

最急降下法による探査機の軌道設計

柴山允瑠

大阪大学

Abstract. 制限3体問題における Lambert 問題の解法を提案する. Lambert 問題を変分問題の2点境界値問題として定式化し, その最小点を数値的に求める. 最小点を求めるために, Moore が8の字解を数値的に求めた最急降下法を, 制限3体問題の2点境界値問題に適用できる形にした.

1. 制限3体問題

平面上の3体問題において, 3質点の質量を $1 - \mu, \mu, 0$ ($0 \leq \mu \leq 1$) とする. 質量をもつ2質点の運動は Kepler 問題に帰着される. そして, その運動が円軌道である場合を考える. これらの2質点の位置が常に $(-\mu, 0), (1 - \mu, 0)$ にあるような回転座標系をとる. この座標系で残りの1質点の運動を調べることを問題とする. この問題を平面円周制限3体問題という. 平面円周制限3体問題の微分方程式は,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -2\dot{y} + x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{((x - 1 + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\dot{x} + y - \frac{(1 - \mu)y}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu y}{((x - 1 + \mu)^2 + y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

である. $P_E = (-\mu, 0), P_M = (1 - \mu, 0)$ は特異点である. 2点 $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_E, P_M\}$ を任意にとり, 固定する. また, 時間 $T > 0$ も任意にとり, 固定する. Lambert 問題とは, $q(0) = (x(0), y(0)) = P_0, q(T) = (x(T), y(T)) = P_1$ となる解 $q(t) = (x(t), y(t))$ を求めよという問題である.

制限3体問題は Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{x}y - \dot{y}x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}}$$

¹shibayama@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

の Euler-Lagrange 方程式と同等である．制限 3 体問題は，作用積分

$$\mathcal{A} = \int_0^T L dt$$

に関する変分問題として定式化される．2 端点を P_0, P_1 に固定したもとで作用積分を最小化する曲線は，Lambert 問題の 1 つの解である．

Moore(1993) は，3 体問題において組紐の型を固定した変分問題を考え，最急降下法によりその作用積分の最小化を行うことで様々な解を得た．そのうちの，1 つが 8 の字解である．Shibayama (2012) はその手法を， n 体問題の単舞踏解的な制約をした変分問題に適用し，新たな単舞踏解を数値的に得た．本論文では，それを Lambert 問題に応用する．

2. 有限次元の場合

有限次元空間上の関数 $f : A(\subset \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して，その最小点を求めることを考える． f の $x \in A$ における勾配ベクトル

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right)$$

は， f の x において最も増加する方向を示す．従って， $x^{(0)} \in A$ を適当に与え， $h > 0$ を十分小さな値とし，

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - h \nabla f$$

により $x^{(i)}$ を帰納的に定めると， $i \rightarrow \infty$ のとき $x^{(i)}$ は f の最小点に収束する可能性が高い．

3. 作用積分の勾配流

前節の考え方を，作用積分に応用する．与えられた $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_E, P_M\}$ に対して

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{x_0 + x_1}{2} \\ c_1 &= \frac{x_0 - x_1}{2} \\ d_0 &= \frac{y_0 + y_1}{2} \\ d_1 &= \frac{y_0 - y_1}{2} \end{aligned}$$

とおく. P_0, P_1 を時間 T でつなぐ滑らかな曲線はすべて

$$x(t) = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$$

$$y(t) = d_0 + d_1 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$$

と表せる. 解は実解析的だから, 解に関しては a_k, b_k は $k \rightarrow \infty$ のとき指数的速さで 0 に収束する. このことから, 十分大きな自然数 K をとり,

$$x(t) = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^K a_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$$

$$y(t) = d_0 + d_1 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