaseous disk to a protoplanet *Icarus*, **102**, 150-165
- [20] Makino, J., and S. J. Aarseth 1992. On a hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems. *PASJ*, **44**, 141-151.
- [21] Shu, Frank H., C. Yuan and J. J. Lissauer 1983. Nonlinear Density Waves in Saturn's Rings *Bulletin of the American Astronomical Society*, **15**, 959.
- [22] Spaute, D., S. Weideschilling, D. R. Davis, and F. Marzari 1991. Accretional evolution of a planetesimal swarm: I. A new simulation. *Icarus*, **92**, 147-164.
- [23] Tanaka, H., and S. Ida 1999. Growth of migrating protoplanet. *Icarus*, **139**, 350-366.
- [24] Tanaka, H., T. Takeuchi and W. R. Ward 2002. Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration *ApJ*, **565**, 1257-1274.

- [25] Tanaka, H. and W. R. Ward 2004. Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves *ApJ*,**602**,388-395.
- [26] Ward, W. R. 1986. Density waves in the solar nebula - Differential Lindblad torque *Icarus*,**67**,164-180
- [27] Ward, W. R. 1988. On disk-planet interactions and orbital eccentricities *Icarus*,**73**,330-348
- [28] Ward, W. R. 1993. Density Wave In The Solar Nebula: Planetesimal Velocities. *ICARUS*,**106**,274-287.
- [29] Ward, W. R. and J. M. Hahn 1994. Damping of orbital inclinations by bending waves *Icarus*,**110**,95-108
- [30] Weidenschilling, S. J., D. Spaute, D. R. Davis, F. Marzari, and K. Ohtsuki 1997. Accretional evolution of a planetesimal swarm. 2. The terrestrial zone *Icarus*,**128**,429-455.
- [31] Wetherill, G. W. and S. R. Stewart 1989. Accumulation of a swarm of small planetesimals. *Icarus*,**77**,330-357.

Time Systems in Ancient China and Japan

古代中国と日本の時刻制度¹

Mitsuru SÔMA*

相馬 充*

somamt@cc.nao.ac.jp

Kin-aki KAWABATA†

河鱒公昭†

kawabata-nagoya@jcom.home.ne.jp

Kiyotaka TANIKAWA*

谷川清隆*

tanikawa.ky@nao.ac.jp

*National Astronomical Observatory of Japan

Osawa 2-chome, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan

*181-8588 東京都三鷹市大沢 2 丁目 国立天文台

†Emeritus Professor of Nagoya University

Hanakoganei 4-39-15, Kodaira, Tokyo 187-0002, Japan

†187-0002 東京都小平市花小金井 4 丁目 39 番 15 号

ABSTRACT

Time systems employed in ancient China and Japan are investigated by analyzing the tables of sunrise and sunset etc. recorded in ancient China and Japan.

It has been well known that both in ancient China and Japan 1 day was divided into 12 double hours and the first double hour corresponded to the time from 23 h to 1 h in local apparent solar time. But it is confirmed that in the Song dynasty (960 AD – 1279 AD) in China the first double hour corresponded to the time from 0 h to 2 h. In China 1 day was also divided into 100 equal parts called *ke*, which is translated into English as mark. This interval *ke* was subdivided by the time unit called *fen*, and the number of *fen* in 1 *ke* varied from dynasty to dynasty. In ancient Japan the time units *ke* and *fen* were also used, but the lengths of both of them varied depending on eras.

It is shown that daytime included dawn and dusk until Tang dynasty, but it did not include dawn or dusk in *Songshi* in China. In ancient Japan daytime did not include dawn or dusk.

It is also shown that a table of daytime duration was constructed without knowing the variation of the Sun's speed in one year in *Houhanshu*. The table given in *Houhanshu* seems to indicate that the water clocks called *louke* used at that time had a daily variation which varied with the seasons. The table of daytime duration and times of sunrise and sunset was reconstructed several times until Tang dynasty, but it is found that all of them were based on the table given in *Houhanshu* except for one table in *Suishu* which incorporated new observations. It is also found that

¹この論文は Sôma et al. (2004) による論文の日本語訳である

the table of daytime duration and times of sunrise and sunset given in *Songshi* was constructed with the knowledge of the variation of the Sun's speed in one year.

All of the daytime and nighttime, the times of sunrise and sunset, and the lengths of shadows given in the Chinese official chronicles referred to a particular latitude of about 34.5 degrees, where the ratios of the daytime and nighttime duration defined by the sunrise and sunset are simple values of $2/3$ in the winter solstice and $3/2$ in the summer solstice. The Japanese system took over this Chinese tradition.

The text of this paper is written in Japanese, but the content of this paper was published by Sôma *et al.* (2004) in English.

1 はじめに

近年、天文古記録を用いて、地球自転変動や太陽活動、地球物理学的現象などの研究がさかんに行われるようになった (e.g. Stephenson and Morrison 1984, Han and Zhang 1996, Stephenson 1997, 2003, Tanikawa and Sôma 2004, Kawabata *et al.* 2004). 古代の天文記録には、たとえば日食の起こった時刻などが含まれるが、これらを用いた研究を行うには古代の時刻制度に関する知識が必要とされる。

古代中国の時刻制度に関する記述は中国歴代の正史である二十四史に見つけられる。ところが日本の時刻制度に関しては日本書紀などの正史には記載されておらず、個人の日記やお寺の記録などに散見されるだけである。

古代中国の時刻制度については Stephenson (1997) と Steele (2000) の研究があり、日本のそれについては平山 (1913a,b) と橋本 (1966) が研究を行っているが、中国の二十四史間のデータの関係を知ったり、中国と日本の時刻制度の関係や精度を知るには不十分であった。古代の中国と日本では時間の単位に同じ文字を使用していたが、その単位の長さは必ずしも同じではなかった。この論文では、古代と中世の中国と日本の時刻記録を用いた研究を行うのに便利のように、中国については13世紀の宋まで、日本については16世紀の室町時代の終わりまでの時刻記録を解析し、それらの時代の時刻制度を明らかにする。

中国では古くから1日を100刻に分けていた。時刻を表示するには真夜中から次の日の真夜中までを12等分した十二支が使用された(補遺を参照のこと)。12等分したおのおのは辰刻といわれる。したがって、1辰刻は $8\frac{1}{3}$ 刻に等しい。1辰刻が整数の刻数になっていないという不便さにもかかわらず、中国ではこの制度が、ごく短期間の例外的な時期を除いて、1628年まで使用された。この例外的な時期には、1日の刻数は96, 108, あるいは120であった。1628年以後は1日の刻数は96になった。1刻はさらに分に分けられた。1刻が何分になるかは王朝や時期により異なっていた。

元史にはやや改訂された時刻制度が現れている。この制度では各辰刻が2分割され、初めのほうを初、後のほうを正と呼んでいた。元史によると、この制度は唐の終わりころから使用されていたようである。各辰刻やその初・正と地方時との対応表は Stephenson (1997) と Steele (2000) に与えられている。ただし、宋王朝時代(960 AD – 1279 AD)については地方時に1時間を加えなければならない。

中国の時刻制度ではさらに更(night watches)があった。更については Stephenson (1997) が詳しく説明しているので、そちらを参照していただきたい。

十二支や刻は日本でも使用された。しかし、1日の刻数は中国のそれとは必ずしも等しくはなく、1日を48あるいは50に等分した単位をも刻として用いていたこともあった。

第2節では中国の暦法についてまとめ、第3節で中国の各正史に現れる時刻制度について説明する。また、第4節では日本の記録に現れる時刻制度について説明す

Table 3: 24 節気.

<i>L</i>	名称	日付
270°	冬至 dongzhi <tung-chih>	Dec 22
285°	小寒 xiaohan <hsiao-han>	Jan 6
300°	大寒 dahan <ta-han>	Jan 21
315°	立春 lichun <li-ch'un>	Feb 4
330°	雨水 yushui <yu-shui>	Feb 19
345°	驚蟄 jingzhe <ch'ing-che>	Mar 6
0°	春分 chunfen <ch'un-fen>	Mar 21
15°	清明 qingming <ch'ing-ming>	Apr 5
30°	穀雨 guyu <ku-yu>	Apr 21
45°	立夏 lixia <li-hsia>	May 6
60°	小満 xiaoman <hsiao-man>	May 22
75°	芒種 mangzhong <mang-chung>	Jun 6
90°	夏至 xiazhi <hsia-chih>	Jun 22
105°	小暑 xiaohan <hsiao-shu>	Jul 8
120°	大暑 dashu <ta-shu>	Jul 23
135°	立秋 liqiu <li-ch'iu>	Aug 8
150°	處暑 chushu <ch'u-shu>	Aug 24
165°	白露 bailu <po-lu>	Sep 8
180°	秋分 qiufen <ch'iu-fen>	Sep 23
195°	寒露 hanlu <han-lu>	Oct 9
210°	霜降 shuangjiang <shuang-hsiang>	Oct 24
225°	立冬 lidong <li-tung>	Nov 8
240°	小雪 xiaoxue <hsiao-hsueh>	Nov 23
255°	大雪 daxue <ta-hsueh>	Dec 8

L は太陽の視黄経である.

日付はグレゴリオ暦によるおよその日付.

冬至と夏至は二至, 春分と秋分は二分としても知られる.

隋書と舊唐書では「驚蟄」は「啓蟄」とも書かれた. 名称欄でローマ字で書いたものは, 初めが中国の pinyin によるもの, < > で囲ったものは従来の Wade 式によるものである.

る. 第5節はこの論文で明らかにしたことをまとめる. 補遺では辰刻と地方時との対応を表で示す.

Table 4: 後漢書の昼の時間と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	晝漏刻 Daytime	夜漏刻 Nighttime	Rec – Cal (min)						
			Duration from			without ref.		with ref.	
			Sunrise to Sunset			平氣	定氣	平氣	定氣
			(<i>ke</i>)	Rec	Cal	<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>	<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>
冬至	45 刻	55 刻	40.0	9:36.0	9:40.1	−4.1	−4.0	−10.6	−10.5
小寒	45 刻 8 分	54 刻 2 分	40.8	9:47.5	9:47.3	+0.2	+1.7	−6.2	−4.8
大寒	46 刻 8 分	53 刻 2 分 *)	41.8	10:01.9	10:05.3	−3.4	−0.2	−9.6	−6.5
立春	48 刻 6 分	51 刻 4 分	43.6	10:27.8	10:30.9	−3.1	+1.5	−9.1	−4.5
雨水	50 刻 8 分	49 刻 2 分	45.8	10:59.5	11:00.9	−1.4	+4.1	−7.2	−1.7
驚蟄	53 刻 3 分	46 刻 7 分	48.3	11:35.5	11:32.9	+2.6	+8.4	−3.1	+2.6
春分	55 刻 8 分	44 刻 2 分	50.8	12:11.5	12:05.6	+5.9	+11.5	+0.2	+5.8
清明	58 刻 3 分	41 刻 7 分	53.3	12:47.5	12:37.8	+9.7	+14.6	+3.9	+8.9
穀雨	60 刻 5 分	39 刻 5 分	55.5	13:19.2	13:08.6	+10.6	+14.6	+4.7	+8.7
立夏	62 刻 4 分	37 刻 6 分	57.4	13:46.6	13:36.4	+10.2	+12.9	+4.1	+6.8
小滿	63 刻 9 分	36 刻 1 分	58.9	14:08.2	13:59.2	+9.0	+10.3	+2.7	+4.1
芒種	64 刻 9 分	35 刻 1 分	59.9	14:22.6	14:14.5	+8.1	+8.4	+1.6	+2.0
夏至	65 刻	35 刻	60.0	14:24.0	14:20.0	+4.0	+4.0	−2.5	−2.5
小暑	64 刻 7 分	35 刻 3 分	59.7	14:19.7	14:14.5	+5.2	+5.5	−1.3	−0.9
大暑	63 刻 8 分	36 刻 2 分	58.8	14:06.7	13:59.0	+7.7	+8.8	+1.4	+2.6
立秋	62 刻 3 分	37 刻 7 分	57.3	13:45.1	13:35.7	+9.4	+11.4	+3.3	+5.3
處暑	60 刻 2 分	39 刻 8 分	55.2	13:14.9	13:07.2	+7.7	+10.3	+1.8	+4.4
白露	57 刻 8 分	42 刻 2 分	52.8	12:40.3	12:35.7	+4.6	+7.4	−1.2	+1.7
秋分	55 刻 2 分	44 刻 8 分	50.2	12:02.9	12:02.7	+0.2	+2.9	−5.4	−2.8
寒露	52 刻 6 分	47 刻 4 分	47.6	11:25.4	11:29.3	−3.9	−1.7	−9.6	−7.5
霜降	50 刻 3 分	49 刻 7 分	45.3	10:52.3	10:56.7	−4.4	−3.1	−10.2	−8.9
立冬	48 刻 2 分	51 刻 8 分	43.2	10:22.1	10:26.6	−4.5	−4.2	−10.5	−10.2
小雪	46 刻 7 分	53 刻 3 分	41.7	10:00.5	10:01.7	−1.2	−1.6	−7.4	−7.9
大雪	45 刻 5 分	54 刻 5 分	40.5	9:43.2	9:45.2	−2.0	−2.6	−8.4	−9.1
冬至	45 刻	55 刻	40.0	9:36.0	9:40.1	−4.1	−4.0	−10.6	−10.5

*) 大寒の夜漏刻は「53 刻 8 分」と書かれていたが、その晝漏刻の値と矛盾していた。そのため、ここでは「53 刻 2 分」を採用した。

Table 5: 後漢書の影の長さ・太陽の極距離と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	Shadow length 影		Rec – Cal		黄道去極 ^{\$)}			Rec – Cal	
			平氣	定氣	Sun's polar distance			平氣	定氣
	Rec	Cal	<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>	Rec	Cal		<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>
	(C.ft)		(C.ft)	(C.ft)	(C.deg)	(deg)	(deg)	(deg)	(deg)
冬至	13.	12.85	+0.15	+0.14	115	113.35	113.67	−0.32	−0.33
小寒	12.3	12.34	−0.04	−0.14	113 強	111.50	112.61	−1.11	−1.33
大寒	11.	11.13	−0.13	−0.33	110 大弱	109.10	109.86	−0.76	−1.25
立春	9.6	9.59	+0.01	−0.25	106 少強	104.79	105.74	−0.95	−1.71
雨水	7.95	8.02	−0.07	−0.34	101 強	99.67	100.63	−0.96	−1.91
驚蟄	6.5	6.56	−0.06	−0.31	95 強	93.76	94.92	−1.16	−2.21
春分	5.25	5.28	−0.03	−0.23	89 強	87.85	88.98	−1.13	−2.15
清明	4.15	4.18	−0.03	−0.19	83 少弱	81.99	83.14	−1.15	−2.04
穀雨	3.2	3.26	−0.06	−0.17	77 大強	76.70	77.73	−1.03	−1.72
立夏	2.52	2.52	0.00	−0.06	73 少弱	72.14	73.06	−0.92	−1.36
小滿	1.98	1.97	+0.01	−0.03	69 大弱	68.69	69.43	−0.74	−0.96
芒種	1.68	1.63	+0.05	+0.04	67 少弱	66.22	67.12	−0.90	−0.95
夏至	1.5	1.52	−0.02	−0.02	67 強	66.16	66.32	−0.16	−0.16
小暑	1.7	1.64	+0.06	+0.06	67 大強	66.84	67.12	−0.28	−0.33
大暑	2.	1.98	+0.02	−0.01	70	69.00	69.47	−0.47	−0.65
立秋	2.55	2.54	+0.01	−0.04	73 半強	72.57	73.17	−0.60	−0.93
處暑	3.33	3.30	+0.03	−0.04	78 半強	77.50	77.96	−0.46	−0.92
白露	4.35	4.24	+0.11	+0.01	84 少強	83.10	83.52	−0.42	−0.93
秋分	5.5	5.38	+0.12	+0.02	90 半強	89.32	89.51	−0.19	−0.68
寒露	6.85	6.72	+0.13	+0.04	96 大強	95.42	95.59	−0.17	−0.55
霜降	8.4	8.22	+0.18	+0.11	102 少強	100.84	101.36	−0.52	−0.74
立冬	10.*)	9.84	+0.16	+0.15	107 少強	105.77	106.45	−0.68	−0.73
小雪	11.4	11.36	+0.04	+0.07	111 弱	109.28	110.43	−1.15	−1.07
大雪	12.56	12.49	+0.07	+0.12	113 大強	112.18	112.92	−0.74	−0.65
冬至	13.	12.85	+0.15	+0.14	115	113.35	113.67	−0.32	−0.33

*) 立冬の日の影の長さは四庫全書電子版に「10.42 尺」と与えられているが、中華書局発行の書物では「10 尺」である。ここでは「10 尺」を採用した。

\$) 黄道去極は4つの値が四庫全書と中華書局とで異なっていた。中華書局の値の方が変化がより自然なので、ここでは中華書局の値を採用した。

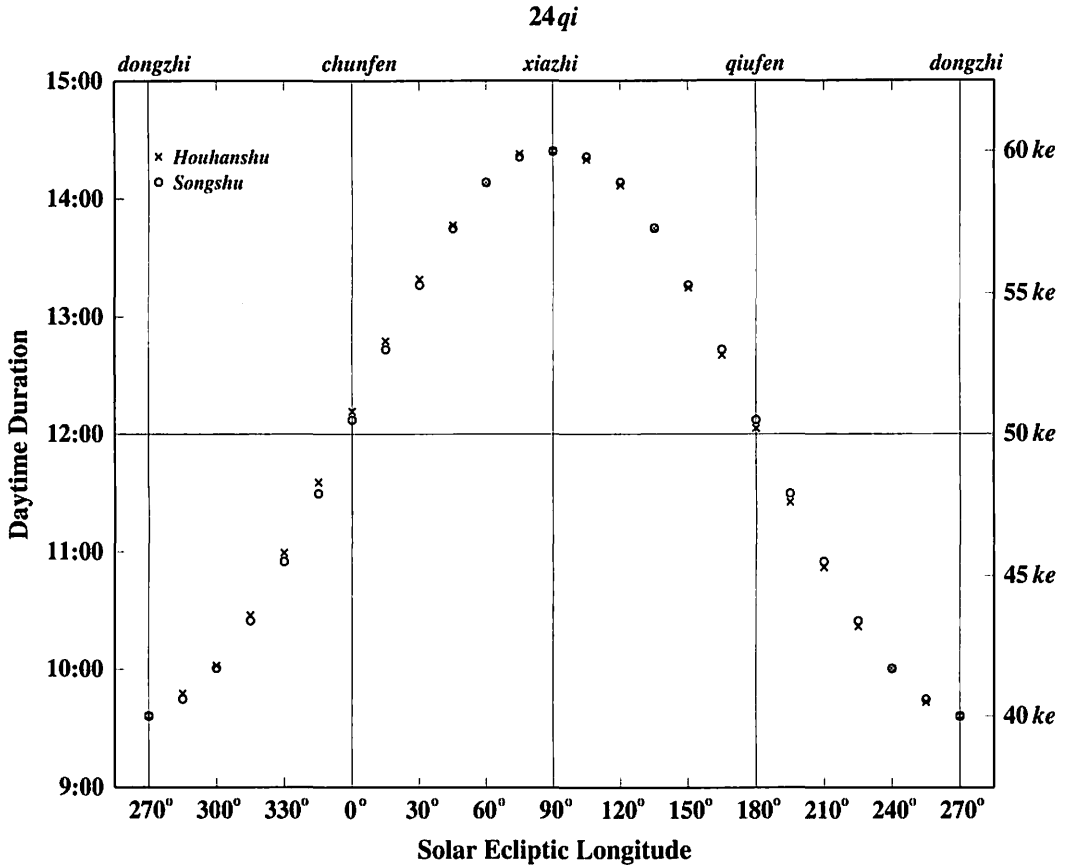


Figure 1 — 後漢書 (*Houhanshu*) と宋書 (*Songshu*) の昼の時間. 宋書の昼の時間は冬至や夏至に関して対称である.

2 中国の暦法

この節に書くことはすでによく知られていることかも知れないが、この論文で議論することの予備知識としてここにまとめておく。

中国の暦法は太陰太陽暦であり、したがって、月と太陽の動きに基づいている。各月の1日は新月の日で、1ヶ月の平均は29.53...日、1太陽年は365.24...日で12ヶ月より10.87...日だけ大きい。そこで2年か3年に1度、閏月を入れる必要がある。初めは閏月を入れる明確な決まりはなく、必要に応じて閏月が挿入されていた。

紀元前600年ころから、中国では二十四節気が使用された。気は15日間、その初めの日が太陽黄経が15°の整数倍になる日である。各気の期間の合計は360日で、1太陽年に約5.24日だけ足りない。そこで中国の暦法では、約70日に1日の割りあいだで没日と呼ばれる日を加え、各気の初めの日が太陽黄経が15°の整数倍になるようにしていた (Table 3)。

太陽黄経が30°の整数倍になる日は「中」、15°の奇数倍になる日は「節」と呼ばれる。「中」から次の「中」までは約30.4日、新月から次の新月までは約29.5日なので、1ヶ月の中に「中」がない月がある。その月を閏月とし、閏月のある年が閏年である。

二十四節気の日を決める方法には平気（または恒気）と定気と呼ばれる2つの方法がある。平気は天球上の太陽の動きを一定とするもので、したがって二十四節気

の日は1太陽年を24に等分して定められた。定気は1年間の太陽の動きの変化を考慮して太陽の視黄経から二十四節気の日を定める。藪内 (1969, p. 88) によると、中国では太陽の動きの変動が西暦550年ごろに張子信によって初めて認められ、隋王朝 (581–619) 以降の日食計算にそれが考慮されたが、定気による二十四節気の日付けが曆に取り入れられたのは清王朝 (1616–1912) になってからということである。

3 中国の時刻制度

この節では中国の各王朝の正史に現れる時刻制度について説明する。

「刻」という単位が中国の正史に最初に現れたのは漢書巻11, 26, 75である。漢書は後漢の西暦82年ごろに班固が編集したものである。巻26には、1日の刻数が一時的に100から120に変更されたことが書かれているが、それ以上の詳しい記述は漢書には見つけられない。

時間の単位に関する詳しい記述は後漢書に初めて現れる。宋書によると、魏が後漢の王座を奪った時に後漢の天文記録は呉のもとにあり、後に南朝の宋が所有したということである。次の正史である三国志は、西暦285年から297年にかけて陳壽が編集したものであるが、時刻制度に関する記述は見つけられない。ただ、元史の巻53に、三国時代に十二支が時刻を示すのに使用されたことが書かれている。

時間の単位については、後漢書の次に、晉書、宋書、隋書、舊唐書、宋史などに記述されていることが見出される。宋書までは、昼夜の長さが刻と分の単位で与えてあるが、日の出入り時刻については書かれていない。隋書で初めて日の出入り時刻が十二支を用いて与えられることになる。

3.1 後漢書

後漢書は西暦25年–220年の後漢について書かれたもので、西暦432年ごろに南朝の宋の范曄によって編集されたものである。

後漢書 志第三 律曆下 曆法 には昼夜の長ささと正午における長さ8尺のノーマン（周髀あるいは表と呼ばれる）の影の長さ、黄道去極（天の北極からの太陽の角距離）が二十四節気の日に対して掲載されている。Table 4 と Table 5 はそれらの記録と我々の計算値との比較を示している。Table 5 で示すように、これらの観測は首都である洛陽の近くの陽城（緯度 $34^{\circ}.43$ ）で行われたという証拠があるので、計算は西暦100年の陽城に対して行った。太陽の位置計算には米国 JPL の DE406 (Standish 1998) を使用した。

Table 4 は後漢書に書かれている昼夜の長さを示す。昼と夜の長さを加えれば100刻になることから、1刻は10分に等しいことがわかる。

昼の時間には日出前の旦2.5刻と日入後の昏2.5刻が含まれている。2.5刻は現在の単位でいうと36分になる。表の第4欄には昼の時間から5刻を引いて日出から日入までの時間を刻 (ke) の単位で示し、第5欄にはそれを現在の時間単位で示した。冬至と夏至の日出から日入までの時間の和が100刻になっていることから、日出や日入は大気差がないとしたときの太陽の中心が地平線に一致するときとしていると考えられるが、これが他の日にもあてはまるかどうかはわからないし、また、二十四節気の日付けが平気と定気のどちらで決定されているかもわからないので、大気差を考慮しない場合 (without ref.) と考慮した場合 (with ref.) の平気と定気で計算した日出から日入までの時間と後漢書の記録を比較し、差 (記録値 Rec から計算値 Cal を減じた値で、現在の分の単位で示したもの) を表の第7欄から第10欄に示した。第6欄に示した値は大気差を考慮しないで平気による日付けで計算した値である。ま

た、平気による日付は夏至の日付が定気による日付と一致するとして計算し、日出・日入の時刻としてはいずれの場合も太陽の中心が地平線に一致するときとした。

日出から日入までの時間が冬至や夏至に関して対称になっていないことは二十四節気の日付が平気で定められていることを示していると考えられる。特に、その時間がたとえば、小寒と大雪では小寒の方が長く、春分と秋分では春分の方が長いことなどが平気によるものであることと一致している。全体的に見ても、平気としたものの方が計算値との差が小さい。秋分から春分までは大気差を考慮しないで計算した値に近いが、春分から秋分までは大気差を考慮した場合の計算値に近いことがわかる。しかし、日出や日入の時刻の定め方が季節によって異なっていたとは考えにくいので、この事実は当時用いていた漏刻と呼ばれる時計に、夏の昼に速く進むというような季節による日変化があったということを示しているのかも知れない。

Table 5 は垂直に立てた長さ 8 尺の棒（ノーマン）の正午における影の長さや太陽の天の北極からの角距離を示す。中国の尺は 20 cm から 30 cm 程度の長さで、王朝によって変化していたといわれる（呉 1981）。Cal の欄に示したのは、西暦 100 年の陽城（緯度 34°.43）における値で、二十四節気の日付は平気によるものとし、DE406 を用いて計算した値である。

影の長さも太陽の天の北極からの距離も冬至や夏至に関して対称ではない。夏至の前後で夏至から同じように離れた日における値を比較すると夏至後の方が大きくなっている。これらの事実も二十四節気の日付は平気によって定められていることを示している。

h, d, δ をそれぞれ棒の長さ、影の長さ、太陽の赤緯とする。観測地の緯度 ϕ とそれらとの間には

$$\phi = \delta + \arctan(d/h) \quad (3.1)$$

の関係がある。棒の影の長さの測定精度は年間を通して等しいとし、 δ には理論値を使用して、平気を仮定して表に示してある d から最小二乗法で ϕ を求めると

$$\phi = 34^\circ.54 \pm 0^\circ.06 \quad (3.2)$$

となる。求められた緯度の値が首都の洛陽（緯度 34°.75）よりその近くの陽城（緯度 34°.43）の方に近いことから、Needham and Wang (1959) が議論しているように、漢時代の天文観測は陽城で行われたことを示していると思われる。およそ 0°.1 の差は太陽の視直径が約 0°.25 あることにより、影に本影と半影があることから、測定値に系統誤差が生じたためと考えられる。

Table 5 の第 6 欄に示してある角距離は中国の度単位である。中国の度は 365.25 度が 1 周にあたることから、第 7 欄に普通の度単位に換算して示した。また、度の小数は文字で示してあるが、それらの文字が実際にはいくつであったのかは必ずしも明らかではない。ここでは、次の値を採用して換算した（上田 1939）。

$$\begin{aligned} \text{弱} &= -1/8, \text{強} = 1/8, \text{少弱} = 3/16, \text{少} = 1/4, \\ \text{少強} &= 5/16, \text{半弱} = 3/8, \text{半} = 1/2, \text{半強} = 5/8, \\ \text{大弱} &= 11/16, \text{大} = 3/4, \text{大強} = 13/16. \end{aligned} \quad (3.3)$$

平気を仮定して残差 $\text{Rec} - \text{Cal}$ の平均を求めると $-1^\circ.09$ となり、影の長さから得られた緯度の差よりかなり大きい。この事実は太陽の天の北極からの角距離を測定する装置に系統誤差があったか、あるいは影の長さから太陽の高度を求めるための三角関数表にあたる換算表に誤差があったためと考えられる。

3.2 晉書

晉書は西暦 265 年から 420 年までの晉について書かれたもので、唐時代の西暦 648 年に房玄齡が編集したものである。

Table 6: 宋書の昼の時間と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	晝漏刻 Daytime	夜漏刻 Nighttime	Duration from Sunrise to Sunset (<i>ke</i>)		Rec	Cal	Rec - Cal (min)			
							without ref.		with ref.	
							平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>
冬至	45 刻	55 刻	40.0	9:36.0	9:40.3		-4.3	-4.3	-10.8	-10.8
小寒	45 刻 6 分	54 刻 4 分	40.6	9:44.6	9:47.3		-2.7	-1.5	-9.1	-7.9
大寒	46 刻 7 分	53 刻 3 分	41.7	10:00.5	10:05.1		-4.6	-1.8	-10.8	-8.1
立春	48 刻 4 分	51 刻 6 分	43.4	10:25.0	10:30.5		-5.5	-1.4	-11.5	-7.5
雨水	50 刻 5 分	49 刻 5 分	45.5	10:55.2	11:00.5		-5.3	-0.3	-11.1	-6.1
驚蟄	52 刻 9 分	47 刻 1 分	47.9	11:29.8	11:32.6		-2.8	+2.6	-8.5	-3.1
春分	55 刻 5 分	44 刻 5 分	50.5	12:07.2	12:05.3		+1.9	+7.2	-3.8	+1.5
清明	58 刻	42 刻	53.0	12:43.2	12:37.6		+5.6	+10.4	-0.1	+4.7
穀雨	60 刻 3 分	39 刻 7 分	55.3	13:16.3	13:08.4		+7.9	+11.8	+2.1	+5.9
立夏	62 刻 3 分	37 刻 7 分	57.3	13:45.1	13:36.2		+8.9	+11.5	+2.8	+5.5
小満	63 刻 9 分	36 刻 1 分	58.9	14:08.2	13:59.0		+9.2	+10.5	+2.9	+4.3
芒種	64 刻 8 分	35 刻 2 分	59.8	14:21.1	14:14.3		+6.8	+7.2	+0.3	+0.7
夏至	65 刻	35 刻	60.0	14:24.0	14:19.7		+4.3	+4.3	-2.2	-2.2
小暑	64 刻 8 分	35 刻 2 分	59.8	14:21.1	14:14.3		+6.8	+7.2	+0.4	+0.7
大暑	63 刻 9 分	36 刻 1 分	58.9	14:08.2	13:58.9		+9.3	+10.5	+3.1	+4.3
立秋	62 刻 3 分	37 刻 7 分	57.3	13:45.1	13:35.7		+9.4	+11.5	+3.3	+5.5
處暑	60 刻 3 分	39 刻 7 分	55.3	13:16.3	13:07.4		+8.9	+11.8	+3.0	+5.9
白露	58 刻	42 刻	53.0	12:43.2	12:36.0		+7.2	+10.4	+1.4	+4.7
秋分	55 刻 5 分	44 刻 5 分	50.5	12:07.2	12:03.1		+4.1	+7.2	-1.6	+1.5
寒露	52 刻 9 分	47 刻 1 分	47.9	11:29.8	11:29.9		-0.1	+2.6	-5.8	-3.1
霜降	50 刻 5 分	49 刻 5 分	45.5	10:55.2	10:57.4		-2.2	-0.3	-8.0	-6.1
立冬	48 刻 4 分	51 刻 6 分	43.4	10:25.0	10:27.3		-2.3	-1.4	-8.4	-7.5
小雪	46 刻 7 分	53 刻 3 分	41.7	10:00.5	10:02.4		-1.9	-1.8	-8.1	-8.1
大雪	45 刻 6 分	54 刻 4 分	40.6	9:44.6	9:45.7		-1.1	-1.5	-7.5	-7.9
冬至	45 刻	55 刻	40.0	9:36.0	9:40.3		-4.3	-4.3	-10.8	-10.8

昼夜の時間・影の長さ・天の北極からの太陽の角距離は晉書卷十八に書かれている。昼夜の長さや影の長さの数値は後漢書の値と全く同じである。天の北極からの太陽の角距離も度の小数を表す文字がいくつか異なっているものがある以外は同じであるが、それらの文字も同じ後漢書について四庫全書電子版と中華書局発行の書物で異なっているものがあることを考えると、後漢書と晉書で文字が異なっているのも、写し間違いと考えるのが自然である。したがって、晉書に掲載されている昼夜の長さ・影の長さ・天の北極からの太陽の角距離はすべて後漢書のデータを写したものであると結論することができる。

3.3 宋書

宋書は西暦 420 年から 479 年までの南朝の宋について書かれたもので、梁時代の西暦 487 年に沈約が編集したものである。

昼夜の長さや正午における影の長さは宋書 卷十三 志第三曆下 元嘉曆法に掲載されている。

Table 6 は宋書に与えられている昼夜の長さや計算値の比較である。計算は DE406

Table 7: 宋書の影の長さ と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	Shadow length 影		Rec – Cal	
	Rec	Cal	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>
	(C.ft)		(C.ft)	(C.ft)
冬至	13.	12.84	+0.16	+0.16
小寒	12.48	12.34	+0.14	+0.06
大寒	11.34	11.15	+0.19	+0.02
立春	9.91	9.61	+0.30	+0.06
雨水	8.22	8.04	+0.18	−0.06
驚蟄	6.72	6.57	+0.15	−0.09
春分	5.39	5.29	+0.10	−0.09
清明	4.25	4.19	+0.06	−0.09
穀雨	3.25	3.26	−0.01	−0.12
立夏	2.5	2.53	−0.03	−0.09
小滿	1.97	1.98	−0.01	−0.04
芒種	1.69	1.64	+0.05	+0.04
夏至	1.5	1.52	−0.02	−0.02
小暑	1.69	1.64	+0.05	+0.04
大暑	1.97	1.98	−0.01	−0.04
立秋	2.5	2.54	−0.04	−0.09
處暑	3.25	3.29	−0.04	−0.12
白露	4.25	4.24	+0.01	−0.09
秋分	5.39	5.37	+0.02	−0.09
寒露	6.72	6.69	+0.03	−0.09
霜降	8.28	8.19	+0.09	0.00
立冬	9.91	9.79	+0.12	+0.06
小雪	11.34	11.32	+0.02	+0.02
大雪	12.48	12.45	+0.03	+0.06
冬至	13.	12.84	+0.16	+0.16

Table 8: 附書の日出・日入の時刻.

24 氣	日出	日入	時間 ¹⁾	時間 ²⁾
冬至	辰 50 分	申 7 刻 30 分	40.0	40.14
小寒 大雪	辰 32 分	申 7 刻 48 分	40.6	40.48
大寒 小雪	卯 8 刻 19 分 ^{\$)}	酉 1 分	41.7	41.48
立春 立冬	卯 7 刻 28 分	酉 52 分	43.4	43.03
雨水 霜降	卯 6 刻 25 分	酉 1 刻 55 分	45.5	45.07
啓蛰 寒露	卯 5 刻 13 分 ^{#)}	酉 3 刻 7 分	47.9	47.45
春分 秋分	卯 3 刻 55 分	酉 4 刻 25 分	50.5	50.00
清明 白露	卯 2 刻 37 分	酉 5 刻 43 分	53.1 ^{*)}	52.55
穀雨 處暑	卯 1 刻 28 分	酉 6 刻 52 分	55.4 ^{*)}	54.93
立夏 立秋	卯 28 分	酉 7 刻 52 分	57.4 ^{*)}	56.97
小滿 大暑	寅 8 刻 3 分	戌 17 分	58.9	58.54
芒種 小暑	寅 7 刻 36 分	戌 44 分	59.8	59.62
夏至	寅 7 刻 30 分	戌 50 分	60.0	59.86

\$) これは「卯 8 刻 49 分」と書かれていたが、8 刻の分は 20 より小さいはずであるから、これは「卯 8 刻 19 分」の書き間違いと見なした。

#) Steele (2000) はこれを「卯 5 刻 30 分」と書き間違えている。

*) これらは中華書局発行の「宋書」とは異なっている。この論文の本文を参照のこと。

1) これはこの表の日出・日入の時刻から計算した値 (単位は刻) である。

2) これは Table 9 の夜半漏から計算した値 (単位は刻) である。

Table 9: 附書の昼の時間と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	夜半漏 Half-nighttime	Rec – Cal (min)					
		Duration from Sunrise to Sunset		without ref.		with ref.	
		Rec	Cal	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>
冬至	27 刻 43 分	9:38.0	9:40.5	–2.5	–2.5	–9.0	–9.0
小寒	27 刻 26 分	9:42.9	9:47.3	–4.4	–3.3	–10.8	–9.8
大寒	26 刻 76 分	9:57.3	10:04.9	–7.6	–5.2	–13.8	–11.4
立春	25 刻 98 分半	10:19.6	10:30.3	–10.7	–6.9	–16.7	–13.0
雨水	24 刻 96 分半	10:49.0	11:00.2	–11.2	–6.5	–17.0	–12.4
驚蟄	23 刻 77 分半	11:23.3	11:32.3	–9.0	–3.9	–14.7	–9.6
春分	22 刻 50 分	12:00.0	12:05.1	–5.1	0.0	–10.8	–5.7
清明	21 刻 22 分半	12:36.7	12:37.4	–0.7	+3.9	–6.4	–1.8
穀雨	20 刻 3 分半	13:11.0	13:08.2	+2.8	+6.5	–3.1	+0.7
立夏	19 刻 1 分半	13:40.4	13:36.0	+4.4	+6.9	–1.7	+0.9
小滿	18 刻 23 分	14:03.0	13:58.9	+4.1	+5.5	–2.2	–0.8
芒種	17 刻 69 分	14:18.5	14:14.1	+4.4	+4.7	–2.1	–1.7
夏至	17 刻 57 分	14:22.0	14:19.5	+2.5	+2.5	–4.0	–4.0
小暑	17 刻 69 分	14:18.5	14:14.1	+4.4	+4.7	–2.1	–1.7
大暑	18 刻 23 分	14:03.0	13:58.7	+4.3	+5.5	–2.0	–0.8
立秋	19 刻 1 分半	13:40.4	13:35.7	+4.7	+6.9	–1.4	+0.9
處暑	20 刻 3 分半	13:11.0	13:07.5	+3.5	+6.5	–2.3	+0.7
白露	21 刻 22 分半	12:36.7	12:36.2	+0.5	+3.9	–5.3	–1.8
秋分	22 刻 50 分	12:00.0	12:03.4	–3.4	0.0	–9.1	–5.7
寒露	23 刻 77 分半	11:23.3	11:30.3	–7.0	–3.9	–12.7	–9.6
霜降	24 刻 96 分半	10:49.0	10:57.9	–8.9	–6.5	–14.7	–12.4
立冬	25 刻 98 分半	10:19.6	10:27.9	–8.3	–6.9	–14.3	–13.0
小雪	26 刻 76 分	9:57.3	10:02.9	–5.6	–5.2	–11.8	–11.4
大雪	27 刻 26 分	9:42.9	9:46.1	–3.2	–3.3	–9.6	–9.8
冬至	27 刻 43 分	9:38.0	9:40.5	–2.5	–2.5	–9.0	–9.0

を使用し、西暦 400 年の陽城 (緯度 $34^{\circ}.43$) について行った。Table 4 で行ったのと同様に、大気差を考慮した場合としない場合のそれぞれについて、平気と定気による二十四節気について比較した。記録されている値と計算値との差は第 7 欄から第 10 欄に示してある。第 6 欄の時間は大気差を考慮せずに平気を仮定して計算した値である。後漢書のデータとは異なり、日出から日入までの時間は冬至や夏至に関して対称である (Fig. 1 参照)。この事実は二十四節気が定気によって定められていたことを意味するようと思われるが、さらに詳しく比較してみると、平気と考えた場合の方が合っていることがわかる。つまり、観測は平気で行われたのであるが、昼夜の時間は冬至や夏至に関して対称であるはずだという理論的な考察から、そのように表を作り変えたと思えるのである。実際、後漢書や晉書のデータと比較すると、冬至や夏至から等しく離れた日 (たとえば立冬と立春) の昼夜の時間は後漢書や晉書のそれらの日の昼夜の時間を平均して分の単位に丸めた値に一致しているのである。つまり、宋書のデータは後漢書または晉書のデータを改変したもので、新しい観測結果は含まれていないのである。したがって、このデータから当時の二十四節気の決定方法などを議論することはできないことがわかった。

Table 7 は垂直に立てた長さ 8 尺の棒 (ノーモン) の正午における影の長さを示す。Cal の欄に示したのは、西暦 400 年の陽城 (緯度 $34^{\circ}.43$) における値で、二十四節気の日付は平気によるものとし、DE406 を用いて計算した値である。影の長さも冬至や夏至に関して対称になっている (ただし、対称な日の雨水と霜降の値だけは異なっているが、これはいずれかの値を写し間違えたものであろう)。昼夜の時間とは異なり、影の長さは後漢書あるいは晉書の値を改変したものではないので、これは新しく観測された値であると考えられる。平気に基づいて計算した記録値 Rec と計算値 Cal との差 $\text{Rec} - \text{Cal}$ の値は定気に基づく値とは異なり、多くが正の値になっている。この事実から、二十四節気が平気に基づいていたとすると、観測地は陽城とは異なっていたと考えられる。実際、影の長さの測定値の精度が年間を通して一定だったとして、最小二乗法で観測地の緯度を求めると、平気を仮定した場合は

$$\phi = 34^{\circ}.71 \pm 0^{\circ}.05, \quad (3.4)$$

定気を仮定した場合は

$$\phi = 34^{\circ}.43 \pm 0^{\circ}.06 \quad (3.5)$$

となる。定気を仮定した場合は得られた緯度が正確に陽城の緯度と一致していることに注意してほしい。第 2 節に述べたように、中国で太陽の 1 年間の動きの変動が初めて認められたのは西暦 550 年ころであると考えられているが、もし、影の長さの観測が陽城でなされたものだとすると、当時、すでに太陽の 1 年間の動きに変動があることがわかっていて、二十四節気の日はそのことを考慮して定められていたと推論することができる。

宋の首都は建康 (緯度 $32^{\circ}.05$) であった。ここでは陽城 (緯度 $34^{\circ}.43$) や洛陽 (緯度 $34^{\circ}.75$) と比較すると昼夜の長さは現在の単位で最大 14 分の差があり、長さ 8 尺の棒の影の長さは冬至において 1.3 尺もの差がある。したがって、宋書のデータは建康における値ではなく、陽城か洛陽の値であることは明らかである。上で影の長さは新しく観測された値であることを述べたが、観測は陽城か洛陽で行われたか、あるいは建康で行った観測を、緯度差を考慮して陽城または洛陽での値に換算したものであると考えられる。

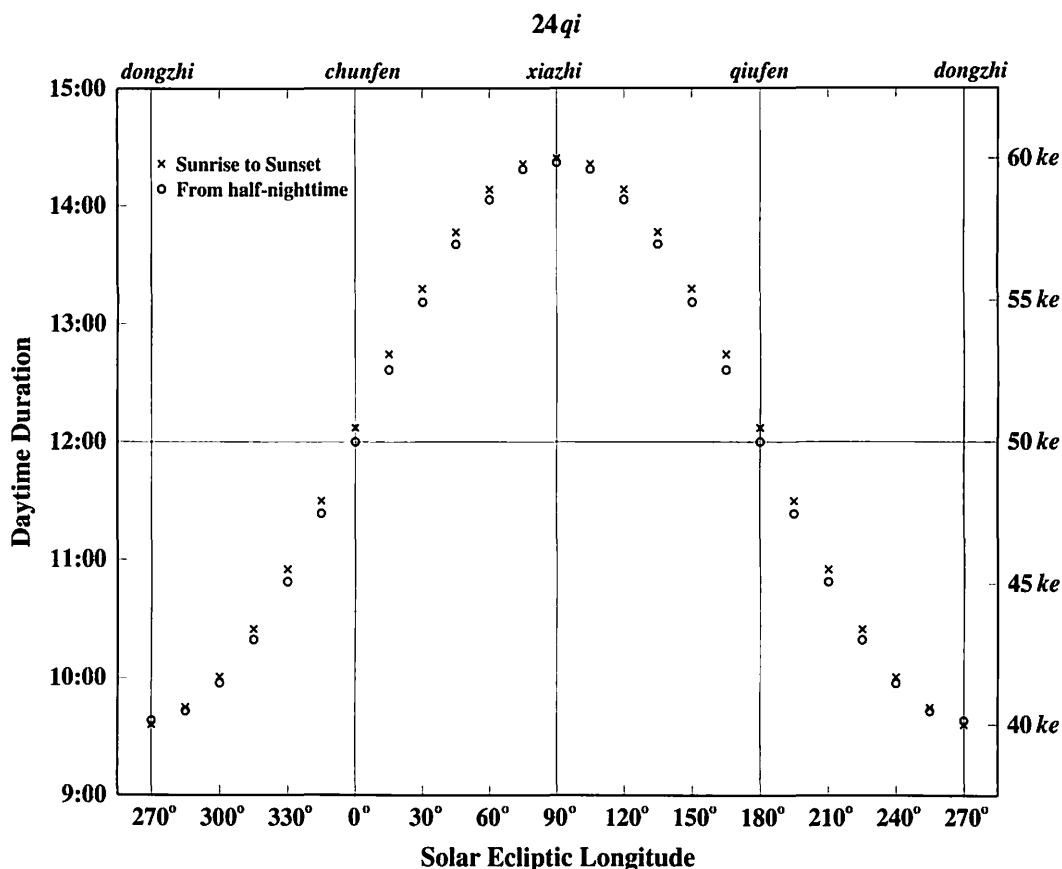


Figure 2 — 隋書の昼の時間. 日出・日入から計算される昼の時間 (×印) と夜半漏の値から計算される昼の時間 (○印) を示した. いずれも冬至や夏至に関して対称であるが, 後者には2つの例外を除いて, 春分や秋分から等しく離れた日の昼の長さの和が24時になるというもう一つの対称性がある.

3.4 隋書

隋書は西暦581年から619年までの隋について書かれたもので, 唐時代の西暦636年に魏徵らが編集したものである.

上に見てきたように, 後漢書から宋書までは1刻が10分であった. 隋書卷十九によると, 隋の時代には1刻が60分と100分の2つの時刻制度があったという.

隋書 卷十七 志第十二 律曆中 には二十四節気に対する日出・日入の時刻が Table 8 に示したように与えられている. これは1刻が60分になっている. 中華書局に指摘されている誤りは修正してある. また, 「雨水」と「啓蟄」の名前が入れ替わっていたのも修正した. 隋書 卷十八 志第十三 律曆下 には二十四節気に対する夜の時間の半分が Table 9 に示したように与えられている. ここでは1刻が100分になっている. Table 8 から次の事実がわかる.

1. 日出と日入は午の刻の中間の午4刻10分に関して対称である. このことは午の刻が現在の11時から13時までであることを意味している.
2. 1刻は60分, ただし最後の8刻は20分で, したがって各辰刻は500分になる.

3. 辰刻は0刻0分に始まり、8刻19分まで。各辰刻の8刻20分は次の辰刻の0刻0分になる。

表の第4欄には元の記録から計算した日出から日入までの時間を刻単位で示した。これらの値は中華書局が出版した宋書の値と比較して、星印で示した3個の値が0.1刻異なる以外はすべて一致しているが、異なる3個の値も四庫全書電子版の宋書と一致していることから、隋書の日出・日入の時刻は宋書の昼夜時間から計算したものであると結論することができる。

Table 9 は隋書卷十八にある夜の時間の半分を示したものである。後漢書から宋書までと同じく、夜の時間には旦と昏それぞれ2.5刻が除かれている。この値から日出から日入までの時間を求めて第3欄に示した。Table 8 の第4欄と第5欄に示したように、これらの値は隋書卷十七の日出・日入の時刻から計算される値とは一致しない。日出から日入までの時間を DE406 を用いて西暦 600 年での陽城 (緯度 34°.43) に対して計算した時間と比較した。Table 4 と Table 6 で行ったのと同じく、大気差を考慮した場合としない場合のそれぞれについて、平気と定気による二十四節気について比較した。記録されている値と計算値との差は第5欄から第8欄に示してある。第4欄の時間は大気差を考慮せずに平気を仮定して計算した値である。これらの比較から、記録にある時間は大気差を考慮しない場合に近いことがわかるが、二十四節気の日が平気と定気のどちらで定められているかははっきりしない。宋書のデータと同様、日出から日入までの時間は冬至や夏至に関して対称であるが、さらに春分と秋分に関するもう1つの対称性がある。それは春分や秋分から同じだけ離れた日（たとえば立春と立夏とか、白露と寒露というように）の昼の時間を加えると現在の単位で24時間になるというものである (Fig. 2 をも参照)。ただし、小寒と芒種、大寒と小満の2組だけはこれが当てはまらないが、これらはどちらかが書き間違いという可能性も考えられる。これらの事実から、Table 8 に示した隋書卷十七の日出・日入の時刻とは異なり、Table 9 に示した隋書卷十八にある夜の時間の半分は新しい観測に理論的な考察を加えて求められたものであると考えられる。

3.5 舊唐書

舊唐書は西暦 618 年から 907 年までの唐について書かれた正史の一つで、五代の晋の時代の西暦 945 年に編集されたものである。

舊唐書 卷三十二 曆一 には Table 10 に示したように、二十四節気に対する日出・日入の時刻と夜の時間の半分が示されている。隋書卷十八のデータと同じく、「雨水」と「啓蟄」の文字が入れ替わっていた。ここではそれを正してある。日出・日入の時刻は舊唐書卷三十二の pp. 1166-1167 と pp. 1169-1170 にある2つの異なった表に与えてある。前者は Steele (2000) が彼の Appendix で解析に用いたものであるが、行がいくつか抜けているというような多くの間違いがあるので、ここでは後者の表のデータを用いることにした。

表のデータから次の事実がわかる。

1. 隋書と同じく、日出と日入は午の刻の中間の午4刻10分に関して対称である。つまり、午の刻は現在の11時から13時までである。
2. 1刻は24分であるが、最後の刻は8分である。したがって、各辰刻は200分になる。
3. 各辰刻は0刻0分から始まり8刻7分に終わる。8刻8分は次の辰刻の0刻0分に対応する。

Table 10: 舊唐書のデータ.

24 氣	日出	日入	夜漏半	§
冬至	辰 20 分	申 7 刻 12 分	27 刻 12 分	
小寒同大雪	辰 13 分	申 7 刻 19 分	27 刻 5 分	
大寒同小雪	卯 8 刻 7 分	酉 1 分	26 刻 15 分	
立春同立冬	卯 7 刻 11 分	酉 21 分	25 刻 19 分 #)	
雨水同霜降	卯 6 刻 10 分	酉 1 刻 *)22 分	24 刻 18 分	
啓蟄同寒露	卯 5 刻 5 分	酉 3 刻 *)3 分	23 刻 13 分	
春分同秋分	卯 3 刻 22 分	酉 4 刻 10 分	22 刻 10 分	22 刻 6 分
清明同白露	卯 2 刻 15 分	酉 5 刻 17 分	20 刻 22 分 #)	20 刻 23 分
穀雨同處暑	卯 1 刻 11 分 *)	酉 6 刻 21 分	19 刻 19 分	
立夏同立秋	卯 12 分 *)	酉 7 刻 20 分 *)	18 刻	18 刻 20 分
小滿同大暑	寅 8 刻 1 分	戌 7 分	18 刻 1 分	
芒種同小暑	寅 7 刻 14 分	戌 18 分	17 刻 14 分	
夏至	寅 7 刻 12 分	戌 20 分	17 刻 12 分 #)	

*) この印の付いたデータは中華書局と四庫全書電子版で異なっている。四庫全書電子版の値の方が日出・日入の時刻が正午に対して対称になっているので、そちらを採用した。

#) この印の付いたデータも中華書局と四庫全書電子版で異なっている。ここでは中華書局の値を示したが、それが日出・日入の時刻から計算される値と異なる場合は、計算された値を § の欄に示した。

舊唐書の日出・日入の時刻は隋書卷十七の値と舊唐書の単位の 1 分 (1/24 刻) 以内で一致している。この 1 分は現在の単位では 0.6 分に等しい。記録にある日出・日入の時刻が実際の時刻とは現在の単位で数分以上の差があることを考慮すると、舊唐書の日出・日入の時刻は後漢書までさかのぼることができる隋書のデータをもとにしていることがわかる。舊唐書に与えられている夜の時間の半分は、夜に旦と昏のそれぞれ 2.5 刻を含めないことを考慮すると、3 個のデータを除いて、舊唐書の日出・日入の時刻から計算される値と一致する。その異なるデータの 3 個も書き間違いか計算違いだと考えられる。したがって、舊唐書のデータは隋書卷十八に与えられていた新しい観測を用いた夜の時間の半分のデータは無視していることがわかる。

なお、夜の半分の時間を隋書では「夜半漏」、舊唐書では「夜漏半」と書いてあったが、意味に違いはないと考えられる。

3.6 宋史

宋史は西暦 960 年から 1279 年までの宋について書かれたもので、元時代の西暦 1345 年に脱脱らが編集したものである。

宋史 卷七十 志第二十三 律曆三 には Table 11 に示したように、二十四節気に対する日出・日入の時刻と昼と夜の時間が示されている (正確にいうと卷七十では「日入」でなく「日没」の語が使われている。後に示す卷七十六では「日入」になっているが、両者に意味の違いはないと考えられる)。昼夜の時間は日出の 2 か所と日入の 1 か所を省いて日出・日入から計算される値に一致する。食い違いのある日出 2 か所と日入 1 か所は中華書局出版の二十四史に指摘してあるように誤植と考えられる。

Steele (2000) も彼の論文の Appendix B で、これらの日出・日入の時刻を与えているが、彼は「半」の文字を落としている。彼はまた、1 刻 = 150 分としているが、実際は 1 刻 = 147 分である。なお、宋史の表では刻の下の単位が書かれていないが、刻を分けた「分」が省略されているものと見なした。後漢書から舊唐書までは日出・

Table 11: 宋史卷七十のデータ.

24 氣	日出	日没	晝刻	夜刻
冬至	卯 4 刻 144 半	申 3 刻 51 半	40 刻 5	59 刻 142
小寒	卯 4 刻 119 半	申 3 刻 76 半	40 刻 55	59 刻 92
大寒	卯 4 刻 34 半	申 4 刻 14 半	41 刻 78	58 刻 69
立春	卯 3 刻 56 半	申 4 刻 139 半	43 刻 34	56 刻 113
雨水	卯 2 刻 58 半	申 5 刻 137 半	45 刻 30	54 刻 117
驚蟄	卯 1 刻 40 半	申 7 刻 8 半	47 刻 66	52 刻 81
春分	卯初 空	酉初 空	50 刻 空	50 刻 空
清明	寅 7 刻 8 半 *)	酉 1 刻 40 半	52 刻 81	47 刻 66
穀雨	寅 5 刻 127 半	酉 2 刻 68 半	54 刻 137	45 刻 10
立夏	寅 4 刻 119 半 *)	酉 3 刻 76 半	57 刻 6	42 刻 141
小滿	寅 3 刻 146 半	酉 4 刻 49 半	58 刻 99	41 刻 48
芒種	寅 3 刻 71 半	酉 4 刻 124 半	59 刻 102	40 刻 45
夏至	寅 3 刻 51 半	酉 4 刻 144 半	59 刻 142	40 刻 5
小暑	寅 3 刻 71 半	酉 4 刻 124 半	59 刻 102	40 刻 45
大暑	寅 3 刻 146 半	酉 4 刻 49 半	58 刻 99	41 刻 48
立秋	寅 4 刻 119 半	酉 3 刻 76 半	57 刻 6	42 刻 141
處暑	寅 5 刻 127 半	酉 2 刻 68 半	54 刻 137	45 刻 10
白露	寅 7 刻 8 半	酉 1 刻 40 半	52 刻 81	47 刻 66
秋分	卯初 空	酉初 空	50 刻 空	50 刻 空
寒露	卯 1 刻 40 半	申 7 刻 8 半	47 刻 66	52 刻 81
霜降	卯 2 刻 58 半	申 5 刻 137 半	45 刻 30	54 刻 117
立冬	卯 3 刻 56 半	申 4 刻 139 半 *)	43 刻 34	56 刻 113
小雪	卯 4 刻 34 半	申 4 刻 14 半	41 刻 78	58 刻 69
大雪	卯 4 刻 119 半	申 3 刻 76 半	40 刻 55	59 刻 92

*) 書き間違いを正してある.

Table 12: 宋史卷七十の昼の時間と計算値との比較.

		Rec – Cal (min)					
24 氣	Duration from		without ref.		with ref.		*
24 <i>qi</i>	Sunrise to	Sunset	平氣	定氣	平氣	定氣	
	Rec	Cal	<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>	<i>pingqi</i>	<i>dingqi</i>	
冬至	9:36.5	9:38.9	-2.4	-2.4	-8.9	-8.9	+2.5
小寒	9:41.4	9:45.4	-4.0	-3.3	-10.4	-9.8	+1.4
大寒	9:58.0	10:03.0	-5.0	-3.2	-11.2	-9.4	+1.0
立春	10:22.5	10:28.5	-6.0	-3.0	-12.1	-9.1	+0.3
雨水	10:50.9	10:58.8	-7.9	-3.9	-13.8	-9.8	-1.7
驚蟄	11:23.3	11:31.4	-8.1	-3.6	-13.8	-9.3	-2.4
春分	12:00.0	12:04.7	-4.7	0.0	-10.4	-5.7	0.0
清明	12:36.7	12:37.5	-0.8	+3.6	-6.6	-2.2	+2.4
穀雨	13:11.0	13:08.8	+2.2	+5.8	-3.7	-0.1	+3.6
立夏	13:41.4	13:37.0	+4.4	+6.9	-1.7	+0.8	+3.6
小滿	14:04.9	14:00.2	+4.7	+6.1	-1.6	-0.2	+1.9
芒種	14:19.6	14:15.6	+4.0	+4.3	-2.5	-2.1	-0.4
夏至	14:23.5	14:21.1	+2.4	+2.4	-4.2	-4.2	-2.5
小暑	14:19.6	14:15.6	+4.0	+4.3	-2.5	-2.1	-0.4
大暑	14:04.9	14:00.1	+4.8	+6.1	-1.6	-0.2	+1.9
立秋	13:41.4	13:36.9	+4.5	+6.9	-1.6	+0.8	+3.6
處暑	13:11.0	13:08.5	+2.5	+5.8	-3.4	-0.1	+3.6
白露	12:36.7	12:37.0	-0.3	+3.6	-6.1	-2.2	+2.4
秋分	12:00.0	12:04.0	-4.0	0.0	-9.7	-5.7	0.0
寒露	11:23.3	11:30.6	-7.3	-3.6	-13.1	-9.3	-2.4
霜降	10:50.9	10:57.9	-7.0	-3.9	-12.9	-9.8	-1.7
立冬	10:22.5	10:27.6	-5.1	-3.0	-11.2	-9.1	+0.3
小雪	9:58.0	10:02.2	-4.2	-3.2	-10.4	-9.4	+1.0
大雪	9:41.4	9:44.9	-3.5	-3.3	-10.0	-9.8	+1.4
冬至	9:36.5	9:38.9	-2.4	-2.4	-8.9	-8.9	+2.5

* この欄には定気を仮定して大気差なしで求めた緯度の値を用いて計算される残差を示した.

Table 13: 宋史卷七十六のデータ.

24 氣	日出	日入	晝	夜
冬至	卯正 5 刻分空	申正 3 刻 20 分	40 刻分空	60 刻分空
小寒	卯正 4 刻 50 分	申正 3 刻 30 分	40 刻 19 分	59 刻 41 分 #)
大寒	卯正 4 刻 20 分	申正 4 刻分空	41 刻 19 分	58 刻 41 分 #)
立春	卯正 3 刻 32 分 *)	申正 4 刻 48 分	42 刻 54 分	57 刻 6 分 \$)
雨水	卯正 2 刻 30 分	申正 5 刻 50 分	44 刻 58 分	55 刻 2 分 *) \$)
驚蟄	卯正 1 刻 17 分	申正 7 刻 3 分	47 刻 24 分	52 刻 36 分 \$)
春分	卯正初刻分空	酉正初刻分空	50 刻分空	50 刻分空
清明	寅正 7 刻 3 分	酉正 1 刻 17 分	52 刻 35 分	47 刻 25 分 †)
穀雨	寅正 5 刻 50 分	酉正 2 刻 30 分 *)	55 刻 3 分	44 刻 57 分 \$)
立夏	寅正 4 刻 48 分	酉正 3 刻 32 分	57 刻 5 分	42 刻 55 分 †)
小滿	寅正 4 刻分空	酉正 4 刻 20 分	58 刻 40 分	41 刻 20 分
芒種	寅正 3 刻 30 分	酉正 4 刻 50 分	59 刻 40 分	40 刻 20 分
夏至	寅正 3 刻 20 分	酉正 5 刻分空	60 刻分	40 刻分空
小暑	寅正 3 刻 30 分	酉正 4 刻 50 分	59 刻 40 分	40 刻 20 分
大暑	寅正 4 刻分空	酉正 4 刻 20 分	58 刻 40 分	41 刻 20 分
立秋	寅正 4 刻 48 分 *)	酉正 3 刻 32 分 *)	57 刻 5 分	42 刻 55 分 †)
處暑	寅正 5 刻 50 分	酉正 2 刻 30 分	55 刻 3 分	44 刻 57 分 \$)
白露	寅正 7 刻 3 分	酉正 1 刻 17 分	52 刻 35 分	47 刻 25 分 †)
秋分	卯正初刻分空	酉正初刻分空	50 刻分空	50 刻分空
寒露	卯正 1 刻 17 分	申正 7 刻 3 分	47 刻 24 分	52 刻 36 分 \$)
霜降	卯正 2 刻 30 分	申正 5 刻 50 分	44 刻 58 分	55 刻 2 分 \$)
立冬	卯正 3 刻 32 分	申正 4 刻 48 分	42 刻 54 分	57 刻 6 分 \$)
小雪	卯正 4 刻 20 分	申正 4 刻分空	41 刻 19 分	58 刻 41 分 #)
大雪	卯正 4 刻 50 分	申正 3 刻 30 分	40 刻 19 分	59 刻 41 分 *) #)

*) 中華書局の書物に示してあるように書き間違いがある. ここではそれらを正してある.

#) 昼の時間には +1 分, 夜の時間には -1 分の補正が必要.

\$) 昼の時間には +2 分, 夜の時間には -2 分の補正が必要.

†) 昼の時間には -1 分, 夜の時間には +1 分の補正が必要.

§) 昼の時間には -3 分, 夜の時間には +3 分の補正が必要.

Table 14: 宋史卷七十六の昼の時間と計算値との比較.

24 氣 24 <i>qi</i>	Duration from Sunrise to Sunset		Rec – Cal (min)			
			without ref.		with ref.	
	Rec	Cal	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>	平氣 <i>pingqi</i>	定氣 <i>dingqi</i>
冬至	9:36.0	9:38.9	–2.9	–2.9	–9.4	–9.4
小寒	9:40.8	9:45.4	–4.6	–3.9	–11.0	–10.4
大寒	9:55.2	10:03.0	–7.8	–6.0	–14.0	–12.2
立春	10:18.2	10:28.5	–10.3	–7.3	–16.4	–13.4
雨水	10:48.0	10:58.8	–10.8	–6.8	–16.7	–12.7
驚蟄	11:23.0	11:31.4	–8.4	–3.8	–14.1	–9.6
春分	12:00.0	12:04.7	–4.7	0.0	–10.4	–5.7
清明	12:37.0	12:37.5	–0.5	+3.8	–6.3	–1.9
穀雨	13:12.0	13:08.8	+3.2	+6.8	–2.7	+0.9
立夏	13:41.8	13:37.0	+4.8	+7.3	–1.3	+1.2
小滿	14:04.8	14:00.2	+4.6	+6.0	–1.7	–0.3
芒種	14:19.2	14:15.6	+3.6	+3.9	–2.9	–2.5
夏至	14:24.0	14:21.1	+2.9	+2.9	–3.7	–3.7
小暑	14:19.2	14:15.6	+3.6	+3.9	–2.9	–2.5
大暑	14:04.8	14:00.1	+4.7	+6.0	–1.7	–0.3
立秋	13:41.8	13:36.9	+4.9	+7.3	–1.2	+1.2
處暑	13:12.0	13:08.5	+3.5	+6.8	–2.4	+0.9
白露	12:37.0	12:37.0	0.0	+3.8	–5.8	–1.9
秋分	12:00.0	12:04.0	–4.0	0.0	–9.7	–5.7
寒露	11:23.0	11:30.6	–7.6	–3.8	–13.4	–9.6
霜降	10:48.0	10:57.9	–9.9	–6.8	–15.8	–12.7
立冬	10:18.2	10:27.6	–9.4	–7.3	–15.5	–13.4
小雪	9:55.2	10:02.2	–7.0	–6.0	–13.2	–12.2
大雪	9:40.8	9:44.9	–4.1	–3.9	–10.6	–10.4
冬至	9:36.0	9:38.9	–2.9	–2.9	–9.4	–9.4

日入の中間は午の真中であったが、宋史ではそれが午の初めに变化している。したがって、たとえば、子の刻はこれまで地方時の23時から1時までであったが、宋史では地方時の0時から2時までになる。

宋史で用いられている時刻制度についてまとめると次のようになる。

1. 日出・日入の時刻は午0刻0分に関して対称である。
2. 1刻は147分に等しい。ただし、各辰刻最後の8刻は49分であり、したがって、辰刻は1225分に等しい。
3. 辰刻は0刻0分から8刻48分までである。8刻49分に当たる時刻が次の辰刻の0刻0分になる。
4. 子の刻は地方時の真夜中の0時から始まる。
5. 昼間は日出から日入までである。昼・夜の時間は冬至や夏至の日に関して対称である。

Table 12 に宋史卷七十にある昼の時間と DE406 による計算値との比較を示す。計算は西暦 1000 年、宋の首都 Bian (緯度 34.78 度) に対して行った (Bian の漢字はさんずいに卞)。Tables 4, 6, 9 と同じく、大気差を含まない場合の平気と定気、大気差を含む場合の平気と定気の 4 通りについて比較し、表の第 4～7 欄に示した。第 3 欄に示した昼の時間は大気差なしの平気で計算したものである。昼・夜の時間が冬至や夏至に関して対称であることは 24 節気が定気に基づいていることを示していると考えられるし、春分や秋分に関して対称な日の昼の長さを加えると 24 時間になるという事実は、日出や日入が大気差なしで定義されていることを示している。計算値との比較でも大気差なしの定気との差がもっとも小さいが、夏に正で冬に負という系統差があることから、観測地は Bian よりもっと北にあった可能性がある。そこで、西暦 1000 年における理論的な黄道傾斜角 23.569 度 (Williams 1994 の公式による) を用い、また、24 節気の日付は定気により、昼の時間は大気差なしで定めたととして、記録にある昼の時間から観測地の緯度 ϕ を最小二乗法によって求めると、結果は

$$\phi = 35^{\circ}.68 \pm 0^{\circ}.17, \quad (3.6)$$

となった (もし、緯度 ϕ と黄道傾斜角 ϵ の両方を求めると $\epsilon = 10^{\circ}$, $\phi = 60^{\circ}$ というありえない結果が得られる)。この緯度を採用した場合の昼の時間の残差を表の星印の欄に示した。残差にはまだ系統差が見られる (残差の和は正であるが、この事実は緯度にどのような値を採用しても変化しない)。したがって、Bian の緯度を採用した場合の残差は当時の時計の季節変化か、昼の時間を求める当時の理論に何か誤りがあったためと考えられる。

宋史 卷七十六 志第二十九 律曆九 には、Table 13 に示したように、24 節気に対する日出・日入の時刻と昼と夜の時間が与えてある。この表では 1 刻が 147 分ではなく 60 分になっており、したがって、辰刻は 500 分である。次の事実は Table 11 と同じである：

1. 子の刻は地方時 0 時に始まる。
2. 日出・日入の時刻は午 0 刻 0 分に関して対称である。
3. 昼は日出から日入までである。

隋書 卷十八 志第十三 律曆下 と同じように、日出・日入の時刻には 2 種類の対称性が見られる。1 つは昼の時間が冬至や夏至に関して対称になっているということ、

もう1つは春分や秋分から等しく離れた日（立春と立夏，白露と寒露というように）の昼の時間の和が24時間になっているということである。これは，大気差なしの定気による場合に成立するものである。

表に示してあるように，記録にある昼夜の時間は同じく記録にある日出・日入の時刻から計算される値に必ずしも一致しない。差の最大は当時の単位で3分，今の単位に換算すると約0.7分である。

宋史卷七十六にある日出・日入の時刻から計算される昼の長さをDE406を用いて計算した西暦1000年のBian（緯度34.78度）における昼の長さと比較した。結果はTable 14に示してある。差は，立春や立冬の近くでやや大きい，傾向はTable 12の場合とほぼ同様である。

3.7 中国正史における観測地の緯度

以上に見てきたように，中国正史には昼・夜の時間，日出・日入の時刻，周髀と呼ばれる棒の長さの年間を通した変化が掲載されている。これらのデータから，我々は，これらが観測された場所がすべて緯度34.5度付近に位置することを見出した。この事実は，王朝にかかわらず，洛陽の近くにある陽城を基準点としていたことを暗示している。この付近では，日出・日入から定義される昼の時間と夜の時間の比が，冬至の日に2:3，夏至の日に3:2という簡単な整数比になり，中国では有史以来，その場所を「地中」とよんでいた。この事実は，中国では冬至と夏至における昼夜の比が簡単な整数比になる特定の緯度の地点を基準点に選んだということを意味しているように思われる。次節に見るように，日本でもこの中国の伝統が受け継がれているのである。

4 日本の時刻制度

この節では，具注暦と延喜式に現れる日出・日入の時刻と古代・中世の日本に記録されている日月食の時刻を解析して，当時どのような時刻制度が使われていたのかを議論する。

4.1 具注暦にみられる時刻制度

平山 (1913a,b) は古代・中世の日本における時刻制度に関する論文を2編に分けて書いている。その内の初めの論文で，奈良・平安時代に流行した暦本である具注暦と，律令の施行細則を記した延喜式の双方に現れる日出・日入時刻や昼夜の時間を解析している。

具注暦は中務省陰陽寮が前年の11月に作成して各国の国司等に配布した暦本で，日ごとに2～3行の空白を設けて日記を記すことができたようにしたものもあった。現存する最古の具注暦は現在，奈良の正倉院にある，天平18年（西暦746年）のものとなっていたが，2003年に奈良文化財研究所が持統天皇3年（西暦689年）のものになる具注暦の最古のものが飛鳥で発見されたと発表した。しかし，これらの古い具注暦には日出・日入の時刻や昼夜の時間のデータが含まれていない。

具注暦に日出・日入の時刻や昼夜の時間のデータが掲載されるようになるのは，日本で宣明暦が公式に採用された西暦862年以後のことである。Table 15は具注暦に書かれている日出・日入の時刻と昼夜の時間のデータをまとめたもので，橋本 (1966) に基づいている。具注暦には日月食の予報時刻も書かれており，その多くは宣明暦の時刻制度に基づいている（第4.4節を参照）が，日出・日入の時刻は明らかにそれとは異なる時刻制度に基づいている。

Table 15: 具注暦の日出・日入の時刻. 1 番目と 3 番目の欄が日付, 2 番目と 4 番目の欄が冬至と夏至からの経過日数で, 平山が与えているものに同じ. この日数には没日が省かれているので, 1 年の日数は 360 日になる. 5 番目と 6 番目の欄は具注暦にある日出と日入の時刻で, 7 番目と 8 番目の欄はそれを現在の時刻に換算したものである. 9 番目の欄は 5 番目と 6 番目の欄の時刻から計算した昼間の時間 (日出から日入まで) で, 刻の 2 番目の定義の単位で示した. 10 番目と 11 番目の欄は具注暦に書かれている昼と夜の時間で, 刻の 2 番目の定義で示されている.

(1) 日付	(2) 日	(3) 日付	(4) 日	(5) 日出	(6) 日入	(7) 日出 h	(8) 日入 h	(9) 昼 ke	(10) 昼 ke	(11) 夜 ke
11 月節 13 日	-3		177	辰 0 刻 [§] 3 分	申 3 刻 4 分	7.24	16.76	39.67	40	60
12 月節 1 日	15	11 月節 1 日	165	辰 0 刻 [§] 2 分	申 3 刻 5 分	7.16	16.84	40.33	41	59
12 月節 13 日	27	10 月節 21 日	155	辰 0 刻 [§] 1 分	申 4 刻	7.08	16.92	41.00	42	58
12 月節 23 日	37	10 月節 13 日	147	卯 4 刻 1 分	酉 0 刻 [§] 1 分	7.00	17.08	42.00	43	57
1 月節 1 日	45	10 月節 5 日	139	卯 3 刻 5 分	酉 0 刻 [§] 2 分	6.84	17.16	43.00	44	56
1 月節 9 日	53	9 月節 27 日	131	卯 3 刻 4 分	酉 0 刻 [§] 3 分	6.76	17.24	43.67	45	55
1 月節 17 日	61	9 月節 19 日	123	卯 3 刻 2 分	酉 0 刻 [§] 5 分	6.60	17.40	45.00	46	54
1 月節 25 日	69	9 月節 11 日	115	卯 3 刻	酉 1 刻 1 分	6.44	17.56	46.33	47	53
2 月節 3 日	77	9 月節 3 日	107	卯 2 刻 4 分	酉 1 刻 3 分	6.28	17.72	47.67	48	52
2 月節 11 日	85	8 月節 25 日	99	卯 2 刻 2 分	酉 1 刻 5 分	6.12	17.88	49.00	49	51
2 月節 18 日	92	8 月節 18 日	92	卯時正 [*]	酉時正 [*]	6.00	18.00	50.00	50	50
2 月節 25 日	99	8 月節 11 日	85	卯 1 刻 5 分	酉 2 刻 2 分	5.88	18.12	51.00	51	49
3 月節 3 日	107	8 月節 3 日	77	卯 1 刻 3 分	酉 2 刻 4 分	5.72	18.28	52.33	52	48
3 月節 11 日	115	7 月節 25 日	69	卯 1 刻 1 分	酉 3 刻	5.56	18.44	53.67	53	47
3 月節 19 日	123	7 月節 17 日	61	卯 0 刻 [§] 5 分	酉 3 刻 2 分	5.40	18.60	55.00	54	46
3 月節 27 日	131	7 月節 9 日	53	卯 0 刻 [§] 3 分	酉 3 刻 4 分	5.24	18.76	56.33	55	45
4 月節 5 日	139	7 月節 1 日	45	卯 0 刻 [§] 2 分	酉 3 刻 5 分	5.16	18.84	57.00	56	44
4 月節 13 日	147	6 月節 23 日	37	卯 0 刻 [§] 1 分	酉 4 刻 1 分	5.08	19.00	58.00	57	43
4 月節 21 日	155	6 月節 13 日	27	寅 4 刻	戌 0 刻 [§] 1 分	4.92	19.08	59.00	58	42
5 月節 1 日	165	6 月節 1 日	15	寅 3 刻 5 分	戌 0 刻 [§] 2 分	4.84	19.16	59.67	59	41
5 月節 13 日	177		-3	寅 3 刻 4 分	戌 0 刻 [§] 3 分	4.76	19.24	60.33	60	40

*) “正” は中央を意味し, したがって 2 刻 0.5 分に当たる.

§) “0 刻” は実際には “初刻” と書かれている.

平山 (1913a) と橋本 (1966) はいずれも具注暦にある日出・日入の時刻の表を与えているが、最初と最後の日 (5 月節 13 日と 11 月節 13 日) はそれぞれ 0.5 分と 1 分の差がある。橋本のデータの方が日出・日入の時刻が正午に対して対称になっているので、ここでは橋本のデータを採用した。他の日の日出・日入の時刻はほとんど正午 (午 2 刻 0.5 分) に関して対称になっているが、37 日と 147 日 (12 月節 23 日, 4 月節 13 日, 6 月節 23 日, 10 月節 13 日) は例外で、これらは日出と日入の中間が正午から 0.5 分異なっている。これは具注暦における計算違いか書き間違いの可能性が考えられる。

平山 (1913a) は、この表に与えてある日がすべて、後に述べる延喜式の与える表の期間の最初の日に一致していることから、この表の日は期間の初めの日を与えている可能性があるとして指摘している (たとえば、最初の行は 11 月節 13 日のデータとなっているが、これは 11 月節 13 日から 11 月節 30 日までのデータを意味すると考えられるということである)。我々はこの推論を次の事実から真実であると考ええる。

表の日出・日入の時刻には次の対称性が存在する。すなわち、日出から日入までの昼の時間とそれ以外の夜の時間は、中央の行から上下に等しく離れた日については逆転しているが、日付のほうは中央の行に関して対称になっていない。たとえば、最初の行の日付は中央の行の日付の 95 日前なのに対して、最後の行は中央の日付の 85 日後である。しかしながら、表に与えてある日付が期間の最初の日を与えていると仮定すると、その期間の中央の日付は中央の日付に対して対称になるのである。したがって、表に示してある日付は、延喜式に与えてある表と同じく、表の各行のデータが使用できる期間の初めの日を示していると結論できる。

この表から、具注暦に示してある日出・日入の時刻を与える時刻制度について、次の事実を知ることができる。

1. 子の刻の中央が真夜中 (地方時の 0 時) で、子の刻は地方時の 23 時から 1 時までである。これは中国の舊唐書までの時刻制度と同じである。
2. 昼間は日出から日入までである。第 3 節に書いたように、中国では舊唐書まで、昼間には日出前の旦 2.5 刻と日入後の昏 2.5 刻を含んでいた。したがって、具注暦の昼間については、日本独自の制度であると考えられる。
3. 1 刻は 6 分に等しく、辰刻は 4 刻 1 分、すなわち 25 分に等しい。したがって、1 日は 50 刻になる。
4. 刻は 0 分に始まる。各辰刻の 4 刻 1 分は次の辰刻の 0 刻 0 分に当たる。しかし、橋本 (1966) も指摘するように、4 刻 1 分という表現も日出・日入の表に現れている。これは、次の辰刻の 0 刻 0 分と読み替えるべきである。そうしないと、日出・日入の中間が午の刻の中央と一致しなくなってしまうからである。

具注暦には、Table 15 の 10 番目と 11 番目の欄に示すように、昼と夜の時間も同じ「刻」という文字で与えてあるが、この場合の 1 刻は 1 日の 100 分の 1 である。しかし、この値は、日出・日入の時刻から計算される時間 (表の 9 番目の欄) と正確には一致しない。したがって、この値は昼と夜の時間の目安を与えているのに過ぎないと考えられるべきであろう。

4.2 延喜式にみられる時刻制度

延喜式の編集は西暦 905 年 (延喜 5 年) に始まり、西暦 927 年 (延長 5 年) にはほぼ終わった。施行は西暦 967 年 (康保 4 年) である。同様の規則の編集は西暦 701 年から 824 年までの弘仁式と西暦 824 年から 877 年までの貞観式があった。延喜式は大宝年間 (701 年 703 年) から延喜年間 (901 年 922 年) までの律令の施行細則を記し

Table 16: 延喜式の日出・日入の時刻. 1 番目, 2 番目, 4 番目, 5 番目の欄は期間を, 3 番目と 6 番目はその期間の初めの日の太陽の視黄経 L を示す. 7 番目と 8 番目の欄は延喜式にある日出・日入の時刻, 9 番目と 10 番目の欄はそれらを現在の時刻に換算したものである.

(1) 起	(2) 至	(3) L	(4) 起	(5) 至	(6) L	(7) 日出	(8) 日入	(9) 日出 h	(10) 日入 h
大雪 13 日	冬至 15 日	267				辰 1 刻 2 分 ^{*)}	申 4 刻 6 分	7.15	16.80
小寒 1	小寒 12	285	大雪 1	大雪 12	255	辰 1 刻 1 分	申 4 刻 7 分	7.05	16.85
小寒 13	大寒 7	297	小雪 6	小雪 15	245	卯 4 刻終 ^{§)}	酉 1 刻 1 分	7.00	17.05
大寒 8	大寒 15	307	立冬 13	小雪 5	237	卯 4 刻 7 分	酉 1 刻 2 分	6.85	17.10
立春 1	立春 8	315	立冬 5	立冬 12	229	卯 4 刻 5 分	酉 1 刻 5 分	6.75	17.25
立春 9	雨水 1	323	霜降 12	立冬 4	221	卯 4 刻 2 分	酉 1 刻 7 分	6.60	17.35
雨水 2	雨水 9	331	霜降 4	霜降 11	213	卯 4 刻	酉 2 刻 1 分	6.50	17.55
雨水 10	驚蟄 2	339	寒露 11	霜降 3	205	卯 3 刻 7 分	酉 2 刻 2 分	6.35	17.60
驚蟄 3	驚蟄 10	345	寒露 3	寒露 10	197	卯 3 刻 5 分	酉 2 刻 5 分	6.25	17.75
驚蟄 11	春分 2	355	秋分 10	寒露 2	189	卯 3 刻 2 分	酉 2 刻 7 分	6.10	17.85
春分 3	春分 9	2	秋分 3	秋分 9	182	卯 3 刻	酉 3 刻	6.00	18.00
春分 10	清明 2	9	白露 11	秋分 2	175	卯 2 刻 7 分	酉 3 刻 2 分	5.85	18.10
清明 3	清明 10	17	白露 3	白露 10	167	卯 2 刻 5 分	酉 3 刻 5 分	5.75	18.25
清明 11	穀雨 3	25	処暑 10	白露 2	159	卯 2 刻 2 分	酉 3 刻 7 分	5.60	18.35
穀雨 4	穀雨 11	33	処暑 2	処暑 9	151	卯 2 刻 1 分	酉 4 刻	5.55	18.50
穀雨 12	立夏 4	41	立秋 9	処暑 1	143	卯 1 刻 7 分	酉 4 刻 2 分	5.35	18.60
立夏 5	立夏 12	49	立秋 1	立秋 8	135	卯 1 刻 5 分	酉 4 刻 5 分	5.25	18.75
立夏 13	小滿 5	57	大暑 8	大暑 15	127	卯 1 刻 2 分	酉 4 刻 7 分	5.10	18.85
小滿 6	小滿 15	65	小暑 13	大暑 7	117	卯 1 刻 1 分	酉 4 刻終 ^{§)}	5.05	19.00
芒種 1	芒種 12	75	小暑 1	小暑 12	105	寅 4 刻 7 分	戌 1 刻 1 分	4.85	19.05
芒種 13	夏至 15	87				寅 4 刻 6 分	戌 1 刻 2 分	4.80	19.10

* 平山 (1913a) はこれを“辰 1 刻 3 分”としているが, 橋本 (1966) の与える時刻の方が対称性がある (刻と分の数は日出の時刻を上から順に見たものが日入の時刻を下から順に見たものに等しい) ことから, 橋本のデータを採用した.

§) “終”は刻の最後の 9 分に等しいとみなした.

たもので, 陰陽寮の規定には, 日出・日入の時刻や宮門開閉の時刻が詳細に記されている. 陰陽寮は暦や占いや時刻に関する一切の事を司っていた役所である. 延喜式における日出入時刻や各門の開閉時刻はたとえば次のように記されている.

起大雪 13 日至冬至 15 日 日出辰 1 刻 3 分日入申 4 刻 6 分

卯 4 刻 6 分開諸門鼓

辰 2 刻 7 分開大門鼓

午 1 刻 6 分退朝鼓

酉 1 刻 2 分閉門鼓

起小寒 1 日至 12 日 日出辰 1 刻 1 分日入申 4 刻 7 分

卯 4 刻 5 分開諸門鼓

辰 2 刻 6 分開大門鼓

午 1 刻 5 分退朝鼓

酉 1 刻 3 分閉門鼓

.....

太鼓や鐘を打つ回数については, 延喜式に「諸時撃鼓」という見出しで次のように記してある (平山 1913a).

子午各九下。丑未八下。寅申七下。卯酉六下。辰戌五下。巳亥四下。並平声。鐘依刻数。

Table 17: 具注暦と延喜式の昼間の時間と DE406 による計算値との比較.

L	計算値	具注暦	差	延喜式	差
270°	9:38	9:31	-7	9:42	+4
285° 255°	9:44	9:41	-3	9:48	+4
296° 244°	9:55	9:50	-5	10:03	+8
305° 235°	10:08	10:05	-3	10:15	+7
313° 227°	10:22	10:19	-3	10:30	+8
321° 219°	10:37	10:29	-8	10:45	+8
329° 211°	10:52	10:48	-4	11:03	+11
337° 203°	11:10	11:07	-3	11:15	+5
345° 195°	11:27	11:26	-1	11:30	+3
353° 187°	11:44	11:46	+2	11:45	+1
0° 180°	12:00	12:00	0	12:00	0
7° 173°	12:16	12:14	-2	12:15	-1
15° 165°	12:33	12:34	+1	12:30	-3
23° 157°	12:50	12:53	+3	12:45	-5
31° 149°	13:08	13:12	+4	12:57	-11
39° 141°	13:23	13:31	+8	13:15	-8
47° 133°	13:38	13:41	+3	13:30	-8
55° 125°	13:52	13:55	+3	13:45	-7
64° 116°	14:05	14:10	+5	13:57	-8
75° 105°	14:16	14:19	+3	14:12	-4
90°	14:22	14:29	+7	14:18	-4

L は太陽の視黄経.

計算値は西暦 1000 年の京都 (緯度 35.02 度) に対する値.

つまり、子および午の刻から 9, 8, 7, 6, 5, 4 の順で辰刻毎に太鼓を打ち、また各辰刻の間には 1, 2, 3, 4 という刻の数だけ鐘を鳴らしたのである。

Table 16 は延喜式に与えてある日出・日入の時刻をまとめたものである。平山 (1913a) はこれらの時刻を解析して次の結論を得た。日出入を与えている日付は具注暦に共通であるから、具注暦と延喜式のデータは独立なものではないが、いずれが先にできたものかは不明である。延喜式の各辰刻は 0 刻がなく、1 刻から始まる。門開閉の時刻に「9 分」までであることから、1 刻は 9 分以上になるが、日出入時刻の差を見ると 9 分が最大で、1 刻は 0 分から 9 分までであると考えられる。1 日は 48 刻に分けられ、各辰刻は 1 刻から 4 刻までの 4 刻に、刻は 0 分から 9 分までの 10 分に分けられていたことになる。

平山も橋本も述べているように、日出・日入の間は午 2 刻 9.0 分から午 3 刻 0.5 分までの間にわたり、正午である午 3 刻 0 分から最大 1 分 (現在の単位で 3 分) の差がある。その理由は不明である。

4.3 計算値との比較

具注暦も延喜式もその日出・日入の時刻から求められる昼間の時間は、中央の行に関して反転している。また、春分・秋分の日の昼間の時間はちょうど 12 時間である。これらの事実は日出・日入が大気差なしの太陽中心で定義され、24 節気の日付が定気によって求められていることを示している。表の最初・中間・最後の行の期間の中間がそれぞれ冬至・春分と秋分・夏至の日の 5.5 日後になっているが、こ

Table 18: 1 日の刻数と 1 刻の分数.

刻/日	分/刻	期間または書物
中国		
100	10	後漢 (25-220)
100	10	南朝の宋 (420-479)
100	60	隋 (581-619)
100	100	隋 (581-619)
100	24	唐 (618-907)
100	147	宋 (960-1279)
100	60	宋 (960-1279)
日本		
(日出・日入)		
50	6	具注暦
48	10	延喜式
(食予報)		
48	4?	877-1027
48	10	1029-1096 ^{*)}
50?	40	1096-1149
100	84	1150-1527 ^{§)} (宣明暦)

*) 西暦 1029 年から 1096 年までの食予報に用いられた 1 日の刻数と 1 刻の分数は延喜式のものと同じであるが、食予報では各刻が 1 分から始まり 10 分で終わるのに対して、延喜式では 0 分に始まり 9 分に終わる点が異なっている。

§) これは左経記の西暦 1028 年の食を含む。

これは当時用いられていたカレンダーの欠陥と考えられる。これを正して、定気により、DE406 を用いて計算した昼間の時間と比較した結果を Table 17 に示す。計算は 1000 年の京都 (緯度 35.02 度) を仮定した。この比較から、記録されている日出・日入の時刻は現在の単位で数分以内で合っていることが確認できる。

4.4 日月食の予報時刻に使用された時刻制度

日本で西暦 862 年から 1684 年まで使われた宣明暦では、1 日が 12 の辰刻に分けられ、同時に 1 日は 100 刻とされた。したがって、各辰刻は $8\frac{1}{3}$ 刻に等しい。また、刻は 84 分に分けられた。各辰刻は初刻、1 刻、2 刻、..., 8 刻に分けられ、各刻は 0 分 (実際は何も書かれない)、1 分、2 分、..., 83 分 (8 刻は 27 分まで) に分けられた。子の刻の中心が地方時の真夜中にあたり、したがって、子の刻は地方時の 23:00 から 01:00 までにあたっていた。

橋本 (1966) は西暦 877 年から 1527 年までの 79 個の日月食の食開始・最大・食終了の予報時刻を調査した。それらの記録のほとんどは神田 (1935) から取ったが、3 個の食のみ彼自身のリストから取ったものである。これらの解析から、左経記の 1028 年の食時刻と 1150 年から 1527 年までのさまざまな記録にある食時刻はすべて宣明暦の時刻制度で記述されていることを見出した。また、1149 年までの時刻は他の 3 つの時刻制度が使われていることもわかった。これらの時刻制度の詳細は不明であるが、橋本の調査による、これらの時刻制度における 1 日の刻の数と 1 刻の分の数を第 5 節にまとめておく。

5 結論

この論文では古代・中世において中国と日本で行われた時刻制度について調査した。1日が12個の辰刻に分けられ、最初の子の刻は地方時の23時から1時までに対応していたことは良く知られていた。しかし、この論文で、中国の宋において、子の刻が0時から2時までに対応していたことが明らかになった(補遺参照)。中国ではさらに、1日が100刻に分けられ、刻はさらに分に分けられていた。1刻が何分に当たるかは王朝により変化した。日本でも刻や分が使われていたが、それらの長さは時代により変化した。Table 18はこの論文で明らかにした、中国と日本において1日が何刻であったか、1刻が何分であったかという点をまとめたものである。一番右の欄には、その制度が使用された王朝名や、書物名等を記した。

中国では唐の時代まで、昼間の時間に日出前の旦2.5刻と日入後の昏2.5刻が含まれていたが、宋史では昼間が日出から日入までになった。日本では古代から昼間が日出から日入までであった。

後漢書では1年間に太陽の動く速さが変化することは知られていなかった。後漢書のデータから、当時使用されていた漏刻が季節による日変化を起こしていたことが推論される。後漢書から唐に至るまで、日出・日入の時刻や昼夜の時間の表が何度も作成されたが、附書の1つの表が新しい観測を取り入れて作成された以外は、すべて後漢書の表が基になっていることが明らかになった。宋史に掲載されている日出・日入の時刻と昼の時間の表は1年間の太陽の動く速さが変化することを考慮して作成されていることも明らかになった。

中国の正史に掲載されている昼夜の時間、日出・日入の時刻、影の長さのデータはすべて緯度34.5度付近の特定の緯度の地点が基準点に選ばれている。そこでは、冬至と夏至の日の日出から日入までの時間とそれ以外の時間の比が2:3または3:2という簡単な整数比になっている。この伝統は日本にも受け継がれている。

Table A.1 12の辰刻.

名称			動物	時間 (1)	時間 (2)
				h h	h h
子	zi	<tzu>	rat	23-01	00-02
丑	chou	<ch'ou>	ox	01-03	02-04
寅	yin	<yin>	tiger	03-05	04-06
卯	mao	<mao>	hare	05-07	06-08
辰	chen	<ch'en>	dragon	07-09	08-10
巳	si	<szu>	snake	09-11	10-12
午	wu	<wu>	horse	11-13	12-14
未	wei	<wei>	sheep	13-15	14-16
申	shen	<shen>	monkey	15-17	16-18
酉	you	<yu>	cock	17-19	18-20
戌	xu	<hsu>	dog	19-21	20-22
亥	hai	<hai>	pig	21-23	22-00

時間 (1) は中国の唐までと日本の古代・中世に対するもの。

時間 (2) は中国の宋の時代に対するもの。

名称欄でローマ字で書いたものは、初めが中国の pinyin によるもの、< > で囲ったものは従来の Wade 式によるものである。

Acknowledgements

本研究は、文部科学省の科学研究費特定領域研究 14023233 の補助を受けた。

6 補遺：辰刻

中国でも日本でも1日は12の辰刻に分けられていた。それらの名前とそれに対応する時間を Table A.1 に示す。

References

- [1] Han, Y. B., & Zhang, P. Y. 1996, *J. Korean Astron. Soc.* 29, S439
- [2] 橋本万平 1966, 日本の時刻制度 (塙書房)
- [3] 平山清次 1913a, *天文月報* 5, 121
- [4] 平山清次 1913b, *天文月報* 5, 135
- [5] 神田茂 1935, 日本天文史料 (丸善)
- [6] Kawabata, K., Tanikawa, K. & Sôma, M. 2004, in *Astronomical Instruments and Archives from the Asia-Pacific region* (Seoul: Yonsei University Press) in press
- [7] Needham, J. & Wang, L. 1959, *Science and Civilisation in China*, Vol. 3, Part 2, *The Sciences of the Heavens* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [8] Sôma, M., Kawabata, K., & Tanikawa, K. 2004, *PASJ* 56, 887–904.
- [9] Standish, E. M. 1998, *JPL Planetary and Lunar Ephemeris DE405/LE405*, JPL IOM 312.F-98-048
- [10] Steele, J. M. 2000, *Observations and Predictions of Eclipse Times by Early Astronomers* (Amsterdam: Kluwer Academic Publications)
- [11] Stephenson, F. R. 1997, *Historical Eclipses and Earth's Rotation* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [12] Stephenson, F. R. 2003, *Astronomy & Geophysics* 44, 2.22
- [13] Stephenson, F. R. & Morrison, L. V. 1984, in *Rotation in the Solar System*, ed. R. Hide, (London: The Royal Society), Reprinted in *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 313, 47
- [14] Stephenson, F. R. & Morrison, L. V. 1995, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 351, 165
- [15] Tanikawa, K., & Sôma, M. 2004, in *Proc. Int. Conf. 770th Birth Anniversary of Guo Shoujing and the History of Time Apparatus*, Xingtai, China, 18–22 October 2001, ed. M.-D. Chen & X.-S. He (Beijing: Renmin Ribao Publisher) in press
- [16] 上田穰 1930, 石氏星経の研究 (東洋文庫)

- [17] Williams, J.G. 1994, *Astron. J.* 108, 711
- [18] 吳洛 1981, 中国文化史叢書「中国度量衡史」第4版 (臺灣商務印書館), p. 64
- [19] 薮内清 1969, 中国の天文暦法 (平凡社)

Dynamical Evolution of a Globular Cluster System: Limits on its Formation in a Disk Galaxy

Tsuyoshi Sakamoto¹ & Masashi Chiba²

¹ The Graduate University for Advanced Studies, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan

² Tohoku University, Sendai, Tokyo 980-8578, Japan

ABSTRACT

We present the dynamical evolution of a globular cluster system in disk galaxies, for the purpose of setting important limits on its initial state, i.e., the initial mass function of globular clusters, their spatial distribution, and velocity anisotropy, thereby allowing us to elucidate the initial state of a host galaxy where a cluster system resides. A globular cluster system is also a good mass tracer of its host galaxy, whereby the effects of its dynamical evolution must be properly taken into account for the correct, unbiased mass estimate.

Based on this motivation, we follow the evolution of a globular cluster system in various axisymmetric galactic potentials with *both* of the disk and dark halo components over the period of 13 Gyr and then analyzed the properties of the cluster system in detail. Our results are summarized as follows.

(1) Even under various forms for galactic potentials and various initial velocity distributions for clusters, their 13 Gyr dynamical evolution results in an approximately log-normal mass distribution, provided their initial mass distribution forms a power-law function with index -2 . It is worth noting that its peak appears at a mass of $M \sim 10^5 M_\odot$ if the lower cutoff of an initial mass function is located below $10^5 M_\odot$. This is in good agreement with the observed position of a peak for cluster mass distributions in various galaxies. (2) Globular clusters in the inner part of the surrounding galaxy are destructed more effectively by galactic tides than those in its outer part, so that the density in its inner part is reduced, while that in the outer part remains unchanged. (3) Globular clusters on radial orbits are preferentially destroyed by galactic tides, whereby the velocity distribution of a cluster system becomes more tangentially anisotropic in later time. To what extent this occurs is sensitive to the initial velocity distribution of clusters and the form of a galactic potential at its outer part: *both* more radial anisotropy in their initial velocities *and* more centrally concentrated form of a galactic potential give rise to a more tangentially anisotropic velocity distribution for the final state of clusters. (4) Even starting from different initial conditions for a cluster system or setting under different galactic environment, the line-of-sight velocity distribution of clusters in an edge-on galaxy is insensitive to such different setup, as only one velocity component is involved in it. (5) The surviving number or total mass of globular clusters after their 13 Gyr evolution depends not only on a galactic environment but also on an initial state of a cluster system, such as its velocity distribution. This suggests that the observed difference in the total number of globular clusters among various galaxies may be caused by the different initial velocity distribution of clusters (e.g., existence of a systematic rotation), even if the initial total number is the same. In particular, the large number of observed clusters in M31, i.e., about twice as large as that in the Milky Way, may be caused by the reported large systematic rotation

of both metal-rich and metal-poor cluster systems in M31, while only the metal-rich cluster system shows a large rotation in the Milky Way.

1 Introduction

Globular clusters constitute an independent galactic component in a galaxy, i.e., a globular cluster system. Globular clusters are usually as old as Hubble time, and hence a cluster system plays important roles in studying when, where, and how globular clusters formed in a galaxy. Also, studies of a cluster system are closely associated with the most important issue in galactic astronomy, i.e., when and how a galaxy formed, where a cluster system is found. In particular, various properties of clusters in each cluster system, such as their total number, mass function, spatial and kinematic structures, age distribution, and metallicity (color) distribution, provide us with useful information on the formation of a cluster system in each host galaxy as well as the early evolution of a host galaxy itself.

Advent of high-resolution observation by the Hubble Space Telescope (HST) and 8-10m class ground-based telescopes has made it possible to resolve extragalactic globular clusters in distant galaxies. In addition, a particular attention has been paid to our nearest neighbor, the Andromeda galaxy (M31), for the purpose of comparing its globular cluster system with that in the Milky Way. Such a detailed comparison is now possible, as the photometric and spectroscopic surveys of the globular cluster system in M31 are nearly complete. It is worth noting that the total number of globular clusters in M31 amounts to about 400, which is twice as large as that in the Milky Way. This difference in number is much larger than the typical uncertainty in it ($\sim$ a few $\times$ 10) (Barmby & Huchra 2001; Fusi Pecci et al. 1993). Also, in the Milky Way, only the metal-rich cluster system contains a strong systematic rotation toward a galactic rotation, whereas in M31, *both* of the metal-rich and metal-poor cluster systems show large systematic rotations: the rotation velocities of the metal-rich and metal-poor clusters are 160 ± 19 and $131 \pm 13 \text{ km s}^{-1}$, respectively (Perrett et al. 2002).

In addition to M31, several characteristic properties of clusters, such as their total number, in various types of distant disk galaxies have been accumulated (Goudfrooij et al. 2003; Barmby 2002; Kissler-Patig et al. 1999). In Fig.1.1, we plot the total number of observed globular clusters, N , as a function of the absolute magnitude of their host galaxy in V-band, M_V^T , which includes the luminosities of both the disk and bulge components. It follows that N is larger in brighter host galaxies.

Most of previous theoretical studies for the evolution of such observed globular cluster system have mainly focused on the change of the mass function of its member clusters as a result of several mass-loss processes, based on several methods, such as semi-analytic method, Fokker-Planck code, and N-body simulation (Vesperini et al. 2003; Fall & Zhang 2001, hereafter FZ01; Vesperini 1997, 1998; Baumgardt 1998; Okazaki & Tosa 1995). However, since previous studies adopted simplified assumptions for a host galaxy as explained below, our understanding of the evolution of a cluster system, especially concerning its spatial and kinematic structures inside its host galaxy, is yet highly limited (Baumgardt 1998; Murali & Weinberg 1997a, b, c).

Generally saying, mass-loss processes of clusters depend on the form and its change of external gravitational force acting on them during the course of their orbital motion, i.e., the detailed form of gravitational potential in a host galaxy. Hence,

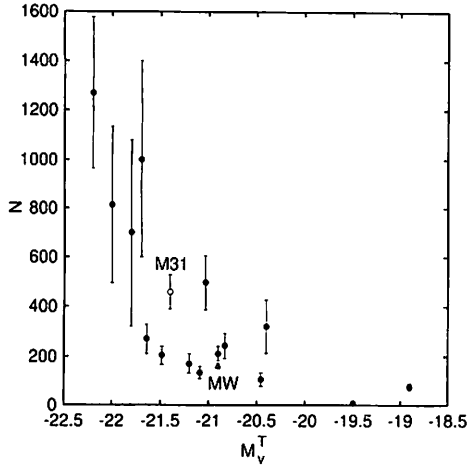


Figure 1.1: Total number of observed globular clusters, N , as a function of the absolute magnitude of their host galaxy in V-band, M_V^T , which includes the luminosities of both the disk and bulge components.

an assumption of a spherical potential adopted in previous studies is too simple to apply to actual galaxies holding bulge and disk components: such non-spherical parts of a gravitational potential strongly affect the evolution of a globular cluster system. However, comprehensive studies for the effects of a non-spherical potential on the evolution of spatial and kinematic structures of a cluster system are yet lacking, whereby it remains unclear how such a general consideration of galactic environment affects the evolution of a cluster system, or conversely the initial state of a cluster system by tracing back its evolution. Therefore, it is yet unsettled as to how many clusters were existing before they disappeared by their dynamical evolution, or in other words, how many clusters formed in each host galaxy. This indicates that more detailed studies for the evolution of a globular cluster system are required for the purpose of setting useful limits on the formation process of globular clusters in a galaxy.

Based on this motivation, we develop semi-analytical models for the dynamical evolution of a globular cluster system embedded in various galactic potentials. In sharp contrast to simple spherical models examined previously, our models fully take into account the non-spherical nature of a galactic potential, mostly due to a galactic disk component, which strongly affects the dynamical evolution of globular clusters in the course of their orbital motions. In an axisymmetric potential which allows an explicit evaluation of the so-called third integral of motions, we consider the several mass-loss processes of globular clusters, which include the effects of stellar evolution in cluster stars, their two-body gravitational relaxation, and gravitational shocks acting on a cluster. Taking into account all of these mass-loss processes for globular clusters, we calculate the time evolution of their total number, mass function, spatial distribution, and velocity distribution, under various initial conditions in densities and velocities for clusters and various galactic potentials.

In Section 2, We construct the general models for calculating the evolution of *both* the mass function of a globular cluster system *and* its spatial and kinematic structures in various types of disk galaxies. Section 3 is devoted to the model

calculations and the analyses of the results, depending on the initial set up of a globular cluster system and galactic environment. In Section 4, we estimate the survival probabilities of globular clusters in several disk galaxies with different masses and discuss if these theoretical predictions explain the observed difference in the total number of globular clusters among various disk galaxies. In particular, we attempt to clarify if this difference originates from different initial conditions of globular clusters or from their evolutionary effect.

2 Basic methods

2.1 Galactic potential

In contrast to previous models for tracing dynamical evolution of a globular cluster system, we adopt an axisymmetric gravitational potential for a host galaxy to calculate the orbits of clusters. We then set a distribution function of clusters, which follows isolating integrals of cluster motion in a consistent manner.

It is well known that for an axisymmetric gravitational potential, two classical integrals exist, i.e., the orbital energy, E , and the angular-momentum component parallel to the symmetry axis, L_z , whereas no general expression exists for the third integral, I_3 , which is thus estimated numerically in most cases. If a distribution function of clusters depends only on E and L_z , their velocity dispersions $\langle V_\varpi^2 \rangle$ and $\langle V_z^2 \rangle$ in cylindrical coordinates (ϖ, z) ought to be identical and thus lack generality for the application to actual cluster systems. However, it is also known that an exact third integral is available if a gravitational potential is of Stäckel form, for which the Hamilton-Jacobi equation separates in ellipsoidal coordinates. Every orbit in this type of potential possesses three exact isolating integrals of motion, E , I_2 , and I_3 , which are known explicitly. Therefore, we adopt Stäckel potential as the galactic potential in our following calculations.

We define prolate spheroidal coordinates as the triple (λ, ϕ, ν) , where ϕ is the azimuthal angle in cylindrical coordinates (ϖ, ϕ, z) and λ and ν are the two roots for τ of

$$\frac{\varpi^2}{\tau + \alpha} + \frac{z^2}{\tau + \gamma} = 1, \quad (2.1)$$

with $-\gamma \leq \nu \leq -\alpha \leq \lambda$. The parameters α and γ are constants and give foci $(\varpi = 0, z = \pm\Delta)$ of the spheroids of constant λ and the hyperboloids of constant ν in the plane of $\phi = \text{constant}$ for $\Delta = (\gamma - \alpha)^{1/2}$. The relations between (λ, ν) and (ϖ, z) are given by

$$\varpi^2 = \frac{(\lambda + \alpha)(\nu + \alpha)}{\alpha - \gamma}, \quad z^2 = \frac{(\lambda + \gamma)(\nu + \gamma)}{\gamma - \alpha}. \quad (2.2)$$

An axisymmetric gravitational potential of Stäckel type, V , is written in the coordinates as

$$V(\lambda, \nu) = -\frac{(\lambda + \gamma)G(\lambda) - (\nu + \gamma)G(\nu)}{\lambda - \nu} \equiv -\psi(\lambda, \nu), \quad (2.3)$$

where $G(\tau)$ is an arbitrary function and ψ is the relative potential. We take

$$G(\tau) = G_d(\tau) + G_h(\tau), \quad (2.4)$$

where $G_d(\tau)$ and $G_h(\tau)$ are the contribution from the disk and the dark halo, respectively. Following Vedel and Sommer-Larsen (1990), we adopt the perfect oblate

spheroid for $G_d(\tau)$,

$$G_d(\tau) = \frac{2G}{\pi} \frac{M_d}{\sqrt{\tau + \gamma}} \arctan \sqrt{\frac{\tau + \gamma}{-\gamma}}, \quad (2.5)$$

where G is the gravitational constant and M_d is the total mass of the disk, whereas for $G_h(\tau)$, the $s=2$ model of de Zeeuw, Peletier, and Franx (1986) is adopted,

$$G_h(\tau) = -4\pi G \rho_0 \gamma_h \left[\ln \left(\frac{\alpha_h}{\gamma_h} \right) - \frac{\tau + 2\gamma_h - \alpha_h}{2(\tau + \gamma_h)} \ln \left(\frac{\tau}{-\gamma_h} \right) + \frac{2\gamma_h - \alpha_h}{\sqrt{-\gamma_h}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{\tau + \gamma_h}} \arctan \sqrt{\frac{\tau + \gamma_h}{-\gamma_h}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_h - \alpha_h}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma_h - \alpha_h}{-\gamma_h}} \right) \right], \quad (2.6)$$

where ρ_0 is the mass density of the halo at the galactic center. The parameters γ_h and α_h are arbitrary and play the same role as γ and α , respectively, in defining the current prolate spheroidal coordinates. In order to make this combined potential of Stäckel form, we choose the coordinates so that the focus of the disk is identical to that of the halo,

$$\gamma_h = \gamma - b, \quad \alpha_h = \alpha - b, \quad (2.7)$$

where b is an arbitrary parameter. From Eqs. (2.6) and (2.7), $G_h(\tau)$ is written as

$$G_h(\tau) = -4\pi G \rho_0 (\gamma - b) \left[\ln \frac{\Delta^2 - \gamma - b}{-\gamma + b} - \frac{\tau + \gamma + \Delta^2}{2(\tau + \gamma)} \ln \frac{\tau + b}{-\gamma + b} + \frac{\Delta^2 + \gamma - b}{\sqrt{-\gamma + b}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{\tau + \gamma}} \arctan \sqrt{\frac{\tau + \gamma}{-\gamma + b}} - \frac{1}{\Delta} \arctan \frac{\Delta}{\sqrt{-\gamma + b}} \right) \right]. \quad (2.8)$$

This potential is characterized by Δ , M_d , ρ_0 , the axial ratio of the disk, $q_d (\equiv \sqrt{\gamma/\alpha})$, and the axial ratio of the halo near the galactic center, $q_h (\equiv \sqrt{\gamma_h/\alpha_h})$.

As a standard model for this type of galactic potential, we adopt the following parameters after some experiments: $\Delta = 4$ kpc, $M_d = 6 \times 10^{10} M_\odot$, $\rho_0 = 5.89 \times 10^7 M_\odot \text{kpc}^{-3}$, $(-\gamma)^{1/2} = 0.125$ kpc, $(b - \gamma)^{1/2} = 3.75$ kpc, resulting in $q_d = 0.031$, $q_h = 0.68$. Based on this standard model, we plot, in Fig. 2.1, the rotation curve and vertical density distribution at the solar radius ($\varpi = 8$ kpc). It follows that the rotation curve is approximately flat outside $\varpi \approx \Delta$ and its value at the solar radius is given as $V_c \approx 219$ km s $^{-1}$. Also, the local density at the solar radius, ρ_{local} , (including both disk and dark halo contributions) is given as $\rho_{\text{local}} = 0.13 M_\odot \text{pc}^{-3}$. For other galactic potentials, we will change the values of Δ , M_d and ρ_0 to see the effects of various galactic environments on the final results.

In this Stäckel-type potential, the Hamiltonian H for the motion of a globular cluster in the relative potential $\psi(\lambda, \nu)$ is written as

$$H = \frac{p_\lambda^2}{2P^2} + \frac{p_\phi^2}{2\varpi} + \frac{p_\nu^2}{2R^2} - \psi(\lambda, \nu) \quad (2.9)$$

$$P^2 = \frac{\lambda - \nu}{4(\lambda + \alpha)(\lambda + \gamma)}, \quad R^2 = -\frac{\nu - \lambda}{4(\nu + \alpha)(\nu + \gamma)}. \quad (2.10)$$

The equation of the motion of a globular cluster

$$p_\tau^2 = \frac{1}{2(\tau + \alpha)} \left[G(\tau) - \frac{I_2}{\tau + \alpha} - \frac{I_3}{\tau + \gamma} - \epsilon \right], \quad \tau = \lambda, \nu \quad (2.11)$$

$$p_\phi^2 = L_z^2 = 2I_2, \quad (2.12)$$

where ϵ , I_2 , and I_3 are three isolating integrals allowed by the potential, i.e.,

$$\epsilon = -H \quad (2.13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}L_z^2, \quad (2.14)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2) + \Delta^2 \left[\frac{1}{2}v_z^2 - z^2 \frac{G(\lambda) - G(\nu)}{\lambda - \nu} \right], \quad (2.15)$$

where $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ is the angular momentum in rectangular coordinates. The velocities of a globular cluster on an orbit characterized by the integrals (ϵ, I_2, I_3) can be expressed as

$$v_\lambda = \pm \sqrt{\frac{2(I_3^+ - I_3)}{\lambda - \nu}}, \quad v_\phi = \pm \sqrt{\frac{2I_2}{\varpi}}, \quad v_\nu = \pm \sqrt{\frac{2(I_3 - I_3^-)}{\lambda - \nu}}, \quad (2.16)$$

where

$$I_3^+(\epsilon, I_2, \lambda) = (\lambda + \gamma)[G(\lambda) - \epsilon] - \frac{\lambda + \gamma}{\lambda + \alpha} I_2 \quad (2.17)$$

$$I_3^-(\epsilon, I_2, \nu) = (\nu + \gamma)[G(\nu) - \epsilon] - \frac{\nu + \gamma}{\nu + \alpha} I_2. \quad (2.18)$$

Having obtained the form of a galactic potential, we assume that the orbital structure of the initial globular cluster system follows a phase space distribution function which depends only on isolating integrals, ϵ , I_2 , and I_3 :

$$f(\epsilon, I_2, I_3) = \begin{cases} (e^{\epsilon/\sigma_c} - e^{\epsilon_0/\sigma_c^2}) e^{-[2(I_2+I_3)]/2\sigma_c^2 r_A^2}, & \epsilon \geq \epsilon_0 \\ 0, & \epsilon < \epsilon_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

where σ_c is a characteristic velocity, r_A is the core radius, and ϵ_0 is minus the cutoff energy (Vedel and Sommer-Larsen 1990). In a spherical potential, this distribution function yields velocity dispersions $\sigma_r = \sigma_c$ and $\sigma_T = \sigma_c[1 + (r/r_A)^2]^{-1/2}$ in the radial and transverse directions, respectively, where r_A marks the transition from a nearly isotropic to a predominantly radial velocity dispersion. The number density distribution corresponding to the distribution function is written as

$$\begin{aligned} \rho(\varpi, z) = & \frac{2\sqrt{2}}{\varpi} \int_{\epsilon_0}^{\psi(\varpi, z)} d\epsilon \int_0^{I_2^+(\epsilon, \lambda, \nu)} \frac{dI_2}{\sqrt{I_2}} \\ & \times \int_{I_3^-(\epsilon, I_2, \nu)}^{I_3^+(\epsilon, I_2, \lambda)} \frac{f(\epsilon, I_2, I_3) dI_3}{\sqrt{(I_3^+ - I_3)(I_3 - I_3^-)}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

In a spherical logarithmic potential, $\psi = V_c \log r$, $\rho(r)$ is simply given as

$$\rho(r) \propto [1 + (r/r_A)^2]^{-1} r^{-\gamma_g} \quad (2.21)$$

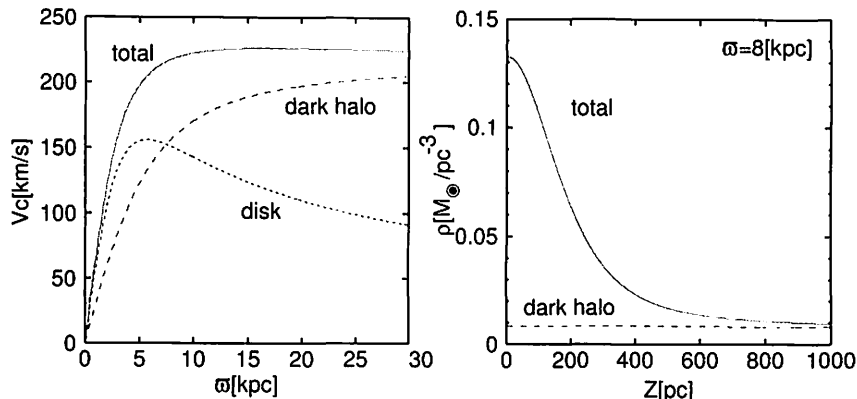


Figure 2.1: Rotation curve for a standard potential of a galaxy (left panel) and its vertical density distribution at $\varpi = 8$ kpc (right panel).

with $\gamma_g = (V_c/\sigma_c)^2$.

As a standard model for the initial distribution of a globular cluster system, we adopt the following parameters: $\epsilon_0 = \psi(\varpi = 250 \text{ kpc}, z = 0 \text{ kpc})$, $r_c = 5 \text{ kpc}$, and $\sigma_c = 145 \text{ km s}^{-1}$, resulting in $\gamma_g \approx 2.3$. For other initial distributions of cluster systems, we will change only the value of r_A , i.e., the location of transition between a nearly isotropic and predominantly radial velocity dispersions.

2.2 Mass-loss process of a globular cluster

In the course of its orbital motion, a globular cluster is subject to various disruptive processes on various timescales. Stellar evolutionary processes, i.e., a combination of supernovae, stellar winds, and other ejecta, remove mass from a globular cluster on a short timescale ($t \lesssim \text{a few} \times 10^8 \text{ yr}$). On long timescales ($t \gtrsim \text{a few} \times 10^8 \text{ yr}$), there exist three different dynamical processes which also remove mass from a globular cluster. As the first process, internal relaxation by two-body scattering, i.e. two-body relaxation, causes some stars, especially low-mass stars, to gain enough energy to escape from the cluster. As the second process, when a cluster orbits around a host galaxy, it experiences a time-dependent tidal field, which may vary so rapidly when it passes rapidly near the bulge or through the disk that stars in the outer parts of the cluster cannot respond adiabatically. The corresponding change in the energy of stars (heating and relaxation) causes some of them to escape from the cluster. These effects are known respectively as bulge and disk shocks and more generically as gravitational shocks. As the third process, the deceleration of a cluster induced by the wakes of stars and dark matter particles in a host galaxy behind it, i.e., dynamical friction, causes the cluster to spiral toward the galactic center, where it may be destroyed by the strong tidal field. We note that the effects of dynamical friction on a cluster depend on its mass and the position in the host galaxy, and it is especially important *only if* clusters are located near the galactic center; most of them orbiting in the outer parts of the Galaxy are not spiraled toward the galactic center by dynamical friction. More specifically, following the simple analysis of Fall and Zhang (2001, hereafter FZ01), which evaluated the disruption time t_{df} by dynamical friction for the globular clusters in the Milky Way, the vast majority of them have $t_{df} > 20 \text{ Gyr}$. Thus, we neglect dynamical friction in calculating mass

loss of a globular cluster.

In our model for the evolution of a globular cluster, we consider three processes that reduce the mass of a cluster: (1) evaporation driven by two-body relaxation, (2) evaporation driven by gravitational shocks, and (3) mass loss driven by stellar evolution (supernovae, stellar winds, and other ejecta). These processes may be correlated and mutually reinforcing in a realistic globular cluster, but we assume that they operate independently each other in order to simplify our calculation of mass loss of a cluster. Thus, following many previous studies (see Spitzer 1987, FZ01), we write

$$\dot{M} = -[\nu_{ev}(t) + \nu_{sh}(t) + \nu_{se}(t)]M, \quad (2.22)$$

where $\nu_{ev}(t)$, $\nu_{sh}(t)$, and $\nu_{se}(t)$ are fractional rates of two-body relaxation, gravitational shocks, and stellar evolution, respectively.

The fractional rate of mass loss by stellar evolution, $\nu_{se}(t)$, depends on the age of a cluster and the stellar initial mass function. We compute $\nu_{se}(t)$ from the Leitherer et al. (1999) model with the Salpeter initial stellar mass function. We find that, following the model of stellar evolution, the mass of a cluster drops approximately exponentially with time over the period of $t \lesssim 3 \times 10^8$ yr, reaching about 60 % of its initial value, and then remains unchanged in the later stages.

The effects of the two stellar dynamical processes, two-body relaxation (ν_{ev}) and gravitational shocks (ν_{sh}), respectively, can be analytically written as

$$\nu_{ev} = \frac{\xi_e}{t_{rh}} = \frac{7.25\xi_e m G^{1/2} \ln \Lambda}{M^{1/2} k^{3/2} r_t^{3/2}}, \quad (2.23)$$

$$\nu_{sh} = \frac{\epsilon_h \kappa_s \bar{A}}{t_{sh}} = \frac{6.67 \epsilon_h \kappa_s \bar{A} g_m^2 k^3 r_t^3}{G M P_\phi V_z^2}, \quad (2.24)$$

(Spitzer 1987; FZ01). In Eq. (2.23), ξ_e is the fraction of stars that escape from a cluster per half-mass relaxation time t_{rh} by two-body scattering, r_t is the tidal radius of a cluster, k relates its tidal radius with the half-mass radius, i.e., $r_h = k r_t$, m is mean stellar mass, and $\ln \Lambda$ is the Coulomb logarithm. We adopt $\xi_e = 0.045$ and $k = 0.145$ (Hénon 1961), as obtained from the self-similar evolution of a tidally limited cluster (with a single stellar mass) by two-body relaxation alone. In Eq.(2.24), t_{sh} is the heating time by gravitational shocks for first-order energy changes in the impulse approximation (Ostriker, Spitzer, & Chevalier 1972), $\bar{A}$ is a correction for partial adiabatic (i.e. nonimpulse) response averaged over all stars in a cluster. The parameter ϵ_h accounts approximately for the addition of second-order energy changes, also known as shock-induced relaxation (Spitzer & Chevalier 1973; Kundić & Ostriker 1995). The other parameter κ_s relates the fractional change in energy caused by gravitational shocks to the corresponding fractional change in mass, i.e. $\dot{M}/M = \kappa_s \dot{E}/E$, where $\dot{E}$ and E are the total energy change and the total energy of a cluster, respectively. Also, in Eq.(2.24), V_z is the vertical component of the velocity of a cluster relative to the disk, P_ϕ is the azimuthal period of its orbit around the host galaxy, and g_m is the maximum vertical acceleration caused by the disk. The adopted values of parameters in Eqs.(2.23) and (2.24) are summarized in Table 19.

2.3 Numerical modeling of dynamical mass-loss processes

In order to simplify the calculation of the above two dynamical processes, two-body relaxation and gravitational shocks, we adopt several numerical approximation as

Table 19: Parameters for the mass-loss calculation of a globular cluster

ξ_e	0.045
k	0.145
m	0.7 M _⊙
κ_s	1
$\ln \Lambda$	12
ϵ_h	7/3

follows.

(i) Method for calculating a tidal radius

First, we assume that each cluster has an outer, limiting radius r_t determined by the tidal field of a host galaxy at the pericenter of its orbit and that each cluster evolves at constant mean density, as derived from $\bar{\rho} = M/(4\pi r_t^3/3)$. In the case of a spherical galactic potential, the pericentric distance from the galactic center remains unchanged at each passage, so that a cluster on such an orbit may hold a constant mean density, $\bar{\rho}$, as determined from r_t estimated as

$$r_t = \left(\frac{GM}{\omega^2 - d^2\Phi/dr^2} \right)^{1/3}, \quad (2.25)$$

where ω is its angular velocity and Φ is the galactic potential (King 1962). For non-spherical cases as assumed here, where the pericenter differs at each orbital passage, we assume that a cluster is supposed to have a constant mean density as well, as determined from the smallest tidal radius r_t , i.e., when cluster's orbit holds the smallest pericenter, and that Eq.(2.25) for a spherical limit yet provides us with an approximate estimator of r_t in non-spherical cases.

Taylor & Babul (2001, hereafter TB01) also adopted Eq.(2.25) for their axisymmetric model, where the asphericity of the potential was averaged to estimate $d^2\Phi/dr^2$, i.e.,

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{d^2\Phi_{sph}}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{GM(<r)}{r^2} \right], \quad (2.26)$$

where Φ_{sph} is the spherical potential with the same total mass $M(<r)$ interior to r as the axisymmetric density distribution. However, the calculation of this $M(<r)$ is tedious as the potential we adopt is complex, while this method of estimating r_t is not necessarily accurate. We instead obtain a differential equation for $d^2\Phi/dr^2$ at the position of a cluster center and solve it in a self-consistent manner: we first obtain the gravitational force f

$$f = \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)_{\theta, \phi} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R} \right)_Z \frac{R}{r} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z} \right)_R \frac{Z}{r} \quad (2.27)$$

at four points $(R \pm \delta R, Z)$, $(R, Z \pm \delta Z)$ near the center of the cluster (R, Z) , where δR and δZ are infinitesimal, and then calculate $d^2\Phi/dr^2$ at the center of the cluster (R, Z) ,

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} \Big|_{(R,Z)} = \left(\frac{df}{dr} \right)_{\theta, \phi} \Big|_{(R,Z)} = \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_Z \Big|_{(R,Z)} \frac{R}{r} + \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \right)_R \Big|_{(R,Z)} \frac{Z}{r}. \quad (2.28)$$

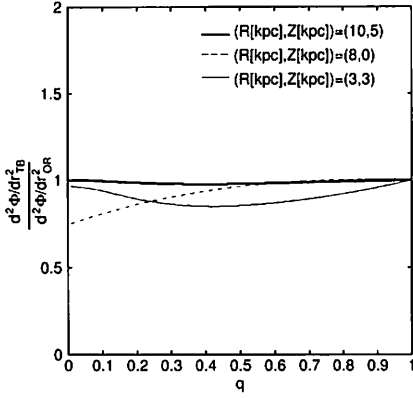


Figure 2.2: Ratio between $d^2\Phi/dr^2$ obtained from Taylor & Babul's (2001) and our methods for the perfect oblate spheroids with axial ratio q of mass density at some points $(R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (10, 5), (8, 0),$ and $(3, 3)$ in the potential.

For the comparison between the above two different methods to estimate $d^2\Phi/dr^2$, we use a perfect oblate spheroid as a gravitational potential, where the surfaces of constant density are all similar concentric ellipsoids, and calculate $d^2\Phi/dr^2$ at specific points in the perfect oblate spheroids with various axial ratio q of the mass density. Fig.2.2 shows the ratio between $d^2\Phi/dr^2$ obtained from TB01's and our methods for the perfect oblate spheroids with various axial ratios q of mass density. The thick solid, thin solid, and dashed lines denote $(R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (10, 5), (8, 0),$ and $(3, 3)$ in cylindrical coordinates in the potential, respectively. At $(R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (10, 5)$, $d^2\Phi/dr^2$ obtained from our method agrees with that obtained from TB01's method in all axial ratios q of mass density. At the closer point $((R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (3, 3))$ to the galactic center and at the point $((R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (8, 0))$ near the disk, the ratio decreases with decreasing axial ratio q . However, since the minimum of this ratio is ~ 0.75 at $q \sim 0$ and $(R \text{ [kpc]}, Z \text{ [kpc]}) = (8, 0)$, the tidal radius obtained from our method almost agrees with that obtained from TB01's method, independent of the position in the host galaxy and the axial ratio of its mass density.

With the constant density assumption for a cluster as discussed above, Eq.(2.22)-(2.24) take the form

$$\dot{M} = -\mu_{ev} - \nu_{sh}M, \quad (2.29)$$

$$\mu_{ev} = 269\xi_e(G\bar{\rho})^{1/2}m \ln \Lambda, \quad (2.30)$$

$$\nu_{sh} = \frac{4.84 \times 10^{-3}\epsilon_h\kappa_s\bar{A}g_m^2}{G\bar{\rho}P_\phi V_z^2}, \quad (2.31)$$

where μ_{ev} and ν_{sh} are constants. The coefficients $\bar{A}$ and g_m in Eq.(2.31) for the gravitational shocks depend on the galactic potential and the orbit of a cluster. Since the inclination of a cluster's orbit on the disk varies with time in an axisymmetric potential, we determine $\bar{A}$ and g_m at each passage through the disk as described below.

(ii) Method for calculating the effect of gravitational shocks

To evaluate Eq.(2.31), we adopt the following approximation. The quantity g_m

denotes the maximum vertical acceleration caused by the disk,

$$g_m = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right|_{(R_i, S_i)}, \quad (2.32)$$

where R_i is R at i th passage through the disk, and S_i is Z at which a cluster starts to feel i th gravitational (disk) shocks. In order to determine S_i on an orbit of a cluster in our adopted gravitational potential, we identify the beginning of shocks under the condition of rapid shocks, i.e.,

$$t_{sh} < t_{cross} \quad (2.33)$$

where t_{cross} denotes a typical crossing time of stars at half-mass radius r_h of a cluster and t_{sh} a shock crossing time estimated at i th passage through the disk

$$t_{cross} = \left(\frac{r_h}{r_t} \right)^{3/2} \left(\frac{GM}{r_t^3} \right)^{-1/2} \quad (2.34)$$

$$t_{sh} = \frac{S_i}{V_{Z,i}}, \quad (2.35)$$

so that

$$S_i = V_{Z,i} \left(\frac{r_h}{r_t} \right)^{3/2} (G\bar{\rho})^{-1/2}, \quad (2.36)$$

where $V_{Z,i}$ is V_Z at i th passage through the disk. It is worth noting that this height S_i depends on both the average density of a cluster and its vertical velocity to the disk V_Z : a more massive cluster with higher velocity through the disk has larger height S_i .

Using the height S_i , the average adiabatic correction factor $\bar{A}$ is written as

$$\bar{A} = \frac{\int_0^{r_t} r^2 (A_1[x(r)] + A_2[x(r)]) \rho(r) r^2 dr}{\int_0^{r_t} r^2 \rho(r) r^2 dr}, \quad (2.37)$$

$$A_1(x) = A_2(x) = (1 + x^2)^{-3/2}, \quad (2.38)$$

$$x = \omega(r) t_{sh} = \frac{\omega(r) S_i}{V_{Z,i}} \quad (2.39)$$

$$\omega(r) = \left(\frac{r}{r_t} \right)^{-3/2} \quad (2.40)$$

where $A_1(x)$ and $A_2(x)$ are the local adiabatic correction factors for the first- and second-order energy changes by gravitational shocks, respectively, and $\rho(r)$ is the density distribution of stars in a cluster. We approximate that all clusters at a given time have the density distribution

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_t} \right) \left(\frac{GM}{r_t^3} \right)^{1/2}, \quad (2.41)$$

(FZ01). Its density distribution is the same as that of the King (1966) model, $\rho(r) \propto (\frac{1}{r} - \frac{1}{r_t})^{5/2}$ for $r \rightarrow r_t$, in the outer region of a cluster, whereas in the inner region, it has a singular behavior appropriate for core collapse models, $\rho(r) \propto r^{-2}$ for $r \rightarrow 0$ (Spitzer 1987, FZ01). The half-mass radius of our adopted density distribution

of a cluster is $r_h = 0.18r_t$, reasonably close to that of the Hénon model ($r_h = 0.145r_t$) as we adopted in Section 2.

Thus, in this simplified model for the mass-loss of a cluster, Eq.(2.29) has the exact solution at $T_{d,i} \leq t \leq T_{d,i+1}$,

$$M(t) = \begin{cases} M(0) - \mu_{ev}t - M_{se}, & i = 0 \\ M(T_{d,i}) - \frac{\mu_{ev}}{\nu_{sh,i}} \{ \exp[\nu_{sh,i}(t - T_{d,i})] - 1 \} \exp[-\nu_{sh,i}(t - T_{d,i})], & i \neq 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

where $T_{d,i}$ denotes the epoch of the i th passage through the disk, $M(T_{d,i})$ is the mass of a cluster at $t = T_{d,i}$, $\nu_{sh,i}$ is fractional rate of gravitational shocks at $T_{d,i} \leq t \leq T_{d,i+1}$, and M_{se} is total mass-loss by stellar evolution for $t \lesssim 3 \times 10^8$ yr.

In contrast to our method for dealing with gravitational shocks as described above, TB01 made a different approach to the issue, based on the method which reproduces mass loss of a satellite galaxy calculated by N-body simulation. Their method is summarized as follows. Firstly, they identify rapid shocks under the condition that shock timescale is shorter than the satellite's internal orbital period. Secondly, they divide the gravitational shocks into a series of n discrete time steps of length Δt , and in going from t_n to t_{n+1} , the energy change $\Delta W(t_n \rightarrow t_{n+1})$ of the satellite galaxy in a single time step is

$$\Delta W(t_n \rightarrow t_{n+1}) = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 A_{tid}(t_n) \cdot \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} A_{tid}(t_i) + A_{tid}(t_n) \right], \quad (2.43)$$

where $A_{tid}(t_i)$ is the tidal acceleration at t_i . The acceleration A_{tid} at the center of the satellite galaxy is written as

$$A_{tid}(t) = x(t) \cdot [\nabla g]_{(x=0)} = g_{a,b} x_b(t) e_a, \quad (2.44)$$

where g is the galactic gravitational field, $g_{a,b} = \partial g_a / \partial x_b$ evaluated at $x = 0$, e_a is the unit vector in x_a -direction, repeated indices a, b indicate summation over the three Cartesian coordinates. Thus, taking the dot product in Eq. (2.43) and averaging over a sphere of radius r gives

$$\Delta W_{tid}(t_n \rightarrow t_{n+1}) = \frac{1}{6} r^2 (\Delta t)^2 \left[2 g_{a,b}(t_n) \sum_{i=0}^{n-1} g_{a,b}(t_i) + g_{a,b}(t_n) g_{a,b}(t_n) \right], \quad (2.45)$$

with 18 terms from two summations over a and b . In an axisymmetric potential, a and b are R and Z in cylindrical coordinates, thus $g_{a,b}$ obtained from TB01's method includes g_{RR} , g_{RZ} and g_{ZZ} , whereas $g_{a,b}$ obtained from our method only includes g_{ZZ} . From Eq.(2.45), the energy change ΔE by gravitational shocks is written as

$$\Delta E = \epsilon_h A_{1,TB}(x_h) \Delta W_{tid}(t_n \rightarrow t_{n+1}), \quad (2.46)$$

$$A_{1,TB}(x_h) = (1 + x_h^2)^{-\gamma}, \quad (2.47)$$

$$x_h = \omega(r_h) t_{sh}, \quad (2.48)$$

where $A_{1,TB}(x_h)$ is the first local adiabatic correction factor at the half-mass radius of the satellite galaxy. Thirdly, they calculate the change $\Delta \bar{\rho}_{r,sat}$ in mean density of the satellite galaxy inside radius r , in the absence of shell crossing,

$$\Delta \bar{\rho}_{r,sat} \propto \Delta \left[\frac{M(< r)}{r^3} \right] \propto -\frac{\Delta r}{r^4} \propto -\frac{\Delta E(r)}{r^2}, \quad (2.49)$$

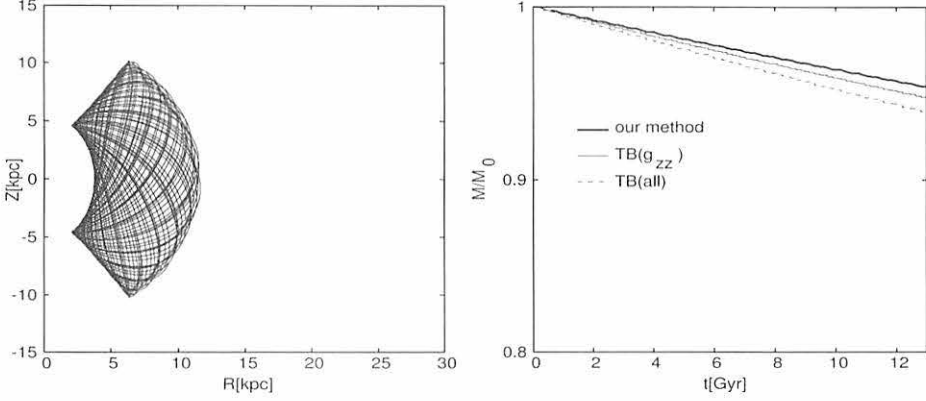


Figure 2.3: (a) Orbit of the cluster with $\epsilon = 1.$, $I_2 = 0.5$, and $I_3 = 0.7$. The initial position of the cluster lies on $(R[\text{kpc}], Z[\text{kpc}]) = (8, 5)$. (b) Ratio $M(t)/M_0$ of a cluster with the orbit (a) in our method (thick solid line), TB01's method with all $g_{a,b}$ (thin solid line), and TB01's method with g_{zz} alone (dashed line). The mass M_0 and $M(t)$ are the initial mass of a cluster, $10^5 M_\odot$ and the mass at time t .

which is independent of radius r . Finally, they apply the tidal stripping,

$$\rho_{r,\text{sat}}(< r_t) = \eta \bar{\rho}_{\text{gal}}(< r) \quad (2.50)$$

$$\eta \equiv \frac{\rho_{r,\text{sat}}(< r_t)}{\rho_{\text{gal}}(< r)} = \frac{r^3}{r_t^3} \frac{M_{\text{sat}}}{M(< r)} = \frac{r^3}{GM(< r)} \left(\omega - \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \right), \quad (2.51)$$

to the new, heated density profile to determine how much mass is lost.

In order to highlight the difference between TB01's and our methods, we calculate the mass-loss rate of a cluster by gravitational shocks alone as obtained from TB01's and our methods. In this calculation, we calculate only $A_1(x)$ in our method and adopt $3/2$ as γ in TB01's method. Fig.2.3a shows a typical orbit of a cluster obtained with the integrals $\epsilon = 1.$, $I_2 = 0.5$, and $I_3 = 0.7$. Given the shape of an orbit, Fig.2.3b shows how the cluster evolves by gravitational shocks alone, based on our method (thick solid line), TB01's method with all $g_{a,b}$ (thin solid line), and TB01's method with g_{zz} alone (dashed line). In this figure, the normalized factor M_0 corresponds to the initial mass of a cluster, which is $10^5 M_\odot$, and $M(t)$ is the mass of a cluster at time t . It follows from the figure that the ratio M/M_0 decreases approximately linearly with time and it reaches about 0.95 at $t = 13$ Gyr. This ratio obtained from our method almost agrees with that calculated by TB01's method with g_{zz} alone and also almost agrees with that calculated by TB01's method with all $g_{a,b}$. Thus, even for other types of orbits, the effect of gravitational shocks in our method is expected to agree with that in TB01's method with $g_{a,b}$.

(iii) Mass loss of a cluster in the current model

To summarize, we develop the method to calculate the mass loss of a globular cluster by three different processes, (1) stellar evolution, (2) two-body relaxation, and (3) gravitational shocks, in an axisymmetric potential consisting of the disk and dark halo components. Based on various approximation as described so far, we present the time evolution for the mass of a cluster. Fig.2.4 shows how a globular cluster having the orbit given in Fig.2.3a and the initial mass of $M_0 = 10^5 M_\odot$

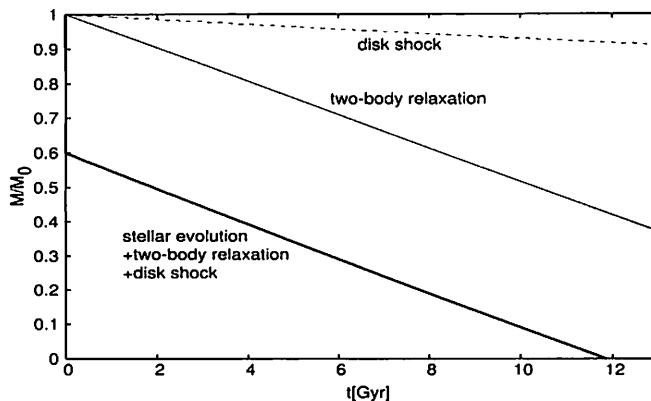


Figure 2.4: Time evolution for the mass of a cluster having the orbit given in Fig.2.3a and the initial mass of $10^5 M_\odot$. Thick solid line shows the combined evolution of stellar evolution, two-body relaxation, and gravitational shocks, whereas thin solid and dashed lines, respectively, consider only the two-body relaxation and gravitational shocks.

evolves with time by the three processes in our model. In this figure, thick solid line shows the combined effect of stellar evolution, two-body relaxation, and gravitational shocks, whereas thin solid and dashed lines, respectively, considers only the two-body relaxation and gravitational shocks. Firstly, from the comparison between thin solid line and dashed line, it is found that the mass-loss effect by gravitational shocks is much smaller than that by two-body relaxation and is relatively less important at later stages. Secondly, as found from thick solid line, the mass of a cluster shows a rapid decline as a result of stellar evolution until it reaches about 60% of its initial mass and then shows an approximately exponential decline with time mainly by two-body relaxation.

3 Dynamical evolution of a globular cluster system

We follow the time evolution of a globular cluster system based on the models constructed in Section 2 and explore how the properties of the clusters (total number, mass function, spatial distribution and kinematic structure) with a variety of initial states for the cluster system evolve under different surrounding environment of a host galaxy.

3.1 Effects of a galactic potential

We first investigate the effect of galactic environment on the evolution of a globular cluster system while the initial state is fixed.

(i) Setting a cluster system and its surrounding galactic environment

We adopt the standard parameter set for the galactic potential as presented in Section 2 and to see how the detailed form of a potential affects the result, we vary the three model parameters, i.e., the central mass density of the dark halo, ρ_0 , total mass of the disk, M_d , and length scale, Δ , affecting the degree of mass concentration. In other words, we investigate the effects of various masses for both the dark halo and disk components and of various degree of mass concentration.

Given such galactic potentials, we set up a globular cluster system with a given initial state for masses, positions, and velocities by means of a Monte Carlo simula-

tion. In the Milky Way, available globular clusters appear to be coeval within ~ 1 Gyr (Salaris & Weiss 2002). Its value is, however, within the typical uncertainty of stellar evolutionary models (~ 2 Gyr), thereby we neglect the effect of delayed formation of globular clusters.

First, we assume that the mass function of clusters is given as,

$$\psi(M) \propto \begin{cases} 0 & M > 10^7 M_\odot, \\ M^{-2} & M_{\text{low}} \leq M \leq 10^7 M_\odot, \\ 0 & M < M_{\text{low}}. \end{cases} \quad (3.1)$$

We note that the slope at the intermediate mass range resembles that of the mass function of old globular clusters in the Milky Way and also that of young star clusters in the merging Antennae galaxies (FZ01; Zhang & Fall 1999). The upper bound is set at $M = 10^7 M_\odot$ as it appears to yield the most massive Galactic globular cluster, ω Cen, which has a total mass of $5 \times 10^6 M_\odot$, after 13 Gyr evolution in our models (Meylan et al. 1995). The lower bound, M_{low} , is set at $M = 10^5 M_\odot$ for the reason that almost all of clusters initially with $M < 10^5 M_\odot$ disappear after the Hubble time owing to tidal destruction; without this lower bound for an initial state, an available number of surviving clusters is extremely limited and is thus inappropriate for statistical analysis, given a limited number of Monte Carlo realizations. Based on this functional form, we generate the artificial data set for the masses of 1000 clusters by a Monte Carlo simulation.

Second, we assume that the positions of clusters follow the density distribution given in Eq.(2.21), where $r_A = 5$ kpc and $\gamma_g = 2.3$. We note that such a density distribution diverges at $\varpi \sim 0$, so we confine ourselves to $\varpi \geq 2$ kpc for the setting of 1000 clusters by a Monte Carlo simulation.

Third, for setting the velocities of clusters, we use the distribution function given in Eq.(2.19) and derive the corresponding velocity distribution as a function of distance from the galactic center, so that their superposition reproduces the spatial distribution as shown in Eq.(2.21). However, in most cases examined here, it is intractable to determine the model parameters of the distribution function (r_A , σ_c , and ϵ_0 in Eq.(2.19)) in a consistent manner, i.e., so as to reproduce both the given spatial and velocity distributions of clusters, because such distributions are fairly complex in axisymmetric galactic potentials. In contrast, in a spherical logarithmic potential $\Psi(r) = V_c \log r$, the velocity anisotropy of clusters is simply written as $\sigma_T/\sigma_r = [1 + (r/r_A)^2]^{-1/2}$, while their spatial distribution has a simple form of Eq.(2.21) expressed by r_A and γ_g (see Section 2). Since our adopted potential is rather similar to this logarithmic potential in the respect of yielding the flat part of its rotation curve, we attempt to approximate our axisymmetric potential in terms of such a spherical logarithmic form giving the same amplitude of the rotation curve at its flat part and the same cut-off radius. We then determine the three parameters, r_A , σ_c , and ϵ_0 in Eq.(2.21). Specifically, while r_A is fixed as its standard value (5 kpc), we derive ϵ_0 from the relative energy of a gravitational potential at $(\varpi, Z) = (250 \text{ kpc}, 0 \text{ kpc})$, whereas σ_c is derived from (in addition to $\gamma_g = 2.3$) the value of V_c , for which we adopt the amplitude of the rotation curve of our galactic potential at $\varpi = 100$ kpc. When setting the orbits of clusters, we avoid those with $I_2 \sim 0$ (i.e., polar orbits) as they are numerically unstable. Based on these methods, we generate the artificial data set for the velocities of 1000 clusters by a Monte Carlo simulation.

We numerically follow the orbits of these globular clusters using the fourth Runge-Kutta formula over the period of 13 Gyr and track their mass-loss processes in

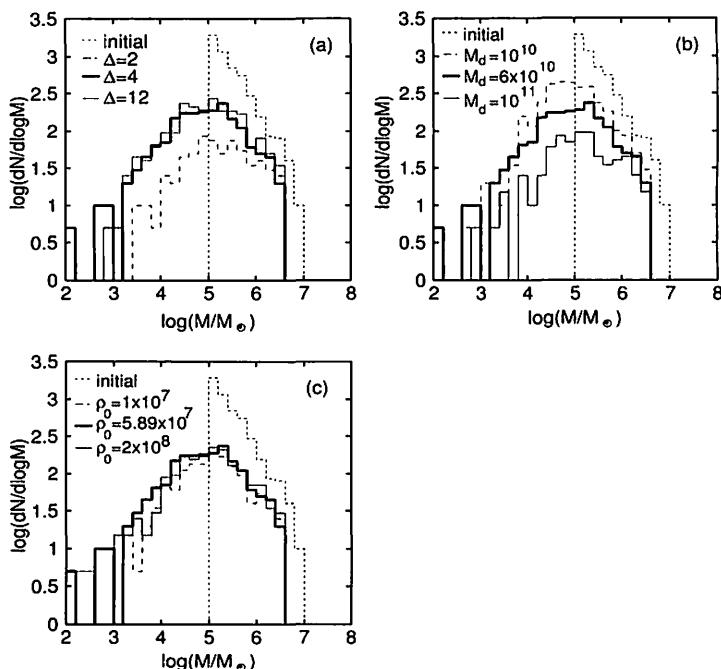


Figure 3.1: Evolution of the mass function of globular clusters in the galactic potentials with various values for (a) Δ [kpc], (b) M_d [$M_\odot$], and (c) ρ_0 [$M_\odot \text{ kpc}^{-3}$]. Dotted lines denote the initial mass function of clusters, whereas other lines show their mass functions after their 13 Gyr evolution in various galactic potentials.

the course of their orbital motion. We then analyze the characteristic properties of clusters after their 13 Gyr evolution, such as the total number or mass, mass function, spatial distribution, and velocity anisotropy.

(ii) Results

Fig.3.1(a), (b), and (c) show the mass functions of globular clusters in the galactic potentials with various values for Δ , M_d , and ρ_0 , respectively. Dotted lines denote the initial mass functions of clusters, whereas other lines show the mass functions after 13 Gyr. It follows that in all of the cases for galactic potentials, the mass function of clusters after 13 Gyr can be approximated by a log-normal function with a single peak near $M = 10^5 M_\odot$. The position of its peak is in good agreement with that of the observed one for available globular clusters in various galaxies, such as the Milky Way, M31, and other giant galaxies (disk and elliptical galaxies). Thus, the final mass function of globular clusters after the 13 Gyr evolution is insensitive to the difference in the form of gravitational potential of a host galaxy.

Fig.3.2 shows the mass functions of globular clusters for various values of M_{low} in the standard galactic potential. The left panel denotes the initial mass function of clusters, whereas the right panel shows their mass function after 13 Gyr. It follows that as long as $M_{low} \leq 10^5 M_\odot$, the mass function of clusters after 13 Gyr can be approximated by a log-normal function with a single peak near $M = 10^5 M_\odot$, whereas, in the case of $M_{low} = 10^6 M_\odot$, the mass function shows a tail at low-mass end and its peak is shifted toward larger mass. Thus, provided $M_{low} \leq 10^5 M_\odot$, the mass function of clusters after their 13 Gyr evolution resembles the observed one with

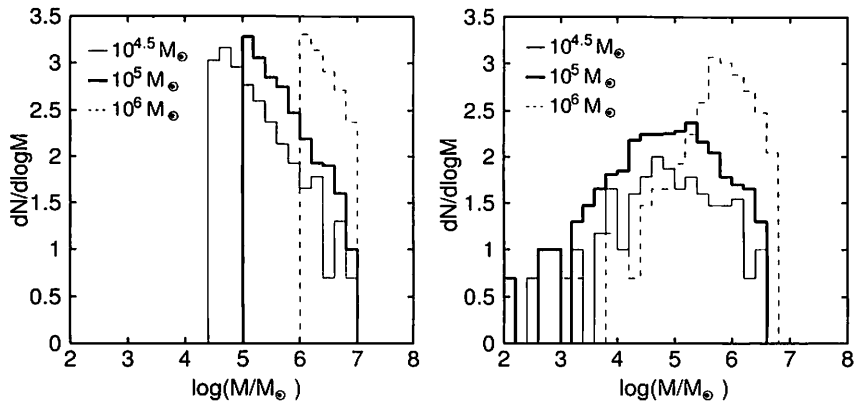


Figure 3.2: Evolution of the mass function of globular clusters for various values of M_{low} in the standard galactic potential. The left panel denotes the initial mass function of clusters, whereas the right panel shows their mass function after 13 Gyr.

a peak at $M \sim 10^5 M_\odot$. This is because globular clusters initially with $M \leq 10^5 M_\odot$ are efficiently destructed within 13 Gyr, mainly by two-body relaxation of cluster stars, which is independent of their orbits and the form of their surrounding galactic potential.

Fig.3.3(a), (b), and (c) show the number density distribution of clusters in the galactic potentials with various values for Δ , M_d , and ρ_0 , respectively. Dotted lines denote the initial number density distribution of clusters, whereas other lines show the number density distributions after 13 Gyr. It is worth noting that the number density of clusters in all galactic potentials appears to decrease in its inner part of a galaxy ($r \lesssim 10$ kpc), whereas in its outer part ($r \gtrsim 10$ kpc) the density remains unchanged. This is because many clusters are destructed where galactic tides are strong, i.e., in the inner part of a galaxy rather than its outer part.

In Figs.3.4 and 3.5, we plot both the initial and final states for the velocity anisotropy of clusters when various values for ρ_0 , M_d , and Δ , are adopted, respectively (as denoted by different symbols). Dotted lines correspond to the initial states, whereas solid lines show the velocity anisotropy of clusters after 13 Gyr. We note that all of the three dashed lines in each panel match well, indicating that whatever parameters for a gravitational potential are adopted, we successfully obtain the same initial velocity anisotropy for all cases, i.e., the same initial setting for the velocity distribution. It follows from these figures that the ratios, σ_ϕ/σ_r and σ_θ/σ_r , after their 13 Gyr evolution, tend to become larger than their initial values, i.e., the velocity anisotropy is made more tangential than the initial one, although such velocity changes depend on the model parameters of a galactic potential and either of the inner or outer part of a host galaxy. This is because clusters on orbits having high eccentricities are able to pass near the galactic center so that such clusters are tidally destructed more effectively than those on low-eccentricity orbits.

We examine in more detail how the preferential destruction of clusters on radial orbits occurs in our models. Figs. 3.6 and 3.7 show the velocity distributions of clusters as a function of r for V_r , V_ϕ , and V_θ , respectively. The upper and lower panels show the initial and final states of clusters, respectively, and three different potentials with increasing ρ_0 from panel (a) to (c) are investigated. Comparison

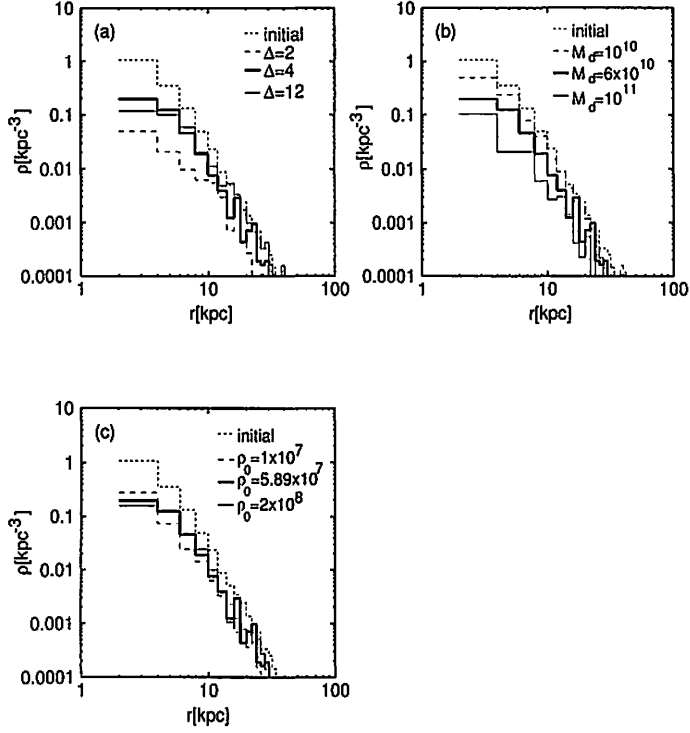


Figure 3.3: Evolution of the number density distribution of globular clusters in the galactic potentials with various values for (a) Δ [kpc], (b) M_d [$M_\odot$], and (c) ρ_0 [$M_\odot$ kpc⁻³]. Dotted lines denote the initial number density distribution of clusters, whereas other lines show their number density distributions after their 13 Gyr evolution in various galactic potentials.

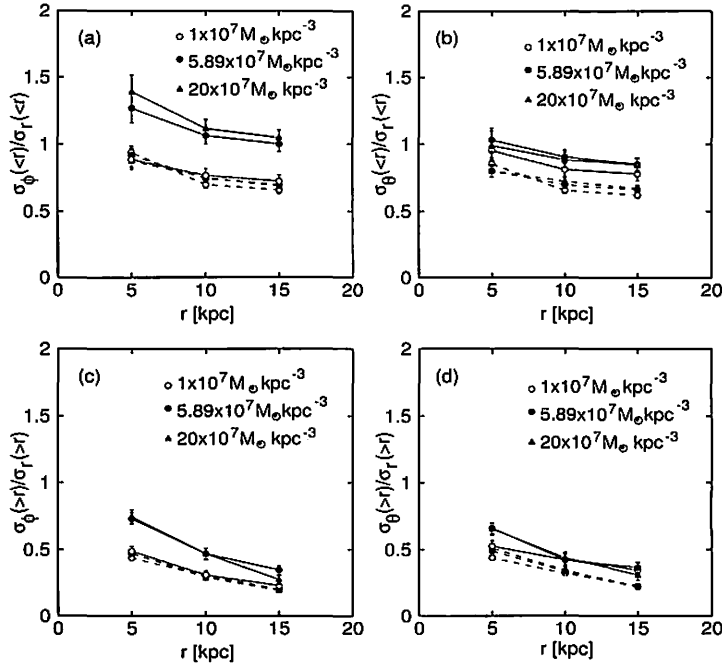


Figure 3.4: Evolution of the velocity anisotropy of globular clusters in the galactic potentials with various values for ρ_0 : (a) σ_ϕ / σ_r and (b) σ_θ / σ_r of clusters *inside* given galactic radii, and for clusters *outside* these radii (c) σ_ϕ / σ_r and (d) σ_θ / σ_r . Dotted lines correspond to the initial states, whereas solid lines show the velocity anisotropy of clusters after 13 Gyr.

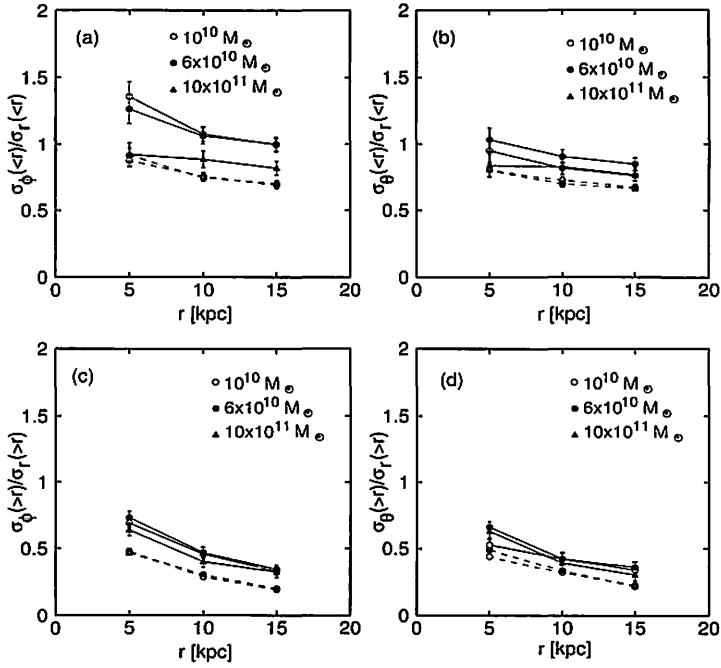


Figure 3.5: Evolution of the velocity anisotropy of globular clusters in the galactic potentials with various M_d : (a) σ_ϕ/σ_r and (b) σ_θ/σ_r of clusters *inside* given galactic radii, and for clusters *outside* these radii (c) σ_ϕ/σ_r and (d) σ_θ/σ_r . Dotted lines correspond to the initial states, whereas solid lines show the velocity anisotropy of clusters after 13 Gyr.

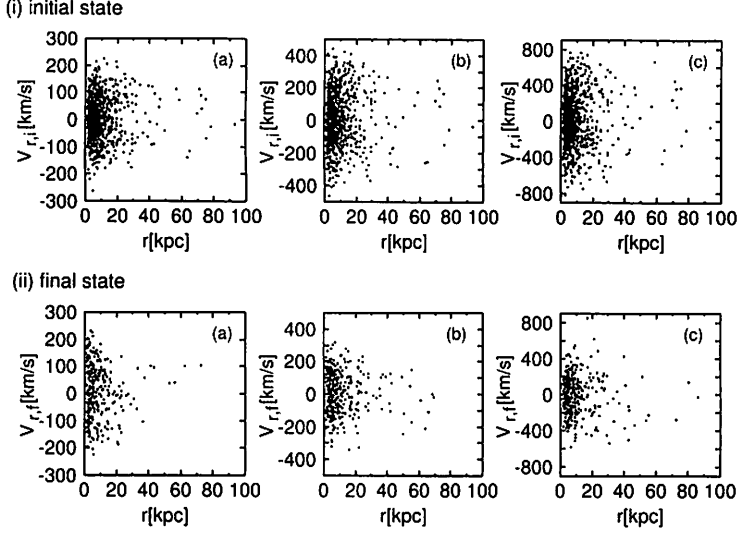


Figure 3.6: V_r -distribution of clusters as a function of r in the galactic potentials with $\rho_0 =$ (a) 1×10^7 , (b) 5.89×10^7 , and (c) $20 \times 10^7 M_\odot \text{ kpc}^{-3}$. The upper and lower panels show the initial and final states of clusters, respectively.

between the upper and lower panels in Fig.3.6 suggests that clusters at $r \sim 10$ kpc and with large $|V_r|$ are preferentially destroyed, such as those at $(r, V_r) \sim (10, \pm 400)$ in the panel (b) and $\sim (10, \pm 700)$ in the panel (c). The orbits of such clusters are characterized by high eccentricity and energy, thereby having large probabilities to be tidally destroyed owing to their small pericentric distances. This is also inferred from Fig. 3.7, where we find that many clusters with $V_\phi \sim 0$ or $V_\theta \sim 0$ disappear after 13 Gyr. The orbits of such clusters are characterized by small angular momentum, or in other words, radial orbits. Therefore, because of the preferential destruction of radial orbits by galactic tides, the velocity anisotropy of clusters tends to become more tangential, i.e., biased toward θ or ϕ direction after their 13 Gyr evolution.

5.89×10^7 , and (c) $20 \times 10^7 M_\odot \text{ kpc}^{-3}$.

While the evolution of their full space velocities as well as of the positions in a host galaxy are available for our model clusters, actually available observables in an extragalactic cluster system are limited: the likely true spatial distribution of clusters is available only for edge-on disk galaxies, because the absorption effects of interstellar gas in disks make it difficult to detect clusters in other disk orientations. Also, only line-of-sight velocities are measurable for extragalactic clusters. Thus, we calculate the line-of-sight velocities from the full space motions of the model clusters as seen from the direction parallel to the galactic disk and investigate the evolution of such velocity components.

Figs.3.8 and 3.9 show the line-of-sight velocity dispersions of cluster systems in galactic potentials with three different values for ρ_0 , M_d , and Δ , respectively. Dashed and solid lines show the initial and final states, respectively. Each plot is normalized at the projected distance s of 15 kpc (left panel) and 5 kpc (right panel), so that the dependence on s appears clearly. It follows that the line-of-sight velocity dispersions of cluster systems are rather insensitive to their dynamical evolution, irrespective of different galactic potentials. This may be explained by the fact that line-of-sight

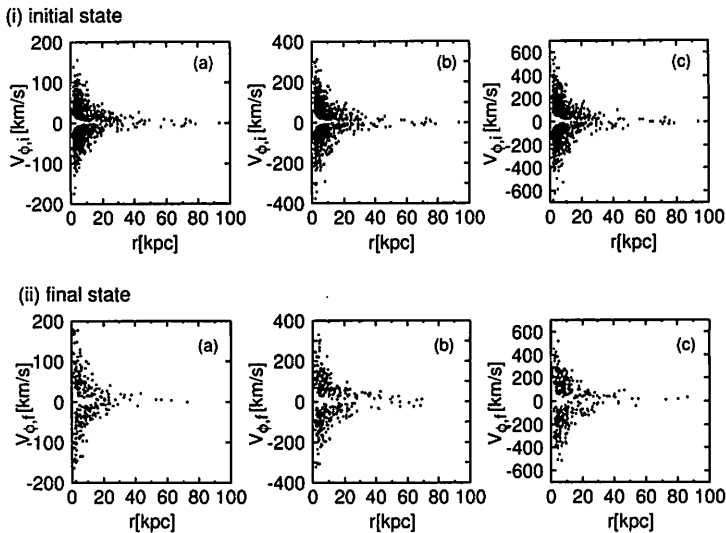


Figure 3.7: V_ϕ -distribution of clusters as a function of r in the galactic potentials with $\rho_0 =$ (a) 1×10^7 , (b) 5.89×10^7 , and (c) $20 \times 10^7 M_\odot \text{ kpc}^{-3}$. The upper and lower panels show the initial and final states of clusters, respectively.

velocities are calculated from the combination of V_r , V_ϕ , and V_θ , so that specific change of each velocity component may be somehow canceled out in the line-of-sight velocity space.

3.2 Effects of various initial conditions

Next, we investigate how different settings of initial condition for a globular cluster system affect its evolution while its surrounding galactic potential is fixed. In particular, we focus on how the initial kinematic structure of a cluster system affects its total number, mass function, spatial distribution, and kinematic structure at the present epoch.

(i) Setting a cluster system and its surrounding galactic potential

We adopt the standard parameter set for a galactic potential as presented in Section 2. Given such a potential, we set up three globular cluster systems having different kinematics. In order to see how the initial velocity anisotropy of a cluster system affects its dynamical evolution, we vary the value of r_A which marks the transition from a nearly isotropic to a predominantly radially anisotropic velocity dispersion; larger r_A provides more tangentially anisotropic velocity dispersion. We adopt $r_A = 3, 5$ (standard value), and 10 kpc. We fix other model parameters in Eqs.(2.19) and (2.21) as their standard values, while we adopt the form of Eq.(3.1) for the mass function of clusters. We note that the density profile of clusters only slightly varies with the value of r_A (see the part (ii) of this section). Based on these assumptions, we generate the artificial data set for the masses, positions, and velocities of 1000 clusters by a Monte Carlo simulation.

We numerically follow the evolution of these three cluster systems in the standard galactic potential over the period of 13 Gyr, and then analyze the characteristic properties of clusters after their evolution, such as the total number or mass, mass function, spatial distribution, and velocity anisotropy.

(ii) Results

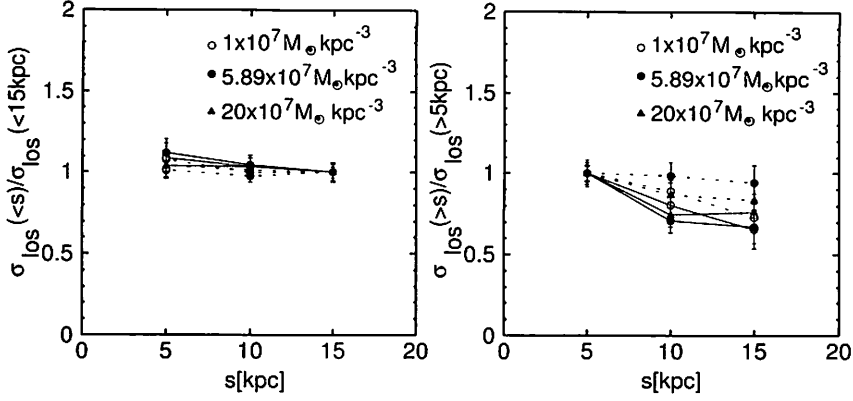


Figure 3.8: Line-of-sight velocity dispersions of cluster systems in galactic potentials with three different values for ρ_0 . The left and right panels show the line-of-sight velocity dispersion of clusters inside and outside galactic radii, respectively, and they are normalized by those at a given galactic radius. Dashed and solid lines show the initial and final states of cluters, respectively.

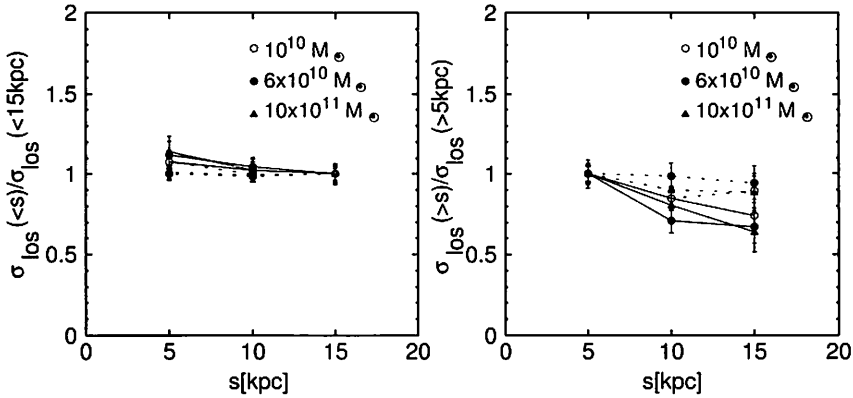


Figure 3.9: Line-of-sight velocity dispersions of cluster systems in galactic potentials with three different values for M_d . The left and right panels show the line-of-sight velocity dispersion of clusters inside and outside galactic radii, respectively, and they are normalized by those at a given galactic radius. Dashed and solid lines show the initial and final states of cluters, respectively.

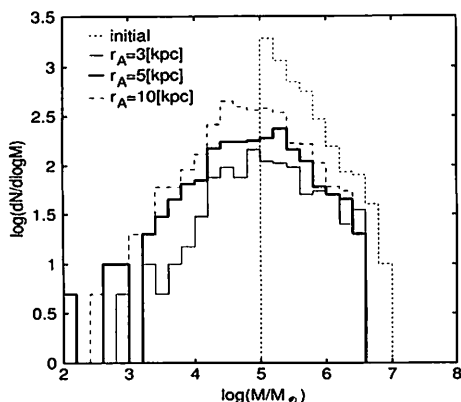


Figure 3.10: Evolution of the mass function of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential. The dotted line denotes the initial mass function of clusters, whereas other lines show their mass functions after 13 Gyr.

Fig.3.10 shows the mass function of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential. The dotted line denotes the initial mass function of clusters, whereas other lines show their mass functions after 13 Gyr. It follows that in all cases of clusters under various initial conditions for velocities, their mass function after 13 Gyr can be approximated by a log-normal function with a single peak near $M = 10^5 M_\odot$. The position of its peak is in good agreement with that of the observed one for available globular clusters in various galaxies. Thus, the final mass function of globular clusters after 13 Gyr is insensitive not only to the difference in the form of gravitational potential of a host galaxy but also to the difference in the initial velocity anisotropy of clusters.

Fig.3.11 shows the initial and final number density distributions of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential. The left panel denotes the initial number density distribution of clusters, whereas the right panel shows their density distributions after 13 Gyr. It follows from the left panel that all of initial density distributions of clusters match well at most parts of a galaxy, so the difference in the evolution among cluster systems with different values of r_A mainly depends on the different initial velocity anisotropy. It is worth noting that the density of clusters after 13 Gyr appears to decrease in the inner part of a galaxy ($r \lesssim 10$ kpc), whereas in its outer part ($r \gtrsim 10$ kpc) the density remains unchanged. This is because many clusters are destroyed where galactic tides are strong, i.e., in the inner part of a galaxy rather than its outer part.

Figs.3.12 shows the ratios σ_ϕ/σ_r and σ_θ/σ_r of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential, respectively. The left and right panels show the initial and final states of clusters, respectively. It follows from the comparison between left and right panels that the ratios σ_ϕ/σ_r and σ_θ/σ_r of clusters after 13 Gyr tend to become larger than their initial value: the velocity anisotropy of clusters is made more tangential than the initial one. This is due to the preferential destruction of clusters on radial orbits by galactic tides, as seen in Section 3. It also suggests that at the outer part of the galaxy, the ratios σ_ϕ/σ_r and σ_θ/σ_r of clusters after 13 Gyr depend on the initial condition as described by the value of r_A , because the amount of dynamical evolution at such outer part is small. Thus, although

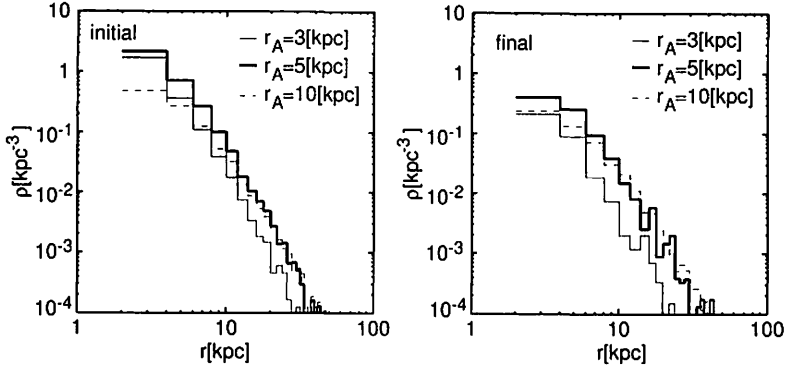


Figure 3.11: Evolution of the number density distribution of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential. The left panel denotes the initial number density distribution of clusters, whereas the right panel shows their density distributions after 13 Gyr.

the velocity anisotropy of clusters after 13 Gyr has greatly changed by dynamical evolution, we may see their initial kinematical state at the outer part of a galaxy.

3.3 Initial total mass of a globular cluster system in a disk galaxy

(i) Dependence of the surviving total mass of clusters on model parameters

We summarize how the total number or mass of globular clusters under various initial kinematic structures evolve in various galactic potentials. We note that, since we neglect the evolution of clusters initially with $M < 10^5 M_\odot$ (see Eq.(3.1)), we do not follow the evolution of the total number of clusters but that of their *total mass*, which can be minimize the evolutionary effect of clusters initially with $M < 10^5 M_\odot$.

Fig.3.13 shows the total mass of globular clusters under various initial values for r_A as a function of the model parameter for the galactic potential, i.e., ρ_0 , M_d , and Δ . Each panel shows the ratio of the surviving total mass of clusters after 13 Gyr, $M_{GC,f}^{tot}$, to their initial total mass, $M_{GC,i}^{tot}$, indicating their surviving fraction. It follows that the surviving total mass of clusters varies largely with the values of M_d and Δ , whereas it remains unchanged by the value of ρ_0 . This is because the pericenters of clusters, where we calculate their tidal radii, are located near the disk, so that their destructions by galactic tides are sensitive to only the model parameters for the disk, M_d and Δ . It is worth noting that the surviving fraction of clusters increases with increasing the initial value for r_A : a cluster system initially under a tangential velocity anisotropy has more surviving clusters after 13 Gyr than that initially under a radial one. This is because a cluster system initially under tangential velocity anisotropy has a more extensive distribution of the pericenters than that initially under radial one, so that the number of clusters destroyed by galactic tides decreases.

(ii) Surviving total mass of clusters in actual galaxies

We investigate what extent of the difference in evolution of the total mass occurs among globular clusters under various kinematic structures in actual disk galaxies, which follow the Tully-Fisher relation (Pierce & Tully 1992; Verheijen 1997, 2001; de Blok 2002).

We adopt the parameter sets (ρ_0, M_d, Δ) for gravitational potentials of three actual

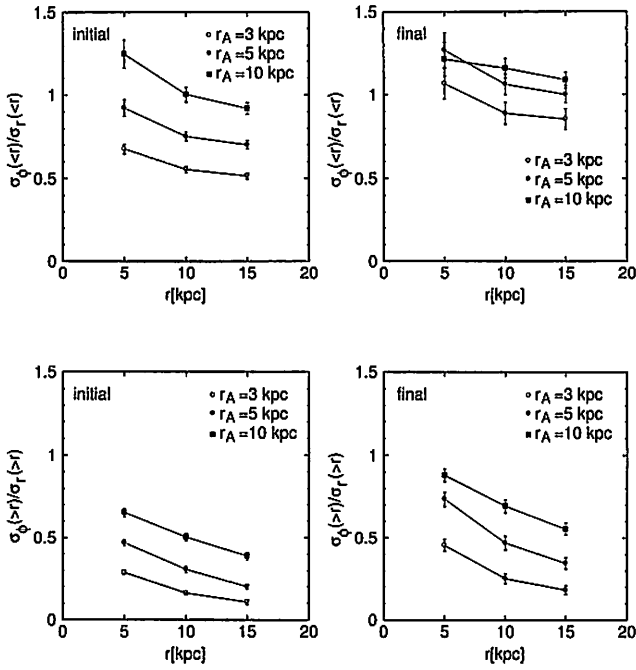


Figure 3.12: Evolution of the ratio σ_ϕ/σ_r of globular clusters for various values of r_A in the standard galactic potential: that for clusters inside given galactic radii (upper panels) and for clusters outside these radii (lower panels). The left and right panels show the initial and final states of clusters, respectively.

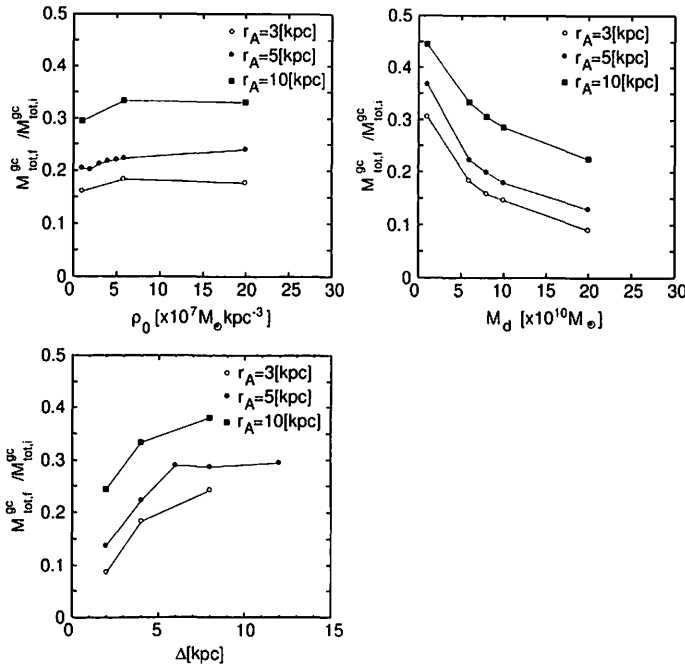


Figure 3.13: Surviving total mass of globular clusters under various initial values of r_A as a function of the model parameter for the galactic potential, (a) ρ_0 , (b) M_d , and (c) Δ . The total masses of $M_{GC,i}^{tot}$ and $M_{GC,f}^{tot}$ show the initial and final total mass of clusters, respectively.

galaxies (Models I, II, and III), as follow the Tully-Fisher relation $M_d \propto V_{flat}^{3.5}$, where V_{flat} denotes the amplitude of the rotation curve of a galaxy at its flat part (Bell & de Jong 2001). The parameter sets of the three galaxies are summarized in Table 20.

Fig.3.14(a) shows the rotation curves of three galactic potentials, and in Fig.3.14(b) we plot the mass densities of the dark halo component alone and of total components (including both the dark halo and disk) at $(\varpi, Z) = (8 \text{ kpc}, 0 \text{ kpc})$. Dotted lines denote the boundaries of these mass densities in the solar neighborhood as suggested from previous works in the panel (b) (the total mass density: Cr  z   et al. and Holmberg & Flynn 2000; the mass density of the halo component alone: Gates et al. 1995). The galaxy of Model II is in approximate agreement with the Milky Way on the characteristic properties, i.e., the mass densities of the disk and halo components and rotation curve.

We adopt $r_A = 3, 5$, and 10 kpc for setting three globular cluster systems under different kinematic structures in the three galactic potentials. We generate an artificial data set for masses, positions, and velocities of 1000 clusters by a Monte Carlo simulation. We follow the evolution of the globular clusters in the galactic potentials over the period of 13 Gyr, and investigate the total mass of clusters after 13 Gyr.

We plot the surviving fraction of clusters, $M_{GC,f}^{tot}/M_{GC,i}^{tot}$, under various initial values for r_A in the galactic potential with various values for V_{flat} in Fig.3.15. It is worth noting that the surviving fraction varies with increasing the initial value of r_A by a factor of ~ 2 , even if we fix a galactic potential. It suggests that the observed difference in the total number of globular clusters among various galaxies

Table 20: Parameter sets for the gravitational potentials of actual galaxies

Model	$\rho_0 (\times 10^7 M_\odot \text{kpc}^{-3})$	$M_d (\times 10^{10} M_\odot)$	$\Delta (\text{kpc})$
I	24.8	11.3	2.7
II	13.5	3.8	2.7
II	8.6	1.7	2.7

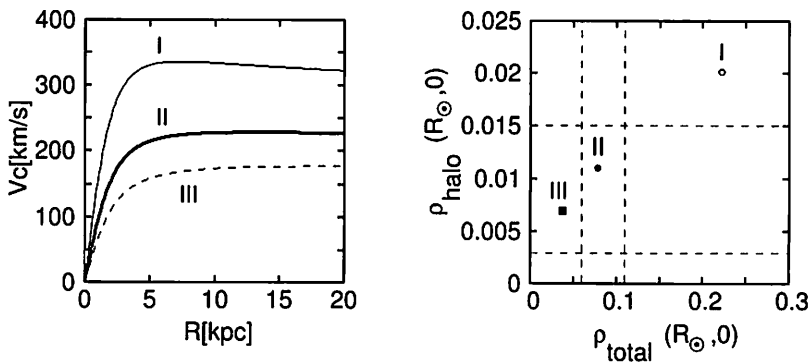


Figure 3.14: (a) Rotation curves of galactic potentials and (b) mass density of the dark halo component alone and of total components (including both the dark halo and disk) at $(\varpi, Z) = (8 \text{ kpc}, 10 \text{ kpc})$. Dotted lines denote the boundaries of these mass densities in the solar neighborhood as suggested from previous works in the panel (b). See the text for more information on the boundaries.

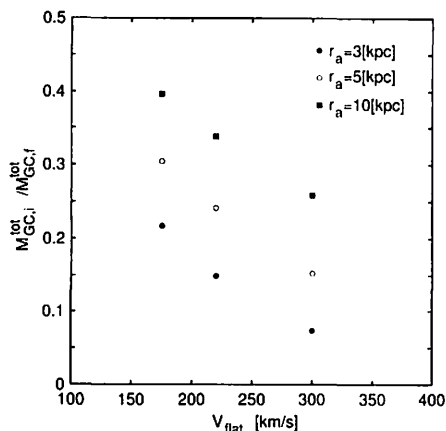


Figure 3.15: Surviving fraction of clusters under various initial values for r_A in the galactic potential with various values for V_{flat} .

may be caused by the different initial velocity distribution of clusters, even if the initial total number is the same when a galaxy forms.

4 Discussion: initial state of a globular cluster system

We discuss the initial state of a globular cluster system in actual disk galaxies with various luminosities and morphology types. In particular, we focus on the different total number of observed clusters in the available galaxies and discuss the initial total number and kinematic structure of a cluster system.

As described in the previous section, a globular cluster system initially under a tangential velocity distribution results in a higher surviving fraction of clusters than that initially under a radial one because the former has a more extensive distribution for the pericenters of orbits. We note that our models for the velocity distribution of a globular cluster system assume no systematic rotation, whereas observed cluster systems in some galaxies show a large systematic rotation toward a galactic rotation, such as in M31 (Perrett et al. 2002). Taking into account the dependence of a surviving fraction of clusters on their pericenter distribution, we infer that the surviving fraction may be large for a cluster system with a large systematic rotation: such a cluster system is expected to hold larger pericenters for the orbits of their member clusters than that under no rotation, so that the number of clusters destructed by galactic tides decreases. Thus, the effect of a large systematic rotation is similar to that of a tangential velocity distribution for clusters in our models.

We then investigate the initial total number and kinematics of globular clusters in the Milky Way and M31 by considering the different total number of the observed clusters. The total number of the observed clusters in M31 is approximately twice as large as that in the Milky Way, as described in Chapter 2.1. This may be explained by the evolutionary effect of a globular cluster system with different kinematics: an initial cluster system in M31 may have had a more tangential velocity dispersion than that in the Milky Way, whereas the initial cluster systems in both galaxies contained the same number of clusters. Perrett et al. (2002) suggests that *both* of the metal-rich and metal-poor globular cluster systems in M31 appear to have

a systematic rotation toward a galactic rotation, whereas in the Milky Way only the metal-rich cluster system has such a systematic rotation. Therefore, based on our results in Chapter 2.3.3, one might expect that the initial metal-poor globular clusters in the Milky Way are destructed more effectively by galactic tides than those in M31 over the Hubble time. Unfortunately, the observations of the line-of-sight velocities of globular clusters in M31 include a large uncertainty and are yet incomplete, especially in its outer halo, so it is very important to make it clear whether or not both the metal-poor and metal-rich cluster systems actually have a systematic rotation, based on a large and high-quality sample (Perrett et al. 2002; Barmby et al. 2000; Huchra et al. 1991).

An alternative hypothesis to explain the difference in the total number of the observed clusters between the Milky Way and M31 relies on the initial total number of clusters. M31 may be more massive than the Milky Way, as the former has the larger amplitude of the rotation curve at its flat part than the latter (Caldwell & Ostriker 1981; Fich & Tremaine 1991; Kent 1989; Braun 1991; Widrow et al. 2003). Therefore, since M31 may have contained larger amounts of cluster-forming gas at the epoch of galaxy formation than the Milky Way, the former may have formed more clusters at the initial state than the latter.

These considerations for the total number of clusters in the Milky Way and M31 suggest that initial globular cluster systems formed in various disk galaxies are different from each other (I) in the total number or (II) in the kinematic structure, specifically, the existence of a systematic rotation.

In order to discriminate these two hypotheses for initial state of a globular cluster system, it is very important to investigate whether or not the total number of clusters in various disk galaxies correlates with their kinematics. If the evolutionary effect of a cluster system with different kinematics causes the different total number of observed clusters, then a cluster system with many surviving clusters after the Hubble time might be expected to have a strong systematic rotation.

For achieving this kind of analysis, it is necessary to obtain the total number of clusters in large numbers of galaxies. Fortunately, it is possible to resolve the cluster systems in about 20 edge-on disk galaxies within the distance of 5 Mpc from the Milky Way by the Subaru telescope (Saito 2002). Thus, systematic observations of clusters with Subaru will provide us with the relation between the total number of observed clusters and the characteristic properties of their host galaxies, such as their total luminosities, morphology types, and amplitudes of the rotation curves at their flat parts.

It is also indispensable to investigate the kinematics of observed clusters in disk galaxies with various luminosities and morphology types. Since very luminous galaxies ($M_V \lesssim -21.5$ mag) contain a huge number of clusters, i.e., an order of magnitude more than in the Milky Way, it is expected that such bright galaxies have strong systematic rotation of cluster systems to survive such a large number of clusters. Also, the large sample of clusters will reduce the statistical uncertainty for deriving the mean rotation velocity of a cluster system. Therefore, it is very important to investigate the kinematics of clusters in a high-luminosity disk galaxy ($M_V \lesssim -21.5$ mag) for the purpose of exploring the difference in the initial state of cluster systems among disk galaxies with various luminosities.

In addition, some galaxies having observed clusters (NGC 4565, NGC 5907, NGC

7814, and NGC 3628¹) are similar to the Milky Way in respect of the amplitudes of the rotation curves at their flat parts. However, they appear to have the different bulge-to-disk luminosity ratios and the different properties of the disk, i.e., the existence of the thick disk (Morrison et al. 2003), in comparison with the Milky Way. Therefore, they can be good tracers to explore the difference in the initial state of cluster systems among disk galaxies with various morphology types.

References

- [1] Barmby, P., Huchra, J. P., Brodie, J. P., Forbes, D. A., Schroder, L. L., & Grillmair, C. J., 2000, *AJ*, 119, 727
- [2] Barmby, P., & Huchra, J., 2001, *AJ*, 122, 2458
- [3] Barmby, P., 2002, *astroph/0210629*
- [4] Baumgardt, H., 1998, *A&A*, 330, 480
- [5] Bell, E. F., & de Jong, R. S., 2001, *ApJ*, 550, 212
- [6] Braun, R., 1991, *ApJ*, 372, 54
- [7] Caldwell, A. J., & Ostriker, J. P., 1981, *ApJ*, 251, 61
- [8] Cr    , M., Chereul, E., Bienaym  , O., & Pichon, C., 1998, *A&A*, 329, 920
- [9] Dejonghe, H., & de Zeeuw, T., 1988, *ApJ*, 333, 90
- [10] de Block, W. J. G., 2002, *ASP*, 273, 19
- [11] de Zeeuw, T., 1985, *MNRAS*, 216, 273
- [12] de Zeeuw, T., Peletier, R., & Franx, M., 1986, *MNRAS*, 221, 1001
- [13] Fall, S. M., & Zhang, Q., 2001, *ApJ*, 561, 751 (FZ01)
- [14] Fich, M., & Tremaine, S., 1991, *ARA&A*, 29, 409
- [15] Fusi Pecci, F., Cacciari, C., Federici, L., & Pasquali, A., 1993, *ASP*, 48, 410
- [16] Gates, E., Gyuk, G., & Turner, M. S., 1995, *ApJ*, 449, L123
- [17] Goudfrooij, P., Strader, J., Brenneman, L., et al, 2003, *MNRAS*, 343, 665
- [18] Harris, W. E., 1991, *ARA&A*, 29, 543
- [19] H    n, M., 1961, *Ann. d'Astrophys*, 24, 369
- [20] Huchra, J. P., Brodie, J. P., & Kent, S. M., 1991, *ApJ*, 370, 495
- [21] Holmberg, J., & Flynn, C., 2000, *MNRAS*, 313, 209
- [22] Kent, S., 1989, *PASP*, 101, 489
- [23] King, I., 1962, *AJ*, 67, 471
- [24] King, I., 1966, *AJ*, 71, 64
- [25] Kissler-Patig, M., Ashman, K. M., Zepf, S. E., & Freeman, K. C., 1999, *AJ*, 118, 197
- [26] Kundi  , T., & Ostriker, J. P., 1995, *ApJ*, 438, 702
- [27] Larsen, S. S., Forbes, D. A., & Brodie, J. P., 2001, *MNRAS*, 327, 1116
- [28] Leitherer, C., Schaerer, G., Goldader, J. D., et al., 1999, *ApJS*, 123, 3
- [29] Meylan, G., Mayor, M., Duqueno  y, A., & Dubath, P., 1995, *A&AS*, 303, 761
- [30] Morrison, H. L., Harding, P., Perrett, K., & Hurley-Keller, D., 2003, *astroph/0307302*
- [31] Murali, C., & Weinberg, M. D., 1997a, *MNRAS*, 288, 749
- [32] Murali, C., & Weinberg, M. D., 1997b, *MNRAS*, 288, 767
- [33] Murali, C., & Weinberg, M. D., 1997c, *MNRAS*, 291, 717
- [34] Okazaki, T., & Tosa, M., 1995, *MNRAS*, 274, 48 *ASP*, 207, 275
- [35] Ostriker, J. P., Spitzer, L., & Chevalier, R. A., 1972, *ApJ*, 176, L51
- [36] Perrett, K. M., Bridges, T. J., Hanes, D. A., Brodie, J. P., Carter, D., 2002, *AJ*, 123, 2490
- [37] Pierce, M. J., & Tully, R. B., 1992, *ApJ*, 387, 47
- [38] Saito, Y., 2002, *Ph D Thesis*, Tokyo Univ.
- [39] Salaris, M., & Weiss, A., 2002, *A&AS*, 388, 492
- [40] Spitzer, L., 1987, *Dynamical Evolution of Globular clusters*, Princeton Univ. Press, Princeton
- [41] Spitzer, L., & Chevalier, R. A., 1972, *ApJ*, 183, 565
- [42] Taylor, J. E., & Babul, A., 2001, *ApJ*, 559, 716
- [43] Vedel, H., & Sommer-Larsen, J., 1990, *ApJ*, 359, 104
- [44] Verheijen, M. A. W., 1997, *Ph D Thesis*, Univ. of Groningen
- [45] Verheijen, M. A. W., 2001, *ApJ*, 563, 694

¹It appears to interact with NGC 3627 about 8×10^8 yr ago, so it may have intermediate-age star clusters which are formed during the tidal interaction (Goudfrooij et al. 2003).

- [46] Vesperini, E., 1997, MNRAS, 287, 915
- [47] Vesperini, E., 1998, MNRAS, 299, 1019
- [48] Vesperini, E., Zepf, S. E., Kundu, A., & Ashman, K. M., 2003, ApJ, 593, 760
- [49] Widrow, L. M., Perrett, K. M., & Suyu, S. H., 2003, ApJ, 588, 311
- [50] Zhang, Q., & Fall, S. M., 1999, ApJ, 527, L81
- [51] Zinn, R., 1985, ApJ, 293, 424

Antonov Problem and Quasi-Equilibrium State in N-body Systems

Atsushi TARUYA¹ and Masa-aki SAKAGAMI²

¹*Research Center for the Early Universe(RESCEU), School of Science, University of Tokyo,
Tokyo 113-0033, Japan*

²*Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University, Kyoto 606-8501,
Japan*

ABSTRACT

In this article, a quantitative characterization for the evolutionary sequence of stellar self-gravitating system is investigated, focusing on the pre-collapse stage of the long-term dynamical evolution. In particular, we consider the quasi-equilibrium behaviors of the N -body systems in the setup of the so-called Antonov problem, i.e., self-gravitating N -body system confined in an adiabatic wall and try to seek a possible connection with thermostatics of self-gravitating systems. For this purpose, a series of long-term N -body simulations with various initial conditions are performed. We found that a quasi-equilibrium sequence away from the thermal equilibrium can be characterized by the one-parameter family of the stellar models. Especially, the stellar polytropic distribution satisfying the effective equation of state $P \propto \rho^{1+1/n}$ provides an excellent approximation to the evolutionary sequence of the N -body system. Based on the numerical results, we discuss a link between the quasi-equilibrium state and the generalized thermostatics by means of the non-extensive entropy.

1 Introduction

The long-term dynamical evolution of stellar self-gravitating system driven by the two-body relaxation is an old problem with rich history in astronomy and astrophysics and even in statistical physics. The problem, in nature, involves the long-range attractive nature of gravity and because of its complexity and peculiarity as well as the physical reality, astronomers and statistical physicists have attracted much attention on this subject.

Historically, an important consequence from the thermodynamical arguments had arisen in the 1960s. [4] first pointed out that no stable equilibrium state exists for a high-dense clusters. To prove this, he considered a very idealized situation called *Antonov problem*, i.e., a stellar self-gravitating system confined in a spherical cavity with radius r_e . Then, under keeping the energy E and the mass M fixed, the standard statistical mechanical approach based on the maximum entropy principle leads to the conclusion that no stable equilibrium state exists for the larger radius $r_e > \lambda_{\text{crit}} (-E/GM^2)$, where λ_{crit} is the critical value ([28, 29] for pedagogical reviews). Note that the numerical value of λ_{crit} depends on the choice of the entropy and Antonov obtained $\lambda_{\text{crit}} = 0.335$ in the case adopting the Boltzmann-Gibbs entropy. Later, [23] re-examined this issue and showed that the unstable thermal state found by Antonov can be explained by the thermodynamic instability arising

from the negative specific heat. They especially called the instability *gravothermal catastrophe*.

Since the 1960s, the gravothermal instability discovered by Antonov has become a standard notion of the stellar dynamics and the role of the instability has been extensively discussed. Thanks to the unprecedented development of the computer facility as well as the sophisticated numerical techniques based on the N -body simulation and the Fokker-Planck calculation, our view of the late-time phase of the stellar gravitating system has dramatically improved (e.g., [27, 15]). Among various theoretical developments, one important landmark would be a discovery of the *gravothermal oscillation*, which was originally suggested by [34] (see also [8]) and was later confirmed by numerical simulation [24]. With a great advantage of a special purpose hardware, GRAPE (e.g., [35, 17]), the core-collapse triggered by gravothermal instability was shown to be terminated by the formation of binary as a result of three-body interaction and the oscillatory behaviors of the core motion has been clearly revealed. The gravothermal oscillation is thus thought to be one of the most fundamental stellar dynamical processes and provides a basis to understand the dynamical history of globular clusters as real astronomical system.

So far the theory of long-term evolution in stellar self-gravitating systems has been developed without any recourse to the statistical mechanics or thermodynamics except for the seminal works by [4] and [23]. This is essentially because the issues under consideration are, in nature, non-equilibrium problem with long-range interaction and usual sense of the thermal equilibrium becomes inadequate. Indeed, as [4] emphasized, no strict meaning of the thermal equilibrium exists in the case of an isolated stellar system without boundary. Nevertheless, thermostatical point-of-view is helpful in predicting the fate of the unstable system. This would be even true in the non-equilibrium situation as long as the collisional evolution during the relaxation timescales is concerned. In this sense, there might be some possibilities to recast the non-equilibrium self-gravitating systems in terms of an extended view of the thermostatics.

Indeed, the self-gravitating system may provide a viable testing ground for the recent postulated introduction of a non-extensive generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, originally proposed by [44]. It is expected to deal with a variety of interesting non-equilibrium problems such as quasi-steady state or quasi-equilibrium state far from the thermal equilibrium, to which the standard Boltzmann-Gibbs statistics cannot be applied ([45, 3] for comprehensive reviews). The most distinctive feature in the non-extensive 'Tsallis' formalism is the pseudo-additivity of the entropy, which might be, in some sense, useful to characterize the long-range systems including the self-gravitating systems. In this respect, among various non-equilibrium problems, the self-gravitating system is one of the most preferable and interesting testing grounds for the framework of non-extensive statistics. Nevertheless, most of the works on this subject are concerned with construction of a consistent formal framework and little works have been known concerning the physical realization of the non-extensive statistics. Hence, it seems interesting to address the issues on the reality of non-extensive statistics.

In the light of this, we have recently re-examined the classic problem considered by [4] by means of the non-extensive thermostatics with 'Tsallis' generalized entropy ([37, 38, 39, 40, 32] for a review). In addition to the characterization of the extremum states of the Tsallis entropy, thermodynamic properties of quasi-equilibrium state

was investigated and the physical origin of the instability was also addressed. The important notice is that the quasi-equilibrium state of the Tsallis entropy is reduced to the one-parameter family of the stellar models, so-called *stellar polytropic distribution* (see also [30]). The existence of the instability indicated by the statistical mechanical analysis can be consistently explained from the presence of the negative specific heat in terms of the thermodynamics. Concerning the reality of the quasi-equilibrium state, however, it is still unclear whether the consistent thermostatical results really imply the existence of quasi-equilibrium state or not. To get a further insight into this issue, apart from the thermostatical analysis, dynamical and/or kinematical aspects of the self-gravitating system should be investigated in details using the N -body simulation, which we will discuss here.

The article is organized as follows. In section 1, we start to address the classic issue considered by [4] and [23] and briefly describe the setup of the problem. Within this, we consider the equilibrium properties of the self-gravitating system characterized by the maximum entropy principle based on both the extensive and the non-extensive entropies. We then move to discuss the N -body simulations. In section 3, the N -body treatment of the Antonov problem is considered and the initial conditions are summarized. Section 4 is a main part of this paper, which describes the results of N -body experiments in details. After checking the N -body code in section 4.1, we discuss the quasi-equilibrium behaviors of the long-term evolution starting with the stellar polytropic distribution in section 4.2 and try to fit their evolutionary sequences by the stellar polytropes, which are shown to be a remarkably good fit. The results are also compared with an alternative one-parameter family of stellar model, i.e., the King model. In section 4.3, we attempt to clarify the condition for quasi-equilibrium state characterized by the stellar polytropes in other class of initial conditions, i.e., the stellar models with cusped density profile. Finally, section 5 is devoted to the discussion and the conclusion.

2 Antonov problem and its non-extensive generalization

2.1 Timescales of self-gravitating systems

To get an intuitive insight into the long-term evolution of many-body self-gravitating systems, let us first consider a very simple situation: a circular motion of a particle of a mass m_0 and a velocity v at a radius r in a spherical mass distribution with a constant density ρ_0 :

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{G m_0 m(r)}{r^2}, \quad m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad (2.1)$$

where G is the gravitational constant and $m(r)$ is a mass contained within a sphere of a radius r . By means of an orbital period T , we define the dynamical time of the system as (e.g., p.57 of [7]):

$$t_{\text{dyn}} = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho_0}}, \quad (2.2)$$

which is recognized as a characteristic timescale for more general self-gravitating systems with mean density ρ_0 . A distribution of the self-gravitating system evolves

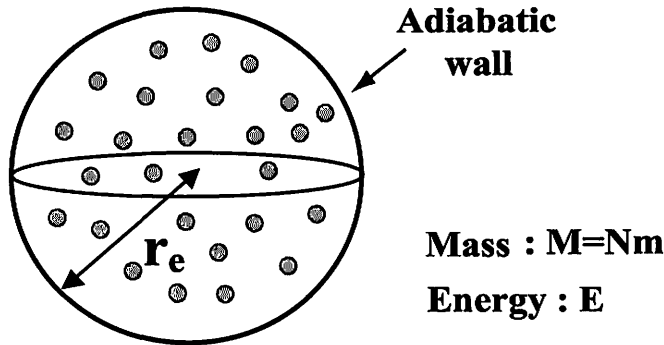


Figure 2.1: Setup of the Antonov problem.

with the timescale (2.2). In addition, the many-body self-gravitating system has another timescale, i.e., the relaxation time [11, 7]:

$$t_{\text{relax}} \sim \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{dyn}} \quad (2.3)$$

where N is a number of particles in the system. This timescale represents the relaxation processes due to scattering by gravitational interaction between each pair of particles.

Usually, one expects that a distribution of particles approaches the so-called thermal equilibrium state within the relaxation time (2.3). However, this is not necessarily the case for the self-gravitating systems, since it has a peculiar nature of a *negative specific heat*, which is explained through the following discussion. For the circular orbit obeying (2.1), the virial theorem is easily derived as

$$2K + U = 0, \quad (2.4)$$

where $K = m_0 v^2/2$ is the kinetic and $U = -Gm_0 m(r)/r$ the potential energies, respectively. In general, for a self-gravitating many-body system consisting of N particles, the same virial relation as (2.4) holds between the total kinetic and the total potential energy taking a long-time average (e.g., see chapter 8.1 of [7]). Thus the total energy E can be expressed as

$$E = K + U = -K. \quad (2.5)$$

If we introduce a temperature to characterize the total kinetic energy as $K = 3Nk_B T/2$, where k_B is the Boltzmann constant, then the equation (2.5) tells us that the specific heat of self-gravitating systems is *negative*:

$$C \equiv \frac{dE}{dT} = -\frac{3Nk}{2} < 0, \quad (2.6)$$

which suggests the existence of thermodynamical instability proceeding with the relaxation timescale (2.3).

2.2 Antonov problem by means of Boltzmann-Gibbs entropy

For more precise discussion on the thermodynamic properties of the self-gravitating systems, we now focus on the situation first considered by [4] and later by [23],

in which the many-body particles are confined in an adiabatic wall (Fig.2.1). The radius of the wall is given by r_e and we assume that the total mass M and the total energy E are kept fixed. The particles in this system interact via Newton gravity and bounce elastically from the wall. For further simplification, each particle is assumed to have the same mass m . Under these conditions, we consider a fully relaxed equilibrium state and clarify the stability or the instability for such a system.

In a language of thermostatics, a fully relaxed equilibrium state corresponds to the state that maximizes the entropy. To investigate equilibrium properties of the system, the Boltzmann-Gibbs entropy of the system is introduced:

$$S_{\text{BG}} = - \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^6\tau, \quad (2.7)$$

where $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ is the one-particle distribution function in phase-space. Here the phase-space measure is defined as

$$d^6\tau \equiv \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}}{h^3}, \quad h^3 \equiv (l_0 v_0)^3, \quad (2.8)$$

where h^3 denotes the phase-space element with unit length l_0 and unit velocity v_0 . Here, we set the Boltzmann constant to unity, i.e., $k_B = 1$. Maximum entropy state is then obtained by extremizing the entropy S_{BG} under keeping the total mass M and the energy E fixed:

$$\begin{aligned} M &= \int d^6\tau f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \\ E &= \int d^6\tau \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \Phi(\mathbf{x}) \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

The first variation with respect to f yields

$$0 = \delta S_{\text{BG}} - \alpha \delta M - \beta \delta E = \int d^6\tau \left[-(\ln f + 1) - \alpha - \beta \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \Phi(\mathbf{x}) \right\} \right] \delta f \quad (2.9)$$

where α and β are Lagrange multipliers. The above equation leads to the *isothermal distribution*:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = e^{-1-\alpha-\beta\{v^2/2+\Phi(\mathbf{x})\}} \quad (2.10)$$

which can be rewritten as

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{3/2} \rho(\mathbf{x}) e^{-\beta v^2/2} \quad (2.11)$$

with ρ being the mass density of the system defined by

$$\rho(\mathbf{x}) \equiv \int f \frac{d^3\mathbf{v}}{h^3}. \quad (2.12)$$

Computing the pressure, one can deduce that equation of state is indeed isothermal in the case of the isotropic velocity distribution:

$$P(\mathbf{x}) \equiv \int \frac{1}{3} v^2 f \frac{d^3\mathbf{v}}{h^3} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\beta}. \quad (2.13)$$

In ordinary systems, their thermal equilibrium states are homogeneous, that is, the system has a uniform density, however, this is not the case for the self-gravitating systems. For spherical systems which we are interested in, the amplitude of the density and the pressure should increase as decreasing the radius r in order to support the system against its self-gravity. It is shown that a series of equilibrium states is well parameterized by a value of the density contrast $D = \rho_c/\rho_e$, where ρ_c is a central density and $\rho_e = \rho(r_e)$ means the density at the wall. In next subsection, we present a procedure for calculation of the equilibrium state in more general situation.

In left panel of fig.2.2, we plot the dimensionless quantity $\lambda \equiv -r_e E/GM^2$ as a function of the density contrast D . Since the solid curve in this figure represents states which extremize the entropy, we note that no equilibrium state is attained, when the radius of the wall r_e is larger than the critical radius:

$$r_{\text{crit}} = \lambda_{\text{crit}} \frac{GM^2}{(-E)} ; \quad \lambda_{\text{crit}} = 0.335, \quad (2.14)$$

which corresponds to the state with the critical density contrast, $D_{\text{crit}} = 709$. Furthermore, it is shown that, along the curve $\lambda(D)$ derived from the condition $\delta S_{\text{BG}} = 0$, all states with $D > D_{\text{crit}}$ are unstable from the turning-point analysis for a linear series of equilibria [23, 28, 19, 20]. Also, the explicit evaluation of the eigenmodes for the second variation of the entropy $\delta^2 S_{\text{BG}}$ leads to the same results [29, 28]. The absence of stable thermal equilibria in this regime clearly indicates the instability, referred to as the *the gravothermal catastrophe*.

Heuristically, this instability is explained by the presence of negative specific heat as follows. In a fully relaxed gravitating system with sufficiently larger radius, negative specific heat arises at the inner part of the system and we have $C_v^{(\text{inner})} < 0$, while the specific heat at the outer part remains positive, $C_v^{(\text{outer})} > 0$, since one can safely neglect the effect of self-gravity. In this situation, if a tiny heat flow is momentarily supplied from inner to outer part, both the inner and the outer parts get hotter after the readjustment of the system. Now imagine the case, $C_v^{(\text{outer})} > |C_v^{(\text{inner})}|$. The outer part has so much thermal inertia that it cannot heat up as fast as the inner part, and thereby the temperature difference between inner and outer parts increases. As a consequence, the heat flow never stops, leading to a catastrophe temperature growth.

The right panel of figure 2.2 plots the dimensionless inverse temperature $\eta \equiv GM\beta/r_e$ with respect to the density contrast. Then we can evaluate the specific heat at constant volume,

$$C_v \equiv \left(\frac{dE}{dT} \right)_{r_e} = -\beta^2 \left(\frac{dE}{d\beta} \right)_{r_e} = M\eta^2 \frac{\left(\frac{d\lambda}{dD} \right)_{r_e}}{\left(\frac{d\eta}{dD} \right)_{r_e}}. \quad (2.15)$$

as shown in the fig.2.3.

In contrast to a naive discussion in previous subsection, the actual specific heat (2.15) changes its sign many times. We observe that the self-gravitating system confined in a wall with smaller radius has a positive specific heat. The reason is as follows. It is shown that the virial theorem for system surrounded by a boundary

leads not to (2.4) but to

$$2K + U = 3P_e V, \quad (2.16)$$

where P_e is the pressure at the wall and V the volume of the system (e.g., see Eq.(29) of [37]). For the case of a smaller radius, the surface energy dominates the gravitational energy of the bulk so that the system behaves as a normal one, i.e. $C_v > 0$. As the radius r_e increases, the gravitational energy becomes significant and the specific heat eventually changes its sign, $C_v < 0$, when the value of the density contrast becomes $D = 32.2$, corresponding to a peak of $\eta(D)$ curve (left panel of Fig.2.2).

At the onset of the gravothermal catastrophe, $D_{\text{crit}} = 709$, the specific heat C_v just vanishes, and becomes positive in the unstable segment of $\lambda(D)$ curve, $D > 709$. This fact implicitly indicates a role of the negative specific heat to the existence of thermodynamical instability in the self-gravitating system. Following the previous heuristic argument, above the critical point $D > D_{\text{crit}} = 709$, the specific heat of the total system becomes positive, $C_v = C_v^{(\text{inner})} + C_v^{(\text{outer})} > 0$, or equivalently,

$$C_v^{(\text{outer})} > -C_v^{(\text{inner})} > 0, \quad (2.17)$$

which means the outer normal part of the system has much heat capacity so that it cannot catch up with the temperature increase of the inner part.

2.3 Non-extensive generalization of Antonov problem

We now discuss a generalization of the analysis in previous subsection based on the Boltzmann-Gibbs entropy (2.7) to the case of non-extensive entropy introduced by [44]. Details of the thermodynamic properties as well as the stability analysis are shown in the literatures [37, 38, 39]. Regarding the function $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ as a one-particle distribution, the energy and the mass are respectively expressed as follows:

$$E = K + U = \int \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \Phi(\mathbf{x}) \right\} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^6 \tau, \quad (2.18)$$

$$M = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^6 \tau, \quad (2.19)$$

where the quantity $\Phi(\mathbf{x})$ is the gravitational potential given by

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{f(\mathbf{x}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^6 \tau'. \quad (2.20)$$

In extending the previous analysis to the case with non-extensive Tsallis' entropy, a crucial problem is the choice of the statistical average in non-extensive thermostatics. Here, we briefly report our investigation in [39] based on the new framework using normalized q -expectation values. In the new framework proposed by [46], all the macroscopic observables of the quasi-equilibrium system can be characterized by the escort distribution, but the escort distribution itself is not thought to be fundamental. Rather, there exists a more fundamental probability function $p(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ that quantifies the phase-space structure. With a help of this function, the escort distribution is defined and the macroscopic observables are expressed as the normalized

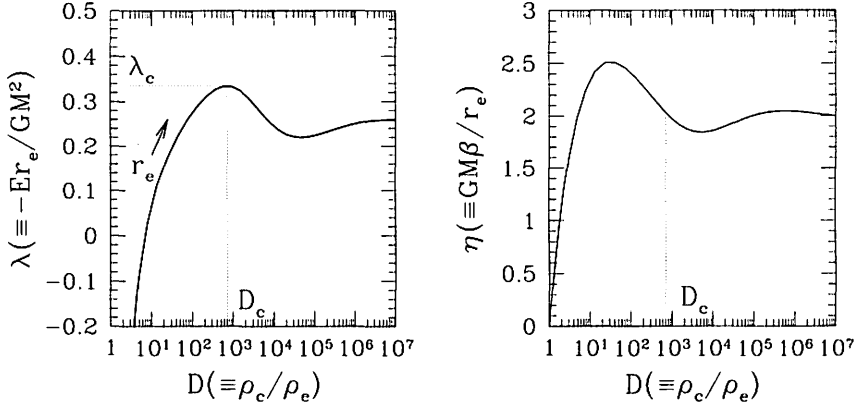


Figure 2.2: Energy-density contrast (*Left*) and temperature-density contrast relationships for isothermal stellar system.

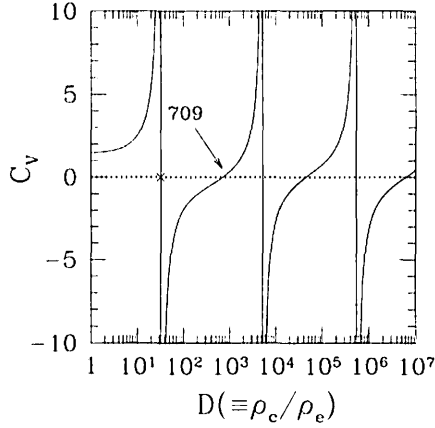


Figure 2.3: Specific heat as a function of density contrast $D = \rho_c/\rho_e$.

q -expectation value as follows (e.g., [46, 26]):

$$\text{escort distribution : } P_q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv \frac{\{p(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}^q}{\int d^6\tau \{p(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}^q}, \quad (2.21)$$

$$\text{normalized } q\text{-value : } \langle O_i \rangle_q \equiv \int d^6\tau O_i P_q(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (2.22)$$

Non-extensive Tsallis' entropy is expressed in terms of the fundamental probability $p(\mathbf{x}, \mathbf{v})$:

$$S_q = -\frac{1}{q-1} \int d^6\tau [\{p(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}^q - p(\mathbf{x}, \mathbf{v})]. \quad (2.23)$$

Note that the probability $p(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ satisfies the normalization condition:

$$\int d^6\tau p(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 1. \quad (2.24)$$

To apply the above non-extensive formalism to the present problem without changing the definition of energy and mass (2.18) and (2.19), we identify the one-particle distribution f with the escort distribution P_q , not the probability function $p(\mathbf{x}, \mathbf{v})$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = M \frac{\{p(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}^q}{N_q} ; \quad N_q = \int d^6\tau \{p(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}^q \quad (2.25)$$

so as to satisfy the mass conservation (2.19). The definitions of the Tsallis entropy (2.23) and the escort distribution (2.25) show that the Boltzmann-Gibbs entropy (2.7) is recovered in the limit $q \rightarrow 1$. Now, adopting the relation (2.25), let us seek the extremum-entropy state under the constraints (2.18) and (2.24). The variational problem is given by the following equation:

$$\delta \left[S_q - \alpha \left\{ \int d^6\tau p - 1 \right\} - \beta \left\{ \int d^6\tau \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\Phi \right) f - E \right\} \right] = 0, \quad (2.26)$$

where the variables α and β denote the Lagrange multipliers. The variation with respect to the probability $p(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ gives the extremum-entropy state, the so-called *stellar polytrope* [39, 7]:

$$f(x, v) = M \frac{\{p(x, v)\}^q}{N_q} = A \left[\Phi_0 - \frac{1}{2}v^2 - \Phi(x) \right]^{q/(1-q)}, \quad (2.27)$$

where we define the constants A and Φ_0 as follows:

$$A = \frac{M}{N_q} \left\{ \frac{q(1-q)}{\alpha(1-q)+1} \frac{\beta M}{N_q} \right\}^{q/(1-q)}, \quad \Phi_0 = \frac{N_q}{\beta M(1-q)} + \tilde{\varepsilon} \quad (2.28)$$

with $\tilde{\varepsilon}$ being

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{M} \int d^6\tau \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi \right) f. \quad (2.29)$$

By means of the distribution function (2.27), we evaluate the density $\rho(r)$ and the isotropic pressure $P(r)$ at the radius $r = |\mathbf{x}|$ as

$$\rho(r) = \int \frac{d^3\mathbf{v}}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), = 4\sqrt{2}\pi B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{1-q}\right) \frac{A}{h^3} [\Phi_0 - \Phi(r)]^{1/(1-q)+1/2}, \quad (2.30)$$

$$P(r) = \int \frac{d^3\mathbf{v}}{h^3} \frac{1}{3} v^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{1-q}\right) \frac{A}{h^3} [\Phi_0 - \Phi(r)]^{1/(1-q)+3/2}. \quad (2.31)$$

Here, the function $B(a, b)$ denotes the beta function. These two equations lead to the following polytropic relation:

$$P(r) = K_n \rho^{1+1/n}(r), \quad (2.32)$$

with the polytrope index n related to the parameter q as

$$n = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

The explicit form of the dimensional constant K_n is given in [39] (Eq.(21) of their paper). Note that the isothermal equation of state (2.13) discussed in the previous

subsection is recovered in the limit $n \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 1$), as expected. In terms of P and ρ , the one-particle distribution can be rewritten as follows:

$$f(x, v) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi B(3/2, n-1/2)} \frac{\rho h^3}{\{(n+1)P\rho\}^{3/2}} \left\{1 - \frac{v^2/2}{(n+1)P/\rho}\right\}^{n-3/2} \quad (2.34)$$

To elucidate the thermodynamic structure of the stellar polytropic system, we focus on the spherically symmetric case with the polytrope index $n > 3/2$ ($q > 0$), in which the equilibrium distribution is at least dynamically stable (see Chap.5 of [7]). In this case, the stellar equilibrium distribution can be characterized by the so-called *Emden solutions* (e.g., [10, 22]) and all the physical quantities are expressed in terms of the homology invariant variables (u, v) , which are subsequently used in later analysis.

We note that the one-particle distribution function (2.27) does not yet completely specify the equilibrium configuration, due to the presence of gravitational potential which implicitly depends on the distribution function itself. To remedy the self-referential structure, we need to specify the gravitational potential or density profile. From the gravitational potential (2.20), we obtain the Poisson equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right\} = 4\pi G \rho(r). \quad (2.35)$$

Combining the above equation with (2.30), we obtain the ordinary differential equation for Φ . Alternatively, a set of equations which represent the hydrostatic equilibrium is derived using (2.30), (2.31) and (2.35):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r), \quad (2.36)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2. \quad (2.37)$$

The quantity $m(r)$ denotes the mass inside the radius r . Denoting the central density and pressure by ρ_c and P_c , we then introduce the dimensionless quantities:

$$\rho = \rho_c [\theta(\xi)]^n, \quad r = \left\{ \frac{(n+1)P_c}{4\pi G \rho_c^2} \right\}^{1/2} \xi, \quad (2.38)$$

which yields the following ordinary differential equation:

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0, \quad (2.39)$$

where prime denotes the derivative with respect to ξ . The quantities ρ_c and P_c in (2.38) are the density and the pressure at $r = 0$, respectively. To obtain the physically relevant solution of (2.39), we put the following boundary condition:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (2.40)$$

A family of solutions satisfying (2.40) is referred to as the *Emden solution*, which is well-known in the subject of stellar structure (e.g., see chapter IV of [10]). To characterize the equilibrium properties of Emden solutions, it is convenient to introduce

the following set of variables, referred to as homology invariants (e.g., [10, 22]):

$$u \equiv \frac{d \ln m(r)}{d \ln r} = \frac{4\pi r^3 \rho(r)}{m(r)} = -\frac{\xi \theta^n}{\theta'}, \quad (2.41)$$

$$v \equiv -\frac{d \ln P(r)}{d \ln r} = \frac{\rho(r)}{P(r)} \frac{Gm(r)}{r} = -(n+1) \frac{\xi \theta'}{\theta}, \quad (2.42)$$

which reduce the degree of equation (2.39) from two to one. One can evaluate the total energy of the confined stellar system in terms of the pressure P_c , the density ρ_c at the boundary r_c and the total mass M

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{3}{2} \int_0^{r_c} dr 4\pi r^2 P(r) - \int_0^{r_c} dt \frac{Gm(r)}{r} \frac{dm}{dr} \\ &= -\frac{1}{n-5} \left[\frac{3}{2} \left\{ \frac{GM^2}{r_c} - (n+1) \frac{MP_c}{\rho_c} \right\} + (n-2) 4\pi r_c^3 P_c \right], \end{aligned}$$

by which the dimensionless quantity λ can be expressed as a function of the homology invariants at the wall [37, 38, 39]:

$$\lambda \equiv -\frac{Er_c}{GM^2} = -\frac{1}{n-5} \left[\frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{n+1}{v_c} \right\} + (n-2) \frac{u_c}{v_c} \right]. \quad (2.43)$$

As was already shown in the isothermal case in subsection 2.2, the above dimensionless quantity λ has an important role for the analysis of the gravothermal catastrophe. Figure 2.4 shows λ as a function of the ratio of the central density to that at the boundary, ρ_c/ρ_e . We notice that λ -curves are bounded from above and have peaks in the case of $n > 5$ (*right panel*). On the other hand, curves for $n \leq 5$ monotonically increase (*left panel*). It follows that the stellar polytrope within an adiabatic wall exhibits the gravothermal instability in the case of the polytropic index $n > 5$. Similarly to the isothermal case, the evaluation of eigenvalues for the second variation of the Tsallis entropy $\delta^2 S_q$ derives same results as the above turning point analysis in terms of the λ -curve [37, 38, 39].

2.4 On the reality of stellar polytrope as extremum state of non-extensive entropy

In previous subsection, we have discussed the extension of thermodynamical analysis to the stellar polytrope which is obtained by applying the variational procedure to the Tsallis entropy for the stellar self-gravitating system. It has been shown that the thermodynamical quantities such as the specific heat are useful to study the emergence of the *gravothermal catastrophe* in the stellar polytrope. In figure 2.4, we summarize our results. The stellar polytrope confined in an adiabatic wall is shown to be thermodynamically stable when the polytrope index $n < 5$. In other words, if $n > 5$, a stable equilibrium state ceases to exist for a sufficiently large density contrast $D > D_{\text{crit}}$, where the critical value D_{crit} given by a function of n is determined from the second variation of entropy around the extremum state of Tsallis entropy, $\delta^2 S_q = 0$ [37, 39]. The dotted line in figure 2.4 represents the critical value D_{crit} for each polytrope index, which indicates that the stellar polytrope at low density contrast $D < D_{\text{crit}}$ is expected to remain stable.

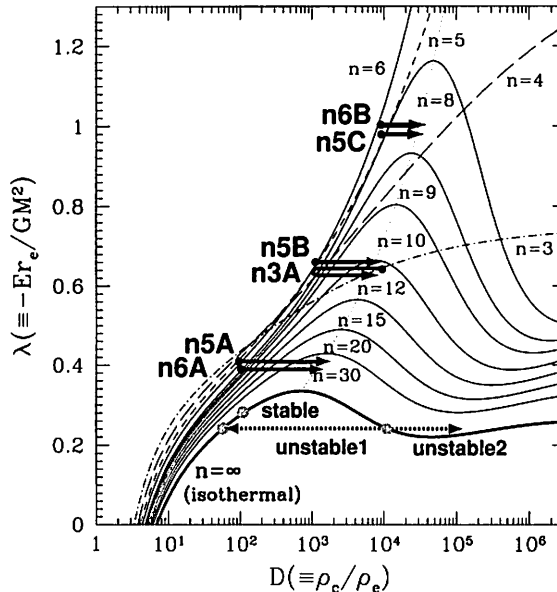


Figure 2.4: Energy-density contrast relationship of stellar polytropes

The above arguments indicate that, similar to the isothermal state, the stellar polytropic distribution can be also regarded as an equilibrium state, since it is described by the extremal state of the Tsallis entropy. However, the one-particle distribution function of the stellar polytrope clearly shows that the velocity dispersion

$$\sigma(r) \propto \frac{1}{\rho(r)} \int \frac{d^3v}{h^3} v^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (2.44)$$

depends on the radius r . Only in the isothermal case $n \rightarrow \infty$, σ is kept spatially constant. Thus, it is expected that a gradient of the velocity dispersion is relaxed on timescales of two-body encounter (2.3). This means that the stellar polytrope is no longer the equilibrium but quasi-equilibrium state. In next section, we report the results of the N -body simulations, which are carried out to investigate how the stellar polytrope actually evolves.

3 Numerical simulations

We are in a position to discuss the long-term dynamical evolution from the non-equilibrium N -body system. The N -body experiment considered here is the same situation as investigated in classic papers. That is, we treat the self-gravitating N -body system confined in an adiabatic wall of sphere. Hereafter, we set the units to $G = M = r_e = 1$ without loss of generality. According to the Antonov problem, all the particles are assumed to have the same mass $m = 1/N$, where N is the total number of the particles. The initial conditions for particle data were whole created by a random realization of the stellar models. To investigate the evolutionary states of the N -body system from the thermostistical point-of-view, we deal with the three kinds of the stellar models: (i) isothermal distribution (ii) stellar polytropes

and (iii) the stellar models with cuspy density profile. Table 21, 22 and 23 summarize the simulation runs, which are frequently referred in subsequent section. The generation of random initial data was basically followed by the rejection method described in [1] (see also Chap.8 of [2]). Using the analytic form of the mass profile $m(r)$ and the one-particle distribution function $f(\epsilon)$, this method generates the random distribution that possesses the same phase space structure as in the initial stellar model.

We are specifically concerned with collisional aspects of N -body dynamics, the timescale of which is much longer than the two-body relaxation time. For this purpose, we utilized a special-purpose hardware, GRAPE-6, which is especially designed to accelerate the gravitational force calculations for collisional N -body system [25]. With this implementation, we use the fourth-order Hermite integration scheme with individual time-step algorithm, which is efficiently suitable for combining with GRAPE-6 facility.

In our setup, the adiabatic wall is implemented by the same procedure as used by [12]. The adiabatic wall reverses the radial components of the velocity for particles just located at the wall. Since we use an individual time-step algorithm, the positions of the particles are monitored at each fixed time interval ΔT , which is chosen to be a synchronized time interval in our time-step algorithm. This guarantees that the penetration of particles into the wall can be ignored. At these times, the radial components of velocities for particles outside the wall are reversed if the radial velocity vector is directed outward. Namely,

$$\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad (3.1)$$

After particles were reversed, we recalculated the force and adjusted the time-step of particles.

Note that we did not use the regularization scheme to treat the close two-body or multiple encounter (e.g., [2]). Because of the adiabatic wall, the standard scheme of regularization method is not directly applicable and the implementation of the regularization keeping the high accuracy requires a considerable amount of programming. Since we are interested in a quasi-equilibrium evolution before the core-collapse stage, absence of the regularization scheme itself is not crucial. Rather, a serious problem might arise from an introduction of the potential softening in order to reduce the numerical error. In general, the potential softening diminishes the close-encounter of each particle and it makes the energy exchange of the particles inefficient. This would lead to the overestimation of the the relaxation timescales even before the core-collapse stage. In appendix A, the significance of the potential softening to the time-scale of core-collapse and/or quasi-equilibrium sequences is examined. Based on these experiments, we adopt the Plummer softened potential ($\phi = 1/\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$) and basically set the softening parameter to $\epsilon = 1/N$ when estimating the time-scale (Sec.4.2). Otherwise, we set $\epsilon = 4/N$ (Sec.4.1 and 4.3).

4 Results

In our present situation with units $G = M = r_e = 1$, the dynamical time roughly corresponds to $t_{\text{dyn}} \sim 1$ and thus the global relaxation time becomes $t_{\text{relax}} \simeq 0.1N/\ln N$. While this relation gives a crude estimate of the relaxation timescales, a more useful

convention might be the half-mass relaxation time (e.g., [33, 7]):

$$t_{\text{rh}} = 0.138 \frac{N}{\ln \Lambda} \left(\frac{r_{\text{h}}^3}{GM} \right)^{3/2}, \quad (4.1)$$

where the Coulomb logarithm $\ln \Lambda$ is usually taken as $\ln \Lambda = \ln(0.4N)$ or $\ln(0.1N)$ [33, 14]. In what follows, adopting the latter convention, all the simulation results are presented by rescaling the timescale with the half-mass relaxation time evaluated at an initial time, $t_{\text{rh},i}$. In tables 21-23, half-mass radii for each initial distribution are evaluated and their numerical values are summarized.

4.1 Isothermal distribution

Let us first check our numerical calculations by examining the cases with isothermal initial conditions and comparing those results with previous work by [12], who have investigated the gravothermal expansion of the isothermal distribution under the same setup as examined in our simulation. Following their paper, we examine the three kinds of initial conditions, summarized in table 21.

Figure 4.1 and 4.2 respectively show the snapshots of evolved density profiles and one-dimensional velocity dispersion profiles starting from a stable initial configuration(*left*) and unstable initial distributions(*middle, right*). Here, the term, stable or unstable is used according to the initial density contrast D smaller or larger than the critical value $D = 709$, which is obtained from the thermostatistical prediction. The evolutionary path for each run is depicted in figure 2.4. In figure 4.1, while the evolved density profiles starting from the the stable initial condition is, by construction, stable and almost remain the same, the fate of the unstable cases sensitively depend on the randomness of the initial data, leading to the very different end-points. The results depicted in the middle and the right panels of figure 4.1, both of which were started with the same initial parameters, are indeed such examples. Discriminating the final fate of the system from the initial random distributions seems generally difficult, however, the evolved density profiles seen in figure 4.1 are intimately connected with the response of the velocity structure shown in figure 4.2. Suppose that the velocity dispersion at the central part is initially higher than that at the outer part. In this case, the energy exchange by the two-body encounter yields the kinetic energy transport from the core to the halo. In other words, the outward heat flows occur and due to the negative specific heat, the inner part gets hotter, leading to the catastrophic growth of velocity dispersion. As a consequence, the core-collapse takes place. On the other hand, when the velocity dispersion at the inner part is relatively lower than that at the outer part, the inward heat flow conversely occur, which makes the core expand. In contrast to the former case, the heat flow can stop after balancing the thermal inertia at inner and outer parts. As a result, the system finally reaches the stable isothermal configuration. Though not clearly seen its signature, the response of the velocity dispersion profiles seen in figure 4.2 are consistent with the evolution of the density profiles. Compared the results in the unstable cases with the results obtained by [12], the resultant density profiles are similar and the evolved timescales for the unstable cases almost agree with each other.

As for the stable case, a calculation was proceeded up to $t = 112t_{\text{rh},i}$, corresponding to $t = 2000$ in unit of N -body time, which was longer calculation time than that

Table 21: Model parameters of initial condition in the case of the isothermal distribution

run #	parameters	half-mass radius(r_h/r_e)	# of particles	status
stable	$D = 110$	0.4834	2k	stable
unstable1	$D = 10^4$	0.4993	2k	expansion
unstable2	$D = 10^4$	0.4993	2k	collapse

of the other runs. A closer look at figure 4.1 shows that the central density slightly increases and the system seems to become out of equilibrium. The total energy of the system was conserved to 0.05% at the end of the calculation, which is relatively larger value than the errors in the other runs. Thus the destabilization of the core may be attributed to the numerical error in the energy conservation. Though the effect of destabilization yields a serious problem in estimating the time scale of core-collapse, we are specifically concerned with the evolutionary sequence before entering the core-collapse phase. Hence, at a level of this present accuracy, one can ignore the destabilization effect as long as the total energy of the system is well conserved.

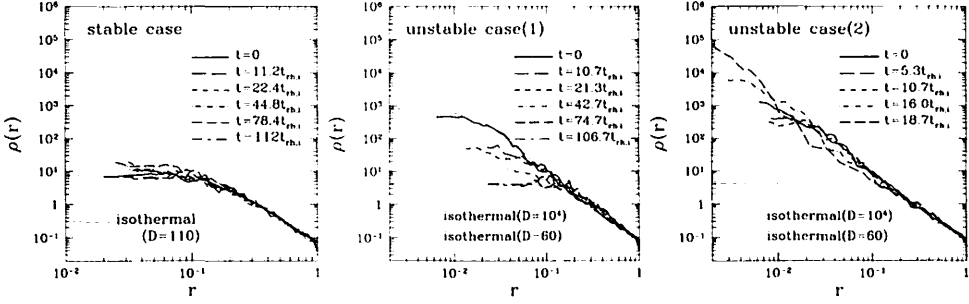


Figure 4.1: Snapshots of density profile in the stable case and the unstable cases

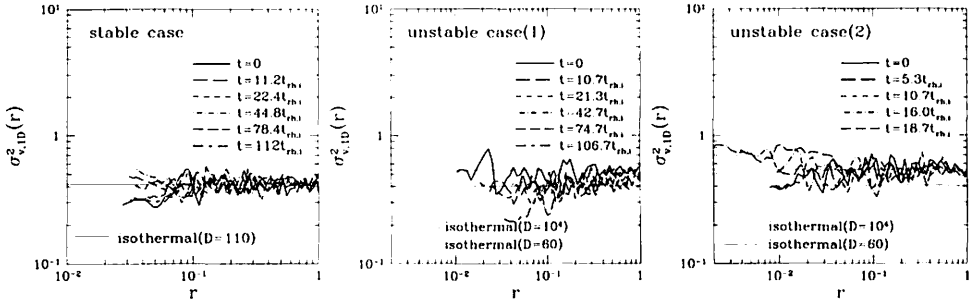


Figure 4.2: Snapshots of one-dimensional velocity dispersion profile in the stable case and the unstable cases

4.2 Stellar polytropes

Having checked the validity of the numerical calculations, we next investigate the non-equilibrium evolution away from the isothermal equilibrium state. In this sub-

Table 22: Model parameters and the evolutionary states in the cases starting from the stellar polytropes

run #	model parameters	r_h/r_c	# of particles	fitting to stellar polytropes
n3A	$n = 3, D = 10^4$	0.3282	2k, 4k, 8k	successful until $t = 33.5t_{\text{rh},i}$
n5A	$n = 5, D = 10^2$	0.4611	2k	successful until $t = 62.5t_{\text{rh},i}$
n5B	$n = 5, D = 10^3$	0.3114	2k	successful until $t = 28.1t_{\text{rh},i}$
n5C	$n = 5, D = 10^4$	0.2025	2k	successful until $t = 19.6t_{\text{rh},i}$
n5D	$n = 5, D = 10^6$	0.08196	2k	fitting failed
n6A	$n = 6, D = 110$	0.4531	2k	successful until $t = 65.4t_{\text{rh},i}$
n6B	$n = 6, D = 10^4$	0.1794	2k	successful until $t = 13.6t_{\text{rh},i}$

section, we specifically deal with a class of initial conditions characterized by the stellar polytropic distributions. Table 22 summarizes the model parameters for the stellar polytropic initial distributions. The evolutionary track for each run are depicted in the energy-density contrast relation in figure 2.4.

Overall behaviors of the simulation results are as follows. Before entering the core-collapse stage, most of the system experiences the quasi-equilibrium stage, in which the distribution function slowly changes in time. The evolutionary sequence in the quasi-equilibrium stage can be well-approximated by the one-parameter family of stellar polytropes with the time-varying polytrope index. Apart from some fluctuations, the fitted value of the polytrope index, on average, increases monotonically with time, implying that the system tends to approach the exponential distribution.

To see the quasi-equilibrium behavior quantitatively, we first show the representative result obtained from the run *n3A*, i.e., the stellar polytrope with index $n = 3$ and with the initial density contrast $D = 10^4$. Then we discuss the other runs, *n5A* $\sim$ *n5D* and *n6A, B* in section 4.2.2.

4.2.1 run *n3A*

Figure 4.3 shows the time evolution of the Lagrange radii taken from the run with $N = 2K$, plotted as function of time in unit of the half-mass relaxation time. With the softening parameter $\epsilon = 1/N$, the core-collapse takes place at $t \sim 44t_{\text{rh},i}$ and the core-halo structure was developed at the end of the calculation. Looking at an earlier phase, the Lagrangian radii evolve very slowly and one can clearly distinguish the timescales between the early relaxation phase and the late-time core-collapse phase. Since the early stage of the time evolution seems nearly equilibrium, we will especially call it quasi-equilibrium evolution. In a quasi-equilibrium regime, while decreasing the inner Lagrangian radii, the outer Lagrangian radii slightly expands to compensate the slow contraction of the core.

To see the quasi-equilibrium structure in more detail, in figure 4.4, we plot the snapshots of the density profile(*left*), the distribution function(*middle*) and the velocity dispersion profile(*right*) during the quasi-equilibrium regime. In each panel, the symbols denote the simulation results. Note that for clarify, the results are offset vertically, successively by two-digits below, except for the final output at $t = 30t_{\text{rh},i}$.

In figure 4.4, the solid lines show the initial stellar polytrope with $n = 3$ evalu-

ated from the Emden solutions. Comparing those curves with simulation results, one deduces that the system at an earlier time is slightly out of equilibrium and it gradually deviates from the initial state. While the velocity dispersion profile monotonically increases at an outer part, the density profile first increases at both the inner and the outer parts ($t \lesssim 5t_{\text{rh},i}$), leading to a slight decrease of the density contrast $D = \rho_c/\rho_e$ (see the arrow labeled by $n3A$ in figure 2.4). Later, the increase of the core density surpasses that of the edge density and thereby the density contrast turns to increase ($t \gtrsim 10t_{\text{rh},i}$).

In figure 4.4, in order to characterize the evolutionary sequence of the quasi-equilibrium state, the simulation results are compared with a sequence of the stellar polytropes. The fitting results are then plotted as long-dashed, short-dashed, dot-dashed and dotted lines from the data at $t = 5t_{\text{rh},i}$ to that at $t = 30t_{\text{rh},i}$. In fitting the simulation data to the stellar polytropes, we first quantify the radial density profile $\rho(r)$ from each snapshot data. Selecting the 100 points from it at regular intervals in logarithmic scale of radius r , the results are then compared with the Emden solutions.¹ Note that in our present situation, the total energy and the mass are conserved. Thus, the only fitting parameter is the polytrope index. We determine the index n so as to minimize the function χ^2 :²

$$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{100} \left\{ \frac{\rho_{\text{sim}}(r_i) - \rho_{\text{Emden}}(r_i; n)}{\rho_{\text{sim}}(r_i)} \right\}^2, \quad (4.2)$$

Clearly from figure 4.4, the stellar polytropes quantitatively characterize the evolutionary sequence of the simulation results. Note that we obtained $\chi^2 \simeq 4-8$ for each time-step, indicating that the fitting result is satisfactory. A closer look at the low-energy part of the distribution function $f(\epsilon)$ reveals that the simulation results partly resemble the exponential form rather than the power-law function. Nevertheless, the most remarkable fact is that the stellar polytropes as simple power-law distribution globally approximate the simulation results in a quite good accuracy. Moreover, the fitting results in figure 4.4 indicate that the fitted values of the polytrope index monotonically increase in time, in contrast to the non-monotonic behavior of the density contrast. In order to quantify the evolution of polytrope index, we collect the new snapshot data at each time interval $\Delta t = 10$ in N -body units for the run with $N = 2K$. Repeating the same fitting procedure as in figure 4.4, the polytrope indices are estimated at each time step and the resultant values are plotted in figure 4.5 together with the χ^2 value of the fitting results. Here we also plot the results obtained from the run with $N = 4K$ and $N = 8K$, in which the time intervals are respectively chosen as $\Delta t = 20$ and 50.

Clearly, the fitted values of the polytrope index monotonically increase apart from the fluctuations during the short time interval. The growth rates of the polytrope index normalized by half-mass relaxation time almost coincide with each other, consistent with the fact that the quasi-equilibrium sequence is evolved via two-body relaxation. In upper panel of figure 4.5, the horizontal dotted line denote the

¹The reason why we adopted the density profile instead of the distribution function is that apart from the polytrope index n , the distribution function $f(\epsilon)$ is characterized by the single parameter, i.e., the zero-point energy ϵ_0 satisfying $f(\epsilon_0) = 0$. While this is evaluated from the Emden solutions at specific radius $r = r_e$, an entire range of the Emden solutions, $[0, r_e]$, is used to compare with simulations when we adopt the density profile. In this respect, the density profile could be much informative than the distribution function and is sensitive to the evolution through the two-body relaxation process.

²Strictly speaking, this is not the χ^2 function usually used in the likelihood analysis.

critical index n_{crit} , corresponding to the point at which $d\lambda/dD = 0$ for a given λ in (λ, D) -plane. According to the prediction from the non-extensive thermostatics with Tsallis entropy, after reaching the critical index n_{crit} , the system is expected to enter the gravothermally unstable regime. That is, the relaxation timescales between the inner and the outer parts are decoupled and the system finally undergoes the core-collapse. In a rigorous sense, the thermodynamic prediction itself cannot be applicable to the out-of-equilibrium state, however, it turns out that the predicted value n_{crit} or D_{crit} is consistent with the N -body results. In fact, the successful fit is obtained until $t \simeq 34t_{\text{rh},i}$, while the core-collapse takes place lately at $t \sim 44t_{\text{rh},i}$ (see Fig.4.3). Thus, the prediction based on the non-extensive thermostatics may provide a crude estimate of the boundary between the stability and the instability in the general non-isothermal states. This point will be further discussed in other runs.

4.2.2 Other runs

Figures 4.6–4.9 show the snapshots of the density profile, the distribution function and the velocity dispersion profile obtained from the runs $n5A$ – $n5D$, which were all started with the same polytrope index $n = 5$, but the initial density contrasts were different: $D = 100$ (run $n5A$), $D = 10^3$ (run $n5B$), $D = 10^4$ (run $n5C$) and $D = 10^6$ (run $n5D$). Also in figures 4.11 and 4.12, the results taken from the runs $n6A$ and $n6B$ are depicted, whose initial density contrasts are $D = 110$ and 10^4 , respectively.

Similarly to the run $n3A$, the results from the runs $n5A$ – $n5C$, $n6A$ and $n6B$ exhibit the quasi-equilibrium regime in the early phase of the evolution. The evolutionary sequences in the quasi-equilibrium regime can be quantitatively characterized by a family of stellar polytropes with time dependent polytrope index. Figures 4.10 and 4.13 summarize the fitting results for the time varying polytrope indices in logarithmic scales. It seems apparently that for the cases starting with smaller value of D , time variation of polytrope index is systematically large and statistical fluctuation become noticeable, however, it turns out that this fact simply comes from the geometrical reason for the equilibrium sequence plotted in figure 2.4. That is, in (λ, D) -plane, a number of trajectories of the stellar polytropes with different polytrope index n are assembled at the region with smaller value, D or λ , causing a large variation and/or fluctuation in the time evolution of polytrope index.

Apart from this point, figures 4.10 and 4.13 show that the timescales of quasi-equilibrium state crucially depend on the initial conditions, which are basically characterized by the initial density contrast D or the dimensionless energy λ . Qualitatively, the timescale of quasi-equilibrium state is understood from the local estimates of the relaxation time, which are inversely proportional to the local density (e.g., [33, 7]):

$$t_r = 0.065 \frac{v^3}{G^2 m \rho \ln \Lambda}. \quad (4.3)$$

For a system with small initial density contrast, the depth of the potential becomes shallower and equation (4.3) implies that the relaxation proceeds slowly enough in both core and halo. The quasi-equilibrium state is thus expected to be long-lived. As anticipated in figures 4.6 and 4.11, fitting to the stellar polytropes is successful until $t \simeq 63t_{\text{rh},i}$ for run $n5A$ and $66t_{\text{rh},i}$ for run $n6A$, much longer than the other cases.

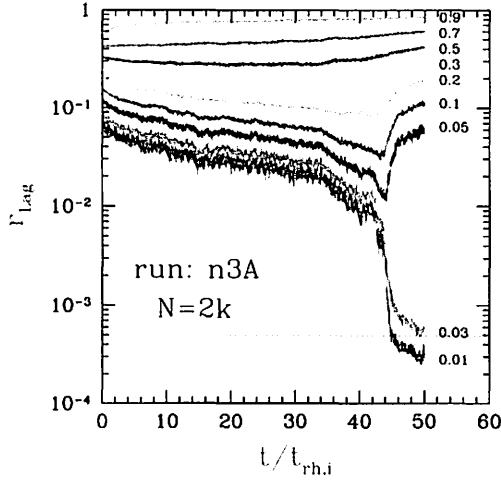


Figure 4.3: Lagrangian radii as function of time.

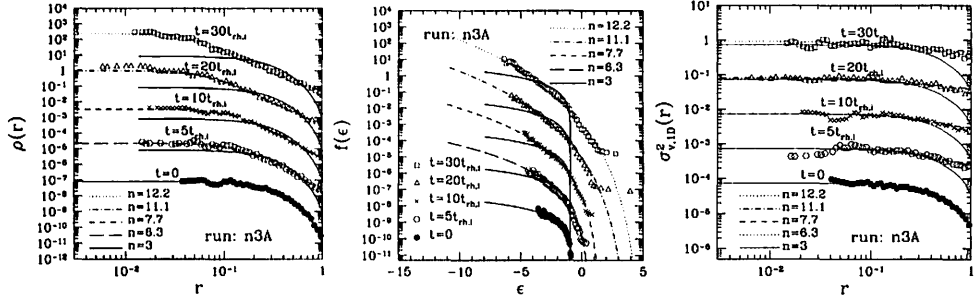
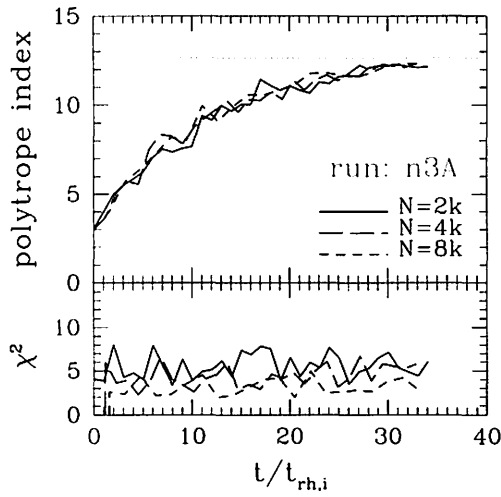


Figure 4.4: Snapshots of density profile, distribution function and velocity dispersion. The results are fitted to the one-parameter sequence of stellar polytropes.


 Figure 4.5: Evolution of polytropic index in the run *n3A*.

On the other hand, for a system with large initial density contrast, equation (4.3) suggest that the decoupling of the timescales between core and halo would occur earlier and the quasi-equilibrium phase would be short-lived. Indeed, the distribution functions for run *n5C* and *n6B* show that while the high-energy part of the function $f(\epsilon)$ almost remains the same, the low-energy part of the distribution is rapidly developed and stretches toward $\epsilon \rightarrow -\infty$. As a result, fitting to the stellar polytropes failed earlier at $t \sim 20t_{\text{rh},i}$ for run *n5C* and $12t_{\text{rh},i}$ for run *n6B*. After that, the system soon becomes unstable state, finally undergoing the core-collapse, consistent with the thermodynamic prediction based on the Tsallis entropy. Note that the fitting results in the runs *n5C* and *n6B* seem slightly worse. From bottom panels of figures 4.10 and 4.13, the estimated χ^2 values given by (4.2) become $5 \sim 14$ in both runs, which is larger than the typical value $3 - 7$ in cases with the smaller initial density contrast.

The observation in both fitting results and the timescales for quasi-equilibrium states indicates that for some large values of the initial density contrast, the fitting to stellar polytropes would fail from the beginning and the quasi-equilibrium state ceases to exist. Indeed, such an example was obtained from the run *n5D* (see Fig.4.9). The initial density contrast of this run is $D = 10^6$ and the dimensionless energy is $\lambda = 2.345$. That is, the location of the initial state in the (λ, D) -plane is outside the region depicted in figure 2.4. In this case, the central part is highly concentrated and the core-halo structure is developed from the beginning. The resultant relaxation time scale is much shorter than that of the other cases and the system soon becomes unstable, leading to the earlier core-collapse. Compared to the stable stellar polytropes with the same initial energy $\lambda = 2.345$, none of the model parameters successfully reproduce the simulated density and/or velocity dispersion profiles (long-dashed, short-dashed and dot-dashed lines in Fig.4.9). Though the collapse time crucially depends on the softening parameter, the convergence test as examined in appendix A suggests that the collapse time converges to $18t_{\text{rh},i}$, close to the standard result without the adiabatic wall, i.e., $t_{\text{coll}} \simeq 16t_{\text{rh},i}$ (e.g., Table13.2 of [2]).

Therefore, for a general initial condition with large D or λ , quasi-equilibrium behavior generally ceases to exist. In other words, long-lived quasi-equilibrium states appear at the smaller value of λ or D and the system is quantitatively characterized by the stellar polytropes. Their lifetime is expected to become much longer as approaching down to $\lambda = 0.335$ or $D = 709$, i.e., the critical values for the marginal stability in isothermal distribution.

4.2.3 Discussion

So far, we have focused on the characterization of the quasi-equilibrium state using the one-parameter family of the stellar polytropes. While most of the transient state is well-approximated by the stellar polytropes with varying polytrope index, one may criticize that the use of the stellar polytropes is not the best characterization for the quasi-equilibrium sequence. Indeed, even restricting the stellar distribution to the stationary solutions of the Vlasov equation, one can, in principle, construct the infinite set of one-parameter family of stellar models. In this sense, the stellar polytropes should be regarded as a particular set of stellar models. Further, there is no rigorous proof for the uniqueness to characterize the quasi-equilibrium states.

In real astronomical systems such as globular clusters, the stellar polytropes had

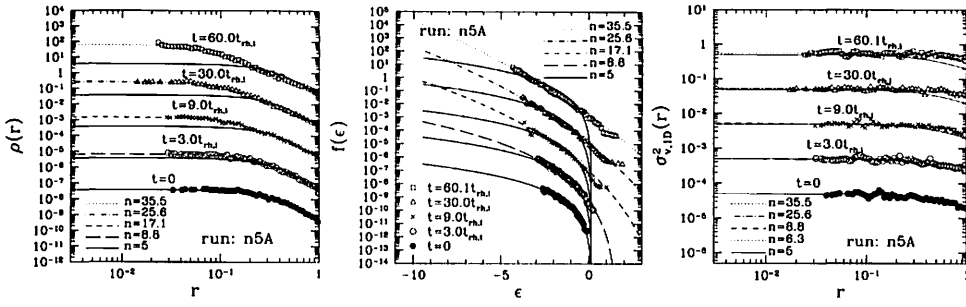


Figure 4.6: Snapshots of the density profile, distribution function and the velocity dispersion profile from the run *n5A*

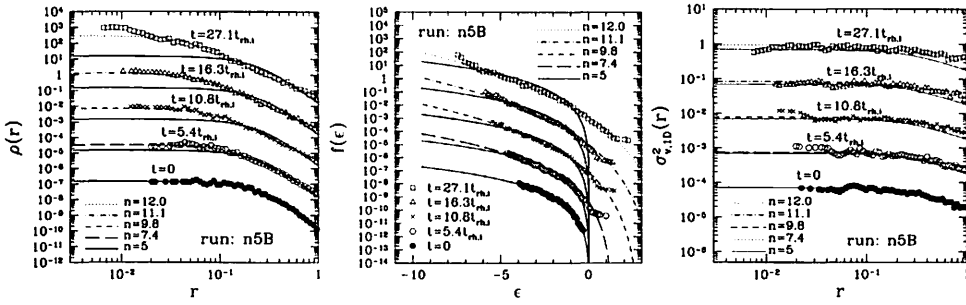


Figure 4.7: Same as Fig.4.6, but in case of the run *n5B*.

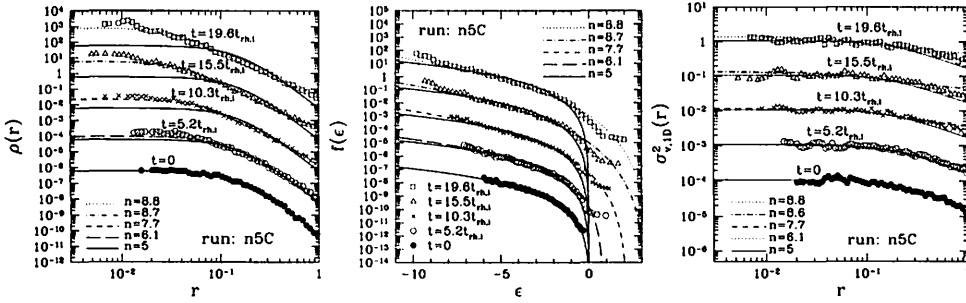


Figure 4.8: Same as Fig.4.6, but in case of the run *n5C*.

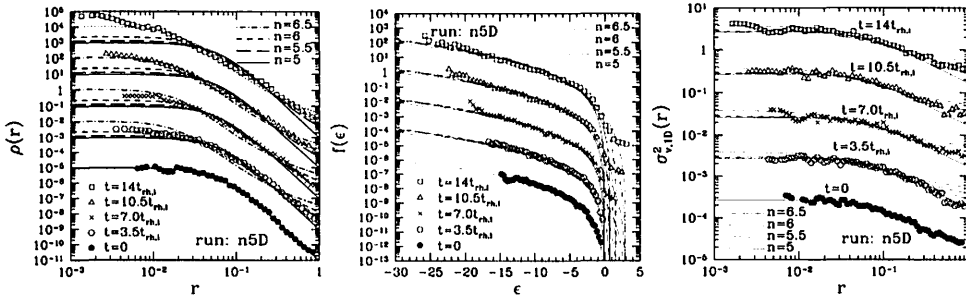
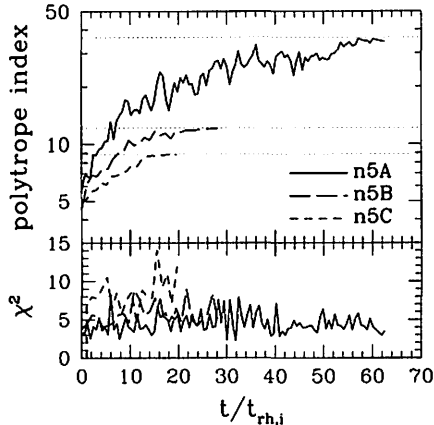


Figure 4.9: Same as Fig.4.6, but in the case of the run *n5D*.


 Figure 4.10: Evolution of polytropic index in the runs $n5A$, $n5B$ and $n5C$.

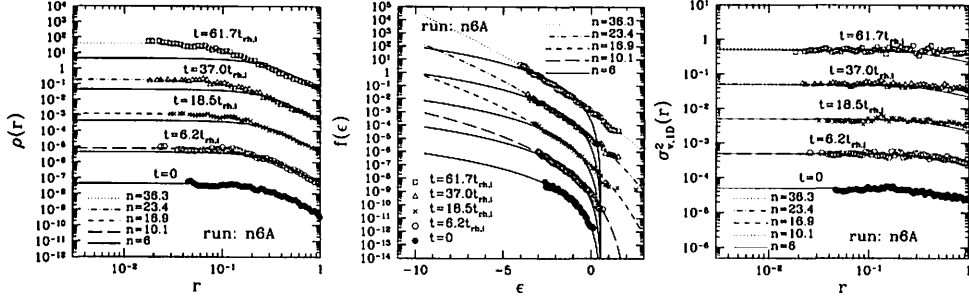
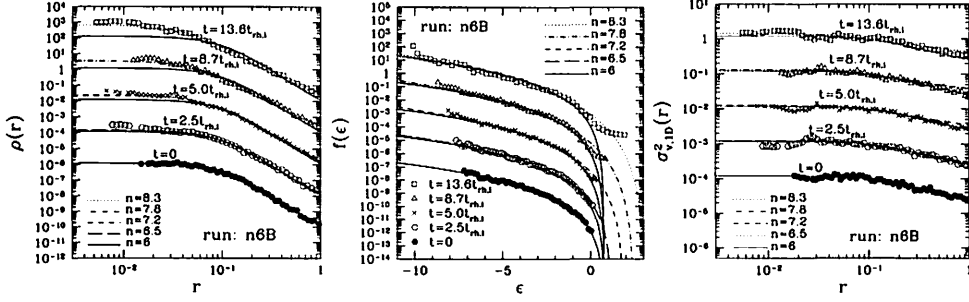
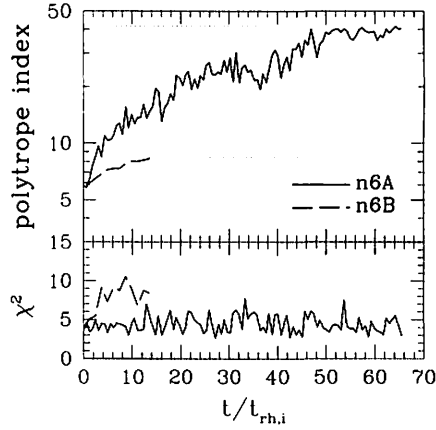
been known to poorly fit to the observed structure of stellar distribution. Rather, the majority of the Galactic globular clusters is quantitatively characterized by the King model [21, 7, 33, 27]. In contrast to the stellar polytropes as *q-exponential* distribution, King model is represented by the *truncated* exponential distribution:

$$f(\epsilon) \propto \begin{cases} e^{-\beta\epsilon'} - 1 & ; \epsilon' < 0 \\ 0 & ; \epsilon' \geq 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

where we define $\epsilon' = \epsilon - \phi(r_B)$ with radius r_B being the truncation radius. Provided the dimensionless energy λ , the equilibrium sequence of the King model is then characterized by the one-parameter $W_0 = 2\beta[\phi(r_B) - \phi(0)]$, which represents the depth of the gravitational potential.

In figure 4.14, the N -body data taken from the run $n3A$ is used to compare with the King model. Note that the fitted values of the parameter W_0 indicated by figure 4.14 were obtained under the suitable restriction, $r_B > r_c$. Similar to the stellar polytropes, the density and the velocity dispersion profiles reasonably fit to the King model. The fitted value of the parameter W_0 gradually increases as time goes on, indicating that the depth of the potential becomes deeper. Compared with the observed Galactic globular clusters with typical range $W_0 = 4\text{--}10$ [42], fitting results for W_0 are somewhat large.

On the other hand, turn to focus on the distribution function, deviation from the King model becomes manifest at the high-energy tails $\epsilon > 0$. While the distribution function for King model falls off at the truncation energy $\epsilon = \phi(r_B)$ which takes the negative value, the number of high-energy particles with $\epsilon > 0$ gradually increases in our N -body calculation, forming a high-energy tail of the distribution function. Although the low-energy part of the distribution function resembles the exponential form of the King model, the discrepancy at the high-energy part implies that the boundary condition in our idealistic situation is very different from that of the Galactic globular clusters. In fact, the influence of external tidal field is significant for the Galactic globular cluster and the resultant distribution function sharply falls off at the tidal boundary [6]. The stellar particles which are usually bounded to the system tend to escape from the globular cluster system (e.g., [13, 5, 36]). To mimic this effect, truncation radius r_B is artificially introduced by hand in the King model.


 Figure 4.11: Same as Fig.4.6, but in the case of the run *n6A*.

 Figure 4.12: Same as Fig.4.6, but in the case of the run *n6B*.

 Figure 4.13: Evolution of polytropic index in the runs *n6A* and *n6B*

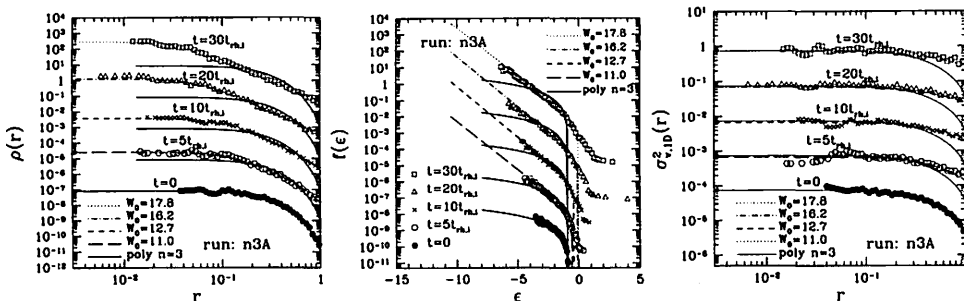


Figure 4.14: Same as Fig.4.4, but results are compared with the King models.

On the other hand, in presence of the adiabatic wall, the high-energy particles with $\epsilon > 0$, which are usually unbounded, cannot freely escape outward from the system and thereby no specific energy cutoff appears.

As a result, the stellar polytropic distribution which has no energy cutoff successfully reproduces the quasi-equilibrium states in our N -body setup. This means that, in presence of the adiabatic wall, the simple power-law distribution provides a better characterization than the truncated exponential distribution. Since the adiabatic wall is an artificial but the simplest boundary condition, the stellar polytropic distribution might be regarded as a fundamental stellar model theoretically, though not practically useful in characterizing the observed structure of Galactic globular clusters.

4.3 A family of stellar models with cusped density profile

The analyses in previous subsection have revealed that the quasi-equilibrium evolution characterized by the stellar polytropic distribution can appear at the energy λ close to the critical value of the isothermal distribution. We then attempt to clarify the generality and/or the physical conditions for the quasi-equilibrium state in more general initial conditions. In this subsection, as a special class of initial conditions that contain the non power-law features, we treat a family of stellar models with cusped density profile [43]. The models contain two parameters, one is the scale-radius a , and the other is related to the slope of the inner density profile η . The density profiles of these models are expressed as:

$$\rho(r) \propto \frac{1}{(r/a)^{3-\eta}(1+r/a)^{1+\eta}}. \quad (4.5)$$

Note that the above expression includes the models considered by [16] for $\eta = 2$ and by [18] for $\eta = 1$ as special cases.

4.3.1 N -body setup and overview

For a spherically symmetric configuration with isotropic velocity distribution, using the Eddington formula, the one-particle distribution function can be uniquely reconstructed from the density profiles (4.5) [7]. [43] gave useful analytic formulas for various physical quantities such as the distribution function, the potential and the velocity dispersion profiles for a system extending over the infinite radius, $r \rightarrow \infty$.

Based on their formulas, [31] numerically estimated the dependence of the slope η on the timescale of core-collapse using the Fokker-Planck code. For present purpose, however, a direct application of their formulas is inadequate in presence of the adiabatic wall.

In appendix B, taking account of the truncation radius r_e , we re-derive the analytic formulas for distribution functions as well as the other physical quantities. Based on this, figure 4.15 plots the theoretical curves for the distribution function(*left*) and the velocity distribution profile(*right*) with a specific choice of the parameters, $\eta = 1, 1.5, 2$ and 3 , fixing the scale-radius to $a/r_e = 0.5$. For models with $\eta > 1$, the distribution function exhibits a divergent behavior at a finite energy $\epsilon = \epsilon_{\min} < 0$, $f(\epsilon_{\min}) = +\infty$. Further, the velocity dispersion profile shows non-monotonic behavior; it first increases and eventually turns to decrease as approaching the center. These peculiar features imply that the inward heat flow occurs along a course of the relaxation, causing the central part of the system expand, which is the same phenomenon as observed in the unstable case of the isothermal distribution (see Sec.4.1).

To perform a simulation, we increased the number of particles to $N = 8K$ in order to resolve the central part of the cuspy density profiles. The softening parameter of gravitational potential is set to $\epsilon = 4/N$. Note that the convergence test in appendix A suggests that much smaller value of the softening parameter should be used for a system with highly concentrated core for a precise estimate of the timescale of core-collapse and/or quasi-equilibrium state. However, decreasing the softening parameter requires a much longer calculation time and the probability of binary-formation via three-body interaction increases around the core. Since we use a simple individual time-step algorithm without any regularization schemes, the N -body integration becomes heavily time-consuming once a tight binary is formed. Hence, we do not discuss here the timescale of the quasi-equilibrium state and focus only on the condition for quasi-equilibrium states. The quantitative estimates of the timescale will be presented in future task.

Table 23: Model parameters and the evolutionary states in cases starting from the stellar models by Tremaine et al.

run #	parameters	r_h/r_e	# of particles	transient state	final state
$\eta 1A$	$\eta = 1, a/r_e = 0.5$	0.25	8k	none	collapse
$\eta 1B$	$\eta = 1, a/r_e = 0.8$	0.3077	8k	none	collapse
$\eta 1C$	$\eta = 1, a/r_e = 2.0$	0.4	8k	none	collapse
$\eta 1.5A$	$\eta = 1.5, a/r_e = 0.2$	0.221	8k	none	collapse
$\eta 1.5B$	$\eta = 1.5, a/r_e = 0.5$	0.362	8k	stellar polytrope	collapse
$\eta 1.5C$	$\eta = 1.5, a/r_e = 1.0$	0.4598	8k	stellar polytrope	collapse
$\eta 2A$	$\eta = 2, a/r_e = 0.2$	0.2869	8k	none	collapse
$\eta 2B$	$\eta = 2, a/r_e = 0.5$	0.4459	8k	stellar polytrope	collapse
$\eta 2C$	$\eta = 2, a/r_e = 1.0$	0.5469	8k	none	isothermal
$\eta 3A$	$\eta = 3, a/r_e = 0.2$	0.3907	8k	stellar polytrope	collapse
$\eta 3B$	$\eta = 3, a/r_e = 0.5$	0.5619	8k	none	isothermal

In table 23, the model parameters of the initial conditions examined here are summarized, together with the evolutionary status. Also in figure 4.16, the result

for each run is represented by the symbols in energy-scale radius relation. Basically, figure 4.16 says that the quasi-equilibrium sequence characterized by the stellar polytrope appears (*filled stars*) when the total energy of the system exceeds the critical energy $\lambda_{\text{crit}} = 0.335$, but not so far from it, i.e., $0.335 \lesssim \lambda \lesssim 1$. Note, however, that the condition $0.335 \lesssim \lambda \lesssim 1$ is not sufficient for the appearance of the quasi-equilibrium state. For models with $\eta = 1$, whose density profile resembles a singular isothermal sphere at the center, the system cannot be fitted by the stellar polytrope (*open stars*). As for the initial conditions with $\lambda < \lambda_{\text{crit}}$ (*stars in shaded-region*), the system finally approaches the isothermal state. Although the evolved state of the stellar distribution could be somehow fitted by the stellar polytropes, the fitted value of the polytrope index is so large that one cannot easily discriminate it from the isothermal distribution.

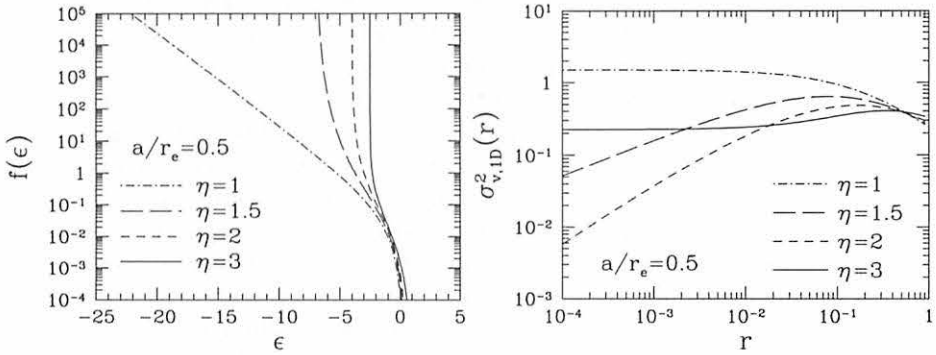


Figure 4.15: Distribution function and velocity dispersion profile for a family of stellar model by Tremaine et al. (1994).

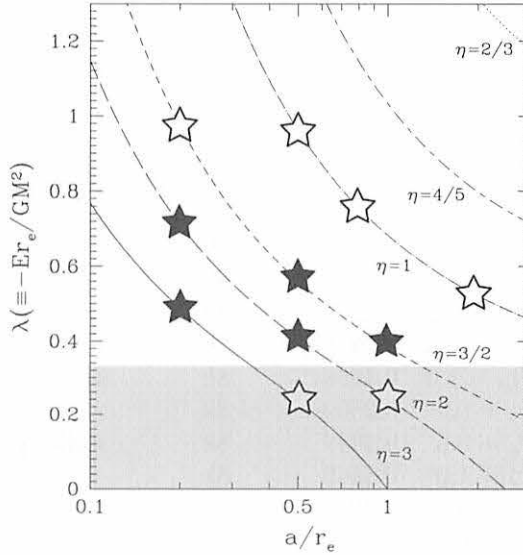


Figure 4.16: Energy-scale radius relationship in stellar models by Tremaine et al. (1994).

4.3.2 Quasi-attractive behaviors and condition for quasi-equilibrium state

Let us focus on the characteristic behaviors of the long-term evolution by picking up some typical examples. Figures 4.17, 4.18 and 4.19 show the results obtained from the runs $\eta 2C$, $\eta 1.5B$ and $\eta 1C$. Figure 4.17 shows the typical example in which the system finally approaches the stable isothermal state. Due to the small value of λ , the effect of self-gravity is small and the system evolves very slowly. While we tried to fit the transient states of the system to the stellar polytropes, the resultant value of the polytrope index n is quite large, $n \simeq 20\text{--}60$. For comparison, we also plot the theoretical curves for isothermal distribution. One cannot clearly discriminate which models are fitted to the simulation results better. Note also that the uncertainty in the fitting results was large in the case of the stellar polytropes, indicating the system being in nearly isothermal state.

By contrast, in figure 4.18, the quasi-equilibrium state approximated by the stellar polytropes appears. Because of the dimensionless energy $\lambda > 0.335$ in the run $\eta 1.5B$, the system finally undergoes core-collapse. Looking at an early phase, however, the core expansion first takes place and the flatter core is formed. Then the core density turns to increase gradually and the transient state can be approximately described by the stellar polytropes for a long time ($t \lesssim 30t_{\text{tr},i}$). These behaviors, which exhibit, in some sense, a quasi-attractive property, can be deduced from the inner structure of the initial velocity dispersion profile. That is, due to the small value of the local relaxation time t_r at the core, the inward heat flow first occurs toward the equipartition of the kinetic energy, leading to the uniform velocity dispersion at the inner part. Then, the outward heat flow next occurs and the inhomogeneity in the velocity dispersion is gradually erased. Although this slow relaxation does not stop and finally leads to the catastrophic heat flow, the system is remarkably long-lived.

On the other hand, the run $\eta 1C$ has slightly smaller value of λ than the run $\eta 1.5B$ and one naively expects that the system is stable. However, the results shown in figure 4.19 is completely opposite. In contrast to the run $\eta 1.5B$, the initial condition of the run $\eta 1C$ has uniform velocity dispersion at the inner part. This implies that the inward heat flow is only supplied by the randomness of the initial perturbation, as seen in the unstable isothermal case (see Sec.4.1). Thus, the amount of the heat flow is insufficient and the resultant core radius is rather small, whose density profile cannot be approximated by the stable stellar polytropic distribution. For comparison, in figure 4.19, we plot the stellar polytrope with the index $n \simeq 17.6$, which is the marginal stable state that has the same total energy λ as in the run $\eta 1C$. While the distribution function and the velocity dispersion profile resemble the marginal stable state of the stellar polytrope, the discrepancy is manifest in the density profile. As a result, the system is short-lived and could not reach the quasi-equilibrium state.

Note that the lifetime of the initial distribution $\eta 1C$ sensitively depends on the randomness of the initial perturbation. Figure 4.19 shows the run-by-run variation of the time evolution of the core radii, where the core radius was estimated according to the procedure given by [9] (see also [13]). Compared to the runs $\eta 2C$ and $\eta 1.5B$, the run-by-run variation in $\eta 1C$ is significant and it seems to originate from the first stage of the core expansion. This behavior also holds for the other runs $\eta 1A$ and $\eta 1B$. Therefore, the lifetime of the system starting from the initial conditions with cusped density profile $\rho \propto r^{-2}$ would be generally stochastic. Although the present calculation with non-zero softening parameter is inadequate to estimate

the precise core-collapse time, the uncertainty of the collapse time would remain true even if the appropriate regularization scheme is implemented. In other words, the condition for quasi-equilibrium state as well as the lifetime of the system are much sensitive to the velocity structure of the initial condition. Though the present surveys do not give a conclusive statement for generality of quasi-equilibrium state, the out-of-equilibrium state with the cusped profile $\rho \propto r^{-\alpha}$, ($\alpha < 2$) possibly exhibits the quasi-equilibrium behaviors if the dimensionless energy λ is in the range $0.335 < \lambda \lesssim 1$.

4.3.3 Entropy growth and quasi-equilibrium state

In order to elucidate the sequence of the quasi-equilibrium evolution from a thermodynamic point-of-view, we quantify the entropy growth for the N -body data, $\eta 2C$, $\eta 1.5B$ and $\eta 1C$. Though the quasi-equilibrium behavior seen in the simulations may imply that the entropy growth can be characterized by the non-extensive Tsallis entropy, the measure in quantifying the entropy S_q is not, strictly speaking, unique for different value of the polytrope index n , or equivalently, the q -parameters. Therefore, as long as the cases with time-varying polytrope indices are concerned, it would be natural to quantify the entropy growth with the Boltzmann-Gibbs entropy.

In left panel of figure 4.21, the results are plotted as the trajectories in $(D, S_{\text{BG}}/N)$ -plane, together with the equilibrium sequence for the stellar polytropes denoted by continuous lines. Also, in right panel, the entropy growth is quantified and is plotted as function of time. Note that the time interval between the symbols marked along each trajectory roughly corresponds to a half-mass relaxation time for the initial distribution.

In figure 4.21, while the time evolution of density contrast D shows non-monotonic behaviors, the specific entropy S_{BG}/N monotonically increases in time, consistent with the law of thermodynamics indicated by the Boltzmann H-theorem. The evolutionary sequence in the $(D, S_{\text{BG}}/N)$ -plane depends on the initial condition. In the case of the run $\eta 2C$, the left panel shows that the trajectory is located around $S_{\text{BG}} \simeq 3.7 - 3.9$ and the evolution slows down after contacting with the trajectory of the isothermal distribution. As for the trajectory of the run $\eta 1.5B$, it first goes across the boundary between the stable and the unstable stellar polytropes indicated by the dotted line. Then, it temporarily settles down into a stable stellar polytropic state with index $n \simeq 12 - 14$ for a long time. At that time, the transient states were successfully fitted by the stable stellar polytropic distribution (see Fig.4.18). It is interesting to note that the growth of the entropy shown in the right panel of Figure 4.21 is slightly restrained during the quasi-equilibrium regime, which might manifest the minimum entropy production principle in non-equilibrium thermodynamics. On the other hand, for the trajectory of the run $\eta 1C$, while it first approaches the stability boundary, the decreases of the density contrast eventually terminate at relatively higher value $D \simeq 10^4$ and accordingly the transients could not be fitted by the stable stellar polytropes.

Note also that the transient state of the run $\eta 1C$ cannot be even fitted by the *unstable* stellar polytropes, since the density profile of the unstable polytropes shows a log-periodic behavior at the outer part while no such behavior appears in the N -body simulation. In this sense, only the quasi-equilibrium state characterized by the *stable* stellar polytropes might have some special meanings. Similar to the isothermal distribution, the quasi-equilibrium state has the quasi-attractive feature

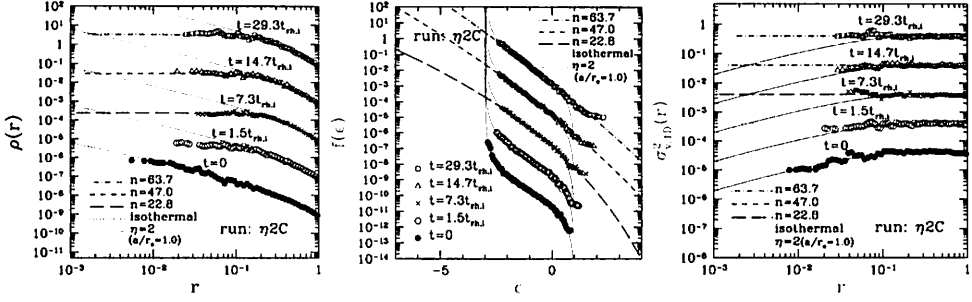


Figure 4.17: Snapshots of density profile, distribution function and velocity dispersion for run $\eta 2C$.

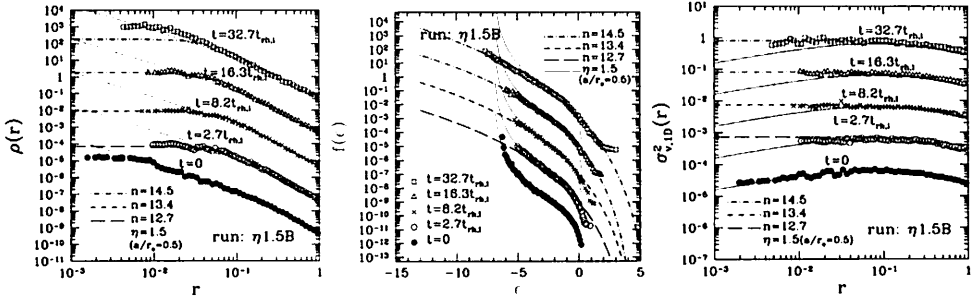


Figure 4.18: Snapshots of density profile, distribution function and velocity dispersion for run $\eta 1.5B$.

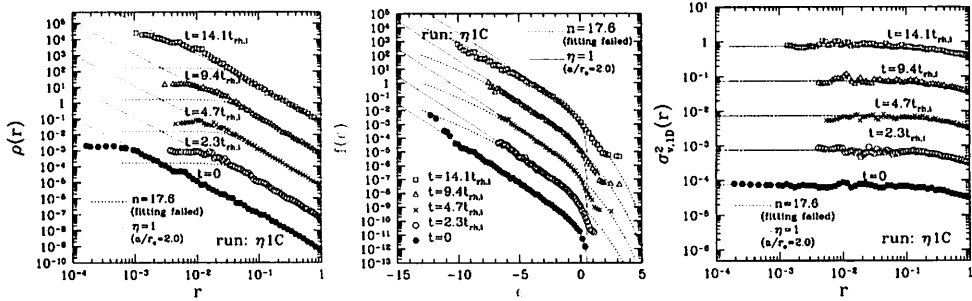


Figure 4.19: Snapshots of density profile, distribution function and velocity dispersion for run $\eta 1C$.

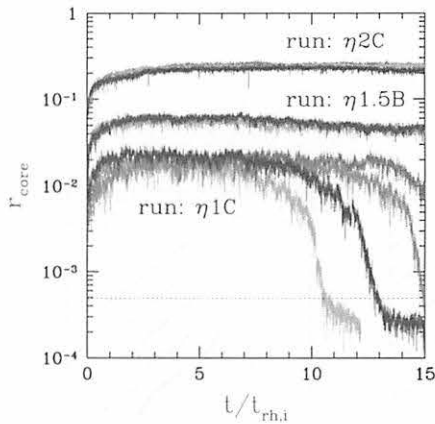


Figure 4.20: Run-by-Run variation for evolution of core radius taken from the runs $\eta 1C$, $\eta 1.5B$ and $\eta 2C$.

that the system starting from some classes of initial conditions tends to approach the polytropic state, which may provide an important suggestion for the reality of the non-extensive statistics.

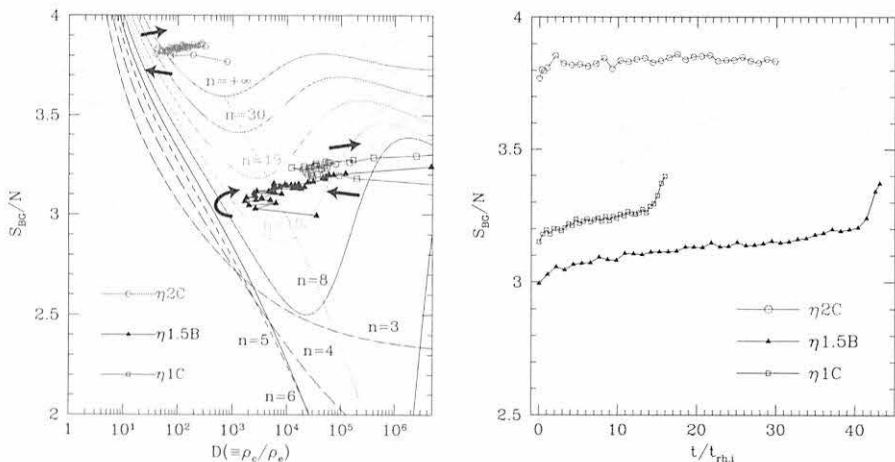


Figure 4.21: *left*: Trajectories in (S_{BG}, D) -plane obtained from the run $\eta 1C$ (*open-squares*), $\eta 1.5B$ (*filled triangles*) and $\eta 2C$ (*open-circles*). *Right*: Time evolution of Boltzmann-Gibbs entropy

5 Discussion & Conclusion

In this paper, we have numerically investigated the quasi-equilibrium properties of the N -body systems before the core-collapse stage. Particularly focusing on the long-term stellar dynamical evolution from the thermostistical point-of-view, we try to characterize the out-of-equilibrium state starting with various initial conditions in the setup of the so-called Antonov problem. We found that the quasi-equilibrium sequence, in which the system evolves gradually on timescales of two-body relaxation,

can appear if the dimensionless energy $\lambda = -Er_c/GM^2$ exceeds the critical energy of the isothermal sphere 0.335, but not far from it, i.e., $0.335 \leq \lambda \lesssim 1$. The schematic illustration of our basic results is shown in figure 5.1. The transient states during the quasi-equilibrium evolution are approximately described by the one-parameter family of stellar polytropes with the time-varying polytrope index. The fitted value of the index n gradually increases with time and the system keeps following a sequence of stellar polytropes until reaching the critical index, n_{crit} . In general, the condition for the quasi-equilibrium state would depend on the details of the velocity structure in the initial conditions, however, within a class of initial conditions examined in this paper (i.e., stellar polytropes and stellar models with cusped density profiles), the out-of-equilibrium states with inner density profiles $\rho \propto r^{-\alpha}$ ($\alpha < 2$) (or $\eta \leq 1$) exhibit the quasi-equilibrium behavior that is attracted to a sequence of stellar polytropes.

One may naively think that the results obtained here severely depend on the presence of an adiabatic wall, since the real stellar systems in absence of the adiabatic wall are known to be poorly fitted to the stellar polytropes. Recalling the discussion in section 4.2.3, however, the outer part of the system is expected to be mainly affected by the boundary condition, since the relaxation timescale at the outer part is rather longer than that at the core. In other words, as long as the relaxation time at the central part is shorter than that at the outer part, the modification of the boundary condition only alters the outer part of the system, not all of the system. In fact, we have seen in section 4.2.3 that the phenomenological King model which accounts for the globular clusters affected by the Galactic tidal field resembles the stellar polytropes at the inner part. In this sense, the stellar polytropic system as quasi-equilibrium state would be a fundamental stellar model and may sometimes make sense even if removing the adiabatic wall (see paper IV).

The present results may give an interesting suggestion for the justification and/or the realization of the non-extensive thermostats based on the Tsallis entropy. Strictly speaking, however, the N -body simulations just indicate a reality of the stellar polytropes as *q-analogue* of the Boltzmann-Gibbs distribution. Further, the quasi-equilibrium state is time-dependent, which cannot be rigorously treated by the thermostats. Nevertheless, one may hope that the exploration of a connection with non-extensive entropy opens a new window to understand the non-equilibrium thermodynamics of the long-range systems. In this respect, the analytical treatment based on the kinetic theory is an important next step to interpret the N -body results thermodynamically. A crucial task is to estimate the timescales for quasi-equilibrium evolution, as well as to determine the generic criteria for quasi-equilibria. To investigate this, the Fokker-Planck model for stellar dynamics would be helpful. It has been recently confirmed that the Fokker-Planck model successfully recovers the behaviors of quasi-equilibrium state found in the N -body results. A quantitative comparison between a numerical solution of the Fokker-Planck model with the N -body results based on a more sophisticated N -body code such as the one developed by Aarseth will be presented elsewhere.

Acknowledgments

We are grateful to T. Fukushima for providing us the GRAPE-6 code and for his constant supports and helpful comments. We also thank S. Inagaki and K. Taka-

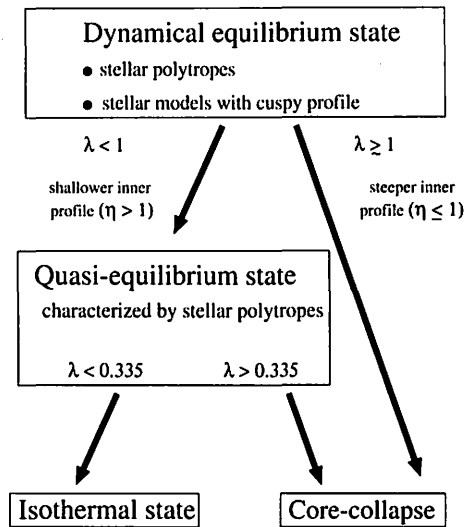


Figure 5.1: Schematic illustration of the simulation results.

hashi for their comments and suggestions to our future works on the Fokker-Planck model for stellar dynamics. Numerical computations were carried out at ADAC (the Astronomical Data Analysis Center) of the National Astronomical Observatory of Japan. This work was supported by the grand-in-aid for Scientific Research of Japan Society of Promotion of Science (No.14740157, 15540368).

Appendix A: Convergence test of N-body simulation

In a series of our N -body simulations, the Plummer softening with parameter $\epsilon = 1/N$ or $4/N$ is used to avoid the formation of tight binaries. For our investigation of the quasi-equilibrium state before the core-collapse stage, the fourth order Hermite integration code with individual time-step provides a robust numerical method without a regularization scheme. However, it would be crucial to pursue the gravothermally unstable regime. While our primary concern is the non-equilibrium evolution before entering the core-collapse phase, it is important to note the effect of potential softening on the estimation of collapse time.

To quantify this, convergence property of the collapse time is investigated by varying the softening parameter ϵ . For this purpose, N -body simulations starting with the Plummer model, i.e., the stellar polytrope with index $n = 5$, are used to study the effect of potential softening. The corresponding simulations are the runs $n5B$ and $n5D$ listed in table 22.

Figure .2 shows the results of the convergence test based on the run $n5B$. Left panel plots the evolution of core radii for various choices of softening parameter, while the right panel estimate the collapse time as function of softening parameter ϵ for three different realizations of the initial condition. Here, the collapse time is defined as the first passage time when the core radius becomes shorter than 3ϵ . Clearly, large value of the softening parameter overestimates the estimation of the core-collapse time and the transition between the quasi-equilibrium stage to the core-collapse phase becomes uncertain. For an appropriately small value

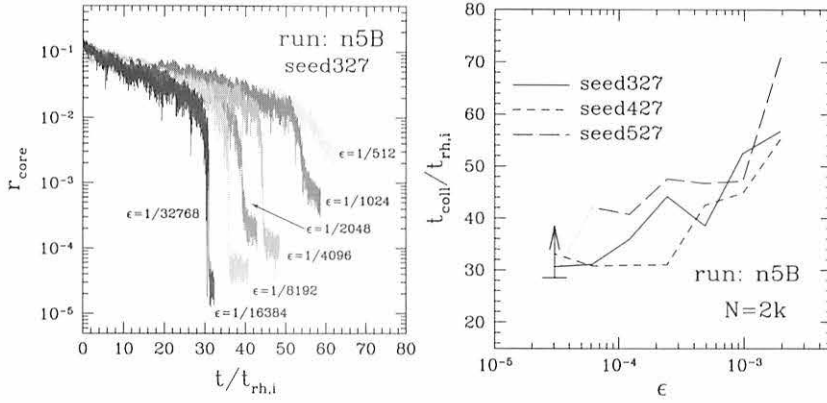


Figure .2: Convergence properties of collapse time for various choices of softening parameter ϵ in the case of run *n5B*. *Left*: evolution of core radius. *Right*: collapse time as function of softening parameter

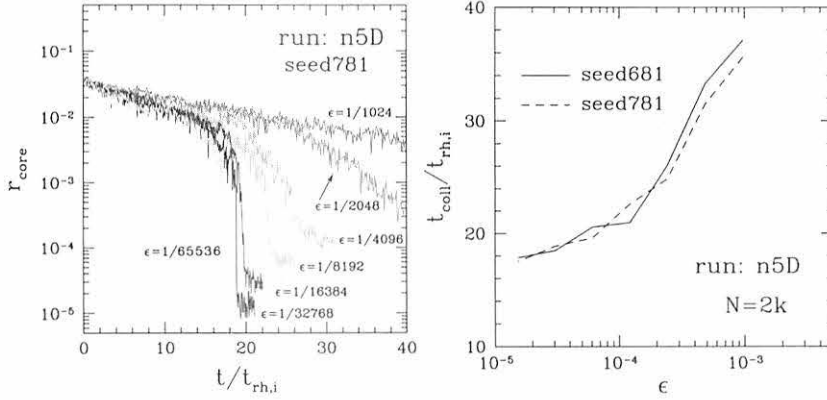


Figure .3: Same as Fig..2, but in the cases of run *n5D*.

$\epsilon \lesssim 1/(4N) \simeq 1.2 \times 10^{-4}$, the core radius sharply falls off around the core-collapse time and the collapse time seems to converge to $t_{\text{coll}} \sim 30\text{--}40t_{\text{rh},i}$, although there exists a large scatter among three different realizations of the initial condition.

In general, the convergence properties of the collapse time depend on the initial conditions. Figure .3 shows the results from the run *n5D*, i.e., Plummer model with density contrast $D = 10^6$. In this case, the scatter becomes even smaller and the collapse time converges to $t_{\text{coll}} \sim 18t_{\text{rh},i}$ at $\epsilon \lesssim 6 \times 10^{-5}$, slower than the case of run *n5B*. These experiments indicate that the a large softening length affects not only the core-collapse time but also the timescales of quasi-equilibrium stage. Further, the requirement for the softening parameter becomes severe as increasing the initial density contrast. Hence, for quantitative estimation of collapse time, the softening length should be set to zero with implementing a regularization scheme. The use of a small softening length is also favorable to investigate the quasi-equilibrium evolution. Figures .2 and .3 suggest that for initial conditions with moderate range of the initial density contrast, $10^2 \leq D \leq 10^4$, the softening length with $\epsilon \leq 1/N$ provides a better estimation of the quasi-equilibrium timescales, although it still

overestimates the collapse time. Hence, in this paper, we mainly use the softening length $\epsilon = 1/N$.

Appendix B: A family of stellar model with cusps

In this appendix, we present analytic formulae for the stellar model considered by [43] taking account of the adiabatic wall.

Just for convenience, let us first introduce the following variables:

$$A = \eta \frac{M}{4\pi a^3}, \quad B = \frac{GM}{a} \left(\frac{r_e + a}{r_e} \right)^\eta. \quad (.1)$$

In terms of these, the density profile for stellar models by Tremaine et al. (1994) is expressed as

$$\rho(r) = \frac{A}{(r/a)^{3-\eta}(1+r/a)^{1+\eta}}. \quad (.2)$$

The corresponding mass profile and the gravitational potential respectively becomes

$$m(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r') = \frac{4\pi a^3 A}{\eta} \left(\frac{r}{r+a} \right)^\eta, \quad (.3)$$

and

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= -G \left\{ \frac{m(r)}{r} + \int_0^{r_e} dr' 4\pi r' \rho(r') \right\} \\ &= \begin{cases} -B \left\{ \frac{1}{\eta-1} \left(\frac{r_e}{r_e+a} \right)^{\eta-1} - \frac{1}{\eta-1} \left(\frac{r}{r+a} \right)^{\eta-1} + \frac{(r_e/a)^{\eta-1}}{(r_e/a+1)^\eta} \right\} & ; \quad \eta \neq 1 \\ -B \left\{ \log \left(\frac{r_e}{r_e+a} \right) - \log \left(\frac{r}{r+a} \right) + \frac{1}{r_e/a+1} \right\} & ; \quad \eta = 1 \end{cases} \quad (.4) \end{aligned}$$

For stationary state of the Vlasov equation, the one-dimensional velocity dispersion profile can be calculated from the density profiles and the gravitational potential through the Jeans equation. In the case of the isotropic velocity distribution, this gives

$$\sigma_{v,1D}^2(r) = \frac{P(r)}{\rho(r)}, \quad (.5)$$

with the function $P(r)$ being pressure, determined from the hydrostatic equilibrium (Jeans equation), $dP/dr = -\rho d\Phi/dr$. Note that the explicit expression for function $P(r)$ cannot be expressed in an unified manner. For some values of η , we have

$$P_{\eta=1}(r) = AB \left[6 \log \left(\frac{y+1}{y} \right) - \frac{1}{y^2} \left\{ 6(1+y) - 9 + \frac{2}{y+1} + \frac{1}{2(y+1)^2} \right\} \right], \quad (.6)$$

$$P_{\eta=1.5}(r) = AB \left[4 \log \left(\frac{y}{y+1} \right) + \frac{1}{y} \left\{ 4 - \frac{2}{y+1} - \frac{2}{3(y+1)^2} - \frac{1}{3(y+1)^3} \right\} \right] \quad (.7)$$

$$P_{\eta=2}(r) = AB \left[4 \log \left(\frac{y+1}{y} \right) - \left\{ \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2(y+1)^2} + \frac{1}{3(y+1)^3} + \frac{1}{4(y+1)^4} \right\} \right] \quad (.8)$$

$$P_{\eta=3}(r) = AB \left[\frac{1}{5(y+1)^5} - \frac{1}{6(y+1)^6} \right], \quad (.9)$$

where we defined $y = r/a$. Provided the pressure, one can also calculate the total energy of the system confined in a wall as

$$\begin{aligned} E = K + U &= \int d^6\tau \left\{ \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\Phi(r) \right\} f(r, v) \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{r_c} dr \, 4\pi r^2 P(r) + \frac{1}{2} \int_0^{r_c} dr \, 4\pi r^2 \rho(r) \Phi(r). \end{aligned} \quad (.10)$$

In terms of the dimensionless variable $\lambda = -r_e E / (GM^2)$, we obtain

$$\lambda_{\eta=1} = \frac{1}{4} \left(1 + 5y_c + 18y_c^2 + 12y_c^3 \right) - 3y_c^2(y_c + 1)^2 \log \left(\frac{y_c + 1}{y_e} \right), \quad (.11)$$

$$\lambda_{\eta=1.5} = \frac{1}{8} \left(-3 - 43y_c - 60y_c^2 - 24y_c^3 \right) - 3(y_c + 1)^3 \log \left(\frac{y_c}{y_e + 1} \right), \quad (.12)$$

$$\lambda_{\eta=2} = \frac{1}{12} \left(29 + 53y_c + 42y_c^2 + 12y_c^3 \right) - (y_c + 1)^4 \log \left(\frac{y_c + 1}{y_e} \right), \quad (.13)$$

$$\lambda_{\eta=3} = \frac{1}{20y_e^2} (1 + 7y_c + y_c^2) (y_e - 1), \quad (.14)$$

where the variable y_e denotes r_c/a .

According to the standard text book for stellar dynamics, the one-particle distribution function for the isotropic spherical stellar model is expressed as a function of the specific energy $\epsilon = v^2/2 + \Phi(r)$ and can be reconstructed from the density profiles through the Eddington formula. Introducing the variables $\varepsilon = \Phi_0 - \epsilon$ and $\psi = \Phi_0 - \Phi(r)$, we have

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \int_0^\varepsilon \frac{d^2\rho}{d\psi^2} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon - \psi}} \quad (.15)$$

with the regularity condition:

$$\left(\frac{d\rho}{d\psi} \right)_{\psi=0} = 0. \quad (.16)$$

Note that the numerical constant Φ_0 is determined from the above condition. With the use of the analytical expressions (.2) and (.4), after some manipulation, the Eddington formula (.15) can be rewritten with

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{A}{B^{3/2}} \int_0^{q(\epsilon)} \frac{d\psi}{\sqrt{q(\epsilon) - \psi}} \frac{12\{s(\psi)\}^2 - 4(\eta - 4)s(\psi) + 2(3 - \eta)}{\{s(\psi)\}^{\eta+1} \{1 + s(\psi)\}^{3-\eta}}, \quad (.17)$$

where the functions $q(\epsilon)$ and $s(\psi)$ are respectively given by

$$q(\epsilon) = -\frac{\epsilon}{B} - \frac{1}{\eta - 1} \left\{ \left(\frac{r_c}{r_c + a} \right)^{\eta-1} - 1 + (\eta - 1) \frac{(r_c/a)^{\eta-1}}{(r_c/a + 1)^\eta} \right\}, \quad (.18)$$

$$s(\psi) = \frac{\{1 - (\eta - 1)\psi\}^{1/(\eta-1)}}{1 - \{1 - (\eta - 1)\psi\}^{1/(\eta-1)}} \quad (.19)$$

in cases with $\eta \neq 1$ and

$$q(\epsilon) = -\frac{\epsilon}{B} - \log \left(\frac{r_c}{r_c + a} \right) - \frac{1}{r_c/a + 1}, \quad (.20)$$

$$s(\psi) = \frac{1}{e^\psi - 1} \quad (.21)$$

for $\eta = 1$. In principle, the distribution function $f(\epsilon)$ is obtained from the numerical integration of (.15). In some specific values of η , however, one can luckily obtain the analytic expressions of $f(\epsilon)$:

$$f_{\eta=1}(\epsilon) = \frac{A}{B^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} F(\sqrt{2q}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(\sqrt{q}) - e^q \operatorname{erf}(\sqrt{q}) + \frac{e^q}{\sqrt{2}} \operatorname{erf}(\sqrt{2q}) \right], \quad (.22)$$

$$f_{\eta=1.5}(\epsilon) = \frac{A}{B^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}(2-q)^{9/2}} \left[\frac{3}{2}(3+32q-8q^2) \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\right) - \frac{\sqrt{q(2-q)}}{28} \{63 + 693q - 5670q^2 + 7410q^3 - 4488q^4 + 1448q^5 - 240q^6 + 16q^7\} \right] 23,$$

$$f_{\eta=2}(\epsilon) = \frac{A}{B^{3/2}} \frac{1}{4\sqrt{2\pi^2}} \frac{1}{(1-q)^{5/2}} \left[3 \sin^{-1}(\sqrt{q}) - \sqrt{q(1-q)} (16q^3 - 24q^2 + 2q + 3) \right], \quad (.24)$$

$$f_{\eta=3}(\epsilon) = \frac{A}{B^{3/2}} \frac{1}{\pi^2(1-2q)} \left[2\sqrt{2q} (3-4q) + 3(1-2q) \log\left(\frac{1-\sqrt{2q}}{1+\sqrt{2q}}\right) \right]. \quad (.25)$$

Here, the function $F(x)$ and $\operatorname{erf}(x)$ are Dawson's integral and the error function:

$$\operatorname{erf}(x) = \sqrt{2} \pi \int_0^x dt e^{-t^2}, \quad F(x) = e^{-x^2} \int_0^x dt e^{t^2} \quad (.26)$$

Compared the final expressions (.22)–(.25) with those obtained by [43], we deduce that the only alternation in the expressions of [43] in presence of the adiabatic boundary is to replace all the variables ϵ at the right-hand side of equations with the function $q(\epsilon)$ defined above. Therefore, the above results consistently recover the formulas derived by [43] in the limit $r_e \rightarrow \infty$.

References

- [1] Aarseth S.J., Hénon, M., Wielen, R., 1974, A&A 37, 183
- [2] Aarseth S.J., 2003, *Gravitational N-body Simulations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK
- [3] Abe S., Okamoto Y., 2001, *Non-extensive Statistical Mechanics and Its Applications*, Springer, Berlin
- [4] Antonov V.A., 1962, Vest. Leningrad Gros. Univ. 7, 135
- [5] Baumgardt H., Makino J., 2003, MNRAS 340, 227
- [6] Binney J., Merrifield M., 1998, *Galactic Astronomy*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [7] Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [8] Bettwieser E., Sugimoto D., 1984, MNRAS 208, 493
- [9] Casertano S., Hut P., 1985, ApJ 298, 80

- [10] Chandrasekhar S., 1939, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York.
- [11] Chandrasekhar S., 1943, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Publ.
- [12] Endoh H., Fukushige T., Makino J., 1997 PASJ 49, 345
- [13] Fukushige T., Heggie D. C., 1995, MNRAS 276, 206
- [14] Giersz M., Heggie D. C., 1994, MNRAS 268, 257
- [15] Heggie, D.C., Hut, P., 2003, *The Gravitational Million-body Problem*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK
- [16] Hernquist L., 1990, ApJ 356, 359
- [17] Hut P., Makino J., 1999, Science 283, 501
- [18] Jaffe W., 1983, MNRAS 202, 995
- [19] Katz J., 1978, MNRAS 183, 765
- [20] Katz J., 1979, MNRAS 189, 817
- [21] King I.R., 1966, AJ 71, 64
- [22] Kippenhahn R., Weigert A., 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Springer, Berlin
- [23] Lynden-Bell D., Wood R., 1968, MNRAS 138, 495
- [24] Makino J., 1996, ApJ 471, 796
- [25] Makino J., Fukushige T., Koga M., Namura K., 2003, PASJ 55, 1163
- [26] Martínez S., Nicolás F., Pennini F., Plastino A., 2000, Physica A 286, 489
- [27] Meylan, G., Heggie, D.C., 1997, A&AR 8, 1
- [28] Padmanabhan T., 1989, ApJ Suppl. 71, 651
- [29] Padmanabhan T., 1990, Phys.Rep. 188, 285
- [30] Plastino A.R., Plastino A., 1993, Phys. Lett. A 174, 384
- [31] Quinlan G.D., 1996, New Astron 1, 255
- [32] Sakagami M., Taruya A., 2004, Continuum.Mech.Thermodyn. 16, 279 (cond-mat/0310082)
- [33] Spitzer L., 1987, *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [34] Sugimoto D., Bettwieser, E., 1983, MNRAS 204, 19p
- [35] Sugimoto D., Chikada Y., Makino J., Ito T., Ebisuzaki T., Umemura M., 1990, Nature 345, 33

- [36] Tanikawa, A., Fukushige, T., 2004, astro-ph/0409148
- [37] Taruya A., Sakagami M., 2002, Physica A 307, 185
- [38] Taruya A., Sakagami M., 2003a, Physica A 318, 387
- [39] Taruya A., Sakagami M., 2003b, Physica A 322, 285
- [40] Taruya A., Sakagami M., 2003c, Phys.Rev.Lett. 90, 181101
- [41] Taruya A., Sakagami M., 2004, Physica A 340, 453
- [42] Trager S.C., King I.R., Djorgovski S., 1995, AJ 109, 218
- [43] Tremaine S., Richstone D.O., Byun Y-I., Dressler A., Faber S.M., Grillmair C., Kormendy J., Lauer T.R., 1994, AJ 107, 634
- [44] Tsallis C., 1988, J. Stat. Phys. 52, 479
- [45] Tsallis C., 1999, Braz. J. Phys. 29, 1
- [46] Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R., 1998, Physica A 261, 534

IERS Conventions 2003 の摂動モデルと 軌道解析ソフトウェア concerto v4

Toshihiro KUBO-OKA^[1], Toshimichi OTSUBO^[1],
and Tadahiro GOTOH^[2]

[1] tkubooka@nict.go.jp, otsubo@nict.go.jp

*Space Cybernetics Group, Kashima Space Research Center, National Institute of Information and
Communications Technology (NICT), 893-1, Hirai, Kashima-shi, Ibaraki 314-8501 JAPAN*

[2] tara@nict.go.jp

*Time and Frequency Measurements Group, National Institute of Information and
Communications Technology (NICT), 4-2-1, Nukui-Kitamachi, Koganei-shi,
Tokyo 184-8795 JAPAN*

ABSTRACT

At National Institute of Information and Communications Technology (NICT), precise orbit determination software "concerto" has been developed and the new version 4 is now being tested. Major features of this new version are expansion to deal with multiple observation data types and improvement of orbit determination accuracy. Even though the old version of concerto can only solve Satellite Laser Ranging data, the new version will be possible to solve GPS code and carrier phase, angular observation, and accelerometer. Physical models included in version 4 are mostly based on IERS Conventions 2003 and 1996. For the perturbation acting on the satellite, more accurate models are implemented beyond the limit of IERS Conventions. In this paper, we overview the perturbation models implemented in the concerto ver. 4 and compare the models included in IERS Conventions 2003 and 1996. Since the standard geopotential model has been changed in IERS Conventions 2003, the difference between orbits computed with IERS Conventions 2003 and 1996 becomes apparent for low-altitude satellites.

1 Introduction

人工衛星のミッションの高度化に伴い、軌道決定精度に対する要求もより高いものとなってきた。コーナーキューブリフレクタを搭載した LAGEOS や『あじさい』などの測地衛星に対しては、人工衛星レーザー測距 (SLR) のデータを解析することで精密な軌道決定がなされ、その結果はプレート運動に伴う観測局位置の変動の測定や、地球重力場係数の決定等に活用されてきた。1990 年代に入ると、リモートセンシング衛星でも精密な軌道決定を必要とするものが現れてきた。例えばアルチメータ衛星 TOPEX/Poseidon は、衛星から海面に向けて発射した電波の往復時間を基にして海面高の変動を計測するため、高さ方向に関しては RMS で 10 cm を切る精度での軌道決定が要求され、実際の運用時には 2 cm 程度の精度まで到達した。また、GPS をはじめとする測位衛星では、任意の時刻における衛星の位置情報がシステムを成立させるための生命線と言っても過言ではない。これらの測位サービスを提供する衛星は、高度 2 万キロ程度を周回する GPS、GLONASS、GALILEO から、MTSAT-R や準天頂衛星といった静止衛星高度 (約 36000 km) までそのフィー

ルドが広がる傾向にある。さらには、GRACE や CHAMP といった地球の重力場係数を正確に決定するためのミッションでも低高度衛星の正確な軌道情報が必要とされている。

情報通信研究開発機構 (NICT、2004 年 4 月より通信総合研究所から改組) では、1993 年頃より人工衛星の軌道解析ソフトウェア "concerto" の開発を続けている [1]。このソフトウェアは、首都圏地殻変動観測計画 (Keystone Project) で取得された SLR データの解析用として開発がスタートしたものである。これまでの ver. 3 は SLR データ専用であるが、海外の著名な軌道解析ソフトウェア、例えば、NASA Goddard Space Flight Center の GEODYN-II や、テキサス大学の UTOPIA と比べても遜色ない精度を持っている。

concerto を新しい version 4 に発展させるに当たって、我々は 2 つの目標を掲げて開発を進めている。1 つは、扱える観測データタイプの拡充、特に衛星搭載 GPS データの解析機能を付加することである。前述の TOPEX/Poseidon 以降、GPS 受信機を搭載した人工衛星が増加し、低軌道の衛星に対しては軌道決定の有力な方法となっている。従って、衛星搭載 GPS 受信機のデータ解析機能を取り込むことは、軌道解析ソフトウェアにおいて不可欠なものになりつつあると言っても過言ではない。その他、鹿島宇宙通信研究センターで行っている電波及び光による静止衛星の測角観測データを解析できるようにすることも計画中である。もう一つの目標は、さらなる精度の向上である。宇宙測地技術の計測技術向上に呼応して、地球の動き・衛星の動きに関する物理モデルも次々と新しいものが開発されている。逆に言えば、高精度計測データを活用するためには、最新の物理モデルの利用が必須ということになる。我々は、軌道解析ソフトウェアをつくる際に、IERS Conventions を物理モデルの基礎として取り込んでいる。IERS は、International Earth Rotation and Reference Systems Service の略で、IERS Conventions には各種の基準座標系の定義及び、その構築に必要な物理モデルがまとめられている。これまでの concerto ver. 3 では、IERS Conventions の 1996 年版 [2] で採用されているモデルの多くを取り込んできた。昨年、より精密なモデルを含んだ 2003 年版 [3] が公開されたため、ver. 4 では、1996 年版に加えて 2003 年版への対応を進めている。2003 年版では、固体地球潮汐による地球重力場変化、相対性理論を考慮するための衛星加速度補正、歳差・章動・日周運動の計算、多様な潮汐効果による地球上の局位置の変化といった所がアップデートされている。なお、IERS Conventions の位置づけは、あくまでも「共通の土俵」であり、さらに高い精度の物理モデルや、個々の衛星に固有であるために IERS Conventions に掲載されていない物理モデルの取り込みが必要となってくる。

本稿では、大規模なソフトウェアである concerto の中で、特に衛星に作用する各種の摂動力を計算する部分に絞って概説する。次節でまず concerto ver. 4 の概要を簡単に説明した後、第 3 節で IERS Conventions 2003 に含まれる摂動モデルについて、1996 年版との比較を交えながら説明する。第 4 節では、IERS Conventions に含まれていない摂動の取り扱いについて触れる。最後の第 5 節で、それらの摂動モデルの違いによる加速度の差異や実際の軌道計算結果に及ぼす影響について述べる。

2 軌道解析ソフトウェア concerto ver. 4 の概要

軌道解析ソフトウェア concerto は、純国産の数少ない人工衛星精密軌道解析ソフトウェアである。開発言語としては、当初は Fortran、次に C++ を使っていたが、ver. 3 より Java 言語を採用し (現在は JDK 1.4.2 を使用)、オブジェクト指向を意識したプログラム構成を心がけている。Java を採用した理由の一つとして、プラットフォーム依存性がないという点がある。実際に concerto ver. 3.x では、Windows、

Sun, Linux, Macintosh 環境での稼動実績がある。また、ガベージコレクション機能があるため、C++ などの言語に比べるとメモリ管理で気を使うことが少なくなり、結果として堅牢なプログラムが書けるというメリットもある。デメリットとしては、Virtual Machine を介して実行するために、実行速度が他の言語で開発した場合より遅くなるという点がある。ただし、昨今の高速な CPU を搭載した PC で動かす際には、実用上問題になることは少ない。

concerto では、ファイル I/O、数値演算、加速度計算、地球回転、伝播遅延、時刻関連、サポートツール群といった機能別に Java の特徴である「パッケージ」を利用している。「パッケージ」の下には、さらに細分化された多数の「クラス」がある。例えば、加速度計算の Accel パッケージの下には、地球重力場に起因する加速度を計算する AccGeopotential や、大気抵抗を計算する AccDrag というクラスがある。オブジェクト指向言語である Java の特性を生かして、共通の部分を「親」クラス（例えば加速度関連では AbstractR2）にまとめ、個々のクラスではその共通部分を「継承」することで、コーディングの効率化を図っている。ver. 3.x から ver. 4 に移行するにあたって、150 を超えるクラスのほとんど全てを書き直している。また、ver. 3.x では衛星の軌道生成とパラメータ推定を同時進行させていたが、ver. 4 では、軌道を生成し状態遷移行列を出力する “c4i” と、パラメータ推定を行う “c4s” の 2 パートに分割し、計算の効率化と、将来必要になるであろう多数衛星の同時解析に備えている。前節でも説明したように concerto ver. 3 までは SLR データ専用であったが、昨年度に衛星搭載 GPS 受信機の疑似距離 (pseudorange) データの解析機能を実装した [1]。現在、搬送波位相 (carrier phase) データについても解析機能の組み込みを進めている。また、初期設定等の入出力ファイルを XML (eXtensible Markup Language) に対応させる作業も進行中である。

3 IERS Conventions 2003 の摂動モデル

この節では、人工衛星の精密軌道決定に必要となる摂動モデルのうち、IERS Conventions 2003 に記述されているものについて、1996 年版との比較を交えながら説明する。

3.1 地球重力場

IERS Conventions 1996 では、JGM-3 [4] が標準的な重力場モデルとして指定されていたが、2003 年版では標準モデルが EGM-96 [5] に変更された。両者では単に重力場係数の値が異なるだけではなく、Permanent Tide に対するアプローチが異なる。Permanent Tide とは、月・太陽による起潮力ポテンシャルの時間依存性の無い項による変形のことである。当然のことながら、この成分による地球の変形も時間依存性が無い。EGM-96 は Zero Tide Model という流儀に属する。この流儀では、地球重力場係数には Permanent Tide の寄与が含まれていないため、固体地球潮汐の影響で重力場係数が変化する分を計算する際に Permanent Tide の分を加えてやる必要がある。これに対して、JGM-3 は Tide Free Model という流儀に属する。こちらの方は、Permanent Tide による変形分も含めた地球重力場係数を求めている。なお、インターネット等で入手できる JGM-3 の係数の Table の中には、Zero Tide 流に係数を修正したものが含まれているので注意が必要である。concerto では、標準的なこれら 2 つのモデル以外にも GRIM5-S1 [6] や EIGEN-1S [7] といった、新しい重力場モデルを用いることも可能である。

3.2 潮汐

固体地球潮汐や海洋潮汐の影響は瞬間的な地球重力場係数の変動として現れ、結果的に人工衛星の軌道にも影響を及ぼす。固体地球潮汐による影響の補正は、EGM-96 の様な Zero-Tide model では2つのステップで行う [3]。Step1 では、まず Love 数の周波数依存性の無い部分の寄与を、

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_{\oplus}} \left(\frac{R_E}{r_j}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi_j) e^{-im\lambda_j}$$

という式に従って補正する。ここで k_{nm} 、 R_E 、 $M_{\oplus}$ 、 M_j 、 Φ_j 、 λ_j 、 $\bar{P}_{nm}$ はそれぞれ、Love 数、地球の赤道半径、地球質量、月及び太陽の質量、緯度、経度 ($j=2$ が月、 $j=3$ が太陽に対応)、規格化した Legendre 陪関数である。さらに、Step 1 では $n=2$ の tide から現れる $n=4$ の係数の変化についても補正する。その補正量は、

$$\Delta\bar{C}_{4m} - i\Delta\bar{S}_{4m} = \frac{k_{2m}^{(+)}}{5} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_{\oplus}} \left(\frac{R_c}{r_j}\right)^3 \bar{P}_{2m}(\sin \Phi_j) e^{-im\lambda_j}, \quad (m = 0, 1, 2)$$

と書ける。次に Step 2 で Love 数、Shida 数の周波数依存部分を補正する。 $\Delta\bar{C}_{20}$ については、

$$\text{Re} \sum_{f(2,0)} (A_0 \delta k_f H_f e^{i\theta_f}) = \sum_{f(2,0)} (A_0 H_f (\delta k_f^R \cos \theta_f - \delta k_f^i \sin \theta_f))$$

$\Delta\bar{C}_{21}$ 、 $\Delta\bar{S}_{21}$ 、 $\Delta\bar{C}_{22}$ 、 $\Delta\bar{S}_{22}$ については、

$$\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,m)} (A_m \delta k_f H_f) e^{i\theta_f}, \quad (m = 1, 2)$$

という式を用いて計算する。なお、Step 2 の補正項の振幅は IERS Conventions 2003 では全て複素表示に変更された。考慮する分潮の数も IERS Conventions 1996 の 49 に対して IERS Conventions 2003 では 71 と大幅に増えている。

極潮汐 (Polar Tide) は、極運動に伴う遠心力によって引き起こされるもので、 C_{21} 、 S_{21} が変化する。IERS Conventions 1996 にも記載されていたが、取り扱いに不明瞭な点があったため concerto ver. 3 には取り込んでいなかった。しかしながら、2003 年版でパラメータの定義が明確になったため、ver. 4 で初めて実装した。極潮汐による C_{21} 及び S_{21} の変化量は、

$$\Delta\bar{C}_{21} = -1.333 \times 10^{-9} (m_1 - 0.0115m_2)$$

$$\Delta\bar{S}_{21} = -1.348 \times 10^{-9} (m_2 + 0.0115m_1)$$

で表される。ここで m_1 と m_2 は、計算する時点における極方向の平均からのオフセットを表すパラメータである。

海洋潮汐は、IERS Conventions 1996、2003 共に 11 分潮で表現している。地球重力場係数の内 $n \leq 30$ の係数が変化すが、その変化分は、

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = F_{nm} \sum_{s(n,m)} \sum_{+} (C_{snm}^{\pm} \mp iS_{snm}^{\pm}) e^{\pm i\theta_s}$$

と書ける。ここで係数 $C_{snm}^{\pm}$ と $S_{snm}^{\pm}$ は、concerto では海洋潮汐モデル CSR 3.0 [8] の値を用いている。また、上の式に出てくる F_{nm} は、

$$F_{nm} = \frac{4\pi G \rho_w}{g_c} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{om})}} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right)$$

と表される。式中の ρ_w は、海水の密度 (1025 kg/m^3) である。また、荷重変形係数 k'_n は、 $k'_2 = -0.3075, k'_3 = -0.195, k'_4 = -0.132, k'_5 = -0.1032, k'_6 = -0.0892$ という値を用いる。

3.3 相対論効果

IERS Conventions 1996 では、相対論効果に伴う加速度として、EIH (Einstein Infeld Hoffman) 方程式に現れる $1/c^2$ オーダーの補正項 [9] のみを考慮していた。この補正項は

$$\Delta \vec{r} = \frac{GM_{\oplus}}{c^2 r^3} \left\{ [2(\beta + \gamma) \frac{GM_{\oplus}}{r} - \gamma \vec{r} \cdot \vec{r}] \vec{r} + 2(1 + \gamma)(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r} \right\}$$

の形で表される。ここで c 、 G 、 $\vec{r}$ はそれぞれ、光速、万有引力定数、地心を基準とした衛星の位置ベクトルである。また β 、 γ はポストニュートンパラメータと呼ばれる量で、一般相対論では 1 となる。IERS Conventions 2003 では、さらに Lens-Thirring effect による加速度と Geodetic Precession に伴う加速度が付加された [3]。これらはそれぞれ、

$$\Delta \vec{r} = (1 + \gamma) \frac{GM_{\oplus}}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \times \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{J}) + (\vec{r} \times \vec{J}) \right]$$

$$\Delta \vec{r} = \left\{ (1 + 2\gamma) \left[\vec{R} \times \left(\frac{-GM_S \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \times \vec{r} \right] \right\}$$

と書ける。 M_S 、 $\vec{R}$ 、 $\vec{J}$ はそれぞれ、太陽の質量、太陽を基準とした地球の位置ベクトル、地球の単位当たりの角運動量 ($|\vec{J}| \cong 9.8 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}$) である。

4 その他の摂動

IERS Conventions には記載がないものの、人工衛星の精密軌道決定の際に考慮しなければならない摂動は数多くある。これらのほとんどは、個々の衛星に固有なモデルを軌道解析ソフトウェアに組み込む必要がある。この節ではそれらの摂動について簡単に紹介する。

4.1 太陽輻射圧

太陽輻射圧は、衛星の形状、質量、姿勢、表面の材質（反射率）に依存するため、正確に加速度を計算することが難しい摂動である。IERS Conventions 1996 では、太陽光の輻射圧に 1 つの章を割いていたが、2003 年版では削除された。concerto ver. 4 では、太陽輻射圧モデルとして、測地衛星等の球形の衛星に対応した cannonball model の他、GPS 衛星に対する Fliegel model [11], [12]、衛星の形状を少数（8 枚程度）の平板の組み合わせで近似した Box-Wing model [13] を組み込んでいる。

球形以外の衛星でも通常は第1近似として cannonball model を用いることが多い。このモデルでは、太陽輻射圧による加速度は、

$$\ddot{\vec{r}} = \kappa \left[\frac{AU}{R} \right]^2 C_R \frac{a}{m} \frac{\vec{R}}{R}$$

で与えられる [2]。ここで、 κ 、 AU 、 $\vec{R}$ 、 a 、 m はそれぞれ、太陽から1天文単位の地点での太陽光のエネルギーフラックス ($4.560 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$)、天文単位 (単位は m)、太陽を基準とした衛星の位置ベクトル、衛星の断面積および質量である。通常、比例係数 C_R は軌道決定の際に同時に推定することが多い。

4.2 大気抵抗

人工衛星に地球の上層大気に含まれる原子や分子が衝突することによって受ける抵抗力は、低軌道の衛星にとっては最も重要な摂動である。大気抵抗による加速度は、最もシンプルなモデルでは、

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{2} C_D \frac{a}{m} \rho v_r^2 \vec{e}_v$$

で与えられる [14]。ここで、 $\vec{v}_r$ は大気に対する衛星の相対速度、 $\vec{e}_v$ は $\vec{v}_r$ 方向の単位ベクトルである。上式に基づいて加速度を計算する際には、上層の大気密度 ρ をいかにモデル化するかが肝要である。concerto では、大気密度モデルとして、DTM (Drag Temperature Model) 94 [15] を実装している。比例係数 C_D は、先程の C_R と同様に軌道決定の際に推定することが多い。大気抵抗による加速度は衛星の形状にも依存するが、concerto ver. 4 では、衛星の形状モデルとして Box-Wing Model を使うことで、それぞれの平板に当たる抵抗力を独立に計算することも可能な仕組みになっている。

4.3 3体効果

太陽及び月の引力は、静止衛星で $10^{-6} [\text{m/s}^2]$ のオーダーであり、地球重力場の J_2 項の効果と同程度になる。concerto では、惑星暦 DE405 [16] を基にして任意の時刻における月、太陽、惑星の位置を計算し、人工衛星に作用する加速度を求めている。どの惑星の影響まで考慮するかについては初期設定ファイルで指定する。

4.4 地球からの照り返し

地球の表面で反射した太陽光が人工衛星に入射し輻射圧を及ぼすもので、特に低軌道衛星では無視できない効果である。太陽輻射圧と同じく、衛星の形状、質量、表面の材質 (反射率) に依存する。concerto ver. 4 では、地球の表面を 13 または 37 のセグメントに分割し、そこからの寄与を計算するルーチンを実装している。衛星の形状モデルとして Box-Wing Model を用いることも可能である。

5 加速度及び軌道計算結果の比較

前節までに説明した各種の摂動力の衛星高度による変化を Fig. 1 に示す。この図は、2003 年 9 月 10 日 0:00 UTC における値を示している。Fig. 1 に示した摂動のうち、大気抵抗は上層大気の密度が変化するため、加速度の時間依存性が大きい。3体効果については太陽と月の寄与のみを示している。大気抵抗、太陽輻射圧、地球

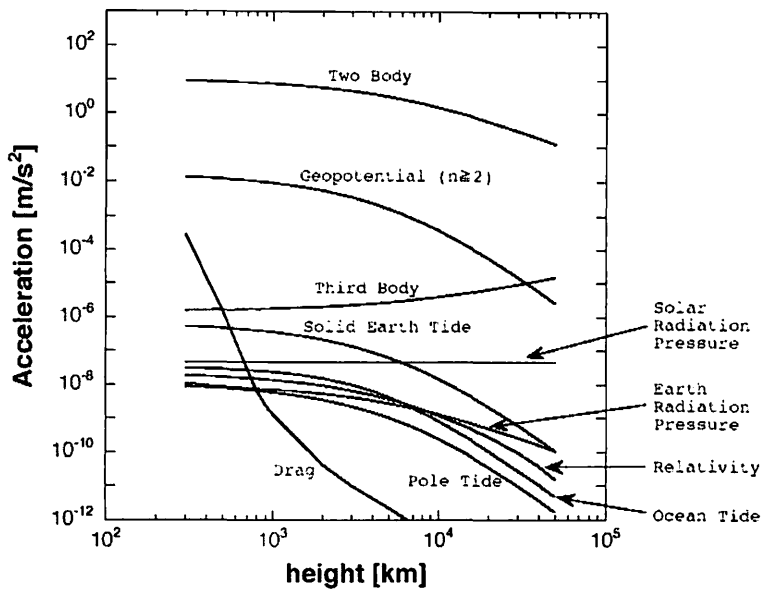


Fig. 1— Altitude dependence of various perturbations acting on artificial satellite.

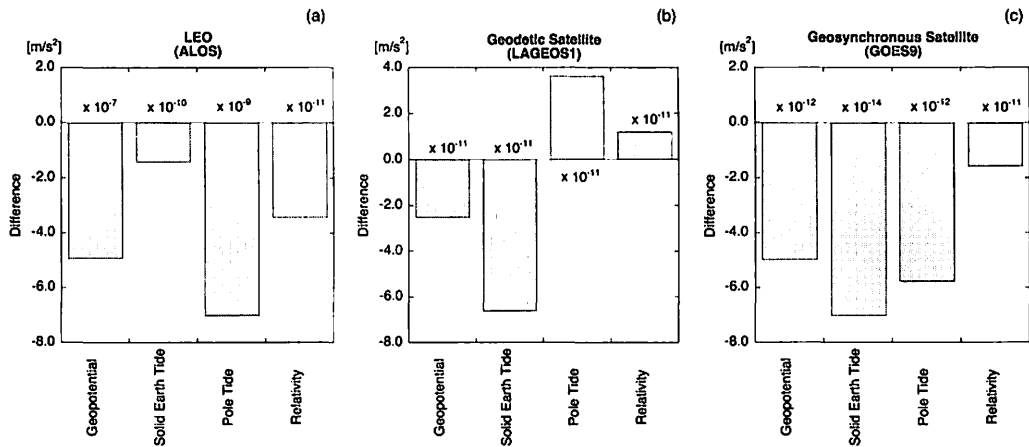


Fig. 2-- Differences in various perturbations described in IERS Conventions 1996 and 2003: (a) remote sensing satellite ALOS (Altitude $h = 700$ km), (b) geodetic satellite LAGEOS-1 ($h = 5900$ km), and (c) geostationary satellite GOES-9 ($h = 36000$ km).

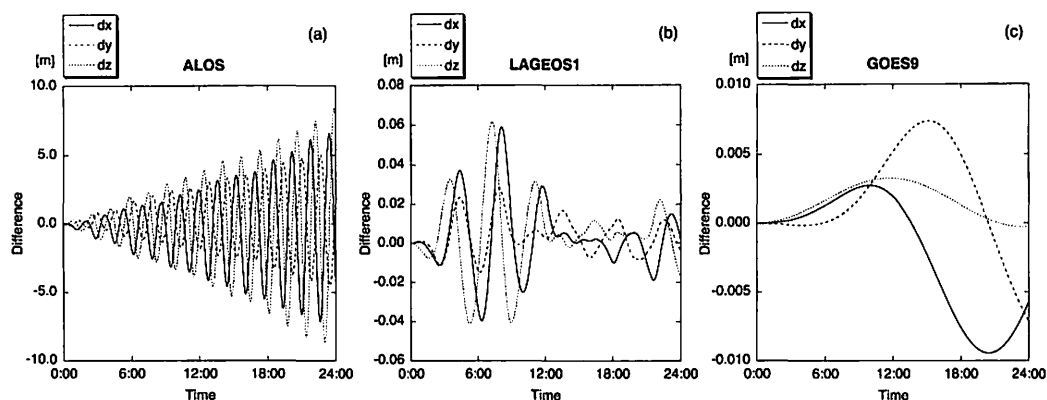


Fig. 3— Differences in orbits computed with perturbation models described in IERS Conventions 1996 and 2003.

からの照り返しの影響を計算する上で必要となる衛星の断面積と質量の比 a/m は $0.01 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ とした。これらの衛星形状に依存する摂動のなかで、低軌道衛星では大気抵抗が、高度 800 km 以上からは太陽輻射圧が最も大きくなる。このことは、リモートセンシング衛星等の低軌道衛星の軌道決定精度を向上するには、前者（特に上層大気密度）のモデルが、静止衛星（高度 36000 km）を含む高高度衛星の軌道決定精度向上には、後者のモデル化が重要なファクターとなることを意味している。

次に、IERS Conventions 1996 と 2003 の摂動モデルの違いについて調べてみる。陸域観測衛星 ALOS（高度 700 km）、測地衛星 LAGEOS-1（高度 5900 km）、静止衛星 GOES 9 号（高度 36000 km）の 3 種の軌道高度の異なる衛星について、IERS Conventions 1996 と 2003 に準拠したモデルによる摂動力の大きさの違いを、地球重力場、固体地球潮汐、極潮汐、相対論効果について計算した結果を Fig. 2 に示す。コラムの上に記した指数 (10^{-10} etc.) を乗じたものが実際の加速度を表している。高度の低い衛星の方が、4 種の摂動全てにおいて摂動モデルの違いによる差が大きくなる傾向にあることが分かる。中でも、地球重力場モデルの違いによる差は、ALOS で $10^{-7} \text{ [m/s}^2\text{]}$ のオーダーであり、他の摂動に比べて突出して大きい。また、極潮汐による加速度は ALOS の場合、IERS Conventions 1996 のモデルで $1.3 \times 10^{-8} \text{ [m/s}^2\text{]}$ 、IERS Conventions 2003 のモデルで $6.4 \times 10^{-9} \text{ [m/s}^2\text{]}$ であり、モデルの変更によって加速度が約 50 % 減少している。

上と同じ 3 種の人工衛星について、IERS Conventions 1996 と 2003 に準拠した摂動モデルを用いて、2003 年 9 月 10 日 0:00 UTC から 24 時間の軌道計算を行ってみた。得られた 2 種類の軌道の差の時間変化を Fig. 3 に示す。高度の低い ALOS では 24 時間後の差が 9 m 近くまで拡大しているのに対し、LAGEOS-1 では最大でも 6 cm 程度、GOES 9 号では 1 cm 以下の差に留まっている。これは、上で述べた地球の重力場モデルの変更の影響が低軌道衛星で顕著に現れているためと考えられる。

今後は、SLR データを始めとする実際の人工衛星のトラッキングデータを用いて軌道決定を行い、適用する摂動モデルによる結果の違いを比較することを考えている。また、CHAMP や GRACE 等の衛星に搭載されている加速度計の実データと、concerto に組み込んだ摂動モデルから計算された加速度の値を比較することも計画

中である。

References

- [1] 久保岡俊宏, 大坪俊通, 後藤忠広, "軌道解析ソフトウェア concerto v4 の開発", 第4回宇宙科学シンポジウム, 2004.
- [2] D. D. McCarthy, 1996, "IERS Conventions (1996)", IERS TECHNICAL NOTE 21.
- [3] D. D. McCarthy and G. Petit, 2003, "IERS Conventions (2003)", IERS TECHNICAL NOTE 32.
- [4] Tapley, B. D., M. M. Watkins, J. C. Ries, G. W. Davis, R. J. Eanes, S. R. Poole, H. J. Rim, B. E. Schutz, C. K. Shum, R. S. Nerem, F. J. Lerch, J. A. Marshall, S. M. Klosko, N. K. Pavlis, R. G. Williamson, (1996), "The Joint Gravity Model 3", *J. Geophys. Res.*, **101** (B12), pp. 28029-28049.
- [5] F. G. Lemoine, S. C. Kenyon, J. K. Factor, R.G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp and T. R. Olson, 1998, "The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96", NASA/TP-1998-206861.
- [6] Biancale, R., Balmino, G., Lemoine, J.-M., Marty, J.-C., Moynot, B., Barlier, F., Exertier, P., Laurain, O., Gegout, P., Schwintzer, P., Reigber, Ch., Bode, A., Gruber, Th., Kig, R., Massmann, F.-H., Raimondo, J.C., Schmidt, R., Zhu, S.Y., 2000, "A New Global Earth's Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations: GRIM5-S1", *Geophysical Research Letters*, **27**, pp. 3611-3614.
- [7] Reigber, Ch., Balmino, G., Schwintzer, P., Biancale, R., Bode, A., Lemoine, J.-M., Koenig, R., Loyer, S., Neumayer, H., Marty, J.-C., Barthelmes, F., Perosanz, F., Zhu, S. Y., 2002, "A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and Accelerometry (EIGEN-1S)", *Geophysical Research Letters*, **29**(14), 10.1029/2002GL015064.
- [8] Eanes R. J. and Bettadpur, S., 1995, "The CSR 3.0 global ocean tide model," *Technical Memorandum CSR-TM-95-06*, Center for Space Research, University of Texas, Austin, TX.
- [9] 福島登志夫, 1994, "基準座標系", 現代測地学 (第3章), 日本測地学会, pp. 104-155.
- [10] Milani, A., A. M. Nobili, and P. Farinella, 1987, *Non-gravitational Perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, Bristol.
- [11] Fliegel, H. F., Gallini, T. E., and Swift, E., 1992, "Global Positioning System Radiation Force Models for Geodetic Applications", *J. Geophys. Res.*, **97**, No. B1, pp. 559-568.
- [12] Fliegel, H. F. and Gallini, T. E., 1996, "Solar Force Modelling of Block IIR Global Positioning System Satellites", *J. of Spacecraft and Rockets*, **33**, No. 6, pp. 863-866.

- [13] Marshall, J. A., and S. B. Luthcke, 1994, "Modeling radiation forces acting on TOPEX/POSEIDON for precision orbit determination", *J. Spacecraft and Rockets*, **31**, No. 1, pp. 89–105.
- [14] Montenbruck, O. and E. Gill, 2000, *Satellite Orbits*, Springer.
- [15] Berger, C., Biancale, R., Ill, M., and Barlier, F., 1998, "Improvement of the empirical thermospheric model DTM: DTM94-comparative review on various temporal variations and prospects in space geodesy applications", *J. Geodesy*, **72**, pp. 161–178.
- [16] Standish, E. M., 1998, "JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405 / LE405", *JPL Interoffice Memorandum*, IOM 312, F-98-048.

Gravitomagnetic Translational Motion on Gravitational Time Delay

Hideyoshi ARAKIDA

`h.arakida@nao.ac.jp`

*Public Relations Center, National Astronomical Observatory
2-21-1, Osawa, Mitaka, Tokyo 181-8588 JAPAN*

ABSTRACT

In this paper, we consider the higher order correction to the gravitational Shapiro time delay caused by the gravitomagnetic translational motion first suggested by Kopeikin. We also summarize and discuss the another interpretations by several authors which respond the conducted Jupiter experiment by Kopeikin and Fomalont to measure the consequence of 1.5PN correction to Shapiro time delay.

1 Introduction

By the great progress of the astronomical observational technique, the observational limit of an experimental relativity in solar system is now being overcome and it is expected that this observational barrier will be gotten over more and more by the on-going and future space and grand-based missions.

Although the effect of general relativistic gravity is very weak, solar system is a almost only place where we can carry out the experimental test of the general relativity with a great accuracy.

It is hard to obtain the exact solution of Einstein field equation since this equation is the system of simultaneous non-linear and second order partial differential equations. But fortunately, in solar system, the two conditions, weak gravitational field and slow motion approximation is hold then we can regard the general relativistic gravitation as the perturbation to the flat Minkowski metric tensor,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad (1.1)$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is Minkowski tensor and the signature is $(-, +, +, +)$, and $h_{\mu\nu}$ is the gravitational perturbation to the flat Minkowski tensor in solar system. Using this metric tensor, Eq. (1.1) and adopting the harmonic (Lorentz) gauge condition, $\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0$, the Einstein field equation is expressed in the linear order as,

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

in which c is the speed of light in vacuum, G is the Newtonian gravitational constant, and $T^{\mu\nu}$ is the stress-energy tensor. Therefore in the linear perturbation theory or so-called “post-Newtonian” approximation, Einstein field equation reduces to the wave equation.

Up to now, in order to confirm the theory of general relativity, some experiments were carried out; the gravitational red shift, the deflection of light ray, the perihelion

advance of celestial bodies, and the gravitational (Shapiro) time delay. See for example [23]. These 4 classical tests indicated the validity of theory of general relativity comparing with another alternative gravitational theories [23, 20]. These tests are based on the stationary Schwarzschild metric components, $g_{\mu\mu}$ and then the verification of steady gravitational field generated by the mass or energy. Sometimes, this gravitational field is called “Gravitoelectric” field by the analogy of the electric field of electromagnetism.

However according to general relativity, not only the mass and energy but also the angular momentum and translational motion of moving mass also produce the gravitational field because the matter and space-time is coupled. This effect appears in the non-diagonal term of metric tensor, g_{0i} and is called “Gravitomagnetic” effect [5]. This effect was first discussed by Lense and Thirring, e.g. [19] so sometimes called “Lense-Thirring effect”. The reason of the word “magnetic” comes from analogy of the electromagnetism. In the linearized theory, the gravitational field is expressed by the similar form of Maxwell equations in electromagnetism with using scalar and vector potentials [5]. In fact, the magnetic dipole like gravitational field arises by the angular momentum of rotating celestial body, and the translational motion of moving mass produces the similar gravitational field as the moving charged particle generates the magnetic field in accordance with Amperé’s law.

So far, this magnetic-like gravitational field is not well confirmed. Only one existing test is done by analyzing the satellite laser ranging data of LAGEOS I and II. By this analysis, Gravitomagnetic effect due to the angular momentum of Earth was verified with 20% accuracy [3]. Recently, this limit was overcome using the latest Earth gravity field model and led to determined with 10% accuracy [4]. It is expected this threshold will be gotten over by on-going GP-B mission with observational accuracy 1% or better [8].

On the other hand, the gravitomagnetic field produced by the translational motion of celestial body was not carried out for long time because of the tininess effect. Gravitomagnetic effect due to the translational motion is proportional to v/c so that this is at 1.5 post-Newtonian level, $O(c^{-3})$. However recent VLBI technique reaches the 10μ arcsecond level. To detect the v/c correction to the gravitational Shapiro time delay, Kopeikin proposed the Jupiter experiment by which one observes the light ray from quasar passing near the Jupiter using VLBI technique [12]. Kopeikin indicated that the order of v/c correction is almost 50μ arcsecond level so that it is possible to detect. Kopeikin derived the new time delay formula based on [11],

$$\Delta(t_1, t_2) = 2 \sum_{a=1}^N \frac{GM_a}{c^3} \left(1 + \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_a}{c_g} \right) \ln \left[\frac{r_{1a}(s_1) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_{1a}(s_1)}{r_{2a}(s_2) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_{2a}(s_2)} \right], \quad (1.3)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} - \frac{1}{c_g} \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_{ia}(s_i) = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_a(s_i), \quad r_{ia}(s_i) = |\mathbf{r}_a(s_i)|,$$

where the index 1 and 2 denote the VLBI stations on Earth and $\Delta(t_1, t_2)$ is the time difference between the station 1 and 2, s is the retarded time obtained by the following equation,

$$s_i = t_i - \frac{r_{ia}}{c_g}. \quad (1.4)$$

In the proposal [12], since Kopeikin argued that v/c correction to Shapiro time delay corresponds to the “speed of gravity”, he distinguished the speed of light c

from the speed of gravity c_g . Practically, Kopeikin and Fomalont performed this VLBI Jupiter experiment, and measured the v/c correction with 20% accuracy level [7]. And they claimed that they measured the speed of gravity by this experiment and as the consequence they verified speed of gravity is equal to that of light with accuracy 20% level.

1.0 PN Main Shapiro Term	1.5 PN Correction (Theory)	1.5 Correction (Observed)
1100 μas	51 μas	50 $\pm 9\mu\text{as}$

Table 1 — Total Amount of Jupiter Time Delay Experiment.

This assertion gave rise to much controversy among the several researchers. and is still pending until now [1, 24, 6, 21, 2, 22, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

2 Gravitomagnetic Translational Motion and Time Delay

In this section, we simply show that v/c correction to Shapiro time delay is due to the gravitomagnetic vector potential.

The equation of motion (geodetic equation) governing the light ray propagation becomes,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + k^\mu k^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^i - k^i \Gamma_{\mu\nu}^0) = 0, \quad k^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = (c, k^i), \quad (2.1)$$

here $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ is a Christoffel symbol and the light ray satisfies following condition,

$$\left(\frac{ds^2}{dt^2} \right) = c^2 g_{00} + 2ck^i g_{0i} + k^i k^j g_{ij} = 0. \quad (2.2)$$

We put the metric tensor as,

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + 2U(t, \mathbf{x}) \sim O(c^{-2}) \\ g_{0i} = -4V_i(t, \mathbf{x}) \sim O(c^{-3}) \\ g_{ij} = (1 + 2U(t, \mathbf{x}))\delta_{ij} \sim O(c^{-2}) \end{cases}, \quad (2.3)$$

in which $U(t, \mathbf{x})$ is Newton (Scalar) Potential and $V_i(t, \mathbf{x})$ is Vector Potential, respectively. Now we assume that the light rays move on x axis in flat spacetime and integration is performed along the unperturbed trajectory so that we can set as $k^i = (k, 0, 0)$. Then we obtain,

$$k = \frac{dx}{dt} = \frac{4V + \sqrt{1 - 4U^2 + 16V^2}}{1 + 2U} \sim 1 - 2U + 4V. \quad (2.4)$$

After all, the time delay caused by the gravitoelectric and gravitomagnetic field is ,

$$\Delta t = \int dt - \delta t = \frac{1}{c} \left[\int dx \frac{1}{1 - 2U + 4V} \right] - \frac{\delta x}{c} \sim \frac{1}{c} \int dx (2U - 4V). \quad (2.5)$$

In Eq. (2.5), it is obvious that the first term, $\int dx 2U \sim O(c^{-2})$ is the main Shapiro time delay part due to the Schwarzschild metric tensor (1PN order) and the second one, $\int dx 4V \sim O(c^{-3})$ is the correction to Shapiro delay due to Gravitomagnetic

vector potential (1.5PN order). The solution of linearized field equation, Eq. (1.2) is solved by the Liénard-Wiecherd potential as the electromagnetism, see e.g. [9]. Based on Liénard-Wiecherd potential, Kopeikin obtained the metric perturbation as,

$$h^{\mu\nu} = \sum_a \frac{2GM_a}{c^3} \frac{2u_a^\mu u_a^\nu + \eta^{\mu\nu}}{r_R}, \quad (2.6)$$

where u_a^μ is the four-velocity, $r_R = -u_\mu r^\mu$, $r^\mu = x^\mu - x_a^\mu(s)$. Therefore the gravity field dose not propagate instantaneously and then the retardation effect of gravity occurs.

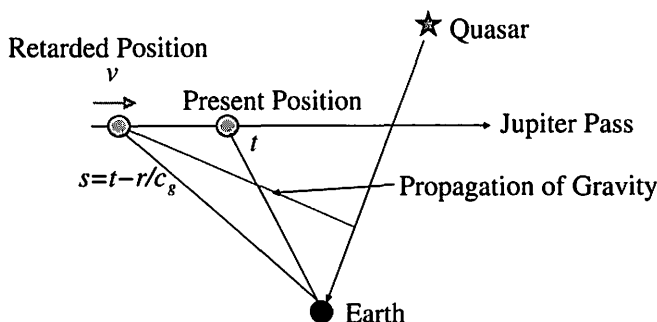


Figure 1 — Retardation of Gravity.

3 Gravitomagnetic Effect — c or c_g ?

In previous section, we briefly viewed that the correction term to the Shapiro time delay is due to the gravitomagnetic translational motion of the celestial body. In this section, we consider this meaning comparison with electromagnetism.

According to the Maxwellian electromagnetism, the charged particle at rest generates only electric field. However moving charged particle produces not only the electric field but also the magnetic field. And the ratio of the magnetic field to the electric field is $\sim v/c$. Therefore it seems to be natural that the generated magnetic field by moving charged particle depends on the propagation speed of electromagnetic field.

In the case of gravity, the mass at rest generates the static (Schwarzschild) gravitational field only. But by the movement of mass, the gravitomagnetic field arises. Therefore it also seems to be natural that this magnetic-like gravitation is the consequence of propagation of gravity and depends on propagation speed of gravity. As a result, the ratio of the gravitomagnetic field to static gravitational field is not v/c but v/c_g .

Then from the point of view of gravitomagnetic field, it seems to be plausible that the v/c correction term to Shapiro time delay relies on the speed of gravity v/c_g as Kopeikin argued.

4 Interpretation of Jupiter Experiment

After Kopeikin published the paper[12], several authors presented their own interpretation of Jupiter experiments. Their explanations are Jupiter experiment measured;

I. the speed of gravity [12, 13, 7, 14, 15, 16, 17, 18], II. the aberration of light ray [24], III. the speed of light ray [1, 6], and IV. no correction of 1.5 PN order by the translational motion [21, 22].

4.1 Interpretation by Kopeikin

Kopeikin started from solving the linearized field equation making use of Liénard-Wiechert retarded potential.

$$\left(-\frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \gamma^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \Theta^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

where $\gamma^{\mu\nu}$ is the trace-reversed metric perturbation, $\gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$ corresponding $h_{\mu\nu}$, and $\Theta^{\mu\nu}$ is the modified stress-energy tensor. Kopeikin introduced $\Theta^{\mu\nu}$ to apply the case $c_g \neq c$. As a consequence, the vector potential in the case of Kopeikin is expressed by,

$$V_i(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^2 c_g} \sum_a \frac{M_a v_a^i}{r_a(s) - \frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a(s)}{c_g}}. \quad (4.2)$$

Then, the appearance of c_g is the consequence of the modified stress-energy tensor, $\Theta^{\mu\nu}$.

4.2 Interpretation of Will

While in the case of Will, he did not solve the Einstein equation in order to obtain the metric tensor in retarded variable, and simply replaced $t \rightarrow t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c_g}$. Therefore the vector potential in Will is written by,

$$V_i(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^3} \sum_a \frac{M_a v_a^i}{r_a(s) - \frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a(s)}{c_g}}. \quad (4.3)$$

Therefore the difference between Kopeikin and Will is the coefficient $1/c^2 c_g$ (Kopeikin) or $1/c^3$ (Will).

4.3 Another Interpretations

The claim of Asada is based on the fact the propagation speed of gravity appears at 2.0PN level as the gravitational wave. It seems that the formula of Asada assumes Jupiter is at rest at the “retarded time” s not t and expand $r(s)$ around t since $v \ll c$. Then as a result, v dependent term appears. Therefore the result of Asada is basically consequence of static gravitational field at “retarded” time. However, if considering the static field, as Klioner did [10], it seems to adequate to use Lorentz transformation from the rest frame to the moving frame because we can regard the motion of Jupiter as the rectilinear one.

Consideration by Samuel might causes the misunderstanding of observation. As the observable, Samuel considered the positional angle of Jupiter, but in the VLBI Jupiter experiment, the observable is the phase difference which is due to the gravitational field of Jupiter.

5 Discussion

In this section we discuss mainly the results by Kopeikin and Will. Though Kopeikin and Will derived the similar time delay formula, only one difference between them is the vector potential expression, namely,

$$V_i(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{4GM_a \mathbf{v}_a}{c^3 r_{td}(t, \mathbf{x})} & (\text{Will}) \\ \frac{4GM_a \mathbf{v}_a}{c^2 c_g r_{td}(t, \mathbf{x})} & (\text{Kopeikin}) \end{cases} \quad r_{td}(t, \mathbf{x}) = r_a(s) - \frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a(s)}{c_g} \quad (5.1)$$

In the case of Will, instead solving Einstein equation to obtain the metric, he replaced the time variable in vector potential, V_i by the retarded expression. Further although he classified the speed of light c and that of gravity c_g , the formula of Will seems to presume that holding $c_g = c$. Therefore it might be unsuitable to discuss the wide class for c_g , namely the case $c_g \neq c$.

On the other hand, in the case of Kopeikin, he solved the linearized Einstein equation with the modified stress-energy tensor.

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + 2\delta P_\alpha^{(\mu} T^{\nu)\alpha} + \delta^2 P_\alpha^\mu P_\beta^\nu T^{\alpha\beta} \quad (5.2)$$

where $\delta = \epsilon - 1$, $\epsilon = c/c_g$, $P^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + V^\alpha V^\beta$ is a projection tensor, and V^α is the unit vector field introduced in order to conserve the general relativistic properties such as the Lorentz invariance even in the case $c_g \neq c$ ¹. Though Carlip showed the it is possible to take the stress-energy tensor similar to Eq. (5.2), he also indicated the such kind of expression of stress-energy tensor is model-dependent. Accordingly, it might need to investigate the validity of this type of stress-energy tensor.

Another thing we must examine carefully is the statement of Kopeikin that the fundamental speed in the curved space-time is c_g therefore the fundamental speed in the tangential flat spacetime attached locally on the curved spacetime is also “ c_g ”. Although Kopeikin said in the Jupiter experiment, they argued that the fundamental speed in the Lorentz transformation matrix relating with the tangential flat space is also c_g and they measured $c_g = c$ which means the Lorentz matrix, $L^{\mu\nu}(c_g = c)$ with 20% accuracy, we have no idea to distinguish whether we are in the freely falling frame under the gravity or in completely vacuum frame.

And in the both case of Kopeikin and Will, it might need to be investigated that their metric expressions hold the several properties of the general relativity such as the Lorentz invariance, the gauge invariance, satisfying the law of conservation, and so on.

The problem that Kopeikin posed is the important for the fundamental and gravitational physics so that it must be thoroughly investigated, discussed, and settled. In order to verify what is observed by Jupiter experiment; c_g or c , it seems to be worthwhile to develop the more higher order formula or proposing the another experiment by using the binary systems.

References

- [1] Asada, H., 2002, *The Light Cone Effect on the Shapiro Time Delay*, *Astrophysical Journal*, 574, L69

¹In practice, Kopeikin discussed the case $V^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ then the modified stress-energy tensor become $\Theta^{00} = T^{00}$, $\Theta^{0i} = \epsilon T^{0i}$, $\Theta^{ij} = \epsilon^2 T^{ij}$.

- [2] Carlip, S., 2004, *Model-Dependence of Shapiro Time Delay and the "Speed of Gravity/Speed of Light" Controversy*, Classical and Quantum Gravity, 21, 3803
- [3] Ciufolini, I., Pavlis, E., Chieppa, F., Fernandes-Vieira, E., and Pérez-Mercader, J., 1998, *Test of General Relativity and Measurement of the Lense-Thirring Effect with Two Earth Satellites*, Science, 279, 2100
- [4] Ciufolini, I. and Pavlis, E. C., 2004, *A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect*, Nature, 431, 958
- [5] Ciufolini, I. and Wheeler, J. A., "Gravitation and Inertia", 1995, Princeton University Press
- [6] Faber, J. A., 2003, e-Print, astro-ph/0303346
- [7] Fomalont, E. B. and Kopeikin, S. M., 2003, *The Measurement of the Light Deflection from Jupiter: Experimental Results*, Astrophysical Journal, 598, 704
- [8] GP-B, <http://einstein.stanford.edu/>
- [9] Jackson, J. D., 1998, "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Klioner, S. A., 2003, *Light propagation in the gravitational field of moving bodies by means of Lorentz transformation I. Mass monopoles moving with constant velocities*, Astronomy and Astrophysics, 404, 783
- [11] Kopeikin, S. M. and Schäfer, G., 1999, *Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary-moving bodies*, Physical Review D, 60, 124002
- [12] Kopeikin, S. M., 2001, *Testing the Relativistic Effect of the Propagation of Gravity by Very Long Baseline Interferometry*, Astrophysical Journal, 556, L1
- [13] Kopeikin, S. M. and Fomalont, E., 2002, *General relativistic model for experimental measurement of the speed of propagation of gravity by VLBI*, Proceedings of the 6th European VLBI Network Symposium, Ros, E., Porcas, R.W., Zensus, J.A. (eds.), June 25th - 28th, 2002, Bonn, Germany, 49
- [14] Kopeikin, S. M., 2003, *The Post-Newtonian Treatment of the VLBI Experiment on September 8, 2002*, Physics Letters A, 312, 147
- [15] Kopeikin, S. M., 2003, *The Measurement of the Light Deflection from Jupiter: Theoretical Interpretation*, e-Print, astro-ph/0302462
- [16] Kopeikin, S. M. and Fomalont E. B., 2003, e-Print, astro-ph/0311063
- [17] Kopeikin, S. M., 2004, *The Speed of Gravity in General Relativity and Theoretical Interpretation of the Jovian Deflection*, Classical and Quantum Gravity, 21, 3251
- [18] Kopeikin, S. M., 2004, *Comments on the paper by S. Samuel "On the speed of gravity and the Jupiter/Quasar measurement"*, e-Print, gr-qc/0501001
- [19] Mashhoon, B., Hehl, F. W., and Theiss, D. S., 1984, *On the gravitational effects of rotating masses - The Thirring-Lense Papers*, General Relativity and Gravitation, 16, 711

- [20] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., “Gravitation”, 1973, W. H. Freeman and Company
- [21] Samuel, S., 2003, *On the Speed of Gravity and the v/c Corrections to the Shapiro Time Delay*, Physical Review Letters, 90, 231101
- [22] Pascual-Sánchez, J. F., 2004, e-Print, gr-qc/0405123
- [23] Will, C. M., 1993, “Theory and Experiment in Gravitational Physics”, Cambridge University Press
- [24] Will, C. M., 2003, *Propagation Speed of Gravity and the Relativistic Time Delay*, Astrophysical Journal, 590, 683

Harper 写像における 4 重対称周期軌道 Quadruply Reversible Periodic Orbits in the Harper Map

Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

Teikyo Heisei University, Ichihara, Chiba, 290-0193, Japan
National Astronomical Observatory of Japan, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan

ABSTRACT

The Harper map with a particular set of parameters possesses quadruple reversibilities. For this map, it is shown that singly reversible periodic orbits, doubly reversible periodic orbits, and quadruply reversible periodic orbits exist. Ref.(6) is a English version of this manuscript.

あるパラメータの組を取ると、ハーバー写像は四重可逆となる。この写像には、単対称周期軌道、二重対称周期軌道、および四重対称周期軌道が存在する。参考文献 [6] は本論文の英語版である。

1 Introduction

Harper 写像¹⁾ は、磁場内の格子中における電子の運動を記述するために導入された。この写像 $T(x, y)$ はトーラス面上 ($x \in S^1, y \in S^1$) で次のように定義されている。

$$T(x, y) : y_{n+1} = y_n + a \sin x_n, x_{n+1} = x_n + b \sin y_{n+1}. \quad (1.1)$$

ここで a と b はパラメーターである。この写像は、第 2 式の項 ($b \sin y_{n+1}$) のために非ねじれ写像に分類される。Harper 写像の詳細な解析は参考論文 (2) においてなされている。この写像の特徴の一つは周期軌道が生まれたり消滅することである。またセバトリックスの構成が変わることも特徴としてあげられる。これらの過程は準周期軌道の安定性に影響を与え、ひいては系の輸送現象にも大きな影響を与える。³⁾

本論文では $a = b$ と $a = -b$ の場合のみを扱う。この場合、写像 T は 4 通りの異なる対合の積で表現される。つまり上記のパラメータにおいて T は 4 重の対称性をもつ。 $y \rightarrow y + \pi$ の変換を行うと、 $a = -b$ の写像は $a = b$ の写像になる。また $y \rightarrow y + \pi$ と $x \rightarrow x + \pi$ の変換より、 $a = b < 0$ の写像は $a = b > 0$ に変換される。よって以下では $a = b > 0$ の写像における対称周期軌道 (SPO) についてのみ調べる。不動点 $P_{00} = (0, 0)$ と $P_{11} = (\pi, \pi)$ はサドルであり、 $Q_{10} = (\pi, 0)$ と $Q_{01} = (0, \pi)$ は楕円点 ($0 < a < 2$) または反射を伴うサドル ($a > 2$) である。ここで $f(x) = a \sin x$ とおく。

$a = b$ の場合、 T は 2 つの対合 G_i と H_i で以下のように 4 通りに分解される。

$$T(x, y) = H_1 \circ G_1 = H_2 \circ G_2 = H_3 \circ G_3 = H_4 \circ G_4. \quad (1.2)$$

ここで $G_i^2 = Id = H_i^2$ と $\nabla G_i = \nabla H_i = -1$ が成立している。これらの対合の表現は

以下のように得られる.

$$H_1 : x \leftarrow -x + f(y), y \leftarrow y, \quad (1.3)$$

$$G_1 : x \leftarrow -x, y \leftarrow y + f(x), \quad (1.4)$$

$$H_2 : x \leftarrow x - f(y), y \leftarrow -y, \quad (1.5)$$

$$G_2 : x \leftarrow x, y \leftarrow -y - f(x), \quad (1.6)$$

$$H_3 : x \leftarrow -y + \pi, y \leftarrow -x + \pi, \quad (1.7)$$

$$G_3 : x \leftarrow -y - f(x) + \pi, y \leftarrow -x - f(y + f(x)) + \pi, \quad (1.8)$$

$$H_4 : x \leftarrow y - \pi, y \leftarrow x + \pi, \quad (1.9)$$

$$G_4 : x \leftarrow y + f(x) - \pi, y \leftarrow x + f(y + f(x)) + \pi. \quad (1.10)$$

対合の不動点の集合が対称線である. 簡単な計算より対称線 $R(H_i)$ と $R(G_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は以下のように得られる.

$$R(H_1) : x = f(y)/2, x - \pi = f(y)/2, \quad (1.11)$$

$$R(G_1) : x = 0, \pi, \quad (1.12)$$

$$R(H_2) : y = 0, \pi, \quad (1.13)$$

$$R(G_2) : y = -f(x)/2, y = \pi - f(x)/2 \quad (1.14)$$

$$R(H_3) : y = \pi - x, \quad (1.15)$$

$$R(G_3) : y = \pi - x - f(x), \quad (1.16)$$

$$R(H_4) : y = x + \pi, \quad (1.17)$$

$$R(G_4) : y = x - f(x) + \pi, \quad (1.18)$$

上記の表現では省略してあるが, それぞれの式に $\text{mod}(x, 2\pi)$ または $\text{mod}(y, 2\pi)$ が付いている.

対称周期軌道には3つのタイプがある. 1重対称周期軌道, 2重対称周期軌道と4重対称周期軌道の3つである. 煩雑さをさけるために本論文では不動点は周期軌道から除外されている. トーラス面の持ち上げである普遍被覆面における軌道の表現を導入する. $o(z_0) = \{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を初期点 $z_0 = (x_0, y_0)$ より出発した軌道とする. ここで $z_n = (x_n, y_n) = T^n z_0$. トーラス面では x 方向の回転数 ν_x と y 方向の回転数 ν_y を下記のように定義できる.

$$\nu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}, \quad \nu_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_0}{n}. \quad (1.19)$$

1重対称周期軌道は, $R(G_i)$ または $R(H_i)$ 上に点 z_l を持ち, かつ $R(G_i)$ または $R(H_i)$ 上に別の点 z_m ($l \neq m$) を持つ. これらを満たすすべての1重対称周期軌道を表1に示す. この表で $G_1[z_0] \rightarrow H_1[z_k]$ ($k \geq 0$) の表現を用いる. これは初期点 z_0 が G_1 の対称線上にあり, z_k が H_1 の対称線にあることを意味している. さらに途中の軌道点 z_i ($1 \leq i \leq k-1$) はいかなる対称線上にも無いとする. n は整数で, 表の最後の欄は k に対する条件である.

表 I. 1重対称周期軌道のリスト

対称線と軌道点	ν_x	ν_y	k
$G_1[z_0] \rightarrow G_1[z_k]$	$n/(2k)$	$0/(2k)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 1(n \neq 0)$
$G_1[z_0] \rightarrow H_1[z_k]$	$n/(2k-1)$	$0/(2k-1)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_1[z_0] \rightarrow G_1[z_k]$	$n/(2k+1)$	$0/(2k+1)$	$k \geq 1(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_1[z_0] \rightarrow H_1[z_k]$	$n/(2k)$	$0/(2k)$	$k \geq 1$
$G_2[z_0] \rightarrow G_2[z_k]$	$0/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 1$
$G_2[z_0] \rightarrow H_2[z_k]$	$0/(2k-1)$	$n/(2k-1)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_2[z_0] \rightarrow G_2[z_k]$	$0/(2k+1)$	$n/(2k+1)$	$k \geq 1(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_2[z_0] \rightarrow H_2[z_k]$	$0/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 1(n \neq 0)$
$G_3[z_0] \rightarrow G_3[z_k]$	$n/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 1$
$G_3[z_0] \rightarrow H_3[z_k]$	$n/(2k-1)$	$n/(2k-1)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_3[z_0] \rightarrow G_3[z_k]$	$n/(2k+1)$	$n/(2k+1)$	$k \geq 1(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_3[z_0] \rightarrow H_3[z_k]$	$n/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 1$
$G_4[z_0] \rightarrow G_4[z_k]$	$-n/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 1$
$G_4[z_0] \rightarrow H_4[z_k]$	$-n/(2k-1)$	$n/(2k-1)$	$k \geq 2(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_4[z_0] \rightarrow G_4[z_k]$	$-n/(2k+1)$	$n/(2k+1)$	$k \geq 1(n=0), k \geq 0(n \neq 0)$
$H_4[z_0] \rightarrow H_4[z_k]$	$-n/(2k)$	$n/(2k)$	$k \geq 1$

表現上の注意. 回転数 $0/(-q)$ は $0/q$ と同じ意味である.

すべての関係は DeVogelaere⁴⁾ 定理より導かれる. 証明はすでに他の論文でも行われている. 参考論文 (2) と (5) を見ていただきたい. ここでは表 I の $H_4[z_0] \rightarrow G_4[z_k]$ の証明を紹介する.

導出. $n=0$ の場合, 2つの対称線 $y=x+\pi$ と $y=x-f(x)+\pi$ は不動点 ($k=0$ の場合) 以外に交差点をもたない. 次に, $n \neq 0$ の場合を考える. $k=0$ の場合, 例えば $y=x+\pi$ と $y=x-f(x)+3\pi$ ($n=1$) は, a の値が十分に大きければ交差点をもつ. $y=(2n+1)\pi+x-f(x)$ を対称線として持つ対合 G_4 は次のように得られる.

$$G_4 : x \leftarrow y + f(x) - (2n+1)\pi, y \leftarrow x + f(y + f(x)) + (2n+1)\pi. \quad (1.20)$$

もう一つの対合 H_4 も次のように得られる.

$$H_4 : x \leftarrow y - (2n+1)\pi, y \leftarrow x + (2n+1)\pi. \quad (1.21)$$

この H_4 を用いて, $z_{2k+1} = H_4 z_0$ の関係が導かれる. よって下記の2つの式が成立する.

$$x_{2k+1} - x_0 = y_0 - x_0 - (2n+1)\pi = -2n\pi, \quad (1.22)$$

$$y_{2k+1} - y_0 = x_0 - y_0 + (2n+1)\pi = 2n\pi. \quad (1.23)$$

これらは2つの回転数 $\nu_x = -n/(2k+1)$ と $\nu_y = n/(2k+1)$ を与える. Q.E.D.

2重対称周期軌道は, $R(G_i)$ または $R(H_i)$ 上に点 z_i を持ち, 別の点 z_m が $R(G_j)$ または $R(H_j)$ ($i \neq j$) 上にある. すべての2重対称周期軌道を表 II に掲げる. 2重対称周期軌道の場合, 2つ回転数は共通で $\nu_x = \nu_y = 0/q$ と書ける. ただし q は周期である. 表 II の最後の欄に $z_{q/2}$ と z_0 の関係を記してある.

表 II. 2重対称周期軌道のリスト

対称線と軌道点	q	$z_{q/2}$
$G_1[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$G_2 z_0$
$G_2[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$G_1 z_0$
$G_1[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k-1}]$	$4k - 2 \ (k \geq 2)$	$G_2 z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k+1}]$	$4k + 2 \ (k \geq 1)$	$H_1 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}]$	$4k + 2 \ (k \geq 0)$	$H_2 z_0$
$G_2[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k-1}]$	$4k - 2 \ (k \geq 1)$	$G_1 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$H_2 z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$H_1 z_0$
$G_3[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$G_4 z_0$
$G_4[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$G_3 z_0$
$G_3[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}]$	$4k - 2 \ (k \geq 1)$	$G_4 z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k+1}]$	$4k + 2 \ (k \geq 0)$	$H_3 z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k+1}]$	$4k + 2 \ (k \geq 0)$	$H_4 z_0$
$G_4[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k-1}]$	$4k - 2 \ (k \geq 1)$	$G_3 z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$H_4 z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k}]$	$4k \ (k \geq 1)$	$H_3 z_0$

ここでは代表例として, $G_3[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k}]$ の関係を導く.
 導出. $z_{2k} = G_4 z_0$ の関係より次式が得られる.

$$z_{2k} = (y_0 + f(x_0) - (2n+1)\pi, x_0 + f(y_0 + f(x_0)) + (2n+1)\pi). \quad (1.24)$$

$y_0 = \pi - x_0 - f(x_0)$ を用いると, z_{2k} は $y = \pi - x - f(x)$ 上にあることが分かる.
 Q.E.D.

4 重対称周期軌道は $R(G_{i_1})$ または $R(H_{i_1})$ 上に点 z_{m_1} があり, 別の点 z_{m_2} が $R(G_{i_2})$ または $R(H_{i_2})$ の上に, z_{m_3} が $R(G_{i_3})$ または $R(H_{i_3})$ の上に, そして点 z_{m_4} が $R(G_{i_4})$ または $R(H_{i_4})$ ($i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$) の上にある. すべての 4 重対称周期軌道を表 III に掲げてある. この場合も 2 つの回転数は等しく, $\nu_x = \nu_y = 0/q$ と書ける. 表 III の最後の欄に $z_{q/2}$ と z_0 の関係を記してある. 例として, 表現 $G_1[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_2[z_{k'}] \rightarrow H_4[z_{k''}] \rightarrow G_1[z_{q/2}]$ において, $0 \leq k \leq k' \leq k'' \leq q/2$ が仮定されている.

表 III-(a). 4 重対称周期軌道のリスト

対称線と軌道点	q	$z_{q/2}$
$G_1[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+1}] \rightarrow G_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2 \ (k \geq 1)$	$G_3 G_1 H_3 z_0$
$G_1[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k-1}] \rightarrow G_1[z_{4k-1}]$	$8k - 2 \ (k \geq 1)$	$G_3 G_1 H_3 z_0$
$G_1[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+1}] \rightarrow G_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2 \ (k \geq 1)$	$G_4 G_1 H_4 z_0$
$G_1[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k-1}] \rightarrow G_1[z_{4k-1}]$	$8k - 2 \ (k \geq 1)$	$G_4 G_1 H_4 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+2}] \rightarrow H_1[z_{4k+3}]$	$8k + 6 \ (k \geq 0)$	$H_3 G_1 H_3 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k}] \rightarrow H_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2 \ (k \geq 0)$	$H_3 G_1 H_3 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+2}] \rightarrow H_1[z_{4k+3}]$	$8k + 6 \ (k \geq 0)$	$H_4 G_1 H_4 z_0$
$H_1[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k}] \rightarrow H_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2 \ (k \geq 0)$	$H_4 G_1 H_4 z_0$

表 III-(b).

対称線と軌道点	q	$z_q/2$
$G_2[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+1}] \rightarrow G_2[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 0)$	$G_3G_2H_3z_0$
$G_2[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k-1}] \rightarrow G_2[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_3G_2H_3z_0$
$G_2[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+1}] \rightarrow G_2[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 0)$	$G_4G_2H_4z_0$
$G_2[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k-1}] \rightarrow G_2[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_4G_2H_4z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+2}] \rightarrow H_2[z_{4k+3}]$	$8k+6 \ (k \geq 0)$	$H_3G_2H_3z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k}] \rightarrow H_2[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 1)$	$H_3G_2H_3z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+2}] \rightarrow H_2[z_{4k+3}]$	$8k+6 \ (k \geq 0)$	$H_4G_2H_4z_0$
$H_2[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k}] \rightarrow H_2[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 1)$	$H_4G_2H_4z_0$

表 III-(c).

対称線と軌道点	q	$z_q/2$
$G_3[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k}] \rightarrow G_3[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_1H_3G_1z_0$
$G_3[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-2}] \rightarrow G_3[z_{4k-3}]$	$8k-6 \ (k \geq 1)$	$G_1H_3G_1z_0$
$G_3[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k}] \rightarrow G_3[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_2H_3G_2z_0$
$G_3[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-2}] \rightarrow G_3[z_{4k-3}]$	$8k-6 \ (k \geq 1)$	$G_2H_3G_2z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k+1}] \rightarrow H_3[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 1)$	$H_1H_3G_1z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-1}] \rightarrow H_3[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$H_1H_3G_1z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k+1}] \rightarrow H_3[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 0)$	$H_2H_3G_2z_0$
$H_3[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-1}] \rightarrow H_3[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$H_2H_3G_2z_0$

表 III-(d).

対称線と軌道点	q	$z_q/2$
$G_4[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k}] \rightarrow G_4[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_1H_4G_1z_0$
$G_4[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-2}] \rightarrow G_4[z_{4k-3}]$	$8k-6 \ (k \geq 1)$	$G_1H_4G_1z_0$
$G_4[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k}] \rightarrow G_4[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$G_2H_4G_2z_0$
$G_4[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-2}] \rightarrow G_4[z_{4k-3}]$	$8k-6 \ (k \geq 1)$	$G_2H_4G_2z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k+1}] \rightarrow H_4[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 1)$	$H_1H_4G_1z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-1}] \rightarrow H_4[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$H_1H_4G_1z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k+1}] \rightarrow H_4[z_{4k+1}]$	$8k+2 \ (k \geq 0)$	$H_2H_4G_2z_0$
$H_4[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-1}] \rightarrow H_4[z_{4k-1}]$	$8k-2 \ (k \geq 1)$	$H_2H_4G_2z_0$

表 III-(a) の中の $H_1[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+2}] \rightarrow H_1[z_{4k+3}]$ の場合を紹介する.

導出. ここで $z_0 = (x_0, y_0)$ が対称線 $x_0 = f(y_0)/2$ の上にあるとする. 2つの関係 $H_1z_0 = z_0$ と $G_3z_k = z_k$ より, 次が得られる.

$$G_1z_m = z_{-m-1}, \quad (1.25)$$

$$H_3z_m = z_{2k-m+1}. \quad (1.26)$$

これらより z_0 と z_{4k+3} の間の関係が得られる.

$$z_{4k+3} = H_3G_1H_3z_0. \quad (1.27)$$

3つの対合の積を計算して,

$$z_{4k+3} = (x_0 - f(y_0), 2(2n+1)\pi - y_0)$$

が得られる。この関係は z_{4k+3} が対称線 $x = f(y)/2$ の上にあることを意味している。つまり z_0 から z_{4k+3} への軌道は 1 周期の半分であることが分かる。1 周期後はもとの位置に戻るので回転数は $\nu_x = \nu_y = 0/(8k+6)$ である。

次に z_{2k+1} が $R(G_2)$ の上にあることを示す。式 (26) より、

$$z_{2k+1} = H_3 z_0 = (-y_0 + (2n+1)\pi, -x_0 + (2n+1)\pi)$$

を得る。次に $x_0 = f(y_0)/2$ を用いると、点 z_{2k+1} が $y = -f(x)/2 + (2n+1)\pi$ にあることが分かる。つまり z_{2k+1} は $R(G_2)$ の上にある。

最後に点 z_{3k+2} が $R(H_4)$ の上にあることを示す。そのためには $z_{4k+3} = H_4 z_{2k+1}$ ($= H_4 H_3 z_0$) が成立することを示せばよい。 $x_0 = f(y_0)/2$ を利用し、 $\text{mod}(x, 2\pi)$ と $\text{mod}(y, 2\pi)$ が付いていることに注意すれば簡単に示すことができる。計算の詳細は省略する。
Q.E.D.

References

- [1] P. G. Harper, Proc. Phys. Soc. London **A 68** (1955), 874.
- [2] S. Saito, Y. Nomura, K. Hirose and Y. Ichikawa, Chaos, **7** (1997), 245.
- [3] T. Shinbrot, L. Bresler and J. M. Ottino, Physica **D 93** (1996), 191.
- [4] R. DeVogelaere, in *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*, Vol. IV (Princeton Univ. Press, 1958). p. 53.
- [5] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, J. Math. Phys. **30** (1989), 608.
- [6] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 757.

Symplectic Renormalization Group Method and Its Application for Analyzing Island Structure

Shin-itiro GOTO

Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

ABSTRACT

After giving an introduction to our renormalization group method for weakly-nonlinear canonical equations as a singular perturbation technique, we present a method to construct reduced symplectic maps for given weakly-nonlinear symplectic maps by using the renormalization group with the Liouville operator. The resultant reduced maps accurately reproduce the long-time behavior of the original symplectic maps even when a resonant island chain appears.¹

1 Introduction

There has been a long history to study the asymptotic behavior of Hamiltonian flows by means of singular perturbation methods, such as the averaging methods, the method of multiple time-scale method and the canonical perturbation method. A Hamiltonian flow can be reduced to a symplectic discrete map called the Poincaré map. The dimension of phase space of a Poincaré map is lower than that of the original phase space, Poincaré maps are therefore, extensively studied. A symplectic map not only could be viewed as a Poincaré map, but also represents a model of an accelerator, then symplectic maps are also extensively studied as well as flows.

Renormalization group (RG) methods developed recently could be a useful tool to tackle asymptotic behaviors of discrete maps and flows. The original RG method developed in Ref. [3] is an asymptotic singular perturbation technique developed for weakly-nonlinear differential equations. If a naive perturbation solution of a given weakly nonlinear system includes secular (divergence) terms arising from perturbation solutions, then those secular terms should be removed in order to obtain a qualitatively correct solution of the given system. The RG methods have been proposed for removing secular terms in a systematic way, because we often need to know an insight into physical meaning of given nonlinear systems when we utilize some other singular perturbation techniques. Furthermore, it is expected that the RG methods are a unified method of various singular perturbation techniques, then RG methods have been extensively studied. It has been recognized that secular terms in the naive perturbation solution can be renormalized away by modification of integration constants in the unperturbed solution, and the results agree with or sometimes numerically better than the naive perturbation technique. The modified integrations are governed by the RG equations that turn out to be slow-motion equations or reduced equations. We therefore identify the RG procedure with a reduction one. A revised RG method for weakly-nonlinear differential equations has been proposed for giving us more a systematic way of dealing with various problems[4]. The revised RG method yields “symplectic renormalization group method”, then is to be

¹The essential part of this report has already been published (see Ref. [1] and [2]).

reviewed in this report. However, this review part is a little different from original paper [4]. Hamiltonian structure of reduced systems for given Hamiltonian systems is to be emphasized in this report.

Although the scope of RG methods has successfully been expanded into dissipative discrete systems[5], the extension of RG methods to symplectic maps is not trivial due to the existence of the symplectic condition. On the other hand, RG methods to some Hamiltonian flows do not cause such problem except for some special cases.

The main purpose of this report is to propose a general RG procedure for weakly-nonlinear symplectic maps which we call the symplectic RG method. The symplectic RG method consists the following two parts. First, taking the simply extended RG method to discrete maps without taking into account the symplectic structure of the reduced maps, we get a dissipative RG reduced map at this stage. Second, to obtain the symplecticity-preserving RG maps obtained in the first step, we equate the naive RG map obtained in the first step to a discretized Hamiltonian flow, which is done by using the Liouville operator acting on renormalized variables. In the second step, we identify the small parameter ε in a given original system with the the time step. Here we call a symplectic map obtained by the symplectic RG method a symplectic RG map.

2 Renormalization method to canonical equations

2.1 System with one degree of freedom

It may be instructive to analyze a Hamiltonian system with one degree of freedom, which is exactly solvable,

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= p = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\Omega^2 q + \varepsilon(a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4) = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ H(q, p) &= \frac{p^2 + \Omega^2 q^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{a_2}{3} q^3 + \frac{a_3}{4} q^4 + \frac{a_4}{5} q^5 \right).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Here ε is the small parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$), $a_2, \dots, a_4$ and Ω are $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ real parameters, q and p are canonically conjugated coordinate and momentum variable respectively. The Hamiltonian system (2.1) describes a weakly-nonlinear oscillator. The canonical equation of motion can be written as

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \Omega^2 q = \varepsilon \left(a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 \right). \quad (2.2)$$

We assume that the solution of the system (2.2) can be written in the form of $q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \dots$, with $q^{(0)} \gg \varepsilon q^{(1)} \gg \varepsilon^2 q^{(2)}$, which we call the naive perturbation solution or the regular perturbation solution. Substituting this expansion into (2.2), we obtain the perturbation equations for $q^{(0)}, \dots, q^{(N)}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 q^{(0)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(0)} &= 0, & \frac{d^2 q^{(1)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(1)} &= a_2 q^{(0)2} + a_3 q^{(0)3} + a_4 q^{(0)4}, \\ \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(2)} &= 2a_2 q^{(0)} q^{(1)} + 3a_3 q^{(0)2} q^{(1)} + 4a_4 q^{(0)3} q^{(1)}, \dots\end{aligned}$$

The unperturbed solution, $q^{(0)}$ is

$$q^{(0)} = Ae^{i\Omega t} + \text{c.c.},$$

where $A \in \mathbf{C}$ is the integration constant, and c.c. stands for the complex conjugate of the preceding term(s). Then, the leading-order equation can be written in terms of the explicit form of the unperturbed solution $q^{(0)}$ as follows

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q^{(1)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(1)} = & a_2 \left(A^2 e^{2i\Omega t} + 2|A|^2 + A^{*2} e^{-2i\Omega t} \right) \\ & + a_3 \left(A^3 e^{3i\Omega t} + 3|A|^2 A e^{i\Omega t} + 3|A|^2 A^* e^{-i\Omega t} + A^{*3} e^{-3i\Omega t} \right) \\ & + a_4 \left(A^4 e^{4i\Omega t} + 4|A|^2 A^2 e^{2i\Omega t} + 6|A|^4 + 4|A|^2 A^{*2} e^{-2i\Omega t} + A^{*4} e^{-4i\Omega t} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

where A^* is the complex conjugate of A . The solution of (2.3) is found by assuming

$$q^{(1)}(t) = Bte^{i\Omega t} + C_2 e^{2i\Omega t} + C_3 e^{3i\Omega t} + C_4 e^{4i\Omega t} + \text{c.c.} + C_0,$$

where B and C_j , ($j = 1, \dots, 4$) are complex constants, C_0 is a real constant. Here a part of the solution, $\text{const.} \exp(i\Omega t)$, is assumed to be included in the unperturbed solution $q^{(0)}$. After substituting this form of the solution $q^{(1)}$ into (2.3), then $q^{(1)}$ is determined by the following algebraic equations

$$\begin{aligned} 2i\Omega B = 3a_3|A|^2 A, \quad & (-2^2\Omega^2 + \Omega^2)C_2 = a_2 A^2 + 4a_4|A|^2 A^2, \\ (-3^2\Omega^2 + \Omega^2)C_3 = a_3 A^3, \quad & (-4^2\Omega^2 + \Omega^2)C_4 = a_4 A^4, \quad \Omega^2 C_0 = 2a_2|A|^2 + 6a_4|A|^4. \end{aligned}$$

The solution $q^{(1)}$ is then

$$q^{(1)} = f_1 t e^{i\Omega t} + f_2 e^{2i\Omega t} + f_3 e^{3i\Omega t} + f_4 e^{4i\Omega t} + \text{c.c.} + f_0, \quad (2.4)$$

where, f_j are defined as

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{-3ia_3}{2\Omega} |A|^2 A, \quad f_2 := \frac{-1}{3\Omega^2} \left(a_2 A^2 + 4a_4 |A|^2 A^2 \right) \\ f_3 &:= \frac{-1}{8\Omega^2} a_3 A^3, \quad f_4 := \frac{-1}{15\Omega^2} a_4 A^4, \quad f_0 := \frac{1}{\Omega^2} \left(2a_2 |A|^2 + 6a_4 |A|^4 \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

According to (2.4), the divergent term as $t \rightarrow \infty$ which we call the secular term, is $\text{const.} t e^{i\Omega t}$. This term breaks the assumption $q^{(0)} \gg \varepsilon q^{(1)}$, while the relation $\varepsilon t \gtrsim 1$ is satisfied. The naive perturbation solution is valid for $\varepsilon t < 1$. At this stage, we can see that the secular behavior is caused by the term related to a_3 . On the other hand, a_2 and a_4 do not contribute to the secular term up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$. The naive perturbation solution becomes

$$\begin{aligned} q &= q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= Ae^{i\Omega t} + \text{c.c.} + \varepsilon \left(f_1 t e^{i\Omega t} + f_2 e^{2i\Omega t} + f_3 e^{3i\Omega t} + f_4 e^{4i\Omega t} + \text{c.c.} + f_0 \right). \end{aligned}$$

Here we remove this secular term by using our renormalization method[4]. We define a renormalized variable $\tilde{A}(t)$ up to the order we consider here $\mathcal{O}(\varepsilon)$ as

$$\tilde{A}(t) := A + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |A|^2 At.$$

The original variable $q(t)$ can be written in terms of $\tilde{A}(t)$ as,

$$q(t) = \tilde{A}(t)e^{i\Omega t} + \varepsilon \left(f_2 e^{2i\Omega t} + f_3 e^{3i\Omega t} + f_4 e^{4i\Omega t} \right) + \text{c.c.} + f_0. \quad (2.6)$$

If an appropriate equation for $\tilde{A}(t)$ is found, then an approximate, but a qualitatively correct solution $q(t)$ for (2.1) is obtained. We call the equation for $\tilde{A}(t)$ a renormalization equation. Furthermore, if the equation for $\tilde{A}(t)$ is analytically solved, we can construct the analytic form of an approximate solution for (2.1).

The renormalization equation is constructed by using the definition of $\tilde{A}(t)$. We assume that such equation must be canonical because the given system (2.1) is a Hamiltonian system, then $\tilde{A}$ and $\tilde{A}^*$, for example, are to be canonical conjugate variables. The fundamental purpose here is to construct the closed relation for $\tilde{A}(t)$. First, we take the difference $\tilde{A}(t + \tau) - \tilde{A}(t)$ by using the definition of the renormalization available up to the order we take into account,

$$\tilde{A}(t + \tau) - \tilde{A}(t) = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}|^2 A \tau,$$

where τ is a real constant. Second, the inverse relation $A = \tilde{A}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ is substituted into the above expression to obtain the closed relation for $\tilde{A}(t + \tau)$ and $\tilde{A}(t)$.

$$\tilde{A}(t + \tau) = \tilde{A}(t) + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t) \tau + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Third, we assume that $\tilde{A}(t + \tau)$ can be expanded in τ . Comparing the closed relation between $\tilde{A}(t + \tau)$ and $\tilde{A}(t)$ with the following Liouville expansion associated with an appropriate Hamiltonian H , $\tilde{A}(t + \tau) = \exp(\tau \mathcal{L}_H) \tilde{A}(t)$, (or the Taylor expansion for both dissipative systems and Hamiltonian systems)

$$\tilde{A}(t + \tau) = \left(1 + \tau \mathcal{L}_H + \mathcal{O}(\tau^2) \right) \tilde{A}(t), \quad \text{or,} \quad \tilde{A}(t + \tau) = \tilde{A}(t) + \tau \frac{d\tilde{A}(t)}{dt} + \mathcal{O}(\tau^2),$$

where the Liouville operator acting on $\tilde{A}$ associated with H is defined as

$$\mathcal{L}_H \tilde{A} := \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{A}^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}} - \frac{\partial H}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}^*} \right) \tilde{A}, \quad H = \varepsilon \frac{-3ia_3}{4\Omega} |\tilde{A}|^4.$$

we then obtain the differential equation for $\tilde{A}(t)$

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} = \mathcal{L}_H \tilde{A}, \quad \frac{d\tilde{A}^*}{dt} = \mathcal{L}_H \tilde{A}^*. \quad (2.7)$$

This equation (2.7) is the RG equation up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$ for our system (2.1). It is noted that the RG system has the $U(1)$ symmetry, that is, the RG system is invariant under the transformation $\tilde{A} \mapsto \tilde{A} \exp(i\phi)$, ($\phi \in \mathbf{R}$).

The solution of (2.7) is given by

$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}(0) \exp \left(\varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}(0)|^2 t \right).$$

Substituting this explicit solution of $\tilde{A}$ into (2.6), one obtains an approximate, but a qualitatively correct solution for $q(t)$. This Liouville operator technique helps us to extend our RG technique to the problem of reducing symplectic maps. If the RG equation (2.7) is not canonical, such equation is called the complex Ginzburg-Landau equation without a term of second derivative with respect to a space variable. Here we note that our RG equation is from the secular term arising from the naive perturbation solution. In other words, non-secular terms are omitted. Because this omitting process gives us a reduced equation for a given problem, we then identify RG equations with reduced equations. It is easy to see that the reduced equation obtained here does not include a_2 and a_4 . In other words, even if the original system does not include a_2 and a_4 , the reduced equation is not changed.

If we would like to obtain an RG equations up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, the naive perturbation solution up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is needed. The perturbation equation at $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ can be written in terms of the explicit solutions of both $q^{(0)}$ and $q^{(1)}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(2)} = & \\
 & 2a_2 \left\{ Af_1^* t + (Af_0 + A^* f_2) e^{i\Omega t} \right. \\
 & \quad \left. + (Af_1 t + A^* f_3) e^{2i\Omega t} + (Af_2 + A^* f_4) e^{3i\Omega t} + Af_3 e^{4i\Omega t} + Af_4 e^{5i\Omega t} + \text{c.c.} \right\} \\
 & + 3a_3 \left\{ A^2 f_2^* + (A^2 f_1^* t + A^{*2} f_3 + 2|A|^2 f_1 t) e^{i\Omega t} + (A^{*2} f_4 + A^2 f_0 + 2|A|^2 f_2) e^{2i\Omega t} \right. \\
 & \quad \left. + (A^2 f_1 t + 2|A|^2 f_3) e^{3i\Omega t} + (A^2 f_2 + 2|A|^2 f_4) e^{4i\Omega t} \right. \\
 & \quad \left. A^2 f_3 e^{5i\Omega t} + A^2 f_4 e^{6i\Omega t} + \text{c.c.} + 2|A|^2 f_0 \right\} \\
 & + 4a_4 \left\{ A^3 f_3^* + 3|A|^2 A f_1^* t + (A^3 f_2^* + A^{*3} f_4 + 3|A|^2 A^* f_2 + 3|A|^2 A f_0) e^{i\Omega t} \right. \\
 & \quad (A^3 f_1^* t + 3|A|^2 A f_1 t + 3|A|^2 A^* f_3) e^{2i\Omega t} + (3|A|^2 A f_2 + 3|A|^2 A^* f_4 + A^3 f_0) e^{3i\Omega t} \\
 & \quad (A^3 f_1 t + 3|A|^2 A f_3) e^{4i\Omega t} + (A^3 f_2 + 3|A|^2 A f_4) e^{5i\Omega t} \\
 & \quad \left. + A^3 f_3 e^{6i\Omega t} + A^3 f_4 e^{7i\Omega t} + \text{c.c.} \right\}. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Here f_j are defined in (2.5). The solution of (2.8) is obtained by assuming

$$\begin{aligned}
 q^{(2)}(t) = & (C_{1,2} t^2 + C_{1,1} t) e^{i\Omega t} + (C_{2,1} t + C_{2,0}) e^{2i\Omega t} + (C_{3,1} t + C_{3,0}) e^{3i\Omega t} \\
 & + (C_{4,1} t + C_{4,0}) e^{4i\Omega t} + C_{5,0} e^{5i\Omega t} + C_{6,0} e^{6i\Omega t} + C_{7,0} e^{7i\Omega t} \\
 & + C_{0,1} t + C_{0,0} + \text{c.c.} + B_{0,0}
 \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} + \Omega^2 q^{(2)} = & e^{i\Omega t} \{ 4i\Omega C_{1,2}t + (2i\Omega C_{1,1} + 2C_{1,2}) \} \\
 & + e^{2i\Omega t} \{ -3\Omega^2 C_{2,1}t + (-3\Omega^2 C_{2,0} + 4i\Omega C_{2,1}) \} \\
 & + e^{3i\Omega t} \{ -8\Omega^2 C_{3,1}t + (-8\Omega^2 C_{3,0} + 6i\Omega C_{3,1}) \} \\
 & + e^{4i\Omega t} \{ -15\Omega^2 C_{4,1}t + (-15\Omega^2 C_{4,0} + 8i\Omega C_{4,1}) \} \\
 & + e^{5i\Omega t} (-24\Omega^2 C_{5,0}) + e^{6i\Omega t} (-35\Omega^2 C_{6,0}) + e^{7i\Omega t} (-48\Omega^2 C_{7,0}) \\
 & + \Omega^2 (C_{0,1}t + C_{0,0}) + \text{c.c.} + B_{0,0},
 \end{aligned}$$

where the part of the solution $\text{const.exp}(i\Omega t)$ is again assumed to be included in the unperturbed solution $q^{(0)}$. Here constants $C_{a,b}$ are complex and $B_{0,0}$ is real, whose explicit forms are

$$\begin{aligned}
 C_{1,2} &= \frac{3a_3(A^2 f_1^* + 2|A|^2 f_1)}{4i\Omega} = \frac{-9a_3^2}{8\Omega^2} |A|^4, \\
 C_{1,1} &= \frac{2a_2(Af_0 + A^* f_2) + 3a_3 A^{*2} f_3 + 4a_4(A^3 f_2^* + A^{*3} f_4 + 3|A|^2 A^* f_2 + 3|A|^2 A f_0)}{2i\Omega} \\
 &\quad + \frac{iC_{1,2}}{\Omega} = \frac{1}{i\Omega^3} \left(\frac{5}{3} a_2^2 |A|^2 A + 14a_2 a_4 |A|^4 A + \frac{5}{16} a_3^2 |A|^4 A + \frac{126}{5} a_4^2 |A|^6 A \right), \\
 C_{2,1} &= \frac{2a_2 A f_1 + 4a_4(A^3 f_1^* + 3|A|^2 A f_1)}{-3\Omega^2} = \frac{ia_3}{\Omega^3} (a_2 |A|^2 A^2 + 4a_4 |A|^4 A^2), \\
 C_{2,0} &= \frac{2a_2 A^* f_3 + 3a_3(A^{*2} f_4 + A^2 f_0 + 2|A|^2 f_2) + 4a_4(3|A|^2 A^* f_3) - 4i\Omega C_{2,1}}{-3\Omega^2}, \\
 C_{3,1} &= \frac{3a_3 A^2 f_1}{-8\Omega^2} = \frac{9ia_3^2}{16\Omega^3} |A|^2 A^3, \\
 C_{3,0} &= \frac{2a_2(Af_2 + A^* f_4) + 6a_3|A|^2 f_3 + 4a_4(3|A|^2 A f_1 + 3|A|^2 A^* f_4 + A^3 f_0) - 6i\Omega C_{3,1}}{-8\Omega^2}, \\
 C_{4,1} &= \frac{4a_4 A^3 f_1}{-15\Omega^2} = \frac{2ia_3 a_4 |A|^2 A^4}{5\Omega^3}, \\
 C_{4,0} &= \frac{2a_2 A f_3 + 3a_3(A^2 f_2 + 2|A|^2 f_4) + 12a_4|A|^2 A f_3 - 8i\Omega C_{4,1}}{-15\Omega^2}, \\
 C_{5,0} &= \frac{2a_2 A f_4 + 3a_3 A^2 f_3 + 4a_4(A^2 f_2 + 3|A|^2 A f_4)}{-24\Omega^2}, \\
 C_{6,0} &= \frac{3a_3 A^2 f_4 + 4a_4 A^3 f_3}{-35\Omega^2}, \quad C_{7,0} = \frac{4a_4 A^3 f_4}{-48\Omega^2}, \\
 C_{0,1} &= \frac{2a_2 A f_1^* + 12a_4|A|^2 A f_1^*}{\Omega^2} = \frac{ia_3|A|^4(a_2 + 6a_4)}{\Omega^3}, \quad C_{0,0} = \frac{3a_3 A^2 f_2^* + 4a_4 A^3 f_3^*}{\Omega^2}, \\
 B_{0,0} &= \frac{2|A|^2 f_0}{\Omega^2}.
 \end{aligned}$$

The naive perturbation solution up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
 &= Ae^{i\Omega t} + \text{c.c.} + \varepsilon \left(f_1 t + f_2 e^{2i\Omega t} + f_3 e^{3i\Omega t} + 4_2 e^{4i\Omega t} + \text{c.c.} + f_0 \right) \\
 &\quad + \varepsilon^2 \left((C_{1,2} t^2 + C_{1,1} t) e^{i\Omega t} + (C_{2,1} t + C_{2,0}) e^{2i\Omega t} + (C_{3,1} t + C_{3,0}) e^{3i\Omega t} \right. \\
 &\quad \left. + (C_{4,1} t + C_{4,0}) e^{4i\Omega t} + C_{5,0} e^{5i\Omega t} + C_{6,0} e^{6i\Omega t} + C_{7,0} e^{7i\Omega t} + C_{0,1} t + C_{0,0} + \text{c.c.} \right. \\
 &\quad \left. + B_{0,0} \right).
 \end{aligned}$$

As well as $q^{(1)}$, we observe the secular terms ($\propto t, \propto t^2$), which break the assumption $q^{(0)} \gg \varepsilon q^{(1)} \gg \varepsilon q^{(2)}$ in the naive perturbation solution. We remove the secular terms by defining the renormalized variable up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$$\tilde{A}(t) := A + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |A|^2 A t + \varepsilon^2 (C_{1,2} t^2 + C_{1,1} t). \quad (2.9)$$

The difference $\tilde{A}(t + \tau) - \tilde{A}(t)$ is calculated as

$$\tilde{A}(t + \tau) - \tilde{A}(t) = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |A|^2 A \tau + \varepsilon^2 (2C_{1,2} t \tau + C_{1,2} \tau^2 + C_{1,1} \tau).$$

The inversion of the definition of the renormalized variable is perturbatively calculated as

$$A = \tilde{A}(t) - \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t) t + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Substituting this inversion into the difference $\tilde{A}(t + \tau) - \tilde{A}(t)$, we obtain the closed relation between $\tilde{A}(t + \tau)$ and $\tilde{A}(t)$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(t + \tau) &= \tilde{A}(t) + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |A|^2 A \tau + \varepsilon^2 (2C_{1,2} t \tau + C_{1,2} \tau^2 + C_{1,1} \tau) \\
 &= \tilde{A}(t) + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t) \tau + \varepsilon^2 \left(C_{1,1} (\tilde{A}(t), \tilde{A}^*(t)) \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \right) \\
 &= \left(1 + \tau \mathcal{L}_H + \mathcal{O}(\tau^2) \right) \tilde{A}(t),
 \end{aligned}$$

where

$$C_{1,1}(\tilde{A}, \tilde{A}^*) := \frac{1}{i\Omega^3} \left(\frac{5}{3} a_2^2 |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + 14 a_2 a_4 |\tilde{A}|^4 \tilde{A} + \frac{5}{16} a_3^2 |\tilde{A}|^4 \tilde{A} + \frac{126}{5} a_4^2 |\tilde{A}|^6 \tilde{A} \right).$$

Using the relation $\mathcal{L}_{\varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)}} = \varepsilon \mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{H^{(2)}}$, we obtain an appropriate Hamiltonian $H^{RG} = \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)}$,

$$H^{RG} = \varepsilon \frac{-3ia_3}{4\Omega} |\tilde{A}|^4 + \varepsilon^2 \frac{1}{i\Omega^3} \left(\frac{5}{6} a_2^2 |A|^4 + \frac{14}{3} a_2 a_4 |A|^6 + \frac{5}{48} a_3^2 |A|^6 + \frac{63}{10} a_4^2 |A|^8 \right).$$

The RG equation up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is then

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + \varepsilon^2 C_{1,1}(\tilde{A}, \tilde{A}^*) = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}, \quad \frac{d\tilde{A}^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}^*. \quad (2.10)$$

Here we observe that the $U(1)$ symmetry appearing in the $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ RG equation (2.7), $\tilde{A} \mapsto \tilde{A} \exp(i\phi)$, ($\phi \in \mathbf{R}$) is preserved. It is also noted that the system (2.10) has a conserved quantity $|\tilde{A}(t)|^2 = |\tilde{A}(0)|^2$. The solution of (2.10) is given by

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) = \tilde{A}(0) \exp \left(\varepsilon \frac{-3ia_3}{2\Omega} |\tilde{A}(0)|^2 t \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \frac{1}{i\Omega^3} \left(\frac{5}{3} a_2^2 |\tilde{A}(0)|^2 + 14a_2 a_4 |\tilde{A}(0)|^4 + \frac{5}{16} a_3^2 |\tilde{A}(0)|^4 + \frac{126}{5} a_4^2 |\tilde{A}(0)|^6 \right) t \right). \end{aligned}$$

It is noted that secular terms arising from higher harmonic terms, such as $t \exp^{2i\Omega t}$, are also removed by $\tilde{A}(t)$ which has already been defined in (2.9). From the naive perturbation solution up to $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, other secular terms are renormalized by substituting the relation $A = \tilde{A} + 3i\varepsilon t a_3 |\tilde{A}|^2 \tilde{A} / (2\Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$,

$$\begin{aligned} f_2 + \varepsilon C_{2,1} t &= \frac{-1}{3\Omega^2} \left(a_2 A^2 + 4a_4 |A|^2 A^2 \right) + \varepsilon t \frac{ia_3}{\Omega^3} (a_2 |A|^2 A^2 + 2a_4 |A|^4 A^2) \\ &= \frac{-1}{3\Omega^2} \left(a_2 \tilde{A}^2 + 4a_4 |\tilde{A}|^2 \tilde{A}^2 \right), \\ f_3 + \varepsilon C_{3,1} t &= \frac{-1}{8\Omega^2} a_3 A^3 + \varepsilon t \frac{9ia_3^2}{16\Omega^3} |A|^2 A^3 = \frac{-a_3}{8\Omega^2} \tilde{A}^3, \\ f_4 + \varepsilon C_{4,1} t &= \frac{-1}{15\Omega^2} a_4 A^4 + \varepsilon t \frac{2ia_3 a_4 |A|^2 A^4}{5\Omega^3} = \frac{-1}{15\Omega^2} a_4 \tilde{A}^4. \end{aligned}$$

Because of $C_{0,1} t + \text{c.c.} = 0$, the naive perturbation solution does not have a secular behavior from $C_{0,1} t$ term.

We have discussed our RG method to a nonlinear Hamiltonian system with one degree of freedom. Although the model we have treated as an example is an integrable system because of one degree of freedom, our RG method is not restricted to integrable Hamiltonian systems.

2.2 System with many degrees of freedom

A class of weakly-coupled nonintegrable Hamiltonian oscillators can be reduced to a discrete nonlinear Schrödinger equation. Actually, we can present a discrete nonlinear Schrödinger equation as a reduced system of a lattice Hamiltonian system. Let us consider the following Hamiltonian system, which could not be integrable for the case of the number of sites is more than three[6].

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= p_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\Omega^2 q_j + \varepsilon \left\{ \nu (q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) - \alpha_2 q_j^2 - \alpha_3 q_j^3 - \alpha_4 q_j^4 \right\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (2.11) \\ H &= \sum_j \left\{ \frac{p_j^2 + \Omega^2 q_j^2}{2} + \varepsilon \left(\frac{\nu}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 + \frac{\alpha_2 q_j^3}{3} + \frac{\alpha_3 q_j^4}{4} + \frac{\alpha_4 q_j^5}{5} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Here q_j and p_j are canonical variables at site each $j \in \mathbf{Z}$, which are real valued, ε is the small parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$), $\alpha_2, \dots, \alpha_4$ and ν are $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ real valued

parameters. We show that the reduced system up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$ of (2.11) is a spatially discretized nonlinear Schrödinger equation. Eliminating p_j variables, we obtain

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \Omega^2 q_j = \varepsilon \left\{ \nu(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) - \alpha_2 q_j^2 - \alpha_3 q_j^3 - \alpha_4 q_j^4 \right\}.$$

The naive perturbation solution $q_j = q_j^{(0)} + \varepsilon q_j^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is given by

$$\begin{aligned} q_j^{(0)} &= A_j e^{i\Omega t} + \text{c.c.}, \\ q_j^{(1)} &= \frac{-it}{2\Omega} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right) e^{i\Omega t} \\ &\quad + \frac{\alpha_2 A_j^2 + 4\alpha_4 |A_j|^2 A_j}{3\Omega^2} e^{2i\Omega t} + \frac{\alpha_3 A_j^3}{8\Omega^2} e^{3i\Omega t} + \frac{\alpha_4 A_j^4}{15\Omega^2} e^{4i\Omega t} + \text{c.c.} \\ &\quad - \frac{1}{\Omega^2} \left(2\alpha_2 |A_j|^2 + 6\alpha_4 |A_j|^4 \right). \end{aligned}$$

Here $A_j \in \mathbf{C}$ are the integration constants, the number of A_j is equal to the the number of the sites. We observe a secular terms as mentioned in the preceding subsection. The renormalization variables are defined to remove the secular behavior as

$$\tilde{A}_j(t) := A_j + \varepsilon \frac{-it}{2\Omega} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right).$$

The difference $A_j(t + \tau) - \tilde{A}_j(t)$ is calculated by using the definition of $\tilde{A}_j(t)$,

$$A_j(t + \tau) - \tilde{A}_j(t) = \varepsilon \frac{-i\tau}{2\Omega} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right).$$

Substituting $A = \tilde{A}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ into the difference, we obtain the RG equation up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$ for (2.11),

$$\frac{d\tilde{A}_j}{dt} = \frac{-i\varepsilon}{2\Omega} \left(\nu(\tilde{A}_{j+1} - 2\tilde{A}_j + \tilde{A}_{j-1}) - 3\alpha_3 |\tilde{A}_j| \tilde{A}_j \right) = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j, \quad \frac{d\tilde{A}_j^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j^*. \quad (2.12)$$

This is a spatially discretized nonlinear Schrödinger equation. Here the Liouville operator associated with H^{RG} is acting on $\tilde{A}_j$ which is one of canonical variables, as

$$\mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j := \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}_l^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_l} - \frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}_l} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_l^*} \right) \tilde{A}_j,$$

where H^{RG} is given by

$$H^{RG} = \nu \frac{i\varepsilon}{2\Omega} \sum_j |\tilde{A}_{j+1} - \tilde{A}_j|^2 + \alpha_3 \frac{3i\varepsilon}{4\Omega} \sum_j |\tilde{A}_j|^2.$$

It is noted that the $U(1)$ symmetry $\tilde{A}_j \mapsto \tilde{A}_j \exp(i\phi)$, ($\phi \in \mathbf{R}$) is observed in (2.12). The RG system (2.12) has a conserved quantity, $\sum_j |\tilde{A}_j(t)|^2 = \sum_j |\tilde{A}_j(0)|^2$.

3 Renormalizaion method to symplectic maps

3.1 Two-dimensional symplectic map

In the previous section, we have briefly discussed the essence of our RG method to canonical equations. In this section, we demonstrate that our RG method can successfully be applied to study weakly nonlinear symplectic maps. We consider the following symplectic map as an example, $(x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$,

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, \quad y_{n+1} = y_n + a_1 x_n + \varepsilon(a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + a_4 x_n^4), \quad (3.1)$$

where n expresses discrete time, and is an integer number. The origin $(x, y) = (0, 0)$ is assumed to be an elliptic fixed point. The symplectic structure of this system is expressed as

$$dx_{n+1} \wedge dy_{n+1} - dx_n \wedge dy_n = 0,$$

that is, x_n and y_n are canonical variables, and are real. Although the system we deal with can be more general, we restrict ourselves to the system(3.1) for the sake of brevity. The system (3.1) can be written in the following form,

$$x_{n+1} - 2x_n \cos \omega + x_{n-1} = \varepsilon(a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + a_4 x_n^4), \quad \cos \omega := \left(1 - \frac{a_1}{2}\right), \quad (3.2)$$

with $0 \leq a_1 \leq 4$, because the origin $(x, y) = (0, 0)$ has been assumed to be elliptic.

Our strategy to reduce the system is quite similar to the case of canonical differential equations. The method to obtain the reduced system of (3.1) needs the naive perturbation solutions up to orders we take into account. Furthermore, for reduced systems, to preserve the symplectic structure of the original system, the RG method with the Liouville expansion is to be introduced in the course of obtaining RG maps. The original system (3.2) is divided into two classes, $\omega/2\pi$ is irrational and close to an rational number. In this report, we focus on the both cases. A chain of resonant islands structure in the phase space is related to the latter case, $\omega/2\pi$ is rational. However, before analyzing islands structure, we discuss how our RG method works in the symplectic maps for the former case, $\omega/2\pi$ is irrational.

Substituting the naive perturbation $x_n = x_n^{(0)} + \varepsilon x_n^{(1)} + \varepsilon^2 x_n^{(2)} + \dots$ into the system (3.2) with $\cos \omega$ is $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, we obtain the perturbation equations

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(0)} - 2x_n^{(0)} \cos \omega + x_{n-1}^{(0)} &= 0, \\ x_{n+1}^{(1)} - 2x_n^{(1)} \cos \omega + x_{n-1}^{(1)} &= a_2 x_n^{(0)2} + a_3 x_n^{(0)3} + a_4 x_n^{(0)4}, \\ x_{n+1}^{(2)} - 2x_n^{(2)} \cos \omega + x_{n-1}^{(2)} &= 2a_2 x_n^{(0)} x_n^{(1)} + 3a_3 x_n^{(0)2} x_n^{(1)} + 4a_4 x_n^{(0)3} x_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Here we assume that $x_n^{(0)} \gg \varepsilon x_n^{(1)} \gg \varepsilon^2 x_n^{(2)}$ as well as the case of differential equations. The unperturbed system ($\varepsilon = 0$) has an oscillatory solution,

$$x_n^{(0)} = A \exp(i\omega n) + \text{c.c.},$$

where $A \in \mathbb{C}$ is the integration constant. The leading-order equation becomes

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} - 2x_n^{(1)} \cos \omega + x_{n-1}^{(1)} &+ a_2(A^2 e^{2i\omega n} + 2|A|^2 + A^* e^{-2i\omega n}) \\ &+ a_3(A^3 e^{3i\omega n} + 3|A|^2 A e^{i\omega n} + 3|A|^2 A^* e^{-i\omega n} + A^*{}^3 e^{-3i\omega n}) \\ &+ a_4(A^4 e^{4i\omega n} + 4|A|^2 A^2 e^{2i\omega n} + 6|A|^4 + 4|A|^2 A^{*2} e^{-2i\omega n} + A^{*4} e^{-4i\omega n}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

The solution of (3.3) is found by assuming

$$x_n^{(1)} = Bne^{i\omega n} + C_2e^{2i\omega n} + C_3e^{3i\omega n} + C_4e^{4i\omega n} + \text{c.c.} + C_0,$$

where B and C_j , ($j = 1, \dots, 4$) are complex constants, C_0 is a real constant. Here a part of the solution, $\text{const.exp}(i\Omega n)$, is assumed to be included in the unperturbed solution $x_n^{(0)}$. Substituting the explicit form of the solution $x_n^{(1)}$ into (3.3), we can see that $x_n^{(1)}$ is determined by the following algebraic equations

$$\begin{aligned} (2i \sin \omega)B &= 3a_3|A|^2A, & 2(\cos 2\omega - \cos \omega)C_2 &= a_2A^2 + 4a_4|A|^2A^2, \\ 2(\cos 3\omega - \cos \omega)C_3 &= a_3A^3, & (-4^2\Omega^2 + \Omega^2)C_4 &= a_4A^4, \\ 2(1 - \cos \omega)C_0 &= 2a_2|A|^2 + 6a_4|A|^4. \end{aligned}$$

The solution $x^{(1)}$ is then

$$x_n^{(1)} = f_1ne^{i\omega n} + f_2e^{2i\omega n} + f_3e^{3i\omega n} + f_4e^{4i\omega n} + \text{c.c.} + f_0, \quad (3.4)$$

where, f_j are defined as

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega}|A|^2A, & f_2 &:= \frac{a_2A^2 + 4a_4|A|^2A^2}{2(\cos 2\omega - \cos \omega)}, & f_3 &:= \frac{a_3A^3}{2(\cos 3\omega - \cos \omega)}, \\ f_4 &:= \frac{a_4A^4}{2(\cos 4\omega - \cos \omega)}, & f_0 &:= \frac{2a_2|A|^2 + 6a_4|A|^4}{2(1 - \cos \omega)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

According to (3.4), the divergent term as $n \rightarrow \infty$ which we also call the secular term as well as differential equations, is $\text{const.}ne^{i\omega n}$. This term breaks the assumption $x_n^{(0)} \gg \varepsilon x_n^{(1)}$ while the relation $\varepsilon n \gtrsim 1$ is satisfied, then the naive perturbation solution is valid for $\varepsilon n < 1$. At this stage, we can see that the secular behavior is only caused by the term related to a_3 . On the other hand, a_2 and a_4 do not contribute to the secular term up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$. This situation is quite similar to the case of differential equations. The naive perturbation solution becomes

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(0)} + \varepsilon x_n^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= Ae^{i\omega n} + \text{c.c.} + \varepsilon \left(f_1ne^{i\omega n} + f_2e^{2i\omega n} + f_3e^{3i\omega n} + f_4e^{4i\omega n} + \text{c.c.} + f_0 \right). \end{aligned}$$

Here we remove this secular term by using our renormalization method. We define a renormalized variable $\tilde{A}(n)$ up to the order we consider here $\mathcal{O}(\varepsilon)$ as

$$\tilde{A}(n) := A + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega}|A|^2An.$$

The original variable x_n can be written in terms of $\tilde{A}(n)$ as,

$$x_n = \tilde{A}(n)e^{i\omega n} + \varepsilon \left(f_2e^{2i\omega n} + f_3e^{3i\omega n} + f_4e^{4i\omega n} \right) + \text{c.c.} + f_0. \quad (3.6)$$

To construct the renormalization equation, first we take the difference between $\tilde{A}(n+n')$ and $\tilde{A}(n)$ from the definition of $\tilde{A}(n)$,

$$\tilde{A}(n+n') - \tilde{A}(n) = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega}|A|^2An',$$

where n' is an integer number. Second, the relation $A = \tilde{A}(n) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ from the definition of $\tilde{A}(n)$ is substituted into the above expression to obtain the closed relation between $\tilde{A}(n + n')$ and $\tilde{A}(n)$,

$$\tilde{A}(n + n') - \tilde{A}(n) = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}(n)|^2 \tilde{A}(n)n'.$$

The map obtained by taking $n' = 1$, is not symplectic,

$$dA(n + 1) \wedge dA(n + 1)^* - dA(n) \wedge dA(n)^* \neq 0.$$

This is a downside of the simply extended RG method. In order to recover the symplecticity, the Liouville operator approach is to be introduced. Third, taking $n' = 1$ and, identifying both ε with the time step and $\tilde{A}(t) := \tilde{A}(n)$, $\tilde{A}(t + \varepsilon) := \tilde{A}(n + 1)$, where t is real, we obtain

$$\tilde{A}(t + \varepsilon) = \tilde{A}(t) + \varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t).$$

Finally, comparing this with the Liouville expansion associated with an appropriate Hamiltonian H^{RG} , $\tilde{A}(t + \varepsilon) = \exp(\varepsilon \mathcal{L}_{H^{RG}}) \tilde{A}(t)$, we then obtain the difference equation for $\tilde{A}(t)$

$$\tilde{A}(t + \varepsilon) = \left(1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{RG}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \tilde{A}(t),$$

where the Liouville operator acting on $\tilde{A}$ associated with H^{RG} is defined as

$$\mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A} := \left(\frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}} - \frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}^*} \right) \tilde{A}, \quad H^{RG} = \varepsilon \frac{-3ia_3}{4 \sin \omega} |\tilde{A}|^4.$$

Here, we assume that $\tilde{A}(t + \varepsilon)$ can be expanded in ε . We then obtain the differential equation for $\tilde{A}(t)$

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}, \quad \frac{d\tilde{A}^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}^*. \quad (3.7)$$

Because the original system (3.2) is a discrete time system, then we transform the continuous time system (3.7) to a discrete time system by using a symplectic discretization, or a symplectic integrator. Because there are many ways of symplectic discretization, various resultant reduced symplectic maps are obtained in general. Using the solution of the continuous time RG system (3.7) whose solution is

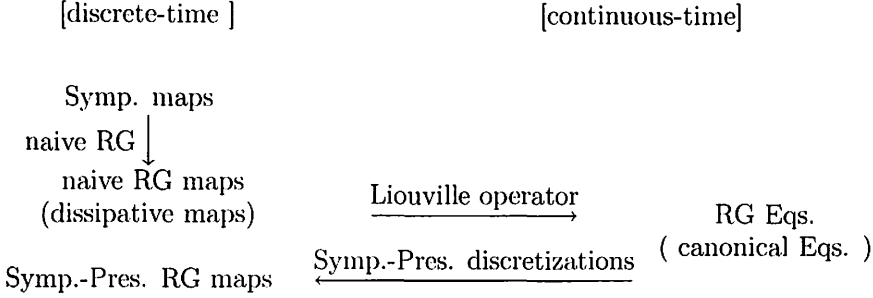
$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}(0) \exp \left(\varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}(0)|^2 t \right),$$

we can exactly discretize the continuous time RG system. The resultant equation which we call a symplectic renormalization map is

$$\tilde{A}(n + 1) = \tilde{A}(n) \exp \left(\varepsilon \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}(n)|^2 \right). \quad (3.8)$$

Here we have identified the time step with ε . We observe that the symplectic RG map (3.8) has the $U(1)$ symmetry, that is, (3.8) is invariant under the transformation $\tilde{A}(n) \mapsto \tilde{A}(n) \exp(i\phi)$, ($\phi \in \mathbf{R}$). Besides, there is a conserved quantity $|\tilde{A}(n)|^2 = |\tilde{A}(0)|^2$. Although we cannot use the explicit solution of the continuous time RG equation in general, we take a symplectic integrator to discretize continuous time RG systems. Similar to the case of differential equations, a_2 and a_4 are not essential in this approximation, up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

The present method can be viewed as the following diagram,



As well as the continuous time RG equation (3.7), the solution of the symplectic RG map (3.8) can also be written in terms of the exponential function,

$$\tilde{A}(n) = \tilde{A}(0) \exp \left(\varepsilon n \frac{-3ia_3}{2 \sin \omega} |\tilde{A}(0)|^2 \right),$$

which yield the analytic expression of the rotation number in the phase space (see Ref. [7].). In Ref. [7]. we have introduced a more convenient way of obtaining symplectic RG maps, called the exponentiation procedure. However, such way is limited to some special cases.

If higher-order approximation is needed, we have to construct the higher naive perturbation solution up to needed orders in ε . The associated Hamiltonian can perturbatively be found[1].

If ω is close to $2\pi/3$, instead of being irrational, we treat the following a_1 , or equivalently, the following ω regime,

$$\omega = \frac{2\pi}{3} + \varepsilon\delta,$$

where δ is a real $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ parameter. Although we concentrate on this specific ω , our method is useful for more general parameter regime. Our method does not need to any modifications. The RG method with Liouville operator expansion is also applicable for this case.

Expanding $2 \cos \omega$ in (3.2), we obtain

$$2 \cos \omega = -1 - \varepsilon\sqrt{3}\delta + \varepsilon^2 \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

We substitute this expansion into (3.2), the system becomes

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \varepsilon(-\sqrt{3}\delta x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + a_4 x_n^4) + \varepsilon^2 \frac{\delta^2}{2} x_n + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.9)$$

Naive expansion $x_n = x_n^{(0)} + \varepsilon x_n^{(1)} + \varepsilon^2 x_n^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ gives perturbation equations

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(0)} + x_n^{(0)} + x_{n-1}^{(0)} &= 0, \\ x_{n+1}^{(1)} + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(1)} &= -\sqrt{3}\delta x_n^{(0)} + a_2 x_n^{(0)2} + a_3 x_n^{(0)3} + a_4 x_n^{(0)4}, \\ x_{n+1}^{(2)} + x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(2)} &= -\sqrt{3}\delta x_n^{(1)} + 2a_2 x_n^{(0)} x_n^{(1)} + 3a_3 x_n^{(0)2} x_n^{(1)} + 4a_4 x_n^{(0)3} x_n^{(1)} + \frac{\delta^2}{2} x_n^{(0)}. \end{aligned}$$

The unperturbed solution $x_n^{(0)}$ is given by

$$x_n^{(0)} = A e^{i\frac{2\pi}{3}n} + \text{c.c.},$$

where $A \in \mathbf{C}$ is the integration constant. The leading-order perturbation equation becomes

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(1)} &= -\sqrt{3}\delta(Ae^{i\frac{2\pi}{3}n} + A^*e^{-i\frac{2\pi}{3}n}) \\ &\quad + a_2(A^2e^{-i\frac{2\pi}{3}n} + 2|A|^2 + A^{*2}e^{i\frac{2\pi}{3}n}) \\ &\quad + a_3(A^3 + 3|A|^2Ae^{i\frac{2\pi}{3}n} + 3|A|^2Ae^{-i\frac{2\pi}{3}n} + A^{*3}) \\ &\quad + a_4(A^4e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 4|A|^2A^2e^{-i\frac{2\pi}{3}n} + 6|A|^4 + 4|A|^2A^{*2}e^{i\frac{2\pi}{3}n} + A^{*4}e^{-i\frac{2\pi}{3}n}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

The solution of (3.10) is given by

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \frac{in}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\delta A - a_2 A^{*2} - 3a_3 |A|^2 A - a_4 (A^4 + 4|A|^2 A^{*2}) \right) e^{i\frac{2\pi}{3}n} + \text{c.c.} \\ &\quad + \frac{2a_2 |A|^2 + a_3 A^3 + 6a_4 |A|^4}{3}, \end{aligned}$$

where we observe a secular behavior which breaks the assumption $x^{(0)} \gg \varepsilon x^{(1)}$ while the relation $\varepsilon n \gtrsim 1$ is satisfied. The renormalized variable $\tilde{A}(n)$ should be defined to remove the secular behavior as,

$$\tilde{A}(n) := A + \varepsilon \frac{in}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\delta A - a_2 A^{*2} - 3a_3 |A|^2 A - a_4 (A^4 + 4|A|^2 A^{*2}) \right).$$

The naive RG map is given by

$$\begin{aligned} \tilde{A}(n+1) &= \tilde{A}(n) + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3}\delta \tilde{A}(n) - a_2 \tilde{A}(n)^{*2} - 3a_3 |\tilde{A}(n)|^2 \tilde{A}(n) \right. \\ &\quad \left. - a_4 \left(\tilde{A}(n)^4 + 4|\tilde{A}(n)|^2 \tilde{A}(n)^{*2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

To obtain the symplectic RG map, we define $\tilde{A}(t) := \tilde{A}(n)$ and $\tilde{A}(t+\varepsilon) := \tilde{A}(n+1)$, where t is real, and take the Liouville expansion associated with an appropriate Hamiltonian H as follows,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t+\varepsilon) &= \tilde{A}(t) + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3}\delta \tilde{A}(t) - a_2 \tilde{A}(t)^{*2} - 3a_3 |\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t) \right. \\ &\quad \left. - a_4 \left(\tilde{A}(t)^4 + 4|\tilde{A}(t)|^2 \tilde{A}(t)^{*2} \right) \right\} \\ &= (1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{RG}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \tilde{A}(t). \\ H^{RG} &= i \left\{ \delta |\tilde{A}|^2 - \frac{a_2}{3\sqrt{3}} (\tilde{A}^3 + \tilde{A}^{*3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} |\tilde{A}|^4 - \frac{a_4}{\sqrt{3}} |\tilde{A}|^2 (\tilde{A}^3 + \tilde{A}^{*3}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

The continuous time RG equation is then given by

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}, \quad \frac{d\tilde{A}^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}^*. \quad (3.13)$$

A symplectic RG map is obtained by discretizing this continuous RG equation (3.13). In this continuous time RG equation (3.13), there is a discrete symmetry, the system is invariant under the transformation $\tilde{A} \mapsto \tilde{A} \exp(i2\pi k/3)$, ($k \in \mathbf{Z}$).

The Hamiltonian (3.12) describes the phase space structure of the renormalized variables $(\tilde{A}, \tilde{A}^*)$ to the order of the present approximation, regardless of the choice of symplectic integrators for the Hamiltonian (3.12). The most important points in the phase space $(\tilde{A}, \tilde{A}^*)$ are fixed points, since they, in accordance with the relation between $\tilde{A}$ and x_n , corresponding to periodic points in the original phase space (x, y) , which determine the chain of resonant islands structure. The fixed points in the flow of the system (3.12) are solutions of the following algebraic equations

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{A}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \tilde{A}^*} = 0.$$

In the present case, the above relations are reduced to

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\delta\tilde{A} - a_2\tilde{A}^{*2} - 3a_3|\tilde{A}|^2\tilde{A} - a_4(\tilde{A}^4 + 4|\tilde{A}|^2\tilde{A}^{*2}) &= 0, \\ \sqrt{3}\delta\tilde{A}^* - a_2\tilde{A}^2 - 3a_3|\tilde{A}|^2\tilde{A}^* - a_4(\tilde{A}^{*4} + 4|\tilde{A}|^2\tilde{A}^2) &= 0. \end{aligned}$$

For $a_4 = 0$, the periodic points $\tilde{A}_* = |\tilde{A}_*| \exp(i\theta_*)$ are given by

$$|\tilde{A}_*|^2 + \frac{a_2}{3a_3} \cos 3\theta_* |\tilde{A}_*| - \frac{\sqrt{3}}{3a_3} \delta = 0, \quad \theta_* = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

Calculating the linearization of (3.13) around $\tilde{A}_*$, we can predict the stability, whether $\tilde{A}_*$ is elliptic or hyperbolic. In Ref. [2], for the cases of both $\omega \approx 2\pi/3$ and other values of ω , we have numerically checked how the present method works. The method we present here can actually predict periodic points while the perturbation is small for various ω . The present method is a perturbation method to determine a resonant island structure, which is not exact method, however our method is useful because exact symmetry of given maps is not needed.

We have discussed our RG method to 2-dimensional nonlinear symplectic maps. Our RG method is not restricted to low-dimensional symplectic maps.

3.2 High-dimensional symplectic map

In this subsection, we show how our RG method works for high-dimensional symplectic maps through a simple example, that is, we present spatiotemporally discretized nonlinear Schrödinger equations as a reduced system of a lattice symplectic map system. Let us consider the following system, which could not be integrable except for a special case.

$$\begin{aligned} q_j^{n+1} &= q_j^n + p_j^{n+1} \\ p_j^{n+1} &= p_j^n + \Omega^2 q_j^n + \varepsilon \left\{ \nu(q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n) - \alpha_2(q_j^n)^2 - \alpha_3(q_j^n)^3 - \alpha_4(q_j^n)^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Here q_j^n and p_j^n are real, and canonical variables at each site $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ expresses discrete time, ε is the small parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$), $\alpha_2, \dots, \alpha_4$, and ν are $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ real valued parameters. The condition $q_{j+N} = q_j$ is assumed. The symplecticity is expressed as

$$\sum_{j=1}^N dq_j^{n+1} \wedge dp_j^{n+1} - \sum_{j=1}^N dq_j^n \wedge dp_j^n = 0.$$

We show that the reduced system up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$ of (3.14) is a spatiotemporally discretized nonlinear Schrödinger equation. Eliminating p_j variables, we obtain

$$q_j^{n+1} - 2q_j^n \cos \theta + q_j^{n-1} = \varepsilon \left\{ \nu(q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n) - \alpha_2(q_j^n)^2 - \alpha_3(q_j^n)^3 - \alpha_4(q_j^n)^4 \right\},$$

where θ is defined through $\cos \theta := 1 - \Omega^2/2$. We assume that $\theta/2\pi$ is not rational. The naive perturbation solution $q_j^n = q_j^{(0)n} + \varepsilon q_j^{(1)n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is given by

$$\begin{aligned} q_j^{(0)n} &= A_j e^{i\theta n} + \text{c.c.}, \\ q_j^{(1)n} &= \frac{-in}{2 \sin \theta} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right) e^{i\theta n} \\ &\quad + \frac{-\alpha_2 A_j^2 - 4\alpha_4 |A_j|^2 A_j}{2(\cos 2\theta - \cos \theta)} e^{2i\theta n} + \frac{-\alpha_3 A_j^3}{2(\cos 3\theta - \cos \theta)} e^{3i\theta n} + \text{c.c.} \\ &\quad + \frac{-2\alpha_2 |A_j|^2 - 6\alpha_4 |A_j|^4}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Here $A_j \in \mathbb{C}$ are the integration constants, the number of A_j is equal to the number of the sites N . The renormalization variables are defined to remove the secular behavior as

$$\tilde{A}_j(n) := A_j + \varepsilon \frac{-in}{2 \sin \theta} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right).$$

Here α_2 and α_4 do not contribute to the secular behavior. The difference $\tilde{A}_j(n+1) - \tilde{A}_j(n)$ is calculated by using the definition of $\tilde{A}_j(n)$,

$$\tilde{A}_j(n+1) = \tilde{A}_j(n) + \varepsilon \frac{-i}{2 \sin \theta} \left(\nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) - 3\alpha_3 |A_j| A_j \right).$$

Substituting $A = \tilde{A}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ into the difference, we obtain the naive RG equation, which is dissipative system, up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$ for (3.14),

$$\tilde{A}_j(n+1) = \tilde{A}_j(n) + \varepsilon \frac{-i}{2 \sin \theta} \left(\nu(\tilde{A}_{j+1}(n) - 2\tilde{A}_j(n) + \tilde{A}_{j-1}(n)) - 3\alpha_3 |\tilde{A}_j(n)| \tilde{A}_j(n) \right).$$

To recover the symplecticity, we identify ε with the time step and define $\tilde{A}_j(t) := \tilde{A}_j(n)$, $\tilde{A}_j(t + \varepsilon) = \exp(\varepsilon \mathcal{L}_{H^{RG}}) \tilde{A}_j(t) := \tilde{A}_j(n+1)$, where t is real, we then obtain

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(t + \varepsilon) &= \tilde{A}_j(t) + \varepsilon \frac{-i}{2 \sin \theta} \left(\nu(\tilde{A}_{j+1}(t) - 2\tilde{A}_j(t) + \tilde{A}_{j-1}(t)) - 3\alpha_3 |\tilde{A}_j(t)| \tilde{A}_j(t) \right) \\ &= \left(1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{RG}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \tilde{A}_j(t), \end{aligned}$$

where the Liouville operator acting on $\tilde{A}_j$ associated with H^{RG} is defined as

$$\mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j := \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}_l^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_l} - \frac{\partial H^{RG}}{\partial \tilde{A}_l} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_l^*} \right) \tilde{A}_j.$$

We obtain the differential equation for $\tilde{A}_j(t)$

$$\frac{d\tilde{A}_j}{dt} = \frac{-i\varepsilon}{2\sin\theta} \left(\nu(\tilde{A}_{j+1} - 2\tilde{A}_j + \tilde{A}_{j-1}) - 3\alpha_3 |\tilde{A}_j| \tilde{A}_j \right) = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j, \quad \frac{d\tilde{A}_j^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}} \tilde{A}_j^*. \quad (3.15)$$

Here H^{RG} is given by

$$H^{RG} = \nu \frac{i}{2\sin\theta} \sum_j |\tilde{A}_{j+1} - \tilde{A}_j|^2 + \alpha_3 \frac{3i}{4\sin\theta} \sum_j |\tilde{A}_j|^2.$$

Because the original system (3.14) is a discrete time system, then we transform the continuous system (3.15) to a discrete system by using a symplectic integrator. As mentioned earlier, there are many discretization methods corresponding to existing of many symplectic integrators. Here we decompose H^{RG} into the following sum,

$$H^{RG} = H^\nu + H^{\alpha_3}, \quad H^\nu := \nu \frac{i}{2\sin\theta} \sum_j |\tilde{A}_{j+1} - \tilde{A}_j|^2, \quad H^{\alpha_3} := \alpha_3 \frac{3i}{4\sin\theta} \sum_j |\tilde{A}_j|^2.$$

This is because we take the following symplectic discretization method

$$\exp(t\mathcal{L}_{H^{RG}}) \approx \exp(t\mathcal{L}_{H^{\alpha_3}}) \exp(t\mathcal{L}_{H^\nu}).$$

The flow generated by H^{α_3} exactly satisfies the following relation for any $\tau' \in \mathbf{R}$

$$\tilde{A}_j(t + \tau') = \tilde{A}_j(t) \exp \left(\tau' \frac{3i\alpha_3}{2\sin\theta} |\tilde{A}_j(t)|^2 \right).$$

This relation gives us the following exact discretization

$$\tilde{A}_j^{n+1} = \tilde{A}_j^n \exp \left(\varepsilon \frac{3i\alpha_3}{2\sin\theta} |\tilde{A}_j^n|^2 \right), \quad (3.16)$$

where we have identified the time step with ε . On the other hand, the flow generated by H^ν can be discretized by the symplectic implicit midpoint rule as follows. A general Hamiltonian flow

$$\frac{dz}{dt} = f(z),$$

is discretized as

$$z^{n+1} = z^n + \varepsilon f \left(\frac{1}{2}(z^{n+1} + z^n) \right).$$

Here the time step is chosen to be ε . In our case the above scheme gives

$$\tilde{A}_j^{n+1} = \tilde{A}_j^n + \varepsilon \frac{-i\nu}{2\sin\theta} \frac{1}{2} \left\{ \left(\tilde{A}_{j+1}^{n+1} - 2\tilde{A}_j^{n+1} + \tilde{A}_{j-1}^{n+1} \right) + \left(\tilde{A}_{j+1}^n - 2\tilde{A}_j^n + \tilde{A}_{j-1}^n \right) \right\},$$

or equivalently,

$$\tilde{A}_j^{n+1} + \varepsilon \frac{i\nu}{4 \sin \theta} \left(\tilde{A}_{j+1}^{n+1} - 2\tilde{A}_j^{n+1} + \tilde{A}_{j-1}^{n+1} \right) = \tilde{A}_j^n + \varepsilon \frac{-i\nu}{4 \sin \theta} \left(\tilde{A}_{j+1}^n - 2\tilde{A}_j^n + \tilde{A}_{j-1}^n \right). \quad (3.17)$$

Combining the two symplectic transformations (3.16) and (3.17), we obtain a symplectic scheme for $H^{RG} = H^\nu + H^{\alpha_3}$,

$$\left(1 + \varepsilon \frac{i\nu}{4 \sin \theta} \Delta_j^2 \right) \tilde{A}_j^{n+1} = \left(1 - \varepsilon \frac{i\nu}{4 \sin \theta} \Delta_j^2 \right) \exp \left(\varepsilon \frac{3i\alpha_3}{2 \sin \theta} |\tilde{A}_j^n|^2 \right) \tilde{A}_j^n, \quad (3.18)$$

where $\Delta_j^2 \tilde{A}_j^n := \tilde{A}_{j+1}^n - 2\tilde{A}_j^n + \tilde{A}_{j-1}^n$, is a difference operator with respect to a site label $j \in \mathbb{Z}$. This reduced map (3.18) is a spatiotemporally discretized nonlinear Schrödinger equation[8]. It is noted that the RG map (3.18) has not only the symplectic symmetry $\sum_j d\tilde{A}_j^{n+1} \wedge d\tilde{A}_j^{*n+1} - \sum_j d\tilde{A}_j^n \wedge d\tilde{A}_j^{*n} = 0$, but also the $U(1)$ symmetry, the system (3.18) is invariant under the transformation $\tilde{A}_j^n \mapsto \tilde{A}_j^n \exp(i\phi)$, ($\phi \in \mathbb{R}$). Besides, this system has a conserved quantity, $\sum_j |A_j^n|^2 = \dots = \sum_j |A_j^0|^2 = 0$. The number of the sites is N as mentioned, then the dimension of the phase space is $2N$. Because the RG system has the conserved quantity mentioned above, orbits generated by (3.18) are restricted in the $2N - 1$ -dimensional sphere $S^{2N-1} \subset \mathbb{R}^{2N}$. Then the RG system can be reduced by the $U(1)$ Hop fibering $S^{2N-1} \rightarrow S^{2N-1}/U(1)$, if there are no other conserved quantities in the RG system. Many interesting solutions have been found for (3.18). A class of these solutions is

$$\tilde{A}_j^n = \tilde{A}^0 \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi k}{N} j + Q |\tilde{A}^0|^2 n + \sigma(k)n \right) \right\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

where $\tilde{A}^0 \in \mathbb{C}$ is a complex number which does not depend on a site label j , and Q and $\sigma(k)$ are defined as

$$Q := \frac{3\varepsilon\alpha_3}{2 \sin \theta}, \quad \sigma(k) := \tan^{-1} \left(\frac{8T \sin^2(\pi k/N)}{1 + 16T^2 \sin^4(\pi k/N)} \right), \quad T := \frac{\varepsilon\nu}{4 \sin \theta}.$$

These solutions are tori for appropriate parameter regime. The radii of the tori depend on $|\tilde{A}^0|$. We can easily predict the linear stabilities of these tori due to simple functional form of solutions[6]. According the linear stability analysis around the class of solutions, the stability depends on the radii $|\tilde{A}^0|$.

If θ is close to $2\pi/3$, instead of being irrational, we treat the following θ regime,

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + \varepsilon\delta.$$

Here δ is a real $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ parameter. Although we concentrate on this specific θ , our method is useful for more general parameter regime. Expanding $2 \cos \theta$ in (3.14), we have

$$2 \cos \theta = -1 - \varepsilon\sqrt{3}\delta + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

We substitute this expansion into (3.14), the system becomes

$$q_j^{n+1} + q_j^n + q_j^{n-1} = \varepsilon \left\{ -\sqrt{3}\delta q_j^n + \nu(q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n) - \alpha_2(q_j^n)^2 - \alpha_3(q_j^n)^3 - \alpha_4(q_j^n)^4 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.19)$$

The naive expansion $q_j^n = q_j^{(0)n} + \varepsilon q_j^{(1)n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ yields the following perturbation equations

$$\begin{aligned} q_j^{(0)n+1} + q_j^{(0)n} + q_j^{(0)n-1} &= 0, \\ q_j^{(1)n+1} + q_j^{(1)n} + q_j^{(1)n-1} &= -\sqrt{3}\delta q_j^{(0)n} + \nu(q_{j+1}^{(0)n} - 2q_j^{(0)n} + q_{j-1}^{(0)n}) \\ &\quad -\alpha_2(q_j^{(0)n})^2 - \alpha_3(q_j^{(0)n})^3 - \alpha_4(q_j^{(0)n})^4. \end{aligned}$$

The unperturbed solution $q_j^{(0)n}$ is given by

$$q_j^{(0)n} = A_j e^{i\frac{2\pi}{3}n} + \text{c.c.},$$

where $A_j \in \mathcal{C}$ are the integration constants. The leading-order equation is obtained as

$$\begin{aligned} q_j^{(1)n+1} + q_j^{(1)n} + q_j^{(1)n-1} &= -\sqrt{3}\delta(A_j e^{i\frac{2\pi}{3}n} + A_j^* e^{-i\frac{2\pi}{3}n}) \\ &\quad + \nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1})e^{i\frac{2\pi}{3}n} + \nu(A_{j+1}^* - 2A_j^* + A_{j-1}^*)e^{-i\frac{2\pi}{3}n} \\ &\quad - \alpha_2(A_j^2 e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 2|A_j|^2 + A_j^{*2} e^{i\frac{2\pi}{3}n}) \\ &\quad - \alpha_3(A_j^3 + 3|A_j|^2 A_j e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 3|A_j|^2 A_j^* e^{-i\frac{2\pi}{3}n} + A_j^{*3}) \\ &\quad - \alpha_4(A_j^4 e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 4|A_j|^2 A_j^2 e^{-i\frac{2\pi}{3}n} + 6|A_j|^4 + 4|A_j|^2 A_j^* e^{i\frac{2\pi}{3}n} + A_j^{*4} e^{-i\frac{2\pi}{3}n}), \end{aligned}$$

whose solution is

$$\begin{aligned} q_j^{(1)n} &= \frac{in}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\delta A_j - \nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 A_j^{*2} + 3\alpha_3 |A_j|^2 A_j + \alpha_4 (A_j^4 + 4|A_j|^2 A_j^{*2}) \right) e^{i\frac{2\pi}{3}n} + \text{c.c.} \\ &\quad - \frac{2\alpha_2 |A_j|^2 + \alpha_3 A_j^3 + 6\alpha_4 |A_j|^4}{3}. \end{aligned}$$

Here we observe a secular behavior which breaks the assumption $q_j^{(0)n} \gg \varepsilon q_j^{(1)n}$ while the relation $\varepsilon n \gtrsim 1$ is satisfied. The renormalized variable $\tilde{A}(n)$ should be defined to remove the secular behavior as,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(n) &:= A_j + \varepsilon \frac{in}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\delta A_j - \nu(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 A_j^{*2} + 3\alpha_3 |A_j|^2 A_j + \alpha_4 (A_j^4 + 4|A_j|^2 A_j^{*2}) \right). \end{aligned}$$

The naive RG map is given by

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(n+1) &= \tilde{A}_j(n) + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3}\delta \tilde{A}_j(n) - \nu \left(\tilde{A}_{j+1}(n) - 2\tilde{A}_j(n) + \tilde{A}_{j-1}(n) \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 \tilde{A}_j(n)^{*2} + 3\alpha_3 |\tilde{A}_j(n)|^2 \tilde{A}_j(n) + \alpha_4 \left(\tilde{A}_j(n)^4 + 4|\tilde{A}_j(n)|^2 \tilde{A}_j(n)^{*2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

To recover the symplecticity, we identify both ε with the time step and define $\tilde{A}_j(t) := \tilde{A}_j(n)$, $\tilde{A}_j(t+\varepsilon) = \exp(\varepsilon \mathcal{L}_{H_{RG}}) \tilde{A}(t) := \tilde{A}_j(n+1)$, where t is real, we

obtain

$$\begin{aligned}\tilde{A}_j(t + \varepsilon) &= \tilde{A}_j(t) + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3}\delta\tilde{A}_j(t) - \nu \left(\tilde{A}_{j+1}(t) - 2\tilde{A}_j(t) + \tilde{A}_{j-1}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2\tilde{A}_j(t)^{*2} + 3\alpha_3|\tilde{A}_j(t)|^2\tilde{A}_j(t) + \alpha_4 \left(\tilde{A}_j(t)^4 + 4|\tilde{A}_j(t)|^2\tilde{A}_j(t)^{*2} \right) \right\} \\ &= (1 + \varepsilon\mathcal{L}_{H^{RG}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\tilde{A}_j(t).\end{aligned}$$

Here the associated Hamiltonian for the continuous time RG equation is given by

$$\begin{aligned}H^{RG} &= i \left\{ \delta|\tilde{A}_j|^2 + \frac{\nu}{\sqrt{3}} \sum_j |\tilde{A}_{j+1} - \tilde{A}_j|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_2}{3}(\tilde{A}_j^3 + \tilde{A}_j^{*3}) + \frac{\sqrt{3}\alpha_3}{2}|\tilde{A}_j|^4 + \frac{\alpha_4|\tilde{A}_j|^2(\tilde{A}_j^{*3} + \tilde{A}_j^3)}{\sqrt{3}} \right\}. \quad (3.20)\end{aligned}$$

According to the Hamiltonian (3.20), the continuous time RG equation is given by

$$\frac{d\tilde{A}_j}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}}\tilde{A}_j, \quad \frac{d\tilde{A}_j^*}{dt} = \mathcal{L}_{H^{RG}}\tilde{A}_j^*.$$

In this system, there is a symmetry, $\tilde{A} \mapsto \tilde{A} \exp(i2\pi k/3)$, ($k \in \mathbf{Z}$). A symplectic RG map is obtained by discretizing this continuous RG equation. The Hamiltonian (3.20) describes the phase space structure of the renormalized variables $(\tilde{A}_j, \tilde{A}_j^*)$ to the order of the present approximation, regardless of the choice of symplectic integrators for the Hamiltonian (3.20). The most important points in the phase space $(\tilde{A}_j, \tilde{A}_j^*)$ are fixed points, since they, in accordance with the relation between $\tilde{A}_j$ and q_j^n , corresponding to periodic points in the original phase space (q_j, p_j) , which determine the chain of resonant islands structure. The fixed points in the flow of the system (3.14) with $\theta = 2\pi/3 + \varepsilon\delta$, are solutions of the following algebraic equations

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{A}_j} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \tilde{A}_j^*} = 0.$$

In the present case, the above relations are reduced to

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\delta\tilde{A}_j - \nu \left(\tilde{A}_{j+1} - 2\tilde{A}_j + \tilde{A}_{j-1} \right) + \alpha_2\tilde{A}_j^{*2} + 3\alpha_3|\tilde{A}_j|^2\tilde{A}_j + \alpha_4 \left(\tilde{A}_j^4 + 4|\tilde{A}_j|^2\tilde{A}_j^{*2} \right) &= 0, \\ \sqrt{3}\delta\tilde{A}_j^* - \nu \left(\tilde{A}_{j+1}^* - 2\tilde{A}_j^* + \tilde{A}_{j-1}^* \right) + \alpha_2\tilde{A}_j^2 + 3\alpha_3|\tilde{A}_j|^2\tilde{A}_j^* + \alpha_4 \left(\tilde{A}_j^{*4} + 4|\tilde{A}_j|^2\tilde{A}_j^2 \right) &= 0.\end{aligned}$$

The difficulty of analyzing the resonance structure is now clear. Although we can extract algebraic relations which periodic points approximately satisfy, the algebraic equations cannot easily be solved.

4 Conclusions

We have reviewed our RG method for both weakly-nonlinear Hamiltonian systems and weakly nonlinear symplectic maps. Especially for symplectic maps, the Liouville

expansion is essential to construct symplectic reduced maps. For symplectic maps, $\omega/2\pi$, where ω is an eigenvalue of the linearized equation around the origin in the phase space, is irrational, the explicit solutions of the RG maps are easily found, then the approximate rotation number can be estimated. Besides when $\omega/2\pi$ is rational, our method can approximately give relations which can predict periodic points for a given symplectic map. However, the relations which periodic points approximately satisfy are too complicated. In other words, it is difficult to predict periodic points by means of solving such relations. One of ways to break such difficulty might be to take into account the symmetry of RG maps we have mentioned in each subsection. We have not given another topic, RG reduction of unstable and stable manifolds for a given 1-dimensional map, our RG method is also useful to reduce unstable manifolds and stable manifolds even if a time step is finite (see Ref. [9]).

5 Acknowledgments

The author (SG) has been supported by a JSPS Fellowship for Young Scientists.

References

- [1] S. GOTO and K. NOZAKI, “Liouville operator approach to symplecticity-preserving renormalization group method”, *Physica D*194. 175–186. (2004).; S. GOTO and K. NOZAKI, “Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving RG method”, *Suiken Kokyuroku* (2004) in Japanese.
- [2] T.MARUO, S. GOTO and K. NOZAKI, “Renormalization Analysis of Resonance Structure in a 2-D Symplectic Map”, *Prog. Theor. Phys.* 111. 463–474,(2004).
- [3] L.Y. CHEN, N. GOLDENFELD and Y. OONO, “Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory”, *Rev. E*54. 376–394, (1996). ; Y. OONO, “Renormalization and Asymptotics”, *Int. Mod. Phys.* B14, 1327–1361, (2000).
- [4] S. GOTO, Y. MASUTOMI and K. NOZAKI, “Lie-Group Approach to Perturbative Renormalization Group Method”, *Prog. Theor. Phys.* 102. 471–497, (1999).
- [5] T. KUNIHIRO and J. MATSUKIDAIRA, “Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method”, *Phys. Rev. E*57. 4817–4820. (1998).
- [6] S. GOTO, K. NOZAKI and H. YAMADA, “Random Wandering around Homoclinic-Like Manifolds in a Symplectic Map Chain”, *Prog. Theor. Phys.* 107. 637–654, (2002).
- [7] S. GOTO and K. NOZAKI, “Regularized Renormalization Group Reduction of Symplectic Maps”, *J. Phys. Soc. Jpn.* 70. 49–54, (2001).
- [8] B.M. HERBST, F. VARADI, and M.J. ABLOWITZ, “Symplectic methods for the nonlinear Schrödinger equation”, *Mathematics and Computers in Simulation* 37. 353–369, (1994).

- [9] S. GOTO and K. NOZAKI, "Asymptotic Expansions of Unstable and Stable Manifolds in Time-discrete Systems", *Prog. Theor. Phys.* 105. 99–107, (2001).

A Quasi-Regularization of the Euler Problem by Partitioned Multistep Methods

Tadato YAMAMOTO

tadato@oikaze.com

*Institute for Research in Humanities Kyoto University,
47, Higashiohara-cho, Kitashirakawa, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8265 JAPAN*

Toshio FUKUSHIMA

Toshio.Fukushima@nao.ac.jp

National Astronomical Observatory of Japan, 2-21-1, Osawa, Mitaka, Tokyo 181-8588 JAPAN

ABSTRACT

We confirm that the stepsize resonances occur, when the symmetric multistep method (SMM) is applied to the Euler problem. Then, we try whether to be able to do similar variable transformation to the K-S transformation for this problem. We understand that the stepsize resonance does not appear by our variable transformation.

1 Euler Problem

We show the Euler problem case. Because the Euler problem is the pure first-order ODE, only the first-order integrators can be used. Let apply the first-order SLMMs to the Euler problem. Here, we consider the torque-free rotational motion. In this case, the motion corresponds to the elliptic function to which analytical solution is known. Therefore, we execute numerical experiments by using the elliptic function.

ODEs which describe the elliptic function is the following:

$$\frac{dx}{du} = yz \quad , \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{du} = -zx \quad , \quad (1.2)$$

$$\frac{dz}{du} = -k^2 xy \quad , \quad (1.3)$$

where k ($0 < k < 1$) is the modulus. The initial conditions are $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ and $z_0 = 1$. The solution of above ODEs are

$$x = \operatorname{sn} u \quad , \quad (1.4)$$

$$y = \operatorname{cn} u \quad , \quad (1.5)$$

$$z = \operatorname{dn} u \quad . \quad (1.6)$$

The conserved quantities of the elliptic function are

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad (1.7)$$

$$k^2 x^2 + z^2 = 1 \quad . \quad (1.8)$$

The error evaluations of numerical integration are done by using the analytical solutions and the conserved quantities.

First of all, let us show the orbit of elliptic function.

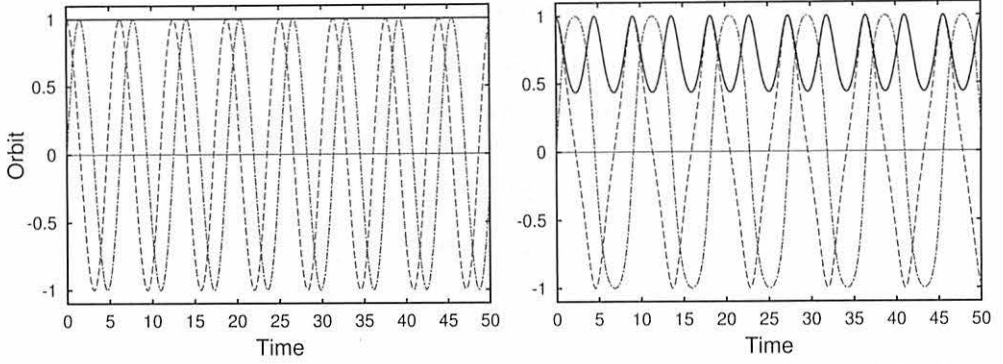


Figure 1 — The orbit of the elliptic function: The dot-short dashed line denotes x , the dashed line does y and the solid line does z . The left figure is $k = 0$ and the right one is $k = 0.9$.

Fig. 1 shows the orbit of the elliptic function. The properties of the elliptic function are that the period becomes long and the amplitude of z grows large when the modulus k increases.

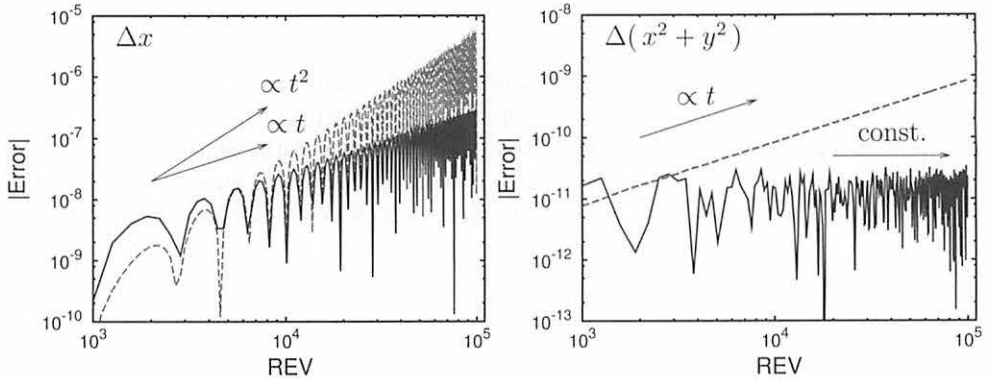
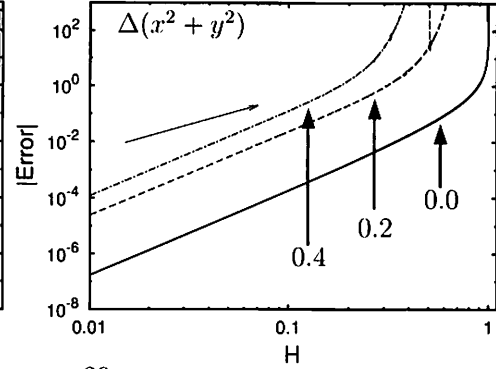
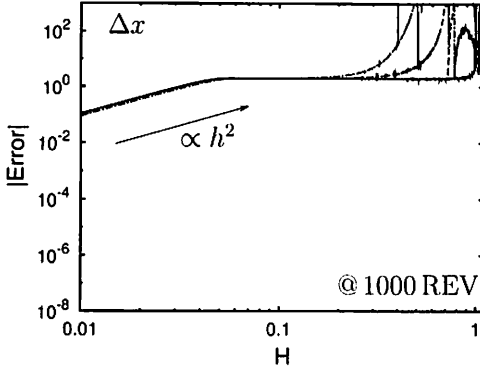


Figure 2 — The error growth (x and $x^2 + y^2$) in the numerical integration for the elliptic function with $k = 0.2$. The solid line denotes the 8th-order SLMM with $h = 0.04$ and the dashed line does the 8th-order Adams-Bashforth method with $h = 0.02$.

Fig. 2 shows the error growths with respect to the integration times. In the case of the Adams-Bashforth method (asymmetric formula), the error of the longitude (x) grows quadratically and that of the conserved quantity ($x^2 + y^2$) grows linearly. On the contrary, in the case of SLMM, the error of the longitude grows linearly and that of the conserved quantity remains finite.

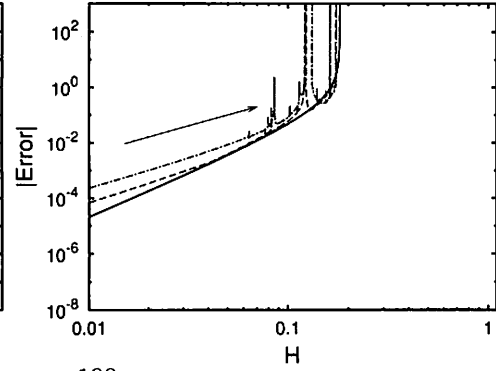
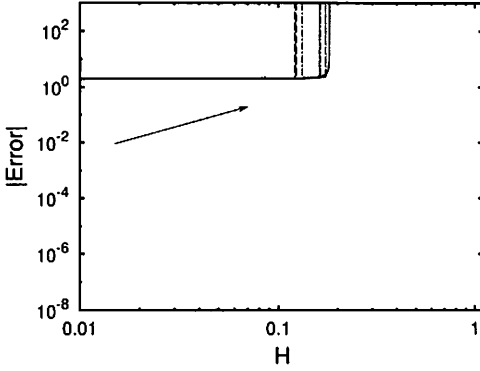
2nd-order optimal type:

$$H_{\text{MAX}} = 1, C = 0.166$$



2nd-order standard type:

$$\theta = \frac{30}{200}\pi, H_{\text{MAX}} = 0.181, C = 4.504$$



2nd-order standard type:

$$\theta = \frac{199}{200}\pi, H_{\text{MAX}} = 0.999, C = 0.166$$

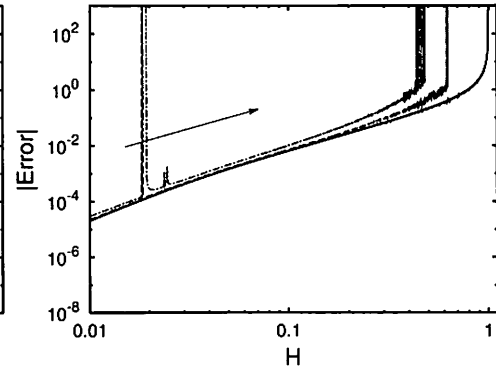
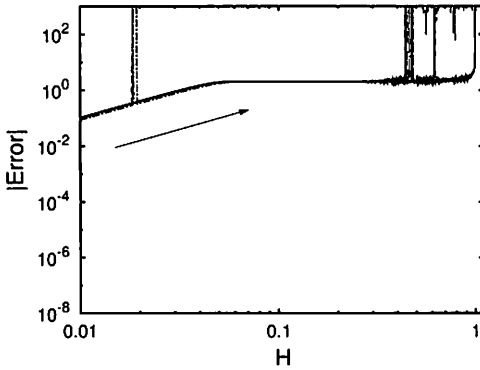


Figure 3 — 2nd-order symmetric formulas: Stepsize dependence of the error of x (left) and the conserved quantity $x^2 + y^2 = 1$ (right) for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.0$ (solid line), 0.2 (dashed line), 0.4 (dot-dashed line). Stepsize H is incremented by $\Delta H = 0.0002$.

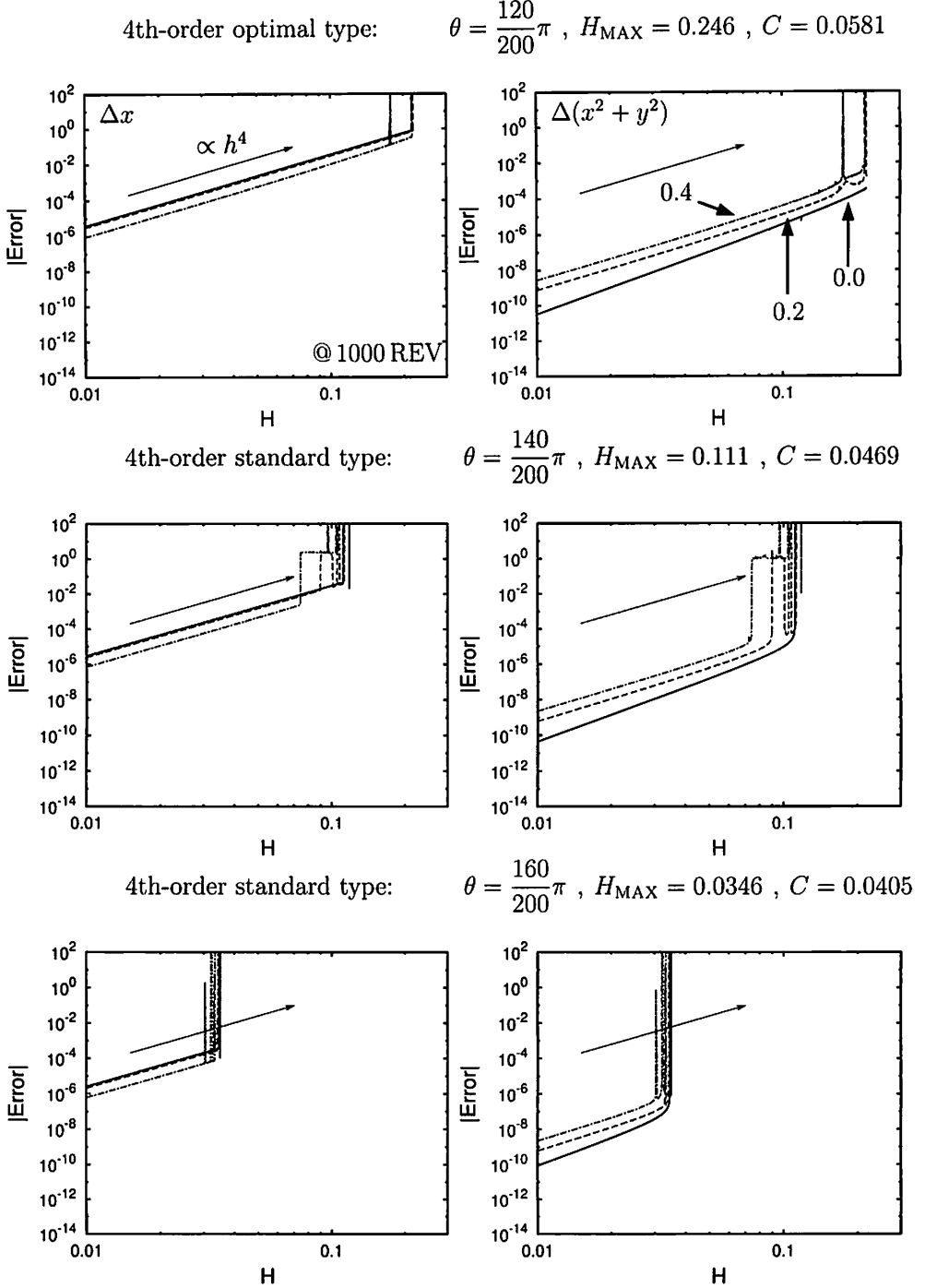
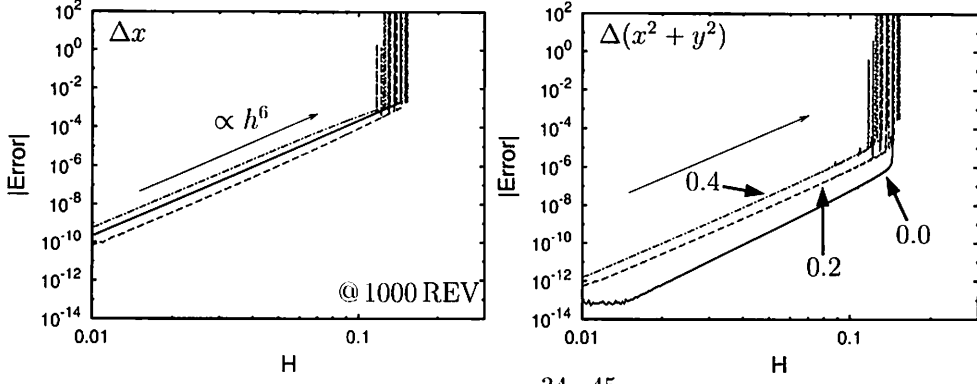
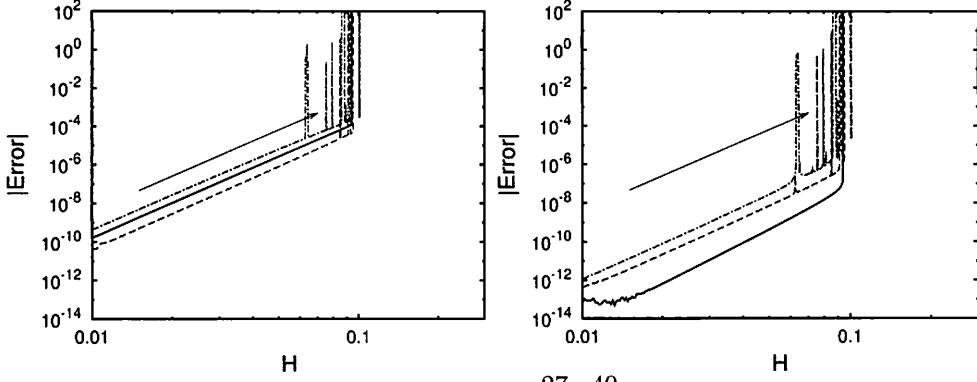


Figure 4 — 4th-order symmetric formulas: Stepsize dependence of the error of x (left) and the conserved quantity $x^2 + y^2 = 1$ (right) for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.0$ (solid line), 0.2 (dashed line), 0.4 (dot-dashed line). Stepsize H is incremented by $\Delta H = 0.0002$.

6th-order optimal type: $\theta = \frac{31, 42}{70}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.143$, $C = 0.0339$



6th-order optimal type: $\theta = \frac{34, 45}{70}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.0942$, $C = 0.0262$



6th-order optimal type: $\theta = \frac{27, 40}{70}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.199$, $C = 0.0466$

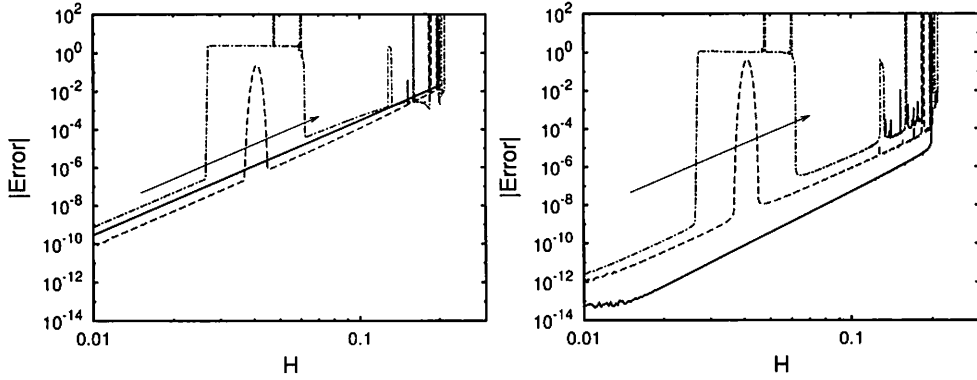
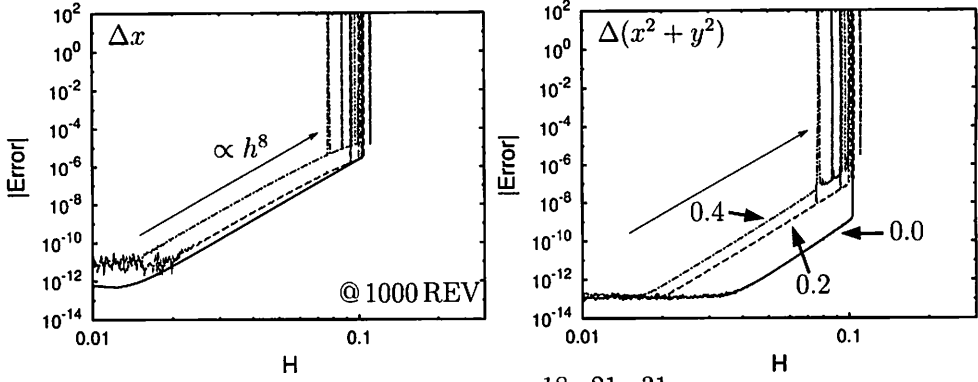
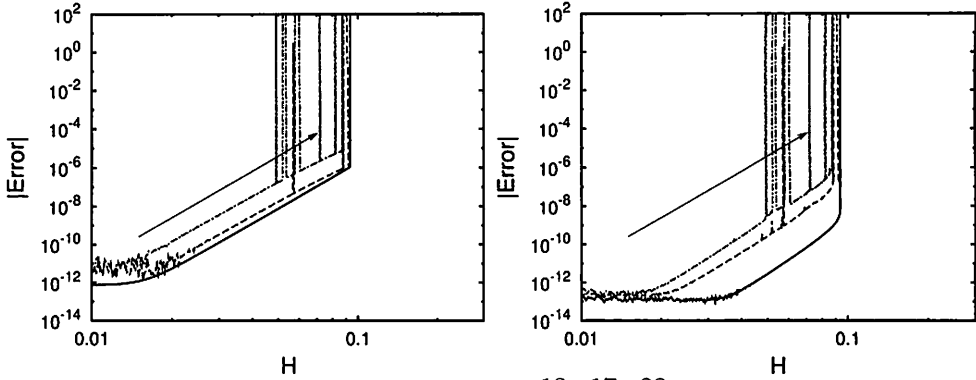


Figure 5 — 6th-order symmetric formulas: Stepsize dependence of the error of x (left) and the conserved quantity $x^2 + y^2 = 1$ (right) for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.0$ (solid line), 0.2 (dashed line), 0.4 (dot-dashed line). Stepsize H is incremented by $\Delta H = 0.0002$.

8th-order optimal type: $\theta = \frac{16, 21, 31}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.103$, $C = 0.0374$



8th-order optimal type: $\theta = \frac{18, 21, 31}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.0935$, $C = 0.0301$



8th-order optimal type: $\theta = \frac{13, 17, 28}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.197$, $C = 0.0947$

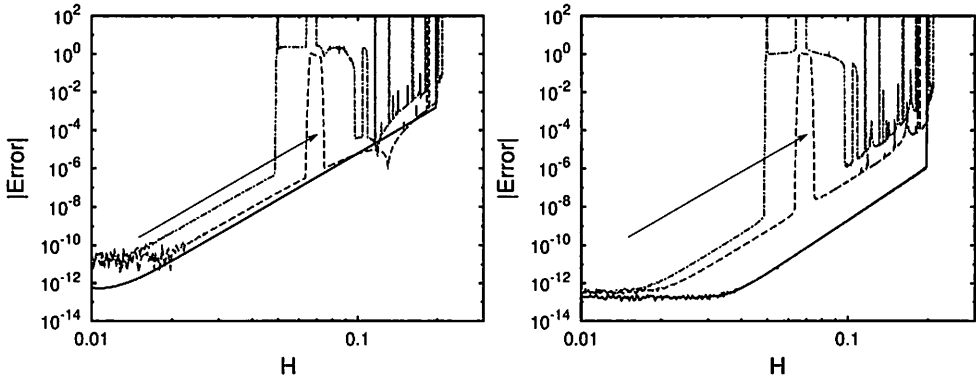


Figure 6 — 8th-order symmetric formulas: Stepsize dependence of the error of x (left) and the conserved quantity $x^2 + y^2 = 1$ (right) for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.0$ (solid line), 0.2 (dashed line), 0.4 (dot-dashed line). Stepsize H is incremented by $\Delta H = 0.0002$.

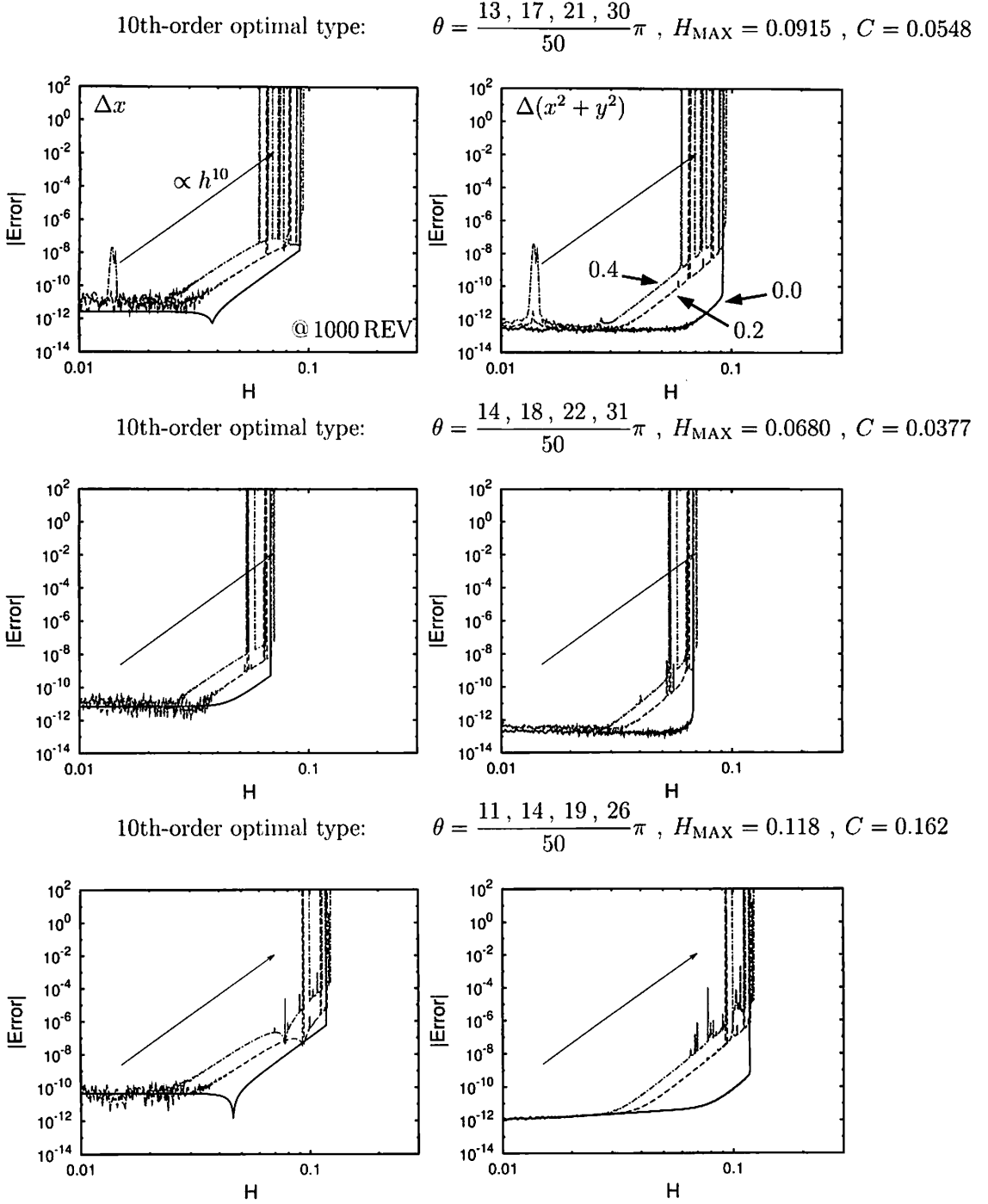


Figure 7 — 10th-order symmetric formulas: Stepsize dependence of the error of x (left) and the conserved quantity $x^2 + y^2 = 1$ (right) for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.0$ (solid line), 0.2 (dashed line), 0.4 (dot-dashed line). Stepsize H is incremented by $\Delta H = 0.0002$.

Fig. 3~7 show the stepsize dependences. Because the elliptic function is the non-linear ODE (except $k = 0$ is the harmonic oscillator), the stepsize resonances appear. The mechanism of the stepsize resonance is described only about the special second-order ODEs in Quinlan (1999). Therefore, in the case of the first-order ODEs, the property of the stepsize resonance is a little different from the special second-order ones. In the elliptic function case, the period changes depending on the value of the modulus k . We consider that this is one of causes that makes the identification of the locations of the stepsize resonances difficult. However, it is understood that the appearance condition of the stepsize resonance is considerably different only because values of free parameters change a little. Moreover, as for the problem has been proven by Cano & Sanz-Serna (1998): numerical instabilities were caused when the symmetric linear multistep method of the first-order was applied to the non-linear second-order ODE, it is found not to apply in the pure first-order ODEs.

2 Regularization of Euler Problem

To use SLMMs at ease, let us consider whether the problem of the stepsize resonance can be overcome to transform non-linear ODEs into linear ones.

$$\frac{dx}{dt} = yz + \varepsilon F_x \quad , \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -zx + \varepsilon F_y \quad , \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -k^2 xy + \varepsilon F_z \quad , \quad (2.3)$$

where εF is the perturbation. To regularize above ODEs, the following variables are introduced:

$$zdt = ds \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{z} \quad . \quad (2.4)$$

Thus,

$$\frac{dx}{ds} = y + \frac{\varepsilon F_x}{z} \quad , \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{ds} = -x + \frac{\varepsilon F_y}{z} \quad , \quad (2.6)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = -k^2 xy \frac{1}{z} + \frac{\varepsilon F_z}{z} \quad . \quad (2.7)$$

Here, a new variable is introduced:

$$z^2 = w \quad \Longrightarrow \quad 2zdz = dw \quad , \quad (2.8)$$

$$z \frac{dz}{ds} = -k^2 xy + \varepsilon F_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{dw}{ds} = -k^2 xy + \varepsilon F_z \quad . \quad (2.9)$$

Therefore, the elliptic function by new variables can be written as follows:

$$\frac{dx}{ds} = y + \frac{\varepsilon F_x}{\sqrt{w}} , \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{ds} = -x + \frac{\varepsilon F_y}{\sqrt{w}} , \quad (2.11)$$

$$\frac{dw}{ds} = -2k^2 xy + 2\varepsilon F_z , \quad (2.12)$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{w}} , \quad (2.13)$$

where $w = z^2$. The solutions x and y for the fictious time, s , are given in the form “the harmonic oscillator + perturbations”. The necessary initial steps for the fictious space are uses values obtained by the extrapolation method. The analytical solutions are given by using the time, t , obtained by numerical integration. We evaluate the error growths by these solutions. Additionally, the perturbation is not considered here.

Fig.8~11 illustrate the stepsize dependences. (a) is the non-regularization case. (b) and (c) are the regularization cases. However, in the case of (c), the time, t , is integrated by using the Adams-Bashforth methods. Because the conserved quantity, $x^2 + y^2$ does not depend on the modulus k in the regularization case, we use $k^2 x^2 + z^2$ as the error evaluation of the conserved quantity.

First of all, let's pay attention to (b). Though it is expected that the stepsize resonance does not appear as described in Arakida & Fukushima (2000), the results are different. The reason for this causes are that $dt/ds = 1/z$ is non-linear ODE. Thus, the stepsize resonance is caused in the time, t . Then, we try to use the Adams-Bashforth method, however, H_{MAX} of the Adams-Bashforth method is smaller than that of SLMMs as described in Yamamoto & Fukushima (2003). Therefore, although negative results are predicted, the results of numerical experiments are positive as (c). Being thought as a reason is that there is no periodicity in the time, t .

In numerical integrations by this regularization, the error of z depends on the modulus k . However, in the case of the K-S transformation, the error is not depending on the eccentricity, e , as described in Stiefel & Scheifele (1971) and Arakida & Fukushima (2000). Therefore, it is a future task to construct the method of the regularization not depending on the modulus k .

Finally, let us see the integrator dependence with respect to time. It is understood that the error of x is not depending integrators from (b) and (c) of Fig. 8~11. Fig. 12 illustrate the integrator dependency with respect to time. It is found that there are differences in the error growths in the symmetric formula and the asymmetric one. However, let us see Fig. 13. These figures are results when the time, t , integrated by using the 6th-order SLMM, the 6th and 4th-order Adams-Bashforth method. Even when the formula is the asymmetric case, the error growth is almost the same as the symmetric formula. Moreover, in the case of the 6th and 4th-order Adams-Bashforth method, the results are almost the same. In other words, the accuracy of time, t , is not strongly depending on the integrator of integrating dt/ds . Thus, to calculate t in high accuracy, it is necessary for z to integrate in high accuracy.

6th-order optimal type: $\theta = \frac{31, 42}{70}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.143$, $C = 0.0339$

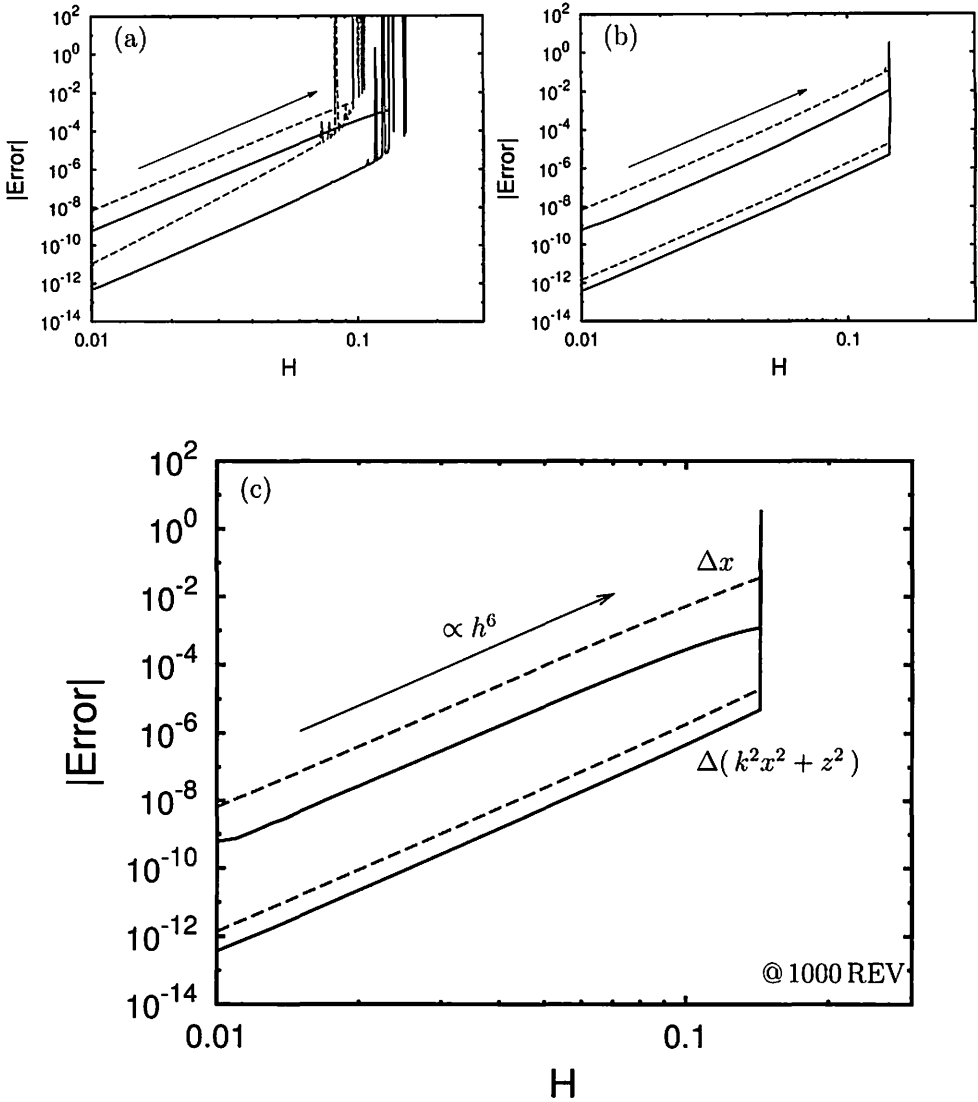


Figure 8 — Step size dependence of 6th-order cases: (a) denotes the non-regularization type. (b) and (c) denote the regularization types. In the case of (c), time t is integrated by using the 6th-order Adams-Bashforth method. Step size dependence of the error for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.4$ (solid line), 0.8 (dashed line).

8th-order optimal type: $\theta = \frac{16, 21, 31}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.103$, $C = 0.0374$

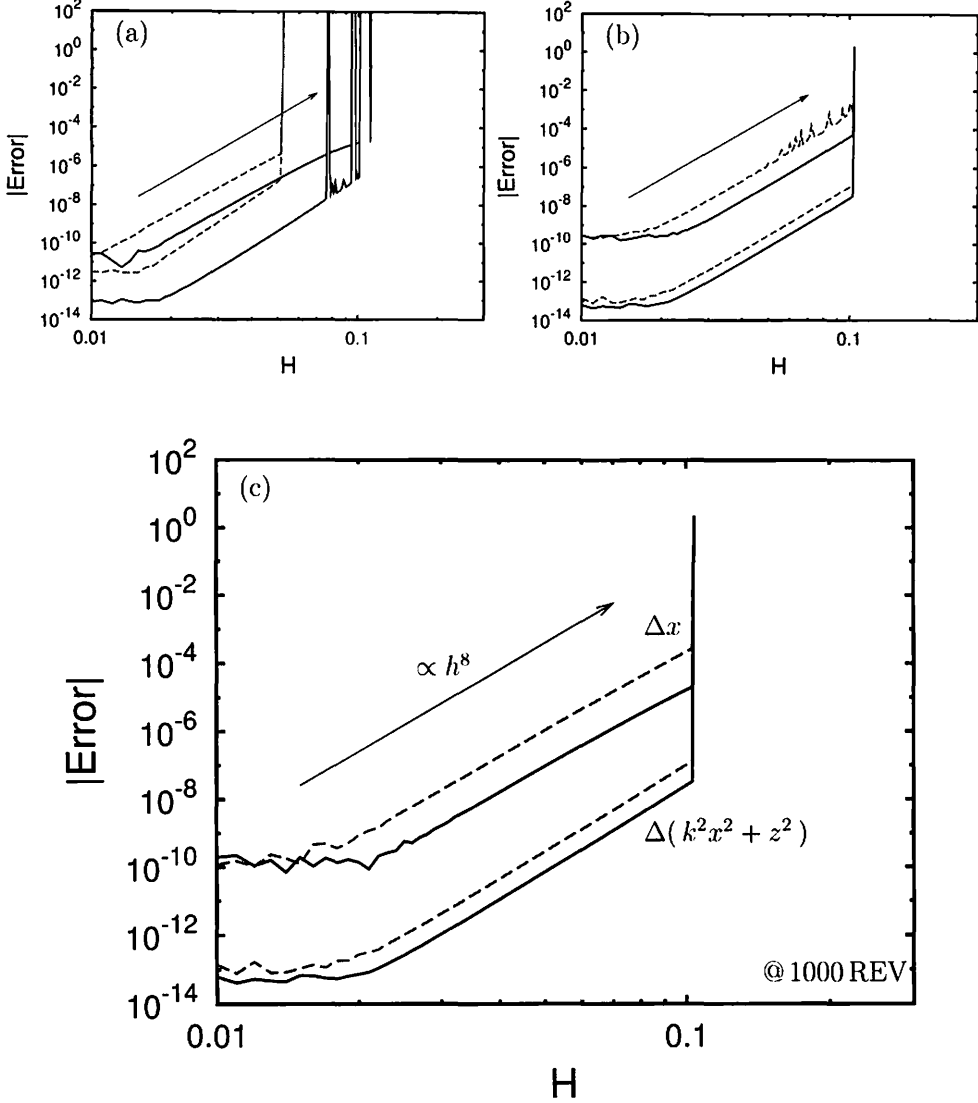


Figure 9 — Step size dependence of 8th-order cases: (a) denotes the non-regularization type. (b) and (c) denote the regularization types. In the case of (c), time t is integrated by using the 8th-order Adams-Bashforth method. Step size dependence of the error for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.4$ (solid line), 0.8 (dashed line).

8th-order optimal type: $\theta = \frac{13, 17, 28}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.197$, $C = 0.0947$

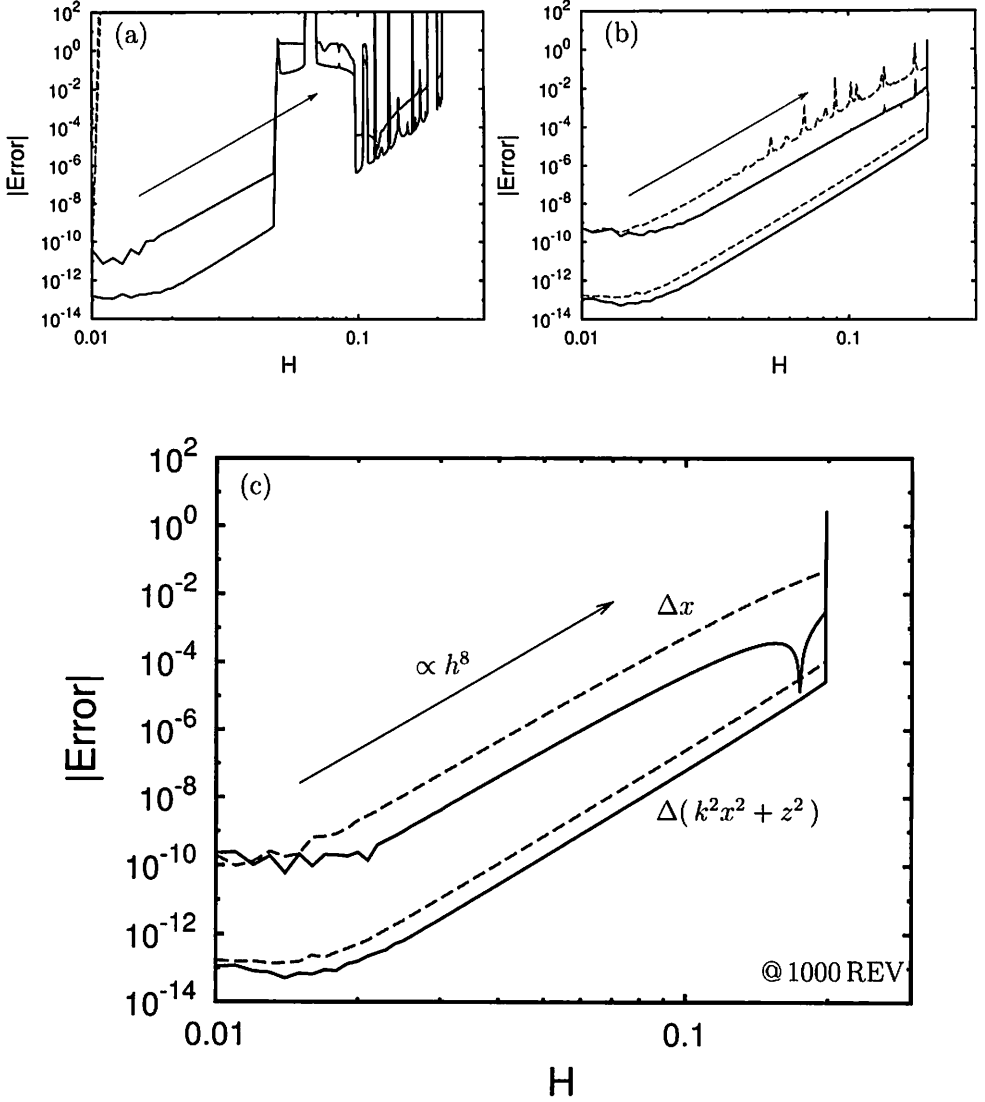


Figure 10 — Stepsize dependence of 8th-order cases: (a) denotes the non-regularization type. (b) and (c) denote the regularization types. In the case of (c), time t is integrated by using the 8th-order Adams-Bashforth method. Stepsize dependence of the error for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.4$ (solid line), 0.8 (dashed line).

10th-order optimal type: $\theta = \frac{11, 14, 19, 26}{50}\pi$, $H_{\text{MAX}} = 0.118$, $C = 0.162$

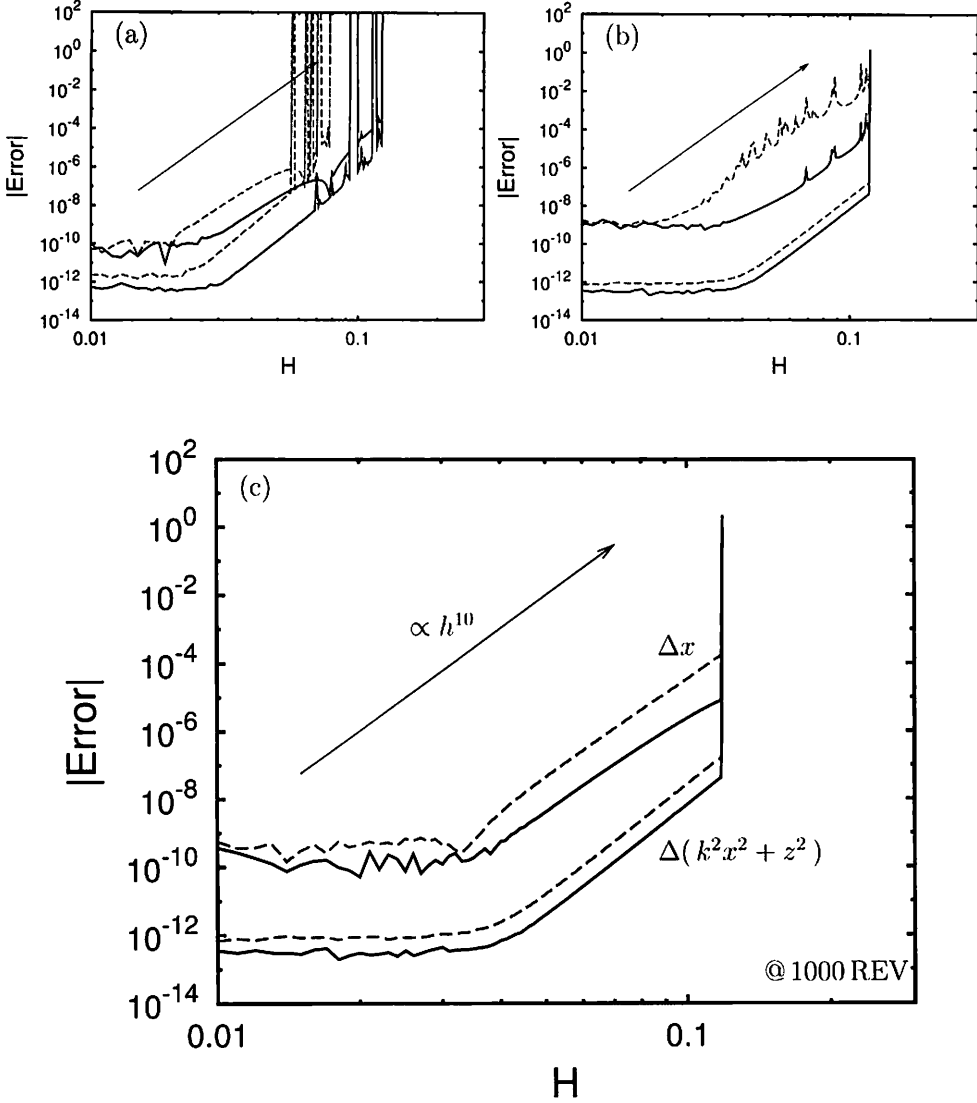


Figure 11 — Stepsize dependence of 10th-order cases: (a) denotes the non-regularization type. (b) and (c) denote the regularization types. In the case of (c), time t is integrated by using the 10th-order Adams-Bashforth method. Stepsize dependence of the error for the elliptic function after 1000 revolutions with $k = 0.4$ (solid line), 0.8 (dashed line).

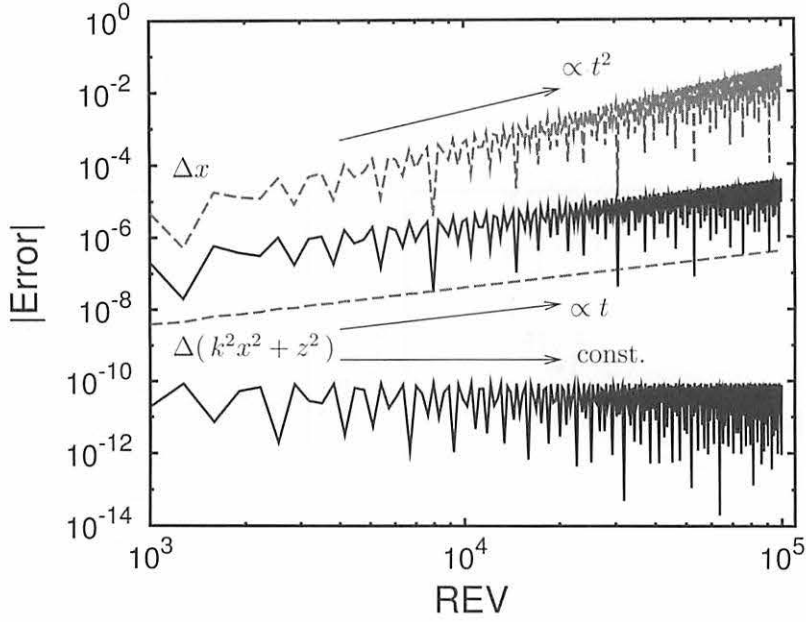


Figure 12 — Integrator dependence: The solid line denotes the 6th-order SLMM and the dashed line does the 6th-order Adams-Bashforth method. The modulus $k = 0.8$.

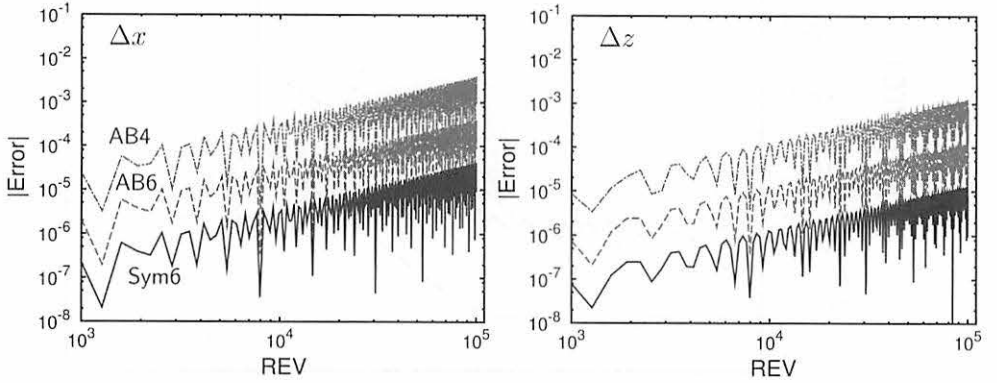


Figure 13 — Integrator dependence: The solid line denotes the 6th-order SLMM, the long-dashed line does the 6th-order Adams-Bashforth method ($\times 10$), the dot-dashed line does the 4th-order one ($\times 100$). The modulus $k = 0.8$.

3 Conclusions

We examined the numerical integration of rotational motion which are described by pure first-order ODEs. Since the rotational motion has not been the target of study of numerical integration methods so far. We researched the dependence of the error growth on the integration times and the adopted stepsize. Also we noticed that the truncation error of conserved quantities remain finite and those in the longitude grow linearly for the Euler problem. Unfortunately, we found the stepsize resonances occur even in this case, probably because the equation of rotational motion is essentially non-linear.

We tried a regularization for the Euler problem. As a result, in the case of our regularization, the equation which connects the fictious time and the real time is the non-linear. Therefore, the stepsize resonance occurred in the real time. Then, we tried to use the Adams-Bashforth method, however, the maximum stable stepsize of the Adams-Bashforth method is smaller than that of symmetric multistep method. Thus, although negative results were predicted, the results of numerical experiments were positive. Being thought as a reason is that there is no periodicity in the time.



References

- [1] Arakida, H. and Fukushima, T., (2000), “ Long-Term Integration Error of Kustaanheimo-Stiefel Regularized Orbital Motion ”, *Astron. J.*, **120**, 3333-3339
- [2] Cano, B. and Sanz-Serna, J.M., (1998), “ Error growth in the numerical integration of periodic orbits by multistep methods, with application to reversible systems ”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **18**, 57-75
- [3] Evans, N.W. and Tremaine, S., (1999), “ Linear Multistep Methods for Integrating Reversible Differential Equations ”, *Astron.J.*, **118**, 1888-1899
- [4] Fukushima, T., (1998), “ Symmetric multistep methods revisited ”, *Proc. 30th Symp. Celest. Mech.*, 229-247
- [5] Fukushima, T., (1999), “ Symmetric multistep methods revisited : II. Numerical Experiments ”, *IAU Colloq.*, **173**, 309-314
- [6] Hairer, H., (1999), “ Backward error analysis for multistep methods ”, *Numerische Mathematik*, **84**, 199-232
- [7] Hairer, H. , Lubich, Ch. and Wanner, G., (2002), *Geometric Numerical Integration Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin
- [8] Hairer, H. , Nørsett, S.P. and Wanner, G., (1987), *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin
- [9] Henrici, P., (1962), *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Jhon Wiley & Sons, New York
- [10] Lambert, J.D., (1973), *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Jhon Wiley & Sons, New York
- [11] Lambert, J.D., (1991), *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, Jhon Wiley & Sons, New York
- [12] Lambert, J.D. and Watson, I.A., (1976), “ Symmetric Multistep Methods for Periodic Initial Value Problems ”, *J. Inst. Maths. Applics.*, **18**, 189-202
- [13] Quinlan, G.D., (1999), “ Resonances and instabilities in symmetric multistep methods ”, *astro-ph/9901136*
- [14] Quinlan, G.D. and Tremaine, S., (1990), “ Symmetric multistep methods for the numerical integration of planetary orbits ”, *Astron. J.*, **100**, 1694-1700
- [15] Stiefel, E.L. and Scheifele, G., (1971), *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York
- [16] Yamamoto, T. and Fukushima, T., (2003), “ Explicit Symmetric Multistep Methods for First-Order Differential Equations ”, *Proc. 35th Symp. Celest. Mech.*,

Fractal Structure and Self-similar Solution in One-Dimensional Sheet Model with Expansion

膨張入り一次元シートモデルにおけるフラクタル構造と自己相似解

Takayuki TATEKAWA and Kei-ichi MAEDA

tatekawa@gravity.phys.waseda.ac.jp, maeda@gravity.phys.waseda.ac.jp

Department of Physics, Waseda University, 3-4-1 Okubo, Shinjuku, Tokyo 169-8555 JAPAN

ABSTRACT

One-dimensional sheet model has been considered as simple toy model of self-gravitating system. From analyses of long-duration evolution, the existence of two kind of relaxation time, chaotic itinerancy, and power-law correlation have been reported. On the other hand, in one-dimensional sheet model with cosmic expansion, the existence of universal spectrum of density fluctuation and stable fractal structure have been reported. Regardless of the existence of the cosmic expansion, the formation of scale-free structure occurs in one-dimensional sheet model. How important is the cosmic expansion by the formation of the scale-free structure? We analyze one-dimensional sheet model with generalized cosmic expansion given by the power-law of time. When we assume self-similarity, we obtain self-similar solution of two-point correlation function. Then from numerical analysis, we found stable fractal structure in our model. Furthermore, we found simple relation between the fractal dimension of the structure and the rate of cosmic expansion.

一次元シート系は自己重力系の簡単なモデルとして扱われてきた。長時間の発展の解析から、二種類の緩和時間の存在、システムのカオス的遍歴、冪的な二点相関関数の発生などが報告されている。一方、宇宙膨張入りの一次元シート系では、密度揺らぎの普遍的なスペクトルや、安定なフラクタル構造の存在が報告されている。つまり、宇宙膨張の有無にかかわらず、一次元シート系ではスケールフリーの構造が形成される。それではスケールフリーの構造を形成するにあたり、宇宙膨張はどれほど重要なのだろうか。我々は時間の冪で背景の膨張則が与えられる、一次元シートモデルの解析を行った。自己相似性を仮定すれば、二点相関関数の自己相似解が得られる。一方で数値解析から、我々は安定なフラクタル構造が現れる事を見いだした。さらにこの構造のフラクタル次元と膨張則の冪が簡単な式で結びつけられる事が分かった。

1 Introduction

重力が支配的な影響を及ぼす自己重力系では、構造が特徴的なスケールを持たない事が観測から知られている。例えば銀河サーベイの結果から、銀河はその空間二点相関関数が距離の冪に従うという結果が得られている [1, 2, 3, 4, 5, 6].

このような自己重力系の性質を解析する際、空間三次元モデルでは高解像度、長時間の解析を行う事が困難であるので、簡単なモデルとして対称性を課した一次元自己重力シート系が扱われてきた [7]. 一次元シート系では Tsuchiya et al. [8, 9, 10] により二種類の緩和時間の存在、系のカオス的遍歴などが報告され、最近では Koyama

and Konishi [11] により, ある初期条件のもとでは冪的な二点相関関数が現れると
いった, 興味深い解析が報告されている.

一方, 宇宙膨張入りの一次元シート系も解析がなされている. もともとは Zel'dovich [12]
による Lagrange 的摂動論の線形近似解として得られたが, Doroshkevich et al. [13]
により, 一次元系では厳密解となる事が示された. その後, スケールフリーの密度
揺らぎの発展で, 十分な時間発展の後に初期条件に依存しないスペクトルが現れる
事が示されている [14, 15]. また, 我々も過去の研究において初期密度揺らぎをフ
ラクタル的なものにした場合には, 落下時間 t_{ff} の 200 倍ほどのタイムスケールで,
次元が安定なフラクタル構造が現れる事を示した [16].

宇宙膨張の有無にかかわらず, 一次元シート系では特徴的なスケールを持たない
構造が現れる事が示されているが, 果たして宇宙膨張はこのような構造の形成にど
れほど影響を及ぼすのだろうか. そこで本研究では背景の膨張則を変え場合に形成
される構造がどのようになるかを解析した. 膨張入りのシートモデルでは, 本来は
シートの運動方程式と, 宇宙膨張を記述する Friedmann 方程式を連立して解く必
要があるが, 今回は Friedmann 方程式で宇宙膨張を記述する代わりに, 宇宙膨張に
乗った共動座標のもとでの運動方程式に, 背景の膨張則を人為的に与えたものを考
える. 背景の膨張則は時間の冪で与えられるものとする.

まず Davis and Peebles [17] の, E-dS 宇宙モデルでの二点相関関数の自己相似解
の導出の方法を応用し, 時間の冪で与えられる膨張のもとでの二点相関関数の自己
相似解を導出した. 次にシート系のシミュレーションを行った. 長時間の発展でシート
が非線形構造を形成していくが, 膨張の冪 p の値が $p \leq 1/3$ ではフラクタル構造
が現れず, box-counting による次元解析では 1 となった. 一方, $p > 1/3$ ではフラ
クタル構造が形成され, t_{ff} の数千倍程度のタイムスケールで次元が安定した. ま
た, この膨張則の冪 p と, 形成された構造のモノフラクタル次元 D_0 の間には, 簡
単な関係式が成り立つ事を見つけた.

二点相関関数の自己相似解からフラクタル次元が与えられるので, シミュレーショ
ンと比較してみたが, 現時点では対応させるのは非常に難しく, 今後は自己相似解
の導出の際に用いた仮定に検討の必要があると考えられる.

2 Self-Similar Solution of Two-point Correlation Function

観測から, 銀河の空間二点相関関数は時間の冪に比例する事が報告されている. こ
の冪は, 過去から最近の観測に至るまで, ほぼ -1.7 で変わらない [1, 2, 3, 4, 5, 6].
この観測結果に対し, Davis and Peebles [17] によって, 背景時空が時間の $2/3$ 乗に
比例する Einstein-de Sitter (E-dS) 宇宙モデルでの, 二点相関関数の自己相似解が
導出された. また, Sugimoto et al. [18] によって, 平坦な宇宙モデルである E-dS
宇宙モデル以外に自己相似解を適用する事が考えられた. 平坦でない様方モデル
も, ある時期だけに着目すれば背景の膨張則が時間の冪で近似的に表されると考
え, 時間の冪で表される膨張を仮定して自己相似解を導出しようというものである.
本研究では彼らの手法に沿って, より一般化した自己相似解を導出する.

空間の次元は d 次元とし, 宇宙膨張, 密度揺らぎの成長率は以下のように置く.

$$\text{背景の膨張率: } a(t) \propto t^p, \quad (2.1)$$

$$\text{密度揺らぎの線形成長率: } D_+(t) \propto t^q. \quad (2.2)$$

初期密度揺らぎのスペクトルは

$$P(k) \propto k^n, \quad (2.3)$$

で与える事にする。

密度揺らぎのスペクトルと二点相関関数はフーリエ変換で結びついているので、(2.3) の形でスペクトルが与えられた場合は、

$$\xi(x) \propto x^{-(n+d)}, \quad (2.4)$$

となる。

密度揺らぎが非常に小さい、線形領域での二点相関関数の成長は、(2.2) と (2.4) から、

$$\xi(x, t) \propto x^{-(n+d)} t^{2q}, \quad (2.5)$$

となる。二点相関関数は、 x, t という二変数の関数となっているが、ここで自己相似を仮定する。 x と t が特別な関係で結びついていて、二点相関関数が一変数の関数と見なせるようにするという仮定である。二点相関関数が自己相似であるとして

$$\xi(x, t) = \tilde{\xi}\left(\frac{x}{t^{\alpha_L}}\right), \quad (2.6)$$

と仮定すると、自己相似係数 α_L は (2.5) より、

$$\alpha_L = \frac{2q}{n+d}, \quad (2.7)$$

となる。

次に非線形領域での二点相関関数を考える。こちらは Peebles のテキスト [19] に詳細が出ているので、ここでは手順のみを説明し詳細は述べない。まず Vlasov 方程式から出発して一点、二点分布関数に関する発展方程式を導出する。次に三点分布関数が一点分布関数と二点分布関数の積で記述できる事、対称性などを課すと、最終的に以下のような二点相関関数に関する方程式が得られる。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{ax^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} (x^{d-1} v(\xi + 1)) = 0. \quad (2.8)$$

この方程式に対し、非線形領域である事を考え、 $\xi \gg 1$ とする。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{ax^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} (x^{d-1} v\xi) = 0. \quad (2.9)$$

Davis and Peebles [17] ではこの次に、「構造が安定である」という仮定、すなわち固有運動と Hubble flow がつり合うという仮定、

$$\langle v \rangle = -\dot{a}x, \quad (2.10)$$

を導入している。だがこの仮定の妥当性が後に問題となった。ここでは仮定をやや拡張し、Padmanabhan [20] や Yano and Gouda [21] で用いた仮定、

$$\langle v \rangle = -h\dot{a}x, \quad (2.11)$$

を導入する。これを (2.9) に代入し、時間微分を書き直すと、

$$ha \frac{\partial}{\partial a} \xi = \frac{1}{x^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} (x^d \xi), \quad (2.12)$$

となる。この式の解を

$$\xi \propto a^\delta x^{-\gamma} \quad (2.13)$$

と仮定すると, (2.12) から

$$h\delta = d - \gamma, \quad (2.14)$$

が得られ,

$$\delta = \frac{d - \gamma}{h}, \quad (2.15)$$

となる. 以上より, 非線形領域での二点相関関数は

$$\xi \propto a^{(d-\gamma)/h} x^{-\gamma} \propto t^{p(d-\gamma)/h} x^{-\gamma}, \quad (2.16)$$

となる. この解にはまだ積分での任意定数 γ が含まれてしまう. そこで非線形領域での二点相関関数にも

$$\xi(x, t) = \tilde{\xi}\left(\frac{x}{t^{\alpha_{NL}}}\right), \quad (2.17)$$

という自己相似性をを仮定する. さらに, Davis and Peebles の自己相似解導出のポイントである, 次の仮定を導入する. すなわち線形領域と非線形領域での指数の値が

$$\alpha_L = \alpha_{NL}, \quad (2.18)$$

であると仮定し, 線形領域と非線形領域の解をつなぐ. この大きな仮定から

$$\frac{2q}{n+d} = \frac{(d-\gamma)p}{h\gamma}, \quad (2.19)$$

の関係が成り立ち,

$$\gamma = \frac{d(d+n)p}{(d+n)p + 2hq}, \quad (2.20)$$

となる. この γ が非線形領域での空間二点相関関数の冪である.

3 One-dimensional model with power-law expansion

本研究は空間一次元 ($d = 1$) の場合のみを扱う. 背景が膨張する空間一次元モデルでは, シートの運動は初期位置からの変位の方程式で記述される.

$$\ddot{S} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{S} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 S = 0, \quad (3.1)$$

$$x(t) = x_0 + S(x_0, t). \quad (3.2)$$

ここで a は背景の膨張を与えるスケールファクター, $x(t)$ は膨張に乗った Euler 座標, x_0 は初期のシートの位置の座標 (Lagrange 座標) である. シートの運動は S を求めれば分かる.

ここでは膨張則を

$$a(t) \propto t^p, \quad (3.3)$$

とする. この冪的な膨張則のもとではシートの運動が解析的に記述できる.

$$S(q, t) = S_+(q)D_+(t) + S_-(q)D_-(t), \quad (3.4)$$

$$D_{\pm}(t) = t^{(1-2p \pm \sqrt{10p^2-4p+1})/2}. \quad (3.5)$$

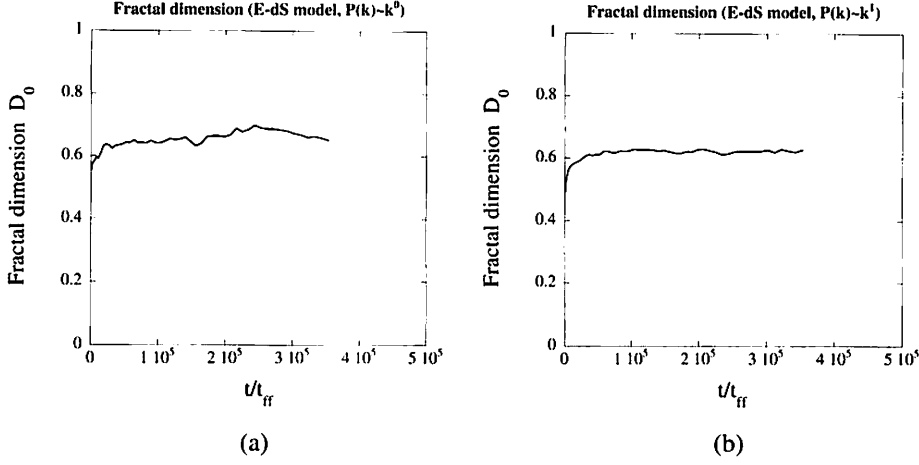


Fig. 1 E-dS 宇宙モデル ($a(t) \propto t^{2/3}$) での構造のフラクタル次元. (a) $P(k) \propto k^0$ という初期ゆらぎを与えた時. (b) $P(k) \propto k^1$ という初期ゆらぎを与えた時. いずれもフラクタル次元は $0.6 - 0.65$ で安定する. この結果は Miller and Rouet [22] の解析結果 $D \simeq 0.6$ に近い結果を与えている.

The mono-fractal dimension of spacial distribution in E-dS Universe ($a(t) \propto t^{2/3}$). (a) In the case of $P(k) \propto k^0$. (b) In the case of $P(k) \propto k^1$. In both of cases, the fractal dimension converges to $0.6 - 0.65$. Our results are close to Miller and Rouet's result [22] ($D \simeq 0.6$).

D_+ は実は密度揺らぎの線形成長率になっている. そこで D_+ を (2.20) に代入すると, このモデルでの自己相似解が得られる. 二点相関関数の空間成分の冪は

$$\gamma = \frac{(n+1)p}{(n+1)p + h(1-2p + \sqrt{10p^2 - 4p + 1})}, \quad (3.6)$$

となる. また, $p \rightarrow \infty$ の極限で

$$\gamma \rightarrow \frac{n+1}{(n+1) + h(-2 + \sqrt{10})}, \quad (3.7)$$

となる. 二点相関関数の冪 $-\gamma$ とフラクタル次元 D の間には,

$$D = d - \gamma, \quad (3.8)$$

という関係が成り立つので, 自己相似解からフラクタル次元を導出する事も出来る.

(2.20) は初期揺らぎのスペクトルの冪 n に依存する. そこで n を変えて調べてみる. 特に Miller and Rouet [22] により, E-dS モデルでホワイトノイズを初期ゆらぎとして与えた場合の, 長時間の発展が調べられている. 彼らの解析によると, モノフラクタル次元は 0.6 付近に収束する. Fig. 1 は我々の数値計算の結果として得られた, 構造のモノフラクタル次元の変化を表している. ここでは $P(k) \propto k^0, k^1$ の二つの場合についての結果を示した. いずれの場合も $D \simeq 0.6 - 0.65$ に収束する. ホワイトノイズに対応するのは $P(k) \propto k^0$ の場合で, 我々の計算の方が次元が若干高めに出るものの, 彼らの結果をほぼ再現している.

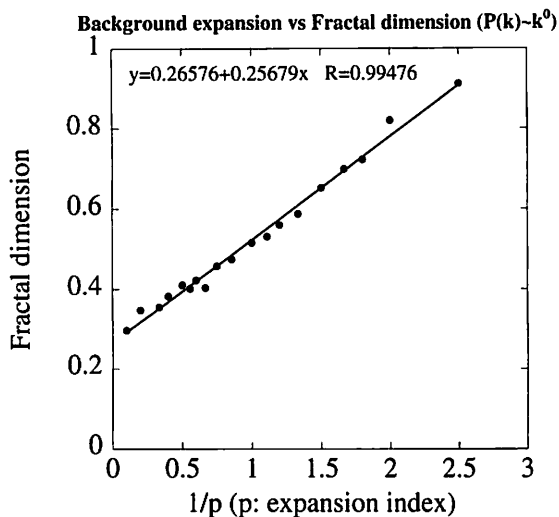
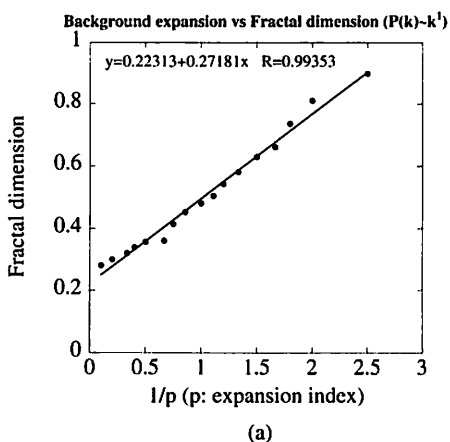
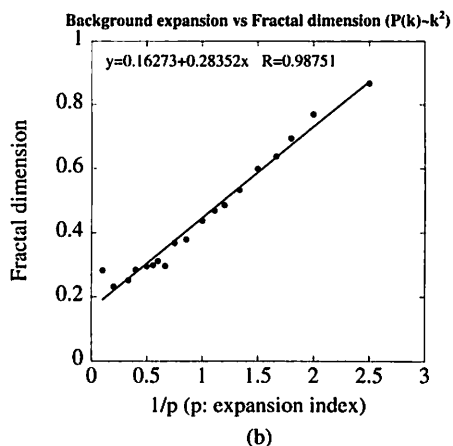


Fig. 2 $P(k) \propto k^0$ という初期ゆらぎを与えた時のモノフラクタル次元. 双曲線によるフィッティングが割とあっている.

Mono-fractal dimension of spacial distribution in the case of $P(k) \propto k^0$. The relation between fractal dimension and expansion rate is suitable rather well by the fitting by the inverse proportion function.



(a)



(b)

Fig. 3 (a) $P(k) \propto k^1$ という初期ゆらぎを与えた時のフラクタル次元. (b) $P(k) \propto k^2$ という初期ゆらぎを与えた時のフラクタル次元. いずれの場合も, 双曲線によるフィッティングが割とよくあう.

Mono-fractal dimension of spacial distribution. (a) In the case of $P(k) \propto k^1$. (b) In the case of $P(k) \propto k^2$. Both of the cases, the relation between fractal dimension and expansion rate is suitable rather well by the fitting by the inverse proportion function.

その他の膨張則の場合の結果は、Fig. 2, 3に示した通りである。膨張の冪が $p \leq 1/3$ であるときは、フラクタル構造が見られなかった。 $p > 1/3$ の場合には膨張の冪 p とフラクタル次元 D との関係が

$$D \simeq \frac{A}{p} + B \quad (A, B = \text{const.}),$$

うまくフィッティングでき、特に A については

$$A \simeq 0.27, \quad (3.9)$$

となっている。

次に二点相関関数の自己相似解から得られたフラクタル次元と比較する。二点相関関数の空間変数の冪 γ とフラクタル次元 D の間には、次の対応関係が成り立つ。

$$D = d - \gamma. \quad (3.10)$$

よって、この γ に自己相似解から得られた冪を代入すればよい。

Fig. 4は自己相似解と数値計算の結果を比較したものを示している。まず、解 (2.20) は $p = 0$ で h, n に依らず $\gamma = 0$ になる。つまりフラクタル次元は 1 である。 p を大きくすると、徐々にフラクタル次元は下がっていく。ところが数値計算の結果では、 $p < 1/3$ ではフラクタル次元は 1 となる。この問題は h を調整しても解決できない。逆に p が大きい極限で合う h は、 $h \simeq 0.5$ である。ここでは $h = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ で自己相似解の冪と数値計算のフラクタル次元を比較している。極限で、ある h に合わせる事が出来るが、同じ h を使うと $p \simeq 1$ でもなかなか合わない。少なくとも任意の p に対して成り立つ共通の h は存在しないようである。これは膨張則が変わると固有速度と Hubble flow との比 h が変わる事に対応しているのかもしれない。

4 Discussion

我々は時間の冪で背景の膨張を与えた場合の、一次元シート系での構造形成を考えた。自己相似性を仮定した場合、二点相関関数の自己相似解が任意の冪に対して求まった。一方で数値計算により、シートの空間分布のフラクタル次元は安定になり、またその次元と膨張則の冪は非常に単純な式で関係づけられる事が分かった。ただ、この単純な式が自己相似解と対応しているかという点については、まだうまく説明できていない。今後、この関係式の起源を考える必要がある。

関係式の起源に迫るものとして Yano and Gouda [21] の解析の応用が考えられる。彼らは Davis and Peebles [17] の仮定に加え、固有速度と Hubble flow との比の他にも固有運動の skewness などを評価している。彼らの解析では、Padmanabhan [20] の解析ではフリーパラメーターとなっていた h に制限が与えられる。この制限を任意の膨張則の場合についても考えていけば、本研究での自己相似解と数値計算の対応がうまく説明できる可能性がある。今後、より一般化した自己相似解の解析を行おうと考えている。また、Miller and Rouet [22] では E-dS 宇宙モデルでのシート系の解析に、マルチフラクタルの方法を用いている。今回の発表ではモノフラクタル次元しか求めていなかったため、より多くの情報を引き出す事、過去の解析との比較とのため、マルチフラクタル解析を進めて行く予定である。

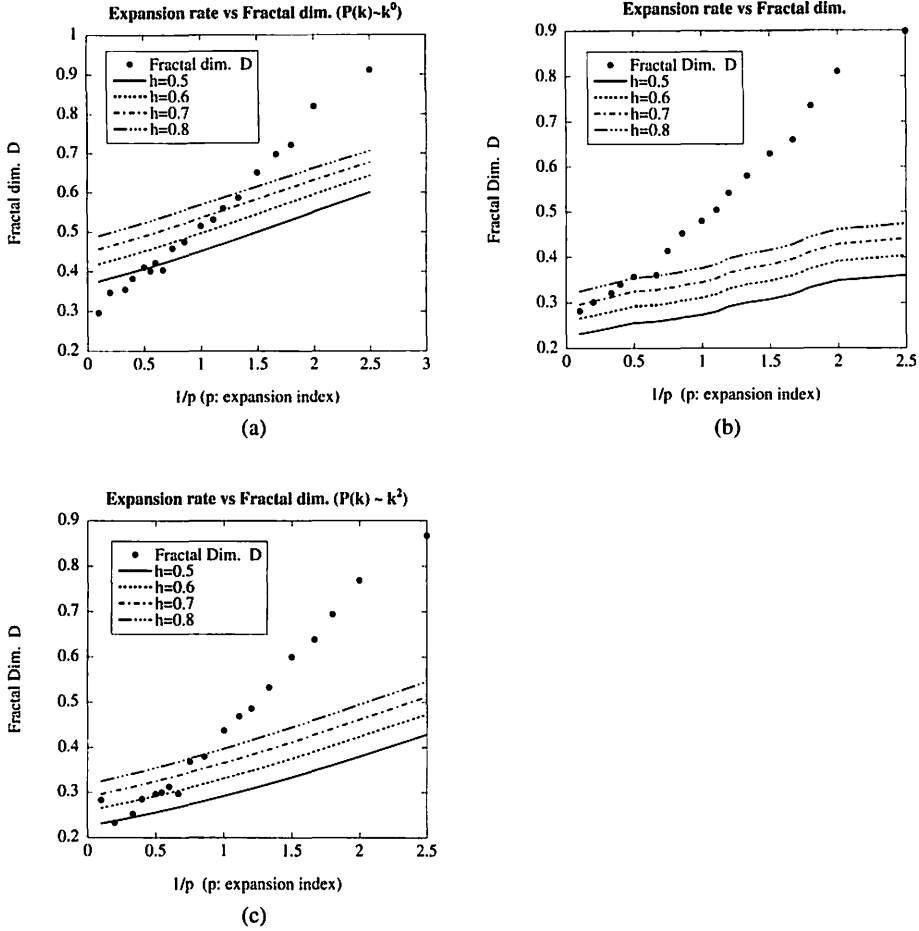


Fig. 4 数値計算から得られたフラクタル次元 (点) と二点相関関数の自己相似解から得られたフラクタル次元 (線) との比較. 固有速度と Hubble flow との比を $h = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ として描いている. 任意の p に対応する共通の h は存在しないようである. (a) $P(k) \propto k^0$ の場合. (b) $P(k) \propto k^1$ の場合. (c) $P(k) \propto k^2$ の場合.

The comparison of fractal dimension between numerical analysis (dots) and self-similar solution (line). In this figure, the ratio between the peculiar velocity and Hubble flow is given by $h = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$. Universal h to adjust to any p does not exist. (a) In the case of $P(k) \propto k^0$. (b) In the case of $P(k) \propto k^1$. (c) In the case of $P(k) \propto k^2$.

References

- [1] H. Totsuji and T. Kihara, PASJ **21** (1969) 221.
- [2] P. J. E. Peebles, Astron. Astrophys. **32** (1974) 197.
- [3] M. J. Geller and J. P. Hachra, Science **246** (1989) 897.
- [4] Y. P. Jing, H. J. Mo, and G. Börner, Astrophys. J **494** (1998) 1.
- [5] L. Guzzo *et al.*, Astron. Astrophys. **355** (2000) 1.
- [6] E. Hawkins *et al.*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **346** (2003) 78.
- [7] G. L. Camm, Mon. Not. R. Astron. Soc. **110** (1950) 305.
- [8] T. Tsuchiya, T. Konishi, and N. Gouda, Phys. Rev. **E50** (1996) 2607.
- [9] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi, Phys. Rev. **E53** (1996) 2210.
- [10] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi, Astrophys. Space Sci. **257** (1998) 319.
- [11] H. Koyama and T. Konishi, Phys. Lett. A **279** (2001) 226; Europhys. Lett. **58** (2002) 356; Phys. Lett. A **295** (2002) 109.
- [12] Ya. B. Zel'dovich, A&A **5** (1970) 84.
- [13] A. G. Doroshkevich, V. S. Ryaben'kii, V. S., and S. F. Shandarin, Astrophysics **9** (1973) 144.
- [14] N. Gouda and T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **79** (1998) 765; **81** (1989) 633.
- [15] T. Yano and N. Gouda, ApJS **118** (1998) 267.
- [16] T. Tatekawa and K. Maeda, ApJ **547** (2001) 531.
- [17] M. Davis and P.J.E. Peebles, ApJS **34** (1977) 425.
- [18] T. Sugihara, A. Taruya, and Y. Suto, ApJ **566** (2002) 1.
- [19] P.J.E. Peebles, *The Large-scale Structure in the Universe* (1980, Princeton University Press).
- [20] T. Padmanabhan, MNRAS **278** (1996) L29.
- [21] T. Yano and N. Gouda, ApJ **487** (1997) 473.
- [22] B.N. Miller and J.L. Rouet, Physica A **305** (2002) 266.

Dynamics of gas sphere under self-gravity

Souichi MURATA

smurata@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

Department of Physics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan

ABSTRACT

A new dynamical solution for a gas sphere under self-gravity is presented to describe a development of a gas sphere from a motion-less state to a state of expansion with a constant speed and a reflection phenomenon in the dynamics of the surface of the sphere.

1 Introduction

The polytropic model of stellar structure is often introduced in studies of the different stages of stellar evolution. The equation governing the static equilibrium of a polytropic gas sphere is called the Emden equation, whose solution representing the structure of star is known as the Emden solution [1]. Quasi-static change of stellar structure expressed by the Emden solution is believed to describe the evolution of star when the Emden solution is dynamically stable. The dynamical stability is not guaranteed unless the polytropic index N is less than 3 [2]. A gas sphere of $N = 3$ is borderline to the dynamical stability and is also interesting since the polytropic index 3 corresponding to the adiabatic constant $\gamma = 4/3$. There are some interesting stellar gases with $\gamma = 4/3$, such as a radiation pressure dominant gas, an extremely relativistic gas and a gas with degenerate electrons [2].

In order to extend the static Emden solution to dynamical states, Munier and Feix derived an explicit self-similar solution which describes a decelerating expansion of a gas sphere of $N = 3$ [3]. Recently, another explicit self-similar solution has been obtained to describe a non accelerating nor decelerating expansion (or contraction) of a gas sphere of $N = 3$ [3].

In this paper, we present a new dynamical solution for a gas sphere of $N = 3$, which is not self similar in general but includes the three known Emden-type solutions described above as special cases. The new dynamical solution describes such interesting phenomena as a development of a gas sphere from a motion-less state to a state of expansion with a constant speed and a reflection phenomenon in the dynamics of the surface of a sphere.

2 Dynamical solution of gas sphere

The equations governing the spherically symmetrical flow of a polytropic gas of adiabatic index γ under the influence of its own gravitation are

$$\rho_t + u\rho_r + \rho\left(u_r + \frac{2}{r}u\right) = 0, \quad (2.1)$$

$$u_t + uu_r + \rho^{\gamma-2}\rho_r + \sigma_r = 0, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{rr} + \frac{2}{r}\sigma_r = \rho, \quad (2.3)$$

where the pressure P , density ρ , radial velocity u , gravitational potential σ and radius r are normalized by P_0 , ρ_0 , $u_0 = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$, $\gamma P_0/\rho_0$, r_0 , respectively; G is the gravitational constant and $P = \rho^\gamma$. The acoustic time scale r_0/u_0 , where $r_0 = \gamma P_0/(4\pi G\rho_0^2)$, is set to equal to the time scale of free fall $(4\pi G\rho_0)^{-1/2}$. The system of Eqs. (2.1), (2.2) and (2.3) admits a following Lie point symmetry

$$\mathbf{V} \equiv (t + t_0)\partial_t - (\gamma - 2)r\partial_r - 2\rho\partial_\rho - (\gamma - 1)u\partial_u - \gamma\phi\partial_\phi, \quad (2.4)$$

where $\phi = \sigma_r$ and t_0 is an arbitrary constant. The symmetry (2.4) is derived through the standard procedure. Solving the Lie equation associated with the infinitesimal generator (2.4), we introduce a new independent variable T defined as

$$dT = \frac{dt}{t + t_0}, \quad (2.5)$$

and scaled variables

$$\rho = \frac{R(x, T)}{(t + t_0)^2}, \quad u = \frac{U(x, T)}{(t + t_0)^{\gamma-1}}, \quad \phi = \frac{\Phi(x, T)}{(t + t_0)^\gamma}, \quad (2.6)$$

where

$$x = \frac{r}{t^{2-\gamma}}, \quad T = \log(t + t_0).$$

Let us make the following ansatz

$$R(x, T) = \tilde{R}(y) \exp\left\{\int \left(2 - 3\bar{U}\right) dT\right\}, \quad (2.7)$$

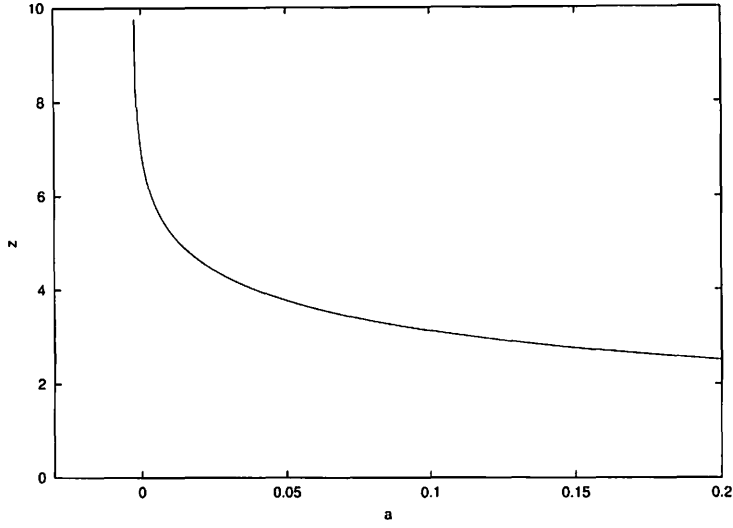
$$U(x, T) = \bar{U}(T)x, \quad (2.8)$$

$$\Phi(x, T) = \tilde{\Phi}(y) \exp\left\{\int \left(\gamma - 2\bar{U}\right) dT\right\}, \quad (2.9)$$

where

$$y = x \exp\left\{\int \left(2 - \gamma - \bar{U}\right) dT\right\}.$$

This ansatz ensures that Eq. (2.1) is satisfied automatically. For $\gamma = 4/3$, Eqs. (2.2) and (2.3) lead to


 Fig. 1— z vs. the acceleration parameter a

$$ay + \tilde{R}^{\gamma-2} \tilde{R}_y + \tilde{\Phi} = 0, \quad (2.10)$$

$$\bar{U}_T + \bar{U}(\bar{U} - 1) = a \exp \left\{ \int \left(2 - 3\bar{U} \right) dT \right\}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\Phi}_y + \frac{n}{y} \tilde{\Phi} = \tilde{R}, \quad (2.12)$$

where a is an arbitrary constant. Eqs. (2.10) and (2.12) give a modified Emden equation for the density profile $\tilde{R}(y)$

$$\theta_{y'y'} + \frac{2}{y'} \theta_{y'} + \theta^3 + 3a = 0, \quad \theta = \tilde{R}^{1/3}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{3}}. \quad (2.13)$$

According to numerical integration of Eq.(2.13) with the boundary condition $\theta(0) = 1$, $\theta_{y'}(0) = 0$, the density profile has the first zero at finite $y' = z$ for $a_0 > -0.00219$ as shown in Figure. 1. The value of z determines the radius of a gas sphere. For $a = 0$, z takes the Emden's static value $z = 6.89685$. Since the term ay' comes from the inertia term and represents acceleration effect for $a > 0$, we call a as the acceleration parameter in this paper. In the acceleration case, the surface of a gas sphere feels inward inertia force and shrinks from the Emden's static value. For $a < 0$, the surface feels outward inertia force and expands. At $a \approx -0.00219$, z diverges to infinity and a localized gas sphere disappears.

It is easy to see that Eq.(2.11) takes the following integrable form

$$f_u = \frac{a}{f^2}, \quad (2.14)$$

where

$$f(t) = \exp \left(\int^T U dT \right). \quad (2.15)$$

Eq. (2.14) can be integrated once and yields

$$\frac{1}{2}f_t^2 + \frac{a}{f} = b, \quad (2.16)$$

where b is an integration constant. In terms of $f(t)$, the solution (2.6) is rewritten as

$$y = \frac{r}{f}, \quad \rho = \frac{\tilde{R}(y)}{f^{n+1}}, \quad u = f_t y, \quad \phi = \frac{\tilde{\Phi}(y)}{f^n}, \quad (2.17)$$

where $\tilde{R}(y)$ is expressed by a localized solution of Eq.(2.13) while Eq.(2.10) gives $\tilde{\Phi}(y)$ in terms of $\tilde{R}(y)$. It is confirmed that the solution (2.17) satisfies the boundary condition at the moving surface of sphere. While the surface is moving with a speed $\tilde{u} = \sqrt{3}f_t z$, the flow speed at the surface is given by the same one, i.e. $u = f_t y = \sqrt{3}f_t z$.

When $b = 0$ and $a < 0$, Eq.(2.16) yields

$$f(t) = \left(\frac{3\sqrt{-2a}}{2}(t - t_0) \right)^{2/3}$$

and the solution (2.17) becomes identical with the known self-similar solution [3]. In the absence of the inertia term (i.e. $a = 0$), Eq.(2.13) reduces to the Emden equation. For $b = 0$ and $a = 0$, $f(t)$ is constant and Eq.(2.17) gives the static Emden solution. For $b > 0$ and $a = 0$, Eq.(2.16) gives $f(t) = \sqrt{bt}$ and Eq.(2.17) reproduces the expanding Emden solution which is expanding with the constant acoustic speed [5]. For the other values of a and b , a new class of expanding solution with positive or negative acceleration is obtained. Since $\tilde{u} = \sqrt{3}f_t z$, the acceleration rate of the surface is given by $\tilde{u}_t = a\sqrt{3}z/f^2$, of which sign is the same as the a 's sign.

To demonstrate the evolution of the solution (2.17), we consider an initial value problem for Eq.(2.16) such that $f(t)|_{t=0} = 1$ in order that $y|_{t=0} = r$.

First of all, let us consider the case in which $a > 0$ and the acceleration rate of the surface is radially positive. Since $f \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, $f_t \rightarrow \sqrt{2b}$ asymptotically and the surface eventually expands with a constant speed $\sqrt{6b}z$. In this case, we can take a motionless initial condition so that $f_t|_{t=0} = 0$ or $u|_{t=0} = 0$ by choosing the arbitrary (positive) constant b as $b = a(> 0)$. The expansion speed of the surface ($\tilde{u} = \sqrt{3}zf_t$) is depicted for $a = b = 0.01$ in Fig.2.

Next, we consider the radially decelerating case (i.e. $a < 0$), where we take $f_t|_{t=0} > 0$ as an initial condition so that the initial velocity of the surface is positive. Then, the initially expanding surface gradually decelerates due to the negative inertia term. In this case, Eq.(2.16) reads

$$\frac{1}{2}f_t^2 = b + \frac{|a|}{f}. \quad (2.18)$$

For $b > 0$, there are no reflection points and the expanding speed of the surface decreases to a constant speed, that is,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u} = \sqrt{6b}z, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}_t = 0. \quad (2.19)$$

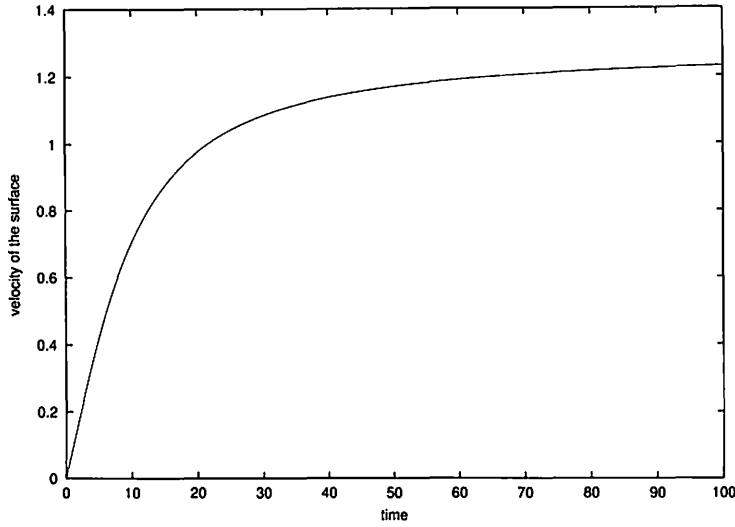


Fig. 2—Expansion velocity of the surface for $a=b=0.01$.

We illustrate the velocity of the surface for $a = -0.002$ and $b = 0.001$ in Fig. 3. When $b < 0$, a reflection point appears at $f = a/b$. The deceleration of the surface stops at the reflection point and then the gas sphere began to shrink. The reflection time t_r is given as When $a < 0$ and $b < 0$, the equation (2.16) yields

$$t_r = \left| \frac{\sqrt{(2b-2a)}}{2b} - \frac{a}{b\sqrt{-2b}} \arctan \sqrt{\frac{2b-2a}{-2b}} \right|.$$

In this reflection case, the velocity of the surface is depicted for $a = -0.002$ and $b = -0.001$ in Fig.4, where $t_r = 57.485$.

3 summary

We present a new dynamical solution for a gas sphere under self-gravity, which not only unifies the three Emden-type solutions for the polytropic index $N = 3$ but also describes the following interesting phenomena.

For positive values of acceleration parameter a , the radius of the gas sphere decreases from the Emden's radius due to inward inertia force, while the gas sphere expands for the negative a and the distinct surface disappears when $a < -0.00219$. The new solution also describes acceleration of the surface of a gas sphere from a motion-less state to a state of expansion with a constant speed for the positive a and a reflection phenomenon in the dynamics of the surface of a sphere for the negative a .

References

- [1] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, (1957).

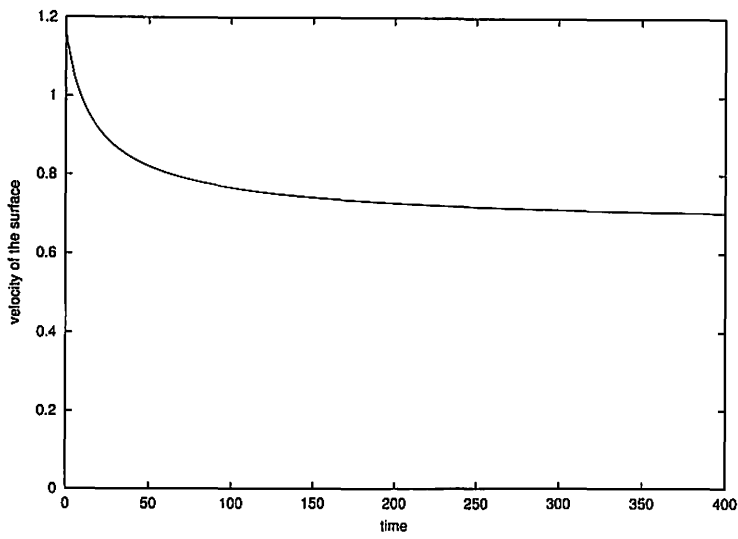


Fig. 3—Velocity of the surface for $a=-0.002$ and $b=0.001$.

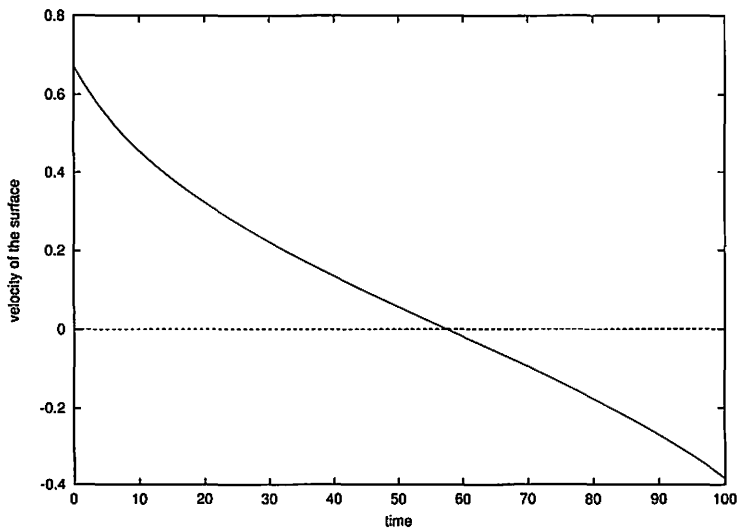


Fig. 4— Velocity of the surface for $a=-0.002$ and $b=-0.001$.

- [2] For example, C. Hayashi, and S. Hayakawa, *Astrophysics*, Iwanami, (1973).
- [3] A. Munier, and M. R. Feix, *ApJ* **267**(1983) 344.
- [4] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, (1986).
- [5] S. Murata and K. Nozaki, *JPSJ* **71** (2002) 2825.

55 Cancri 惑星系の臨界引数と近星点連動 Relation between the critical argument and the alignment of periastron in 55 Cancri planetary system

中井宏、木下宙（国立天文台）、
Jianghui Ji (Purple Mountain Observatory)
H. Nakai¹, H. Kinoshita¹ and J. Ji²

¹National Astronomical Observatory, ²Purple Mountain Observatory

ABSTRACT

We investigate the stability of the 55 Cancri planetary system using the semi-analytical secular perturbation theory and the numerical integration. We find two sets of the solution that the critical argument ($\theta_2 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\varpi_2$) and the relative apsidal longitude ($\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$) of inner two planets librate, where λ_1 and λ_2 are the mean longitudes of planets 1 and 2, respectively, and ϖ_1, ϖ_2 are the periastron longitudes of planets 1 and 2. One set is $\theta_2 \simeq 80^\circ$ and $\Delta\varpi \simeq 240^\circ$, and the other set is $\theta_2 \simeq 280^\circ$ and $\Delta\varpi \simeq 120^\circ$. From the simulations for initial values of two sets and values close to them, the planetary systems are permanently stable with 3:1 mean motion resonance and apsidal resonance. The simulations, however, with another initial values show that θ_2 (3:1 mean motion resonance) and $\Delta\varpi$ (apsidal resonance) interchange circulations with librations irregularly, then in many cases, the systems become unstable.

1 はじめに

太陽系外惑星は今までに 100 個以上発見されており、その中には複数の惑星が相互作用している系が 10 個以上知られている。それら大部分の惑星系は大惑星が接近している惑星相互作用の大きな系であって、そのような系では惑星間の共鳴関係が系の安定性に重要な働きをしている。

かに座 55 惑星系は中心星が太陽質量の 1.03 倍、3 惑星¹の質量が内側から木星質量の 0.83 倍、0.2 倍、3.69 倍の惑星系で、内側 2 惑星は 3:1 平均運動共鳴の関係にあり、同時に 2 惑星の近星点が連動している系である。100 万年間の数値積分の結果、3 種類の臨界引数 ($\theta_1 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\varpi_1, \theta_2 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\varpi_2, \theta_3 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + \varpi_1 + \varpi_2$) と近星点経度差 ($\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$) の平均値はそれぞれ $\theta_1 = 216.5^\circ, \theta_2 = 86.4^\circ, \theta_3 = 331.5^\circ, \Delta\varpi = 245.1^\circ$ となっていて、一般的な値 0° 、または 180° とは異なる特殊な値になっている。また、これらの値の間には $\theta_1 = \theta_2 + 2\Delta\varpi, \theta_3 = \theta_2 + \Delta\varpi$ の関係がある。但し、記号 λ は平均経度、 ϖ は近星点経度、添え字 1, 2 は惑星を表す。ここでは、かに座 55 惑星系における θ_2 と $\Delta\varpi$ の関係を明らかにする。

¹4 番目の惑星 (質量下限値は木星質量の 0.045 倍、軌道長半径は 0.038 A U) が発見されている。

2 半解析的永年摂動論

Ji(2003) 達によると、かに座 55 惑星系の最外側惑星の摂動は内側 2 惑星の運動に殆ど影響を与えないので、ここでは内側 2 惑星だけの運動を考える。

ヤコビ座標でのハミルトニアンは

$$F = \frac{1}{2}\sigma_1\dot{\mathbf{r}}_1^{*2} + \frac{1}{2}\sigma_2\dot{\mathbf{r}}_2^{*2} - \frac{Gm_0m_1}{r_{01}} - \frac{Gm_0m_2}{r_{02}} - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}}, \quad (2.1)$$

となる。ここで $\sigma_1 = m_0m_1/(m_0 + m_1)$, $\sigma_2 = m_2(m_0 + m_1)/(m_0 + m_1 + m_2)$, G は重力定数、 m_0, m_1, m_2 はそれぞれ中心天体と惑星 1, 2 の質量とする。また、 r_{01}, r_{02} は中心天体と惑星 1, 2 の距離、 r_{12} は惑星 1 と惑星 2 の距離、 $\mathbf{r}_1^*$ はヤコビ座標での中心天体からの惑星 1 の位置 ($\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_{01}$) で、 $\mathbf{r}_2^*$ は中心天体と惑星 1 で決まる重心からの惑星 2 の位置とする。

ハミルトニアンをケプラー運動部分と摂動部分に分ける。この場合 A)、B) 2 種類の選び方がある。

A)

$$F_0 = \frac{1}{2}\sigma_1\dot{\mathbf{r}}_1^{*2} - \frac{Gm_0m_1}{r_1^*} + \frac{1}{2}\sigma_2\dot{\mathbf{r}}_2^{*2} - \frac{Gm_0m_2}{r_2^*}, \quad (2.2)$$

$$F_1 = Gm_0m_2\left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{1}{r_{02}}\right) - Gm_1m_2\frac{1}{r_{12}}, \quad (2.3)$$

B)

$$F_0 = \frac{1}{2}\sigma_1\dot{\mathbf{r}}_1^{*2} - \frac{Gm_0m_1}{r_1^*} + \frac{1}{2}\sigma_2\dot{\mathbf{r}}_2^{*2} - \frac{G(m_0 + m_1)m_2}{r_2^*}, \quad (2.4)$$

$$F_1 = G(m_0 + m_1)m_2\left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \cdot \frac{1}{r_{02}}\right) - Gm_1m_2\frac{1}{r_{12}}. \quad (2.5)$$

この場合の μ_1 , μ_2 、全角運動量 (Θ)、摂動関数 (R) は

A)

$$\mu_{1A} = G(m_0 + m_1), \quad \mu_{2A} = Gm_0(m_0 + m_1 + m_2)/(m_0 + m_1), \quad (2.6)$$

$$\Theta_A = \sigma_1\sqrt{G(m_0 + m_1)a_1(1 - e_1^2)} + \sigma_2\sqrt{Gm_0\frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1}a_2(1 - e_2^2)}, \quad (2.7)$$

$$R_A = Gm_1m_2\frac{1}{r_{12}} - Gm_0m_2\left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{1}{r_{02}}\right), \quad (2.8)$$

B)

$$\mu_{1B} = G(m_0 + m_1), \quad \mu_{2B} = G(m_0 + m_1 + m_2), \quad (2.9)$$

$$\Theta_B = \sigma_1\sqrt{G(m_0 + m_1)a_1(1 - e_1^2)} + \sigma_2\sqrt{G(m_0 + m_1 + m_2)a_2(1 - e_2^2)}, \quad (2.10)$$

$$R_B = Gm_1m_2\frac{1}{r_{12}} - G(m_0 + m_1)m_2\left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \cdot \frac{1}{r_{02}}\right), \quad (2.11)$$

となる。かに座 55 惑星系では両者の差は小さいので、ここでは A) の定義を用いた。式 (8) の r_{12}, r_{02} は次の式によりヤコビ座標系の軌道要素で求められる。

$$\begin{aligned}
 r_{12}^2 &= r_2^{*2} + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^{*2} - 2\frac{m_0}{m_0 + m_1} r_1^* r_2^* \cos S^*, \\
 r_{02}^2 &= r_2^{*2} + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^{*2} + 2\frac{m_1}{m_0 + m_1} r_1^* r_2^* \cos S^*, \\
 \cos S^* &= \cos(f_1^* + \varpi_1^*) \cos(f_2^* + \varpi_2^*) + \cos J^* \sin(f_1^* + \varpi_1^*) \sin(f_2^* + \varpi_2^*), \\
 &= \cos(f_1^* - f_2^* + \varpi_1^* - \varpi_2^*) - 2 \sin^2 \frac{J^*}{2} \sin(f_1^* + \varpi_1^*) \sin(f_2^* + \varpi_2^*),
 \end{aligned}$$

$f_1^*, f_2^*, \varpi_1^*, \varpi_2^*$ はそれぞれ各惑星のヤコビ座標の真近点離角と近星点経度、 J^* は惑星相互の軌道傾斜角、 S^* は中心天体と惑星 1 で決まる重心から見た惑星 1, 2 の間の角である。

ここで惑星 1, 2 は同一平面内を運動すると仮定すると、

$$\cos S^* = \cos(f_1^* - f_2^* + \varpi_1^* - \varpi_2^*) \quad (2.12)$$

となる。また

$$u^* - e^* \sin u^* = l^*, \quad (2.13)$$

$$r^* = a^* (1 - e^* \cos u^*), \quad (2.14)$$

$$\tan \frac{f^*}{2} = \sqrt{\frac{1+e^*}{1-e^*}} \tan \frac{u^*}{2}, \quad (2.15)$$

の関係から摂動関数 R はヤコビ座標での軌道要素 $m_0, m_1, m_2, a_1^*, a_2^*, e_1^*, e_2^*, l_1^*, l_2^*, \Delta\varpi^*$ の関数となる。

2.01) 平均運動共鳴 (臨界引数と軌道長半径の関係)

吉川 (1990) の方法を用いて臨界引数と軌道長半径の関係を求める。 $e_1^*, e_2^*, \Delta\varpi^*$ を一定とし、平均近点離角は臨界引数や近星点経度差の変動周期に比べて短周期であるので、3:1 平均運動共鳴の関係 ($\theta_2^* = \lambda_1^* - 3\lambda_2^* + 2\varpi_2^*$: θ_2 はパラメータ) を保ちながら平均操作により l_1^*, l_2^* を消去する。この操作により a_1^*, a_2^* は一定となり、摂動関数 R は自由度 1 となるので、等エネルギー曲線から a^* と臨界引数 θ_2^* の関係が求まる。

2.02) 近星点経度の運動 (近星点経度と離心率の関係)

2.01 と同様全角運動量 (Θ)、臨界引数 (θ_2^*) を一定とし、近星点経度差 ($\Delta\varpi^*$) の周期に比べて短周期である l_1^*, l_2^* を平均操作により消去する。この場合も $\theta_2^* = \lambda_1^* - 3\lambda_2^* + 2\varpi_2^*$ を一定とし 3:1 平均運動共鳴の関係を保ちながら平均操作を行う。

2.1 臨界引数 (θ_2) の秤動

摂動天体の平均運動と近星点経度の時間変化は数値積分の結果から求めた $n_1 = 0.4481$ rad/day, $\dot{\varpi} = -2.340^\circ/\text{year}$ を用いる。 $a_1, e_1, e_2, \Delta\varpi$ を一定とし、一組の (a_2, θ_2) を決め、短周期成分である l_1, l_2 について $l_2 = (l_1 - \theta_2 + \Delta\varpi)/3$ の関係を保ちながら数値的に平均操作を行い l_1, l_2 を消去する。この操作を (a_2, θ_2) を変化させながら繰り返せば摂動関数の等エネルギー曲線が求まる。この図から軌道長半径と臨界引数の関係が求まる (図 2a)。図 2a の軌道要素は $a_1 = 0.115, e_1 = 0.15, e_2 = 0.3, \Delta\varpi = 240^\circ$ 、中心星、惑星の質量はそれぞれ $1.03M_\odot, 0.83M_J, 0.20M_J$ としている。このときの θ_2 の秤動中心は約 80° に現われ、惑星 2 の軌道長半径は約 0.24AU となっている。図中の黒丸は数値積分の結果 (初期値は表 1) で積分期間は 100 年である。短周期変

動のため点は大きく変動している。 $a_1 : \theta_2$ の関係は a_2 を固定し a_1 をパラメータとして同様な操作を行う。かに座 55 惑星系の場合、 θ_2 の秤動中心は 86° で解析理論と数値積分の結果は良く一致している。

θ_2 の秤動中心は離心率 (e) と近星点経度差 ($\Delta\varpi$) に依存する。 e_2 と $\Delta\varpi$ を変化させながら θ_2 の秤動中心を求めたものが図 2b である。図は $\Delta\varpi$ を 0° から 180° まで 60° おきに、離心率は 0.1, 0.2, 0.3 と変化させて描いている。 $\Delta\varpi$ が $180^\circ \sim 360^\circ$ の結果は $\Delta\varpi = 180^\circ$ に対して対称である。 e_2 が小さい場合 θ_2 の秤動中心は 1 箇所であるが、 e_2 が大きくなると θ_2 の変化に対する摂動関数の等高線はなだらかになり、より大きな e では秤動中心は分離して 2 箇所になる。このように臨界引数の秤動中心が分離し、 0° や 180° と異なる値になる例は摂動天体が内側で 1:1, 2:1, 3:1, ... 平均運動共鳴の場合に起こる。

2.2 近星点経度差 ($\Delta\varpi$) の秤動

式 (8) または (11) で Θ, θ_2 を一定とし、3:1 平均運動共鳴の関係を保ちながら平均操作により l_1, l_2 を消去すると、 a_1, a_2 は一定となり摂動関数は $e_1, e_2, \Delta\varpi$ だけの関数となる。惑星系の全角運動量は保存されるので式 (7) か (10) から e_1 または e_2 の片方を消去することができ、 e_1 または e_2 と $\Delta\varpi$ の関係を求めることができる。図 3a はかに座 55 惑星系の内側 2 惑星の近星点経度差と惑星 1, 2 の離心率の関係を表す等エネルギー曲線である。初期の軌道要素は $a_1 = 0.115AU, a_2 = 0.24AU, e_1 = 0.03, e_2 = 0.41, \theta = 78^\circ$ としている。かに座 55 惑星系内側 2 惑星の全角運動量は初期の $a_1, a_2, e_1, e_2, m_0, m_1, m_2$ から求める。図中黒丸は表 1 の値を初期値とした数値積分の結果である。かに座 55 惑星系では、 $\Delta\varpi$ の秤動中心は 240° 付近に現われる。

この秤動中心の値は離心率と臨界引数に依存する。離心率と臨界引数を変化させたときの惑星 1 の等エネルギー曲線の変化を図 3b に示す。 $\Delta\varpi$ の秤動中心の変化は θ_2 が 180° に対して、対称となるので図 3b には θ_2 が 0° から 180° 間での様子を示している。 $\theta_2 = 0^\circ$ の場合、中心星に対して惑星 1 と惑星 2 が同じ方向になるのは惑星 2 の近星点となるので、 e_2 が大きくなると 2 惑星が大接近する可能性があり等エネルギー曲線が乱れている。

2.3 平均運動共鳴と近星点の連動

図 4 は図 2b、図 3b をまとめた図である。黒丸実線は $a_1 = 0.115, a_2 = 0.240, e_1 = 0.15, e_2 = 0.3$ の場合の $\Delta\varpi$ に対する θ の秤動中心の変化を示している。同様に、 θ_2 に対する $\Delta\varpi$ の秤動中心を求めた結果が+印破線である。 $\Delta\varpi$ (X 軸) が増加すれば θ_2 の秤動中心は約 300° から 60° まで減少する。一方、 θ_2 (Y 軸) が 0° から 360° に増加すれば $\Delta\varpi$ は破線で示すように 360° から 0° まで減少する。

図から θ_2 が秤動し (3:1 平均運動共鳴であり)、近星点経度差 ($\Delta\varpi$) も秤動する点は実線と破線の交点となり 3 箇所ある。位置を $(\Delta\varpi, \theta_2)$ で表すと 3 点はそれぞれ $(120^\circ, 280^\circ)$, $(180^\circ, 180^\circ)$, $(240^\circ, 80^\circ)$ 付近となる。図 2a から分かるように $(120^\circ, 280^\circ), (240^\circ, 80^\circ)$ の 2 点のポテンシャルは極小で安定点であるが、残りの $(180^\circ, 180^\circ)$ 点は鞍部であって安定点ではない。安定点 $(120^\circ, 280^\circ)$ と $(240^\circ, 80^\circ)$ は点 $(180^\circ, 180^\circ)$ に対して点对称となっている。

かに座 55 惑星系における惑星の配置は $(\Delta\varpi, \theta_2)$ が $(245.1^\circ, 86.4^\circ)$ になるような配置で、理論から求めた $(240^\circ, 80^\circ)$ に近い値となっている。実際この系は θ_2 が秤動 (3:1 平均運動共鳴) し、 $\Delta\varpi$ も秤動する安定な系である。

3 数値積分

表 1 に Fischer et al.(2003) が決定し、Ji et al.(2003) が用いたかに座 55 惑星系の軌道要素を示す。また図 1 にはその軌道要素を初期値とした 1000 年間と 100 万年間の数値積分の結果 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta\varpi$) を示す。

数値積分の初期値は殆どの場合表 1 の値を使用した。が、軌道傾斜角が 0° 以外の場合や $\theta_2, \Delta\varpi$ による惑星系の安定性を調べる場合は必要に応じて軌道要素を変更している。数値積分法は可変きざみの外挿法を用いた。かに座 55 惑星系 (表 1 の軌道要素) は 1000 万年以上内側 2 惑星は 3:1 平均運動共鳴にあり $\theta_2, \Delta\varpi$ の秤動が維持されていて安定である。図 4 の実線と破線の交点のうち安定点である 2 点 ($120^\circ, 280^\circ$), ($240^\circ, 80^\circ$) を初期値とした軌道も 1000 万年間安定である。しかし、惑星配置を残りの交点 ($180^\circ, 180^\circ$) に選んだ初期値では、この点は鞍点であるために、軌道は $\theta_2, \Delta\varpi$ が回転 (一時期秤動) して約 60 万年後に不安定になる。

3.1 θ_2 の変化と軌道の安定性

図 4 で $\Delta\varpi = 120^\circ$ が一定の点 ($120^\circ, \theta_2$) で θ_2 を 30° おきに変化し、系の安定性を調べた結果が図 5 である。縦軸は軌道が不安定になるまでの時間を対数で表している。図中 ○ 印は積分期間 (1000 万年) 軌道は安定で $\theta_2, \Delta\varpi$ が安定的に秤動している軌道を表す (安定軌道)。△ 印は積分期間中不安定にはならないが $\theta_2, \Delta\varpi$ が秤動と回転を不規則に繰り返している軌道で、 θ_2 が秤動している期間は $\Delta\varpi$ も秤動し、 θ_2 が回転している期間は $\Delta\varpi$ も回転している (準安定軌道)。× 印は積分期間内に軌道が不安定になる場合で、 $\theta_2, \Delta\varpi$ 共に回転していて秤動する期間がないか、あっても短時間で秤動が崩れる軌道である (不安定軌道)。準安定軌道と不安定軌道の明確な差は分かっていないが、準安定軌道の $\theta_2, \Delta\varpi$ の変動幅に比べ不安定軌道の変動幅は大きくなっている。 $\Delta\varpi = 120^\circ$ では、安定軌道は ($120^\circ, 280^\circ$) 付近、準安定軌道は ($120^\circ, 80^\circ$) 付近で、それ以外は不安定軌道になっている。図 4 に示された安定点のもう一方の点を含む $\Delta\varpi = 240^\circ$ では、($240^\circ, 80^\circ$) 付近が安定軌道、($240^\circ, 280^\circ$) 付近が準安定軌道で、それ以外の軌道は不安定軌道となっている。

安定、準安定、不安定軌道の特徴的な例を図 6a, 6b, 6c に示す。図は上から 1000 万年間の $\theta_2, \Delta\varpi$ の時間変化と $\Delta\varpi : \theta_2$ の関係を示している。安定軌道 (図 6a) は $\Delta\varpi, \theta_2$ がそれぞれ $120^\circ, 280^\circ$ の回りを秤動しているために $\Delta\varpi : \theta_2$ のグラフは ($120^\circ, 280^\circ$) 付近に集中している。

Elements	Planet 1	Planet 2	Planet 3
Mass $\times \sin i (M_J)$	0.83	0.20	3.69
Period (days)	14.65	44.27	4780
Semi-major axis (AU)	0.115	0.241	5.461
Eccentricity	0.03	0.41	0.28
Argument of periastron (deg.)	90.25	46.39	218.91
Longitude of node (deg.)	138.56	306.24	227.48
Mean anomaly (deg.)	296.98	159.53	345.58

Table 1 — Orbital Elements of the 55 Cnc Planetary System

準安定軌道（図 6b）は $\Delta\varpi, \theta_2$ が秤動と回転を繰り返しているが回転している期間でも大部分図 4 の実線と破線に沿って $\Delta\varpi, \theta_2$ の関係を保ちながら回転している。一部分 $\Delta\varpi$ による θ_2 の変化が $\Delta\varpi = 180^\circ$ に対して対称の位置に近い変化となっている。図 6c は不安定軌道の例である。安定軌道、準安定軌道、不安定軌道を比較すると、 $\Delta\varpi = 80^\circ$ 付近での θ_2 の振幅が安定軌道では小さく、不安定軌道では大きくなっている。

4 結論

解析的永年摂動論によると臨界引数の秤動中心は離心率、近星点経度差に依存する。同様に近星点経度差の秤動中心は離心率、臨界引数に依存する。この理論によると $(\Delta\varpi, \theta_2)$ が $(120^\circ, 280^\circ)$, $(240^\circ, 80^\circ)$ 付近では $\theta_2, \Delta\varpi$ が共に秤動する安定な軌道領域が存在する。かに座 55 惑星系の惑星配置 $(\Delta\varpi, \theta_2)$ は $(245.1^\circ, 86.4^\circ)$ で解析的永年摂動論の安定点付近になるような惑星配置である。この場合 θ_2 (3:1 平均運動共鳴) と $\Delta\varpi$ が両方共に秤動して惑星系は安定である。準安定軌道は $(120^\circ, 80^\circ)$, $(240^\circ, 280^\circ)$ の惑星配置で、これは安定点に対して $\theta = 180^\circ$ の対称の位置になっている。この配置では積分期間 (1000 万年) 間内で軌道は不安定になっていないが $\Delta\varpi, \theta_2$ は回転と秤動を不規則に繰り返している。 $\theta_2, \Delta\varpi$ の変化範囲は図 4 の実線と破線の領域か $\Delta\varpi = 180^\circ$ に対して対称になる領域になっている。秤動中心からの変動幅が小さいときは安定軌道、大きくなって回転と秤動の境界付近の軌道が準安定軌道、それ以上変動幅が大きいと不安定軌道になるが、安定軌道、準安定軌道、不安定軌道の正確な境界条件については今後の課題である。

5 終わりに

複数の惑星が存在する太陽系外惑星系が数多く発見されている。それらの系は離心率が比較的大きな系で、これらの系が長期間安定であるためには、惑星相互の大接近を回避する種々の安定化機構が働くことが必要である。今回明らかになった臨界引数と近星点経度差の関係が他の系外惑星系にも応用できるかどうかは今後の研究課題である。また、系を安定にするそのほかの機構についても調べる必要がある。

References

- [1] Fischer, D., et al.: 2003, *Astrophys. J.*, in press.
- [2] Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., and Li, G.: 2003, Could the 55 Cancri Planetary System really be in the 3:1 Mean Motion Resonance?, *Astrophys. J.*, **585**, L139-L142.
- [3] 中井宏、木下宙: 2001, 近点の連動と惑星軌道の安定性, 第 33 回天体力学研究会集録, 180-188.
- [4] Yoshikawa, M.: 1990, Motions of Asteroids at the Kirkwood Gaps I. On the 3:1 Resonance with Jupiter, *Icarus*, **87**, 78-102.

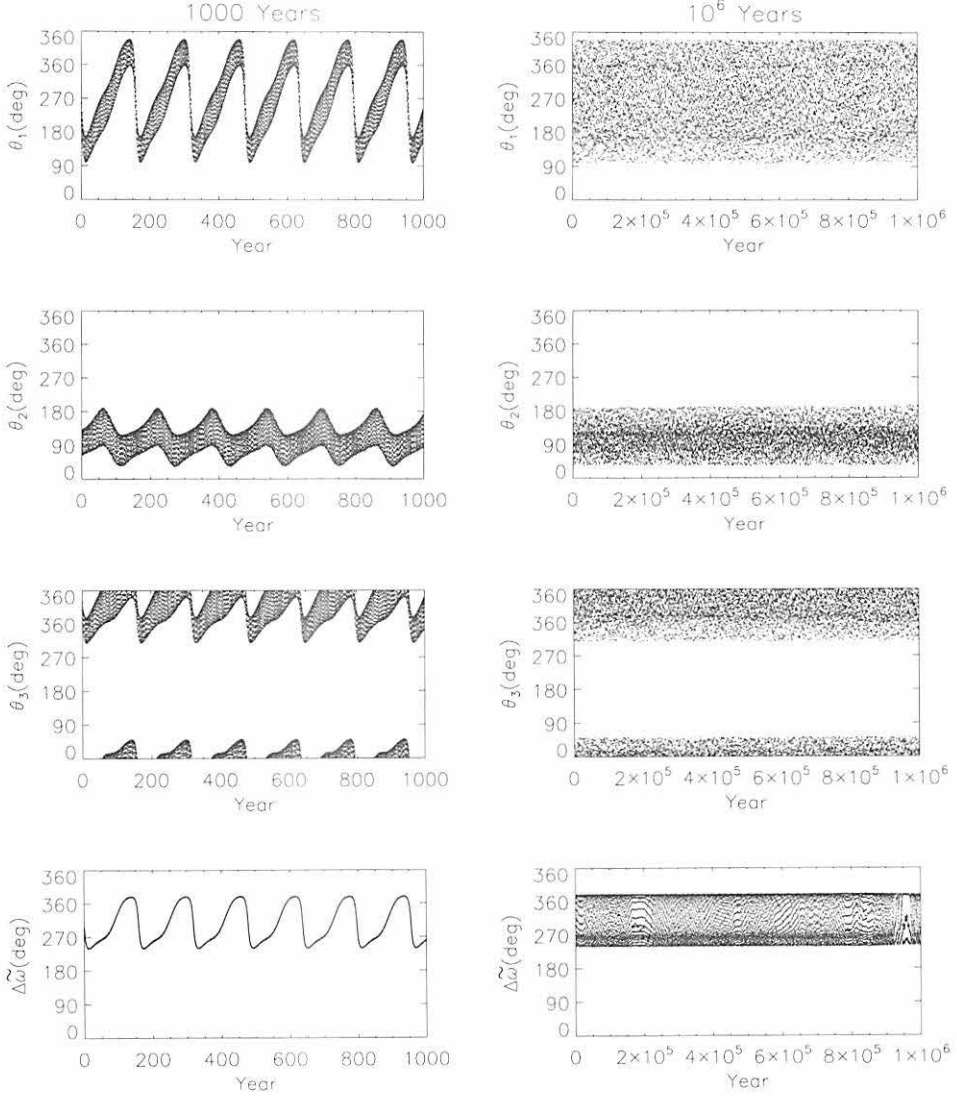


Figure 1. Variations of the three critical arguments $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ and the relative apsidal longitude $\Delta\varpi$ of the 55 cancri planetary system.

The time scales are 1000 years and 1 million years, respectively. Three critical arguments are $\theta_1 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\varpi_1$, $\theta_2 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\varpi_2$ and $\theta_3 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + \varpi_1 + \varpi_2$, where λ_1 and λ_2 are the mean longitudes of planets, respectively, and ϖ_1, ϖ_2 denote their periastron longitudes. Subscripts 1 and 2 denote an inner planet and an outer planet, respectively. Mean values of $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ and $\Delta\varpi$ are about $216.5^\circ, 86.4^\circ, 331.5^\circ$ and 245.1° , respectively, and the following relations exist between mean values, $\theta_1 = \theta_2 + 2\Delta\varpi$ and $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\varpi$.

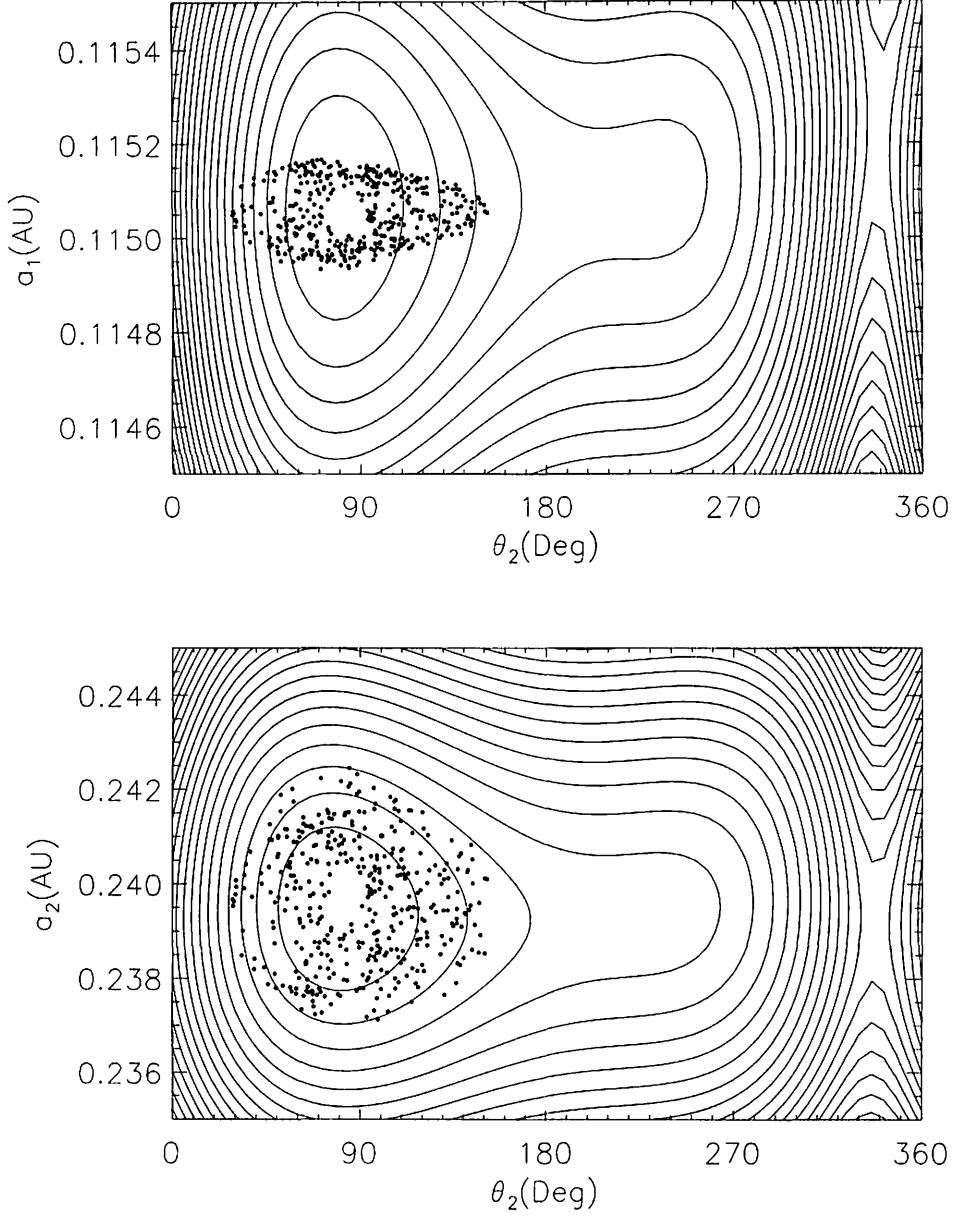


Figure 2a. Equi- $\langle R \rangle$ potential curves ($\theta_2 : a_1, \theta_2 : a_2$) of the 55 cancri planetary system. Parameters for the panels are $a_1 = 0.115AU, a_2 = 0.24AU, e_1 = 0.15, e_2 = 0.30$ and $\Delta\varpi = 240^\circ$. The dots show the solution by numerical integration for time scale 100 years.

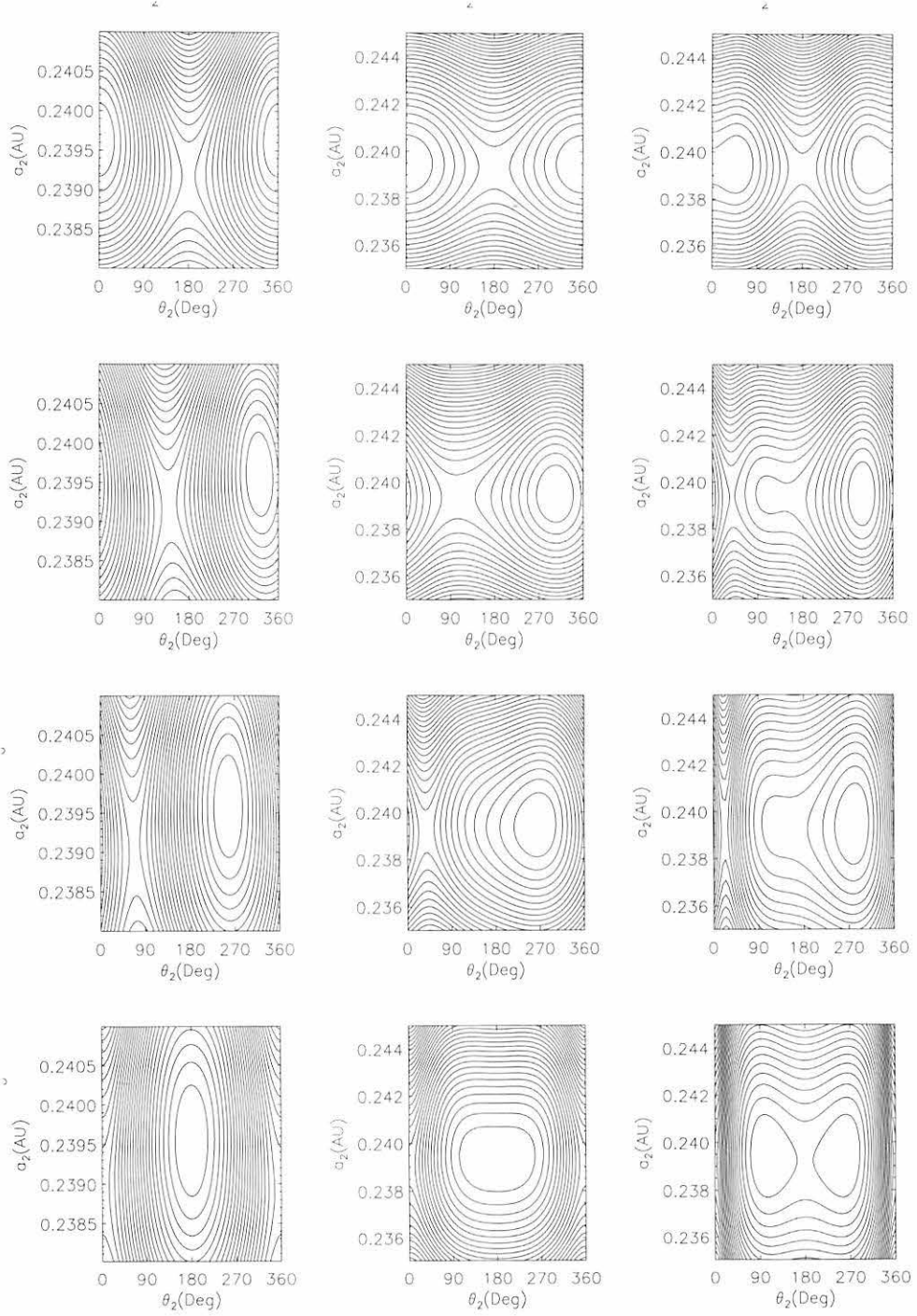


Figure 2b. Equi- $\langle R \rangle$ potential curves ($\theta_2 : a_2$). e_2 takes the value of 0.1, 0.2 and 0.3, and $\Delta\varpi$ takes the value of 0° , 60° , 120° , 180° . The other parameters are same as for figure 2a.

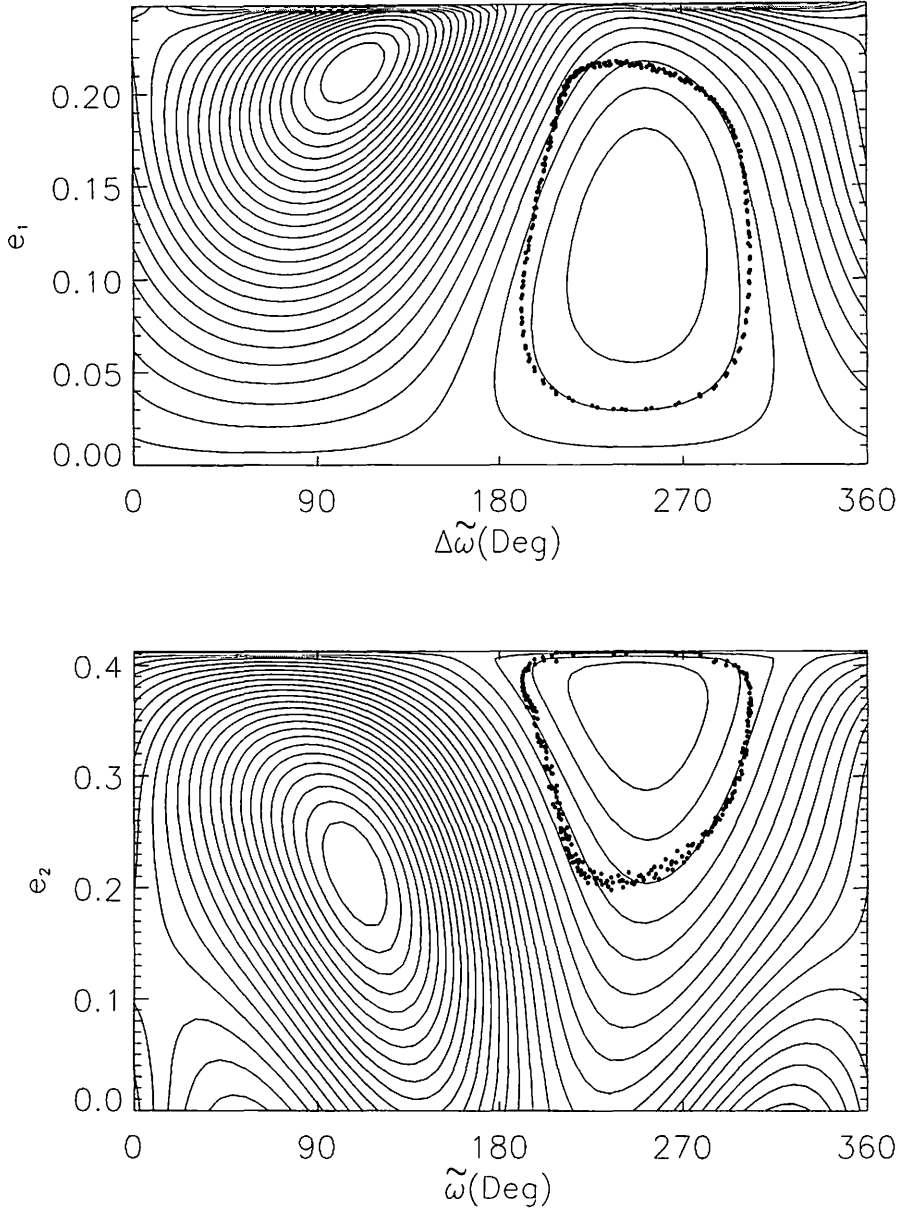


Figure 3a. Equi- $\langle R \rangle$ potential curves ($\Delta\varpi : e_1, \Delta\varpi : e_2$) of the 55 cancri planetary system. Parameters for the panels are $a_1 = 0.115AU, a_2 = 0.241AU, e_1 = 0.03, e_2 = 0.41$ and $\theta_2 = 78^\circ$. The dots show the solution by numerical integration for time scale 100 years, which is in good agreement with the analytical curve.

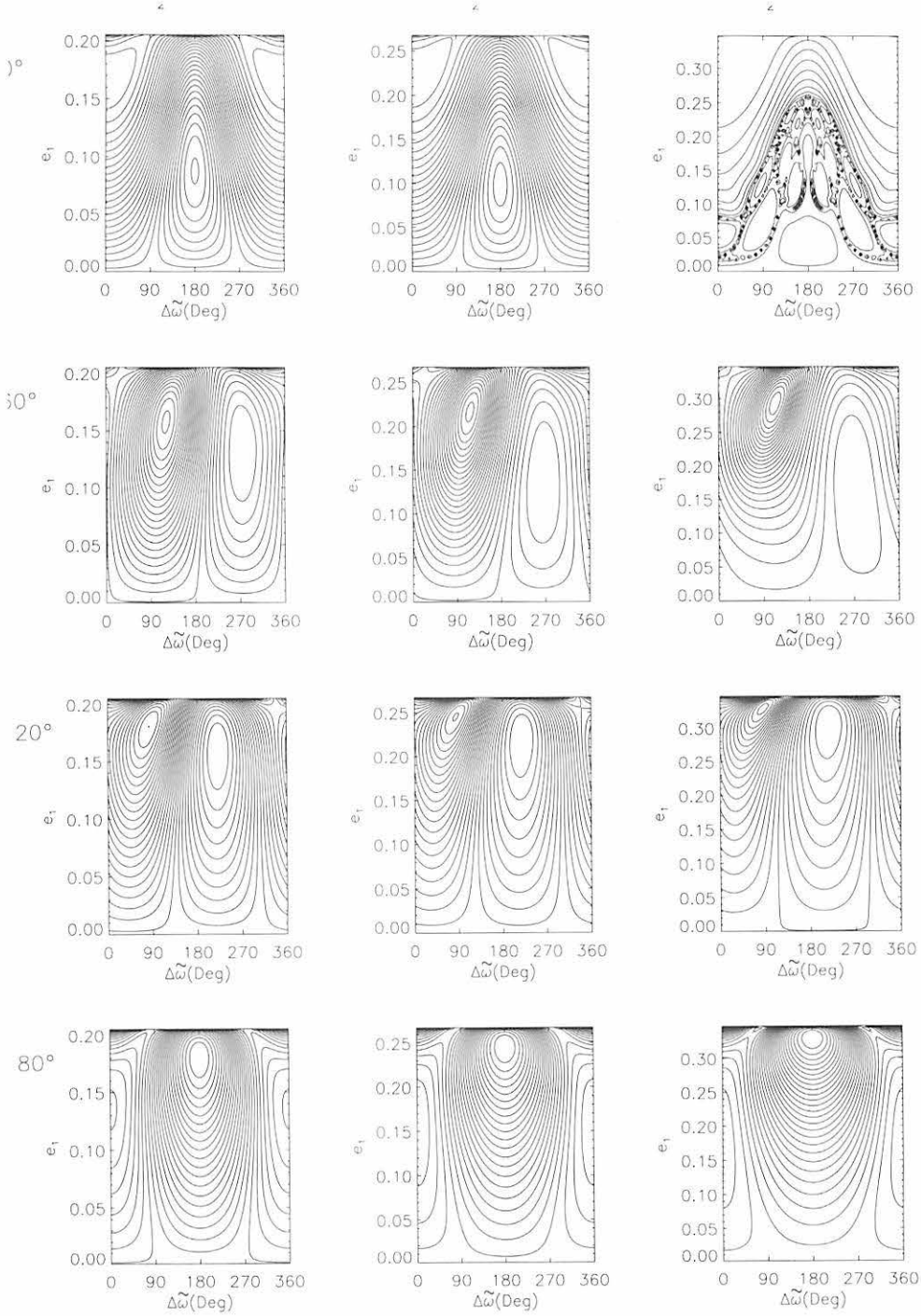


Figure 3b. Equi- $\langle R \rangle$ potential curves ($\Delta\varpi : e_1$). e_2 takes the value of 0.1, 0.2 and 0.3, and θ takes the value of $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$. The other parameters are $a_1 = 0.115AU, a_2 = 0.240AU, e_1 = 0.15, e_2 = 0.30$.

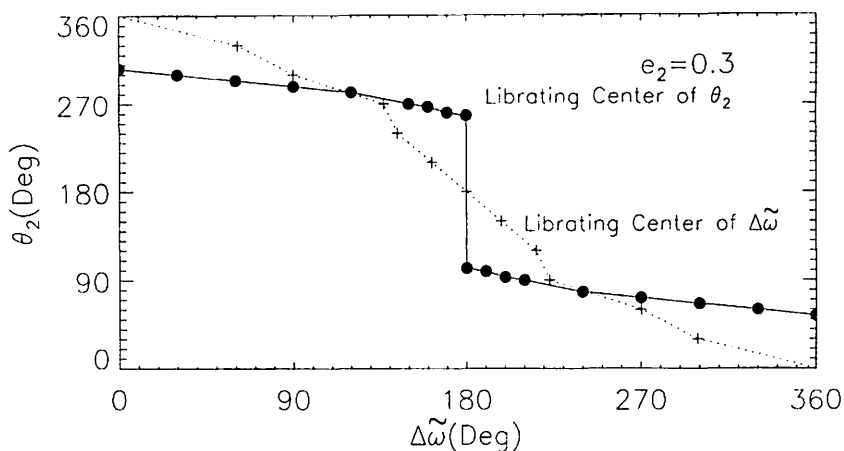


Figure 4. The libration centers of θ_2 denoted by the filled circles are plotted with respect to the $\Delta\omega$. And the libration centers of $\Delta\omega$ denoted by the plus signs (+) are plotted with respect to the θ_2 .

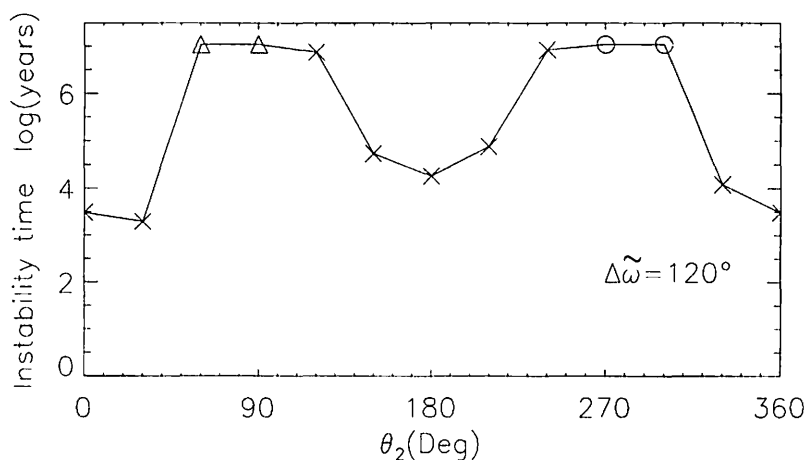


Figure 5. The logarithm to instability time of test planetary systems are plotted with respect to the θ_2 . The open circles indicate that the planetary systems are still stable with 3:1 mean motion resonance and apsidal resonance for 10 million years. The open triangles indicate that the planetary systems are still stable for 10 million years, but θ_2 (3:1 mean motion resonance) and $\Delta\omega$ interchange between circulations and librations irregularly. The $\times$ symbols indicate that the planetary systems become unstable in less than 10 million years.

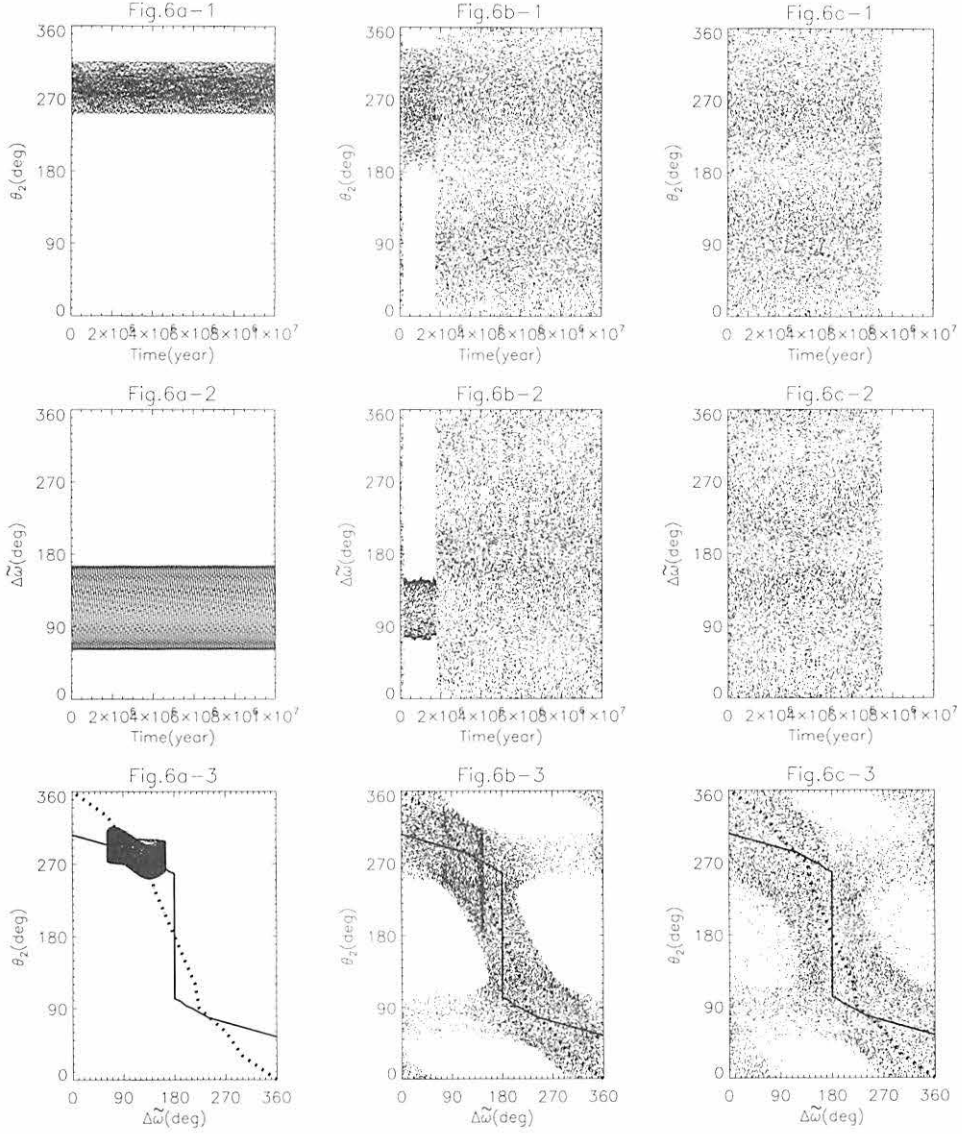


Figure 6. (Upper two panels 1-2 of each column): Variations of θ_2 and $\Delta\varpi$ are plotted with respect to the time, and (low panel 3): $\Delta\varpi$ versus θ_2 . Three panels at left column (figure 6a) show θ_2 , $\Delta\varpi$, and $\Delta\varpi$ versus θ_2 of stable systems (indicated by $\bigcirc$ in figure 5). Three panels at center (figure 6b) show θ_2 , $\Delta\varpi$, and $\Delta\varpi$ versus θ_2 of quasi-stable systems (indicated by $\triangle$ in figure 5). Right three panels (figure 6c) show θ_2 , $\Delta\varpi$, and $\Delta\varpi$ versus θ_2 of unstable systems (indicated by $\times$ in figure 5).

複数地点の日食観測から求めた ΔT および月運動の潮汐項 ΔT and the Tidal Acceleration of the Lunar Motion from Eclipses Observed at Plural Sites

Kiyotaka Tanikawa and Mitsuru Sôma

National Astronomical Observatory of Japan, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan

ABSTRACT

The eclipse on BC 188 Jul 17 was observed and recorded both at Changan (China) and Rome (Italy). The eclipse on AD 873 Jul 28 was observed and recorded both at Nishapur (Iran) and Kyoto (Japan). The eclipse was annular at Nishapur. These plural records of deep eclipses are rare in the history and useful for the determination of the clock correction ΔT and the lunar tidal acceleration $\dot{n}$. We try to determine as precisely as possible the range of two parameters. If we fix the tidal acceleration to $-26''.0/\text{cy}^2$, we get, as a best estimate, $12581 < \Delta T < 12741$ from the BC 188 eclipse and contemporary eclipses, and $3327 < \Delta T < 3498$ from the AD 873 eclipse and contemporary eclipses.

紀元前 188 年 7 月 17 日の日食は長安 (中国) とローマ (イタリア) で観測され記録された。紀元 873 年 7 月 28 日の日食はニシャプール (イラン) と京都 (日本) で観測され記録された。この日食はニシャプールでは金環であった。このような深い日食の複数記録は歴史上まれであり、また時計補正 ΔT や月潮汐加速 $\dot{n}$ を決めるのに有用である。ここでは、できる限り精密にこの 2 つのパラメータの範囲を決めるつもりである。潮汐加速を $-25''.83/\text{cy}^2$ と決めると、最良の見積もりとして、紀元前 188 年の日食およびそれと同時代の日食から $12581 \text{ 秒} < \Delta T < 12741 \text{ 秒}$ が得られ、紀元 873 年の日食および同時代の日食から $3327 \text{ 秒} < \Delta T < 3498 \text{ 秒}$ が得られた。

1 Introduction

最近の仕事 ([Tanikawa & Sôma(2002)], [Tanikawa & Sôma(2004)]), [Sôma et al. (2004)], [Kawabata et al. (2004)] により、ほぼ同時代の食や掩蔽などの天文観測が、時計補正 $\Delta T = \text{TT} - \text{UT}$ と月運動の潮汐加速の同時決定にきわめて有用であることがわかった。同時決定法は文献 [Kawabata et al. (2004)] に記述した。 ΔT の長期変動の予備的結果は [Sôma et al. (2004)] に与えた。手法の有用性は時間差が小さいほど、観測地の距離が大きいほど、そして食が深いほど増加する。

本報告では、われわれの手法を 紀元前 188 年 7 月 17 日と紀元 873 年 7 月 28 日の 2 つの日食に適用する。どちらの日食も数千 km 離れた複数の場所で観測された。前者は長安とローマで観測され、後者は京都とニシャプール (Nishapur, Iran) で観測された。紀元前 188 年 7 月 17 日の日食の場合、ほかに同時代の食が 紀元前 198 年 8 月 7 日と紀元前 181 年 3 月 4 日にあり、漢書に記録されている。どちらも長安で観測されたものである。3 つの時間差はたったの 17 年であるので、われわれの手法から、パラメータ範囲が狭く得られることが期待できる。紀元前 188 年 7 月 17 日の日食に関しては矛盾する記録が中国にあるが、その矛盾を解いた。すなわち、帝紀では皆既と書き、五行志ではほぼ皆既という。われわれの解析によると、日食は長安でほぼ皆既であった。そこで、'ほぼ皆既' とは食分としてどの範囲を言うかについて解析した。今

回の解析結果は、[Sôma et al. (2004)] の結果の改良になっている。その論文では紀元前 188 年 7 月 17 日の日食は単独で解析した。

紀元 873 年 7 月 28 日の日食の場合、ほぼ同時代のものとして、紀元 822 年 4 月 25 日の日食が 舊唐書と新唐書に記録され、紀元 975 年 8 月 10 日の日食が日本紀略やほかの日本の書物に記録されている。とはいえ、最終的には紀元 822 年 4 月 25 日と紀元 873 年 7 月 28 日の日食のみパラメータの決定に使ったので、時間差は 51 年までに縮まる。紀元 822 年 4 月 25 日の日食に関する 舊唐書の記録には、余分な記述がある。すなわち、「不盡者四之一、燕趙見之、既」、つまり、「4 分の 1 が欠けずに残った。燕や趙では皆既であった」とある。この記述を独立な記録として扱ってパラメータ決定に利用する。これをするにあたって、「不盡者四之一」の意味に関してある解釈を提案する。

中国のデータに関しては、四庫全書 [Siku Quanshu(1999)] の電子版を使って探索し、データは中華書局出版の漢書および 舊唐書と新唐書から取った。日本のデータは [Kanda(1935)] から取った。本報告では、月太陽の暦は JPL の DE406 ([Standish (1998)]) から取り、地球の歳差や恒星時に関しては、[Williams(1994)] の公式を使用した。

section ΔT と潮汐加速の決定

1.1 紀元前 188 年 7 月 17 日の日食

紀元前 188 年 7 月 17 日の日食 (オッポルトゥアー番号 2425) は長安とローマで観測された。観測地の地理学位置は表に記載した。中国の記録は天文学者によって書かれた公式のものであり、一方ローマの記録は重要な政治的事件に付随する記述として、天文学者ではない人物によって書かれた。この日食に加えて、ほぼ同時代の 2 つの日食を解析してパラメータ決定の信頼性を上げるつもりである。これらは紀元前 198 年 8 月 7 日と紀元前 181 年 3 月 4 日の日食である。どちらも漢書に記録があり、皆既と記されている。観測は長安で行なわれたとみなす。以上 3 つの日食においては ΔT と $\dot{\alpha}$ が共通であったと仮定する。

記録が何と言っているかさっそく見てみよう。紀元前 188 年 7 月 17 日の日食に関する漢書の記述は以下のとおりである。

(1a) 漢書卷二 (恵帝七年) 夏五月丁卯 [4]^a、日有蝕之、既。(師古^b曰「既、盡也」)

^a数字は甲子 [1] から始まる干支の通算番号。

^b顔師古 (581 - 645) は唐王朝初期の著述家。

(1b) 漢書卷二十七下之下 五行志第七下之下
(恵帝七年) 五月丁卯、先晦一日、日有食之、幾盡、在七星初。

帝紀の記述と五行志の記述が異なっている。帝紀では「既」とあり、五行志では「幾盡」とある。当面、食分に関しては結論を出さずにこのままにしておく。

次に、紀元前 188 年 7 月 17 日の日食に関するローマの記録が言うところに耳を傾けよう。これは Stephenson (1997, p.367) に引用されている。それを再現すると、

(1c) Then, when Marcus Valerius Messala and Gaius Livius Salinator had been inaugurated as consuls on the Ides of March, they consulted the senate... Before the new magistrates (i.e. the consuls) departed for their provinces, a three-day period of prayer was proclaimed in the name of the College of Decemvirs at all the street corner shrines because in the daytime, between about the third and fourth hours, darkness had covered everything (*tenebrae obortae fuerant*).

その後、マルクス バレリウス メッサラとガイウス リビウス サリナトルは三月のイデスにコンスルとして就任するとき、元老院に意見を求めた... 新しい執政官 (す

188 BC 7 17 TT - UT = 12600.0 sec

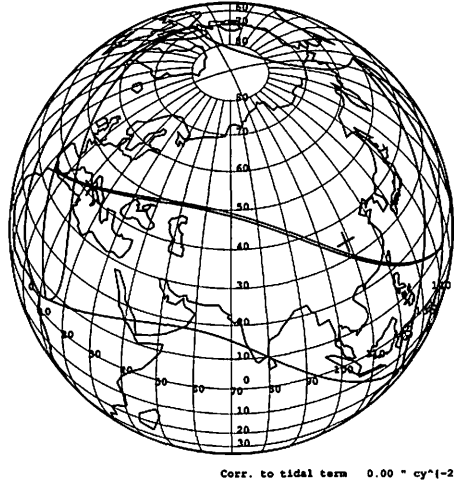


Figure 1.1: 紀元前 188 年 7 月 17 日の日食の皆既日食帯。×印は長安とローマを示す。

なわち コンスル) が自分達の属州に帰る前に、祈りのための 3 日間が、すべての街角の神社において 10 大官 college の名で宣言された。なぜなら、昼間、第三時と第四時の間に、すべてが暗闇に包まれたからである (*tenebrae obortae fuerant*)。

[Livy, XXXVIII 36,4; trans. Sage(1936, vol.XI, pp. 117-119).]

Stephenson が彼の本 (1997) で言うには、「紀元前 188 年の食がローマにおける昼の間の暗闇の原因であろうが、状況はあまりにも曖昧で、この記録から ΔT の範囲を出すことを保証してはくれない」われわれは、この日食から意味のあるパラメータ値を引き出したい。そこで、図 1 には、 $\Delta T = 12600$ 秒、 $\dot{n} = -25''.83/\text{cy}^2$ を仮定したときの回帰帯と部分食帯の位置を図示した。2 つの×印はローマと長安の位置を示す。この図は予備的なものである。なぜなら、ここで採用したパラメータ値が予備的だからである。しかし、ローマと長安での深い食の間に強い相関があることが見てとれる。経度差を考慮すると、ローマでは食が朝に観測され、長安では食が午後に観測されたことは明らかである。また、両観測地で皆既であることが不可能であることも明らかである。加えて、 $\Delta T > 16000$ 秒とすると、ローマでは最大食は日の出前になる。

次のデータは紀元前 198 年 8 月 7 日 (オッポルツアー番号 2402) の日食の漢書の記録である。観測地は長安であると考えられる。帝紀によると食は皆既でない。五行志では皆既である。(古代中国では、金環食は「既」と記録されたことを注意しておく。)

Table 24: 観測地の経緯度

City		longitude °	latitude °
Changan	長安	108.9	34.3
Rome		12.2	41.8
Beijing	北京	116.4	39.9
Shijiazhuang	石家荘	114.5	38.1
Nishapur		58.8	36.2
Kyoto	京都	135.8	35.0

Table 25: 紀元前 188 年 7 月 17 日の日食の場合の, 潮汐加速の関数としての ΔT の範囲.
 $\Delta \dot{n}$ 紀元前 188 年 7 月 17 日 紀元前 188 年 7 月 17 日

" / 世紀 ²	長安 秒	ローマ 秒
+4.0	11181 - 11486	12136 - 12419
+2.0	12461 - 12768	12361 - 12660
0.0	13735 - 14044	12581 - 12898
-2.0	15004 - 15316	12795 - 13131
-4.0	16268 - 16584	12997 - 13356
-6.0	17530 - 17849	13185 - 13570
-8.0	18788 - 19111	13351 - 13769
-10.0	20045 - 20373	13488 - 13945

(2a) 漢書卷一下 (高帝九年) 夏六月乙未晦 [32], 日有食之.

(2b) 漢書卷二十七下之下 五行志第七下之下
 (高帝九年) 六月乙未晦 [32], 日有食之, 既, 在張十三度.

以下に続くのは, 紀元前 181 年 3 月 4 日 (オッボルツァー番号 2441) の, これも漢書の日食記録である. 観測は長安で行なわれたと考える. 帝紀にも五行志にも食は皆既と記されている.

(3a) 漢書卷三 (高后七年) 正月己丑晦 [26], 日有蝕之, 既.

(3b) 漢書卷二十七下之下 五行志第七下之下
 (高后七年) 正月己丑晦 [26], 日有食之, 既, 在堂室九度.

上記 4 つの食データを使って紀元前 188 年あたりのパラメータ ΔT と $\dot{n}$ を見積もることにしよう. 表 2 は, 潮汐加速の関数としての ΔT の範囲を, 紀元前 188 年 7 月 17 日日食に対して示したものである. ただし, 各観測地で食は皆既であったとした. 第一欄は, 潮汐加速 $\dot{n} = -25''.83/\text{cy}^2$ への補正 $\Delta \dot{n}$ を示す (以後は, $\Delta \dot{n}$ を単に潮汐加速への補正とよぶことにする). だから, たとえば, $\Delta \dot{n} = +2''.0/\text{cy}^2$ は $\dot{n} = -23''.83/\text{cy}^2$ のことである. この約束は以下ですと用いる. この値 $\dot{n} = -25''.83/\text{cy}^2$ は DE406 に固有のものであり, 最近の月レーザー測距 (LLR, Lunar Laser Ranging) 観測と合う値である ([Chapront et al.(2003)]). 第二欄と第三欄は, 同じ日食を長安とローマで観測したときに食が皆既になるための ΔT の範囲である. 同様に表 3 で, 第一欄は潮汐加速への補正, 第二欄と第三欄は 紀元前 198 年 8 月 7 日日食からの ΔT の範囲であり, 第四欄は紀元前 181 年 3 月 4 日の日食からの ΔT の範囲である. 紀元前 198 年 8 月 7 日の日食は長安で金環であった. 表 3 で, (T) は皆既, (A) は金環を表す.

図 2 には表 2 と 3 の条件を図示した. 仮定したのは, 紀元前 198 年と紀元前 181 年の間に ΔT も潮汐加速も変化しないことである. 最初に気づくのは, 日食のぜんぶ

Table 26: 紀元前 188 年 7 月 17 日の日食と紀元前 181 年 3 月 4 日日食の場合の, 潮汐加速の関数としての $\Delta\dot{n}$ の範囲.

$\Delta\dot{n}$	紀元前 198 年 8 月 7 日 長安 (A)	紀元前 181 年 3 月 4 日 長安 (T)
"		
$\frac{''}{\text{cy}^2}$	秒	秒
+4.0	—	11201 – 12096
+3.0	—	
+2.8	7238 – 8840	
+2.4	6798 – 9743	
+2.0	6575 – 10430	11517 – 12426
–0.0	6232 – 13090	11816 – 12741
–0.6	6231 – 13787	
–0.8	6236 – 9597	9967 – 14014
–1.2	6253 – 8780	11246 – 14461
–1.6	6278 – 8504	11983 – 14900
–2.0	6310 – 8341	12607 – 15331
–4.0	6551 – 8097	15162 – 17414
–6.0	6878 – 8210	17361 – 19412
–8.0	7258 – 8468	19417 – 21359
–10.0	7673 – 8808	21393 – 23274

が皆既または金環ではあり得ないことである. というのは, $(\Delta\dot{n}, \Delta T)$ 面で, 4 本の皆既帯の共通部分は空だからである. 紀元前 188 年の日食は, 漢書の帝紀では皆既とされているが, 五行志では, ほぼ皆既 (幾盡) と書かれている. 後者が真実を述べていると取るのがもっともらしい. なぜなら, 皆既は決してほぼ皆既とは書かれないであろうからである. 紀元前 181 年の長安の日食が皆既と解釈できるのは, 帝紀にも五行志にも皆既と書いてあるからである. この解釈の正しさは, 紀元前 188 年 7 月 17 日の日食のローマでの観測により強められる. 事実, ローマでの日食が皆既なら, 紀元前 181 年の長安での日食はほぼ自動的に皆既になる. というのは, $(\Delta\dot{n}, \Delta T)$ 面の後者の日食の皆既食帯は前者の皆既食帯を含んでしまうからである (図 2). 紀元前 198 年の日食の漢書の 2 つの記録は完全には一致しない. 五行志の記述の方が詳しい. この日食が長安で金環であったと考えたい. その理由は, それ以外の場合には, 図 2 の 1 点鎖線の左右の外側で観測したことになり, 潮汐加速の値が $-25''.83/\text{cy}^2$ から大きくずれてしまうからである. (図 2 を見よ).

上記考察から導かれる結論を, 紀元前 198 年と紀元前 181 年の日食は少なくとも, 長安においてそれぞれ金環および皆既であり, 加えて, 紀元前 188 年のローマの日食は皆既である, としたい. 長安において紀元前 198 年日食が金環で, 紀元前 181 年日食が皆既である条件から, ΔT の範囲

$$11654 \text{ sec} < \Delta T < 13092 \text{ sec} \quad (1)$$

を得る. $\dot{n}$ の範囲は $-28''.23/\text{cy}^2 < \dot{n} < -24''.73/\text{cy}^2$ である. これに, 紀元前 188 年日食がローマで皆既であったとする条件を加えると,

$$12535 \text{ sec} < \Delta T < 13092 \text{ sec}. \quad (2)$$

を得る. こうして, ΔT の範囲は狭くなる. 公式には, 潮汐加速の範囲は $-28''.23/\text{cy}^2$ と $-25''.43/\text{cy}^2$ の間にある. この項を $-25''.83/\text{cy}^2$ に決めれば, ΔT の範囲は, ローマの記録を含めなければ

$$11816 \text{ sec} < \Delta T < 12741 \text{ sec}, \quad (3)$$

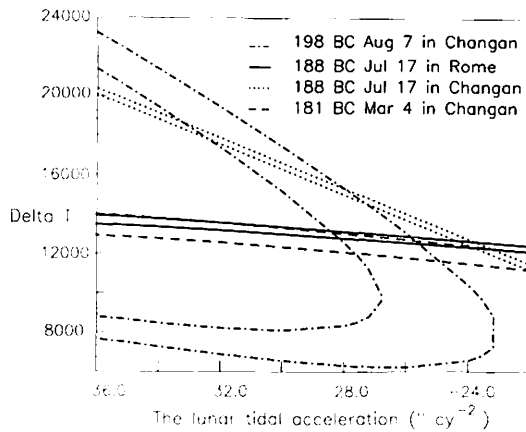


Figure 1.2: 3つのほぼ同時代日食, 紀元前198年8月7日, 紀元前188年7月17日, and BC 181 Mar 4の4個の観測の $(\Delta \dot{n}, \Delta T)$ 面の皆既または金環領域.

となり, ローマの記録を考慮すれば

$$12581 \text{ sec} < \Delta T < 12741 \text{ sec}, \quad (4)$$

となる.

最後に, 紀元前188年7月17日の日食の'幾盡'の食分の大きさを見積もろう. 潮汐加速が $-25''.49/\text{cy}^2$ であって, $\Delta T = 12689$ 秒のときに最大食分0.947が紀元前188年7月17日世界時07:48.6に達成される. 潮汐加速が $-27''.97/\text{cy}^2$ であって, $\Delta T = 12810$ 秒のとき, 最小食分0.857が紀元前188年7月17日世界時08:08.0に達成される. もっとも確からしい値は, 潮汐加速として $-25''.83/\text{cy}^2$, また $\Delta T = 12661$ を採用したときに得られる. そのときの食分は紀元前188年7月17日世界時07:52.2の0.932である. だから, いまの場合, 食がほぼ皆既と言われるのは, 食分が0.93以上のときであろう.

1.2 紀元873年の日食

紀元873年7月28日の日食は, オッポルトゥアー番号4955であって, イランの北の都市ニシャプールと日本の京都で観測された. 観測値の経緯度は表1に記載した. この日食についての日本のデータは三代實録や日本紀略に記載されている. 前者によると以下のとおりである.

(4a) 秋七月癸亥朔, 日蝕無光, 虧昃如月初生, 自午至未乃復

一般的な注釈を述べるなら, この時期の日本の歴史書は多数の食を記載しているけれども, ほとんどが予想されたものである. 記録は簡単に「日蝕」とか「日有蝕之」と書かれている. だから, ほとんどすべての記録は, ΔT の決定には使えない. だが, 数少いけれども例外がある. 紀元873年7月28日の日食記録がこれである. 上のような補足的な記述がある. この記録が観測記録であると信じられるのはこのためである.

紀元873年7月28日の同じ日食をニシャプールで観測した記録がある. これは Stephenson(1997, p.467) から取ってきた. 記録が言うには,

(4b) AD 873 Jul 28 [Tuesday] (annular: mag.= 0.94 Nishapur)

This solar eclipse was observed by Abu al-'Abbas al-Iranshahri at Nishapur early in the morning on Tuesday the 29th of the month of Ramadan in the year 259 of *al-Hijrah* ... (date on Persian calendar) ... He mentioned that the Moon's body (i.e. disk) was in the middle of the Sun's body. The light from the remaining uneclipsed portion of the Sun surrounded it (i.e. the Moon). It was clear from this that the Sun's diameter exceeded in view that of the Moon.

この日食はアブ アル アッパース アルイランシャーリ によってニシャプールにおいて (ペルシア暦) ヒジラ紀元 259 年のラマダン月 29 日水曜日に観測された... 彼が言うには、月本体は太陽の中に入った。食されずに残った部分は (月を) 囲んだ。これから明らかなように、太陽の直径は月の直径より大きい。

[(*al-Qanun al-Mas'udi*); trans Said and Stephenson(1997).]

記録によると、食は明らかに金環である。

上記 2 つの記録の信頼性を上げるために、2 つの食記録を加えよう。それは、紀元 822 年 4 月 25 日の日食、オッポルツァー番号 4841 で長安で観測されたもの、そして紀元 975 年 8 月 10 日の日食、オッポルツァー番号 5184 で京都で観測されたものであり、ともに皆既と記録されている。

紀元 822 年 4 月 25 日日食の記録は

(5a) 舊唐書卷三十六 志第十六 天文下

(穆宗長慶二年) 四月辛酉朔，日有蝕之。在胃十二度，不盡者四之一，燕趙見之，既

(5b) 新唐書卷八 (穆宗長慶二年) 四月辛酉朔，日有食之。

(5c) 新唐書卷三十二 (穆宗長慶二年) 四月辛酉朔，日有食之，在胃十三度

燕趙での観測の代表地として、燕の場合は北京、趙の場合は石家荘を採用する。経緯度は表 1 に記載した。

京都で観測された紀元 975 年 8 月 10 日の日食の記録は次のとおりである。

(6) 日本紀略 天延三年七月一日辛未 [8]，日有蝕，十五分之十一，或云皆既，卯辰刻皆虧，如墨色無光，群鳥飛亂，衆星悉見。

この日食は、併せて 14 の歴史書や日記に記録されていた。朝野群載や扶桑略記はそれらのうちのひとつである。

さて、AD 873 ごろの ΔT と $\dot{n}$ を以上の日食データを使って見積もろう。表 4 は、 $\Delta \dot{n}$ の関数としての ΔT の範囲を、それぞれの日食に対して、観測地で食が皆既または金環であったとして求めたものである。第一欄は潮汐加速への補正、第三欄から六欄までは ΔT の範囲であって、長安で観測された紀元 822 年 4 月 25 日の日食、ニシャプールおよび京都で観測された紀元 873 年 7 月 28 日の日食に対するもの、そして京都で観測された紀元 975 年 8 月 10 日日食に対するものである。第二欄は紀元 822 年 4 月 25 日の日食が燕と趙において皆既であったとする記述に対応する ΔT の範囲を示す。表 4 で、(T) は皆既を、(A) は金環を意味する。

図 4 には表 4 の条件を図示した。紀元 822 年から紀元 975 年まで 153 年間、 ΔT も潮汐加速も変化しなかったと仮定する。今回も、まず気づくのは、すべての日食が皆既または金環であったわけではないことである。なぜなら、 $(\Delta \dot{n}, \Delta T)$ 面における 5 つの皆既領域と金環領域の共通部分が空となるからである。すると、紀元 822 年 4 月 25 日の日食が長安で部分食であったとするのがよさそうである。この結論は記録 (5a), (5b), および (5c) と整合的である。このとき、紀元 975 年 8 月 10 日の日食の京都の皆既領域は 紀元 873 年 7 月 28 日の日食の京都の皆既領域を含んでしまい、また、紀元

Table 27: 潮汐加速の関数としての ΔT の範囲. 日食は, 紀元 822 年 4 月 25 日, 紀元 873 年 7 月 28 日, および 紀元 975 年 8 月 10 日のもの. $\Delta\dot{n} = 0$ は $\dot{n} = 25''.83/\text{cy}^2$ に対応する.

$\Delta\dot{n}$	822 Apr 25(T)	822 Apr 25(T)	873 Jul 28(A)	873 Jul 28(A)	975 Aug 10(T)
	燕趙	長安	ニシャブール	京都	京都
$''/\text{cy}^2$	sec	sec	sec	sec	sec
+4.0	2392 - 3479	3850 - 5351	1684 - 3604	2473 - 3328	-249 - 3624
+2.0	2394 - 3492	3930 - 5444	1762 - 3682	2855 - 3716	+515 - 4041
0.0	2386 - 3498	4009 - 5537	1838 - 3760	3237 - 4106	1167 - 4452
-2.0	2368 - 3495	4087 - 5629	1912 - 3838	3619 - 4497	1757 - 4859
-4.0	2336 - 3483	4162 - 5720	1984 - 3916	4003 - 4889	2308 - 5261
-6.0	2290 - 3460	4236 - 5811	2054 - 3994	4387 - 5283	2829 - 5659
-8.0	2225 - 3424	4308 - 5901	2122 - 4072	4772 - 5678	3329 - 6053
-10.0	2137 - 3373	4377 - 5990	2188 - 4150	5157 - 6074	3812 - 6444

AD 873 7 28 TT - UT = 3500.0 sec



Figure 1.3: 紀元 873 年 7 月 28 日の日食の金環食帯. ×印はニシャブールと京都を表す.

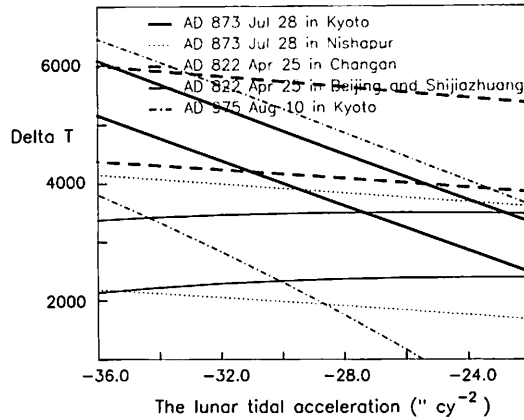


Figure 1.4: $(\Delta\dot{n}, \Delta T)$ 平面の皆既および金環食帯。観測は、ほぼ同時代の紀元 873 年 7 月 28 日、紀元 822 年 4 月 25 日、および 紀元 975 年 8 月 10 日の日食に関する 4 つの観測。右に向かって上がる実線に囲まれた領域は、紀元 822 年 4 月 25 日の日食の北京および石家荘の皆既帯を表す。

873 年 7 月 28 日日食のニシャプールの金環食領域は紀元 822 年 4 月 25 日日食の北京および石家荘の皆既食領域を含んでしまう。言い換えると、紀元 873 年 7 月 28 日日食が京都で金環であるなら、紀元 975 年 8 月 10 日日食は京都で皆既である。同様に、紀元 822 年 4 月 25 日日食が北京と石家荘で皆既なら、紀元 873 年 7 月 28 日日食はニシャプールで金環である。紀元 873 年 7 月 28 日のニシャプールの記録と紀元 975 年 8 月 10 日の京都の記録は パラメータ決定には余分である。別の見方をすれば、この 2 つの記録は、高い確率で真実である。

余分なデータを取り除いて、表 4 の条件をあらためて図 5 に描く。この場合、紀元 822 年から紀元 873 年までの 51 年間のパラメータの不変性を仮定する。だから議論の信頼性は、前段落におけるより増す。

それぞれ 2 本のほぼ平行な線によって囲まれる領域が 2 つあり、それらが共通部分を持つことが見てとれる。しかし、まだ共通部分の面積は大きい。ここではこの面積を減らす努力をしよう。そのために、「不盡者四之一」(四分の一が隠れずに残った)という句に注目する。これはたしかに何らかの意味で食の大きさを表現している。しかし、食分が 0.75 であることをこの句が述べているとは解釈できない。図 6 を見てわかるように、等食分 0.75 曲線(破線)は皆既食帯からはるかに遠く、長安はその曲線よりずっと皆既食帯に近寄っている。この句の別の解釈として、太陽円盤の周囲のうち残った割合を述べているとの解釈を提案する。残った割合が 90° 、 105° 、および 120° の場合を計算し、対応する ΔT を得たので表 5 に記載する。等 90° 線、等 105° 線、および等 120° 線を 3 本の 1 点鎖線として上から順に図 5 に描いた。図 7 には、残った太陽円盤の外周が 90° 、 105° 、および 120° の場合の実際の太陽の像を描いた。太陽像のはじは細いので、残った比率が過小評価されかねない。

さて、紀元 873 年の京都における日食と紀元 822 年の北京および石家荘の日食は金環または皆既であること、および $\Delta\dot{n} \leq +4''.0/\text{cy}^2$ であることから、 ΔT の範囲として

$$2473 \text{ sec} < \Delta T < 3498 \text{ sec.} \quad (5)$$

を得る。潮汐加速の範囲は $-27''.23/\text{cy}^2$ から $-21''.83/\text{cy}^2$ までである。「四分の一が隠れずに残った」が太陽円盤のことを言っているとの介錯に立って、数値として

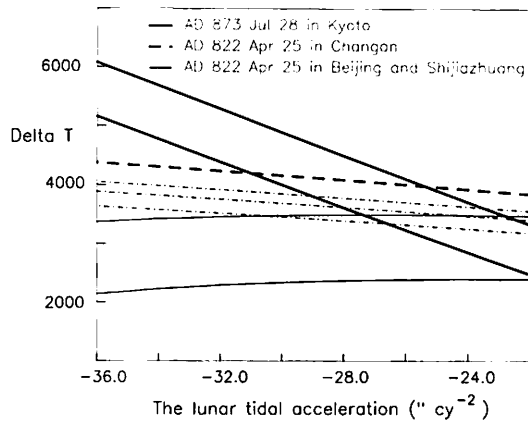


Figure 1.5: $(\dot{n}, \Delta T)$ における皆既食または金環食領域. 食はほぼ同時代の 紀元 873 年 7 月 28 日 および 紀元 822 年 4 月 25 日のものである. 点線は, 長安で観測された紀元 822 年 4 月 25 日の日食の皆既帯の下側境界を表す. 3 本のダッシュ線は, 紀元 822 年 4 月 25 日の日食を長安で観測したときの, 太陽円盤の残り角度が 90° (上), 105° (中), および 120° (下) となる軌跡を表す.

120° を採用するなら, ΔT の範囲は

$$3185 \text{ sec} < \Delta T < 3498 \text{ sec.} \quad (6)$$

となる. この場合, とくに $\dot{n} = -25''.83/\text{cy}^2$ を採用すると, ΔT の範囲はさらに狭くなって

$$3327 \text{ sec} < \Delta T < 3498 \text{ sec.} \quad (7)$$

となる.

2 議論

前節では, 複数データを使うことにより, 別々に扱うと信頼度の低いデータが信頼性を増すことを見た. これは別の場所で経験したことである ([Tanikawa & Sôma(2004)])

Table 28: 紀元 822 年 4 月 25 日の日食の場合の太陽円盤の残り角度が異なる場合の ΔT と潮汐項.

Angle	90°	105°	120°
Magnitude	0.9860	0.9789	0.9687
$\Delta \dot{n}$	ΔT	ΔT	ΔT
"/ 世紀 ²	秒	秒	秒
+4.0	3561	3405	3185
+2.0	3637	3480	3257
0.0	3710	3554	3327
-2.0	3783	3625	3394
-4.0	3853	3694	3460
-6.0	3621	3760	3522
-8.0	3986	3824	3581
-10.0	4050	3885	3637

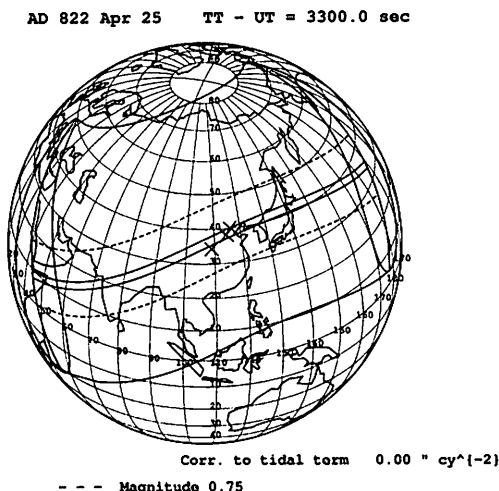


Figure 2.1: 紀元 822 年 4 月 25 日の日食の皆既日食帯。×印は南から長安, 石家荘, 北京を示す。

を見よ)。とくに, 紀元前 188 年 7 月 17 日 年の日食は, ローマでは確かに皆既である一方, 中国の歴史書の記録も正しい。[Stephenson(1997)] は ΔT の範囲として

$$\Delta T < 13830 \quad \text{or} \quad \Delta T > 14140 \quad (8)$$

を中国のデータから得た。単一のデータを使う限り, これ以上の精度は出ないであろう。

予備的な解析 (Sōma, Tanikawa, & Kawabata 2004) によれば, 月の潮汐加速は, 月レーザー測距で決定された最新値 $-25''.83/\text{cy}^2$ と過去 2000 年間一致するとして矛盾がない。この値を全歴史データに適用するなら, ΔT の範囲として (3), (4), および (7) 式で与えられる狭い範囲が得られる。

今後調べるべきことが 3 点ある。まず, 「不盡者四之一」(四分の一が隠れずに残った) の意味である。普通, 食分が歴史書に書いてある。今回, 食分 0.75 は適当でない。このことは図 5 を見れば容易に理解できる。理由は簡単である。食分は長安で 0.75 ほど小さいことはあり得ない。なぜなら, 北京や石家荘で皆既だったからである。我々は, 上の句の解釈として良さそうなものを提案した。その解釈は観測データをよく説明する。その解釈とは, その句が太陽円盤の周の残りの割合について述べている, というものであった。

2 点目は, 日食の観測方法である。著者らが理解する限り, 古代および中世の中国の天文学者は裸眼で観測を行なったと信じられている。観測が夕方であったり早朝であったりすれば, 太陽の高度は低いので大気中の塵の層によってまぶしくなくなる。しかし紀元 822 年 4 月 25 日の日食は昼に生じた。だから塵によって太陽が見やすくなることはなかったはずである。加えて, 「不盡者四之一」が我々の言う意味

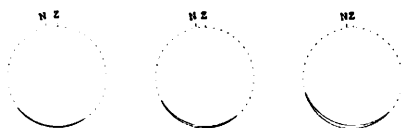


Figure 2.2: 太陽円盤の円周が 90° , 105° , および 120° 残ったとした場合の太陽の実際の像.

であるなら、裸眼観測では太陽円盤の残りの割合を見定めることは出来なかった可能性の方が高い。そこで、著者らは、中国の天文学者が何らかの薄い遮蔽物を使用したのではないかと仮説を提案する。現代の映画撮影で使用されるオーガンジーのような絹の薄布を使ったのではないであろうか。これは太陽黒点の観測にも使える。

3点目は「幾盡」の食分はいくつかという問題である。データ(1b)を他のデータと結んで、もっとも確からしい値として食分 > 0.93 を得た。他の日食を使って、別の見積もりを得たい。

Acknowledgments.

東京大学宇宙線研究所の福来正孝氏は、ニシャプールで観測された紀元873年の日食に著者らの注意を向けてくれた。議論してくれた韓延本氏に感謝する。本研究は、文部科学省の科研費の特定領域研究14023233の補助を受けた。河鯨公昭氏は本来は著者に加わるべきであるが、本人の意向により著者から名前をはずした。

References

- [Chapront et al.(2003)] Chapront, J., Chapront-Touzé, M., & Francou, G., 2003, in *Proceedings From the Science Session and Full Proceedings CD-ROM*, eds. Ron Noomen, Steven Klosko, Carey Noll, & Michael Pearlman, NASA/CP-2003-212248
- [Kanda(1935)] Kanda, S. 神田 茂 1935, *Astronomical Records in Japanese History* (日本天文史料), (Tokyo: Maruzen)(in Japanese)

- [Kawabata et al. (2004)] Kawabata, K., Tanikawa, K., & Sôma, M. 2004, in *Astronomical Instruments and Archives from the Asia-Pacific Region*, (eds. W. Orchiston, F.R.. Stephenson, S. Debarbat, & I.-S. Nha, Soeul: Yonsei University Press) (in press)
- [Oppolzer(1962)] Oppolzer, Th. Ritter von: 1962, Canon of Eclipses, translated by O. Gingerich, New York: Dover Publications INC., New York. Originally published as Vol.52 of the Memoirs, Mathematics natural Sciences Classes of the Imperial Academy of Sciences in Vienna, 1887
- [Siku Quanshu(1999)] Siku Quanshu – electronic version (四庫全書 電子版) 1999, (Shanghai: Digital Heritage Publishing); the original book version has been published in 1781
- [Stephenson(1997)] Stephenson, F.R. 1997, *Historical Eclipses and Earth's Rotation* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [Sôma et al. (2004)] Sôma, M, Tanikawa, K., & Kawabata, K. 2004, Earth's rate of rotation between 700 BC and 1000 AD derived from ancient solar eclipses, *Journées 2003: Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from Milliarseconds to Microarcseconds*, St. Petersburg, Russia, 2003 Sept 22–25(in press)
- [Standish (1998)] Standish, E.M. 1998, JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405, JPL Interoffice Memorandum 312.F–98–048
- [Tanikawa & Sôma(2002)] Tanikawa, K. & Sôma, M. 2002, Reliability of the totality of the eclipse in AD628 in Nihongi, *Astronomical Herald* **95** No.1, 27 – 37 (in Japanese)
- [Tanikawa & Sôma(2004)] Tanikawa, K. & Sôma, M. 2004, On the totality of the eclipse in AD628 in the Nihongi, *Publ. Astron. Soc. Japan* **56** No.1, 215 – 224
- [Williams(1994)] Williams, J.G. 1994, *Astron. J.* **108**, 711 – 724

Symposium Program

: 招待講演

3月1日(月)

12:30 受付
13:20 世話人挨拶

第1セッション スピン

座長: 福島 登志夫

13:30 14:00 木下 宙 (国立天文台)
アンドワイエ変数を用いた回転力学入門
14:00 14:30 BOUQUILLON, Sebastien (国立天文台)
自転-公転共鳴
14:30 14:40 休憩
14:40 15:10 内藤 勲夫 (国立天文台・地球回転)
宇宙測地学が明らかにした地球回転変動
15:10 15:40 河簾 公昭 (名大名誉教授)
長期地球自転変動
15:40 15:50 休憩
座長: 武田 隆顕
15:50 16:20 関井 隆 (国立天文台)
日震学でみた太陽内部回転
16:20 16:50 柳澤 正久 (電気通信大学)
小惑星の自転
16:50 17:00 休憩
17:00 17:33 ポスターセッション短発表 (一人3分講演)
18:30 20:00 夕食兼懇親会
20:00 23:00 ポスターセッション (第一ラウンド)

3月2日(火)

8:00 9:00 朝食

第2セッション 力学系

座長: 吉田 春夫

09:30 10:00 関口 昌由 (木更津高等専門学校)
8の字入門
10:00 10:30 藤原 俊朗 (北里大学)
ポテンシャル $1/r^2$ の下での3体8の字解の幾何学的な性質について
10:30 10:40 休憩
10:40 11:10 柴山 允瑠 (京大理学研究科数学系)
 $2n$ 体問題の新しい周期解
11:10 11:40 佐野 光貞 (京都大学人間・環境学)
古典クーロン三体問題: 1次元・2次元
11:40 12:50 昼食
12:50 13:50 ポスターセッション (第二ラウンド)
13:50 14:00 休憩
座長: 中川 克也
14:00 14:30 斎藤 正也 (総合研究大学院大学)

14:30	15:00	記号力学による直線三体問題 山口 喜博 (帝京平成大学) 標準写像における振動解
第3セッション		軌道・その他
15:10	15:40	斎藤 信明 (京都産業大学) 人工衛星主問題に対する新しい中間軌道
15:40	16:10	井上 猛 (京都産業大学) 小分母に無縁の人工衛星中間軌道
16:10	16:20	休憩
座長:坂本 強		
16:30	17:00	福島 登志夫 (国立天文台) 多様体補正による効率的な軌道シミュレーション
17:00	17:30	小南 淳子 (東京工業大学・地球惑星科学) 原始惑星系円盤との重力相互作用を考慮した原始惑星形成
17:30	17:40	休憩
17:40	18:10	相馬 充 (国立天文台) 古代・中世の中国と日本における時刻制度
18:30	20:00	夕食兼懇親会
20:00	23:00	ポスターセッション (第三ラウンド)

3月3日 (水)

第4セッション		恒星系
8:00	9:00	朝食
座長:立川 崇之		
09:30	10:00	鈴木 将 (東京大学・工学部物理工学系) 長距離相互作用の回転ディスク N 体系中の非線形波動の構造
10:00	10:30	坂本 強 (総合研究大学院大学) 球状星団系の力学進化: 星団形成と銀河の質量決定
10:30	10:40	休憩
10:40	11:10	樽家 篤史 (東京大学大学院理学系研究科 附属ビッグバン宇宙国際研究センター) Antonov problem and quasi-equilibrium state in N-body systems
11:10	11:20	世話人挨拶

ポスター発表

- 久保岡 俊宏 通信総合研究所鹿島宇宙通信研究センター
IERS Conventions 2003 の摂動モデルと
軌道解析ソフトウェア concerto v4
- 荒木田 英禎 国立天文台・天文情報公開センター
シャピロ時間遅れに対する高次の相対論的效果
- 眞崎 良光 国土地理院
大気が地球自転におよぼす影響 - 気象データの評価
- 山口 喜博 帝京平成大学
四重可逆な non-twist 写像の周期軌道
- 後藤 振一郎 京都大学大学院・情報学
共鳴島構造がある場合の2次元シンプレクティックマップの簡約
- 山本 一登 総合研究大学院大学
分割多段法によるオイラーの自転運動方程式の正則化
- 立川 崇之 早稲田大学・理工学部
膨張入り一次元シートモデルにおけるフラクタル構造と
自己相似解
- 村田 宗一 名古屋大学理学研究科 物質理学専攻 (物理系) R 研
Exact Expanding Solution of Gas Sphere under self-gravity
- 中井 宏 国立天文台
55 Cancri 惑星系の臨界引数と近星点連動
- 林 大雅、林 佐千男 T E P I A Foundation / (財) 機械産業記念事業財団
太陽系に於ける「惑星の自転と衛星の公転との尽数関係を示す」
HH (Hula-Hoop) モデル
- 谷川 清隆 国立天文台
複数の場所で観測された日食から決めた ΔT

Author Index and Participant List

Bouquillon, Sébastien	18
荒木田 英禎	259
井上 猛	110
内藤 勲夫	
河緒 公昭	
木下 宙	1
久保岡 俊宏	249
桑原 健二	
後藤 振一郎	283
小南 淳子	130
斎藤 信明	88
齋藤 正也	68
坂本 強	179
佐野 光貞	59
柴山 允瑠	52
鈴木 将	
住谷 秀夫	
関井 隆	25
関口 昌由	42
相馬 充	149
武田 隆顕	
立川 崇之	311
谷川 清隆	340
樽家 篤史	211
中井 宏	327
中川 克也	
林 大雅	
福島 登志夫	123
藤原 俊朗	
眞崎 良光	
村田 宗一	320
柳澤 正久	35
山口 喜博	75, 267
山本 一登	295
吉田 春夫	



天体力学 N 体力学研究会

平成16年3月1日－3日 箱根町強羅 静雲荘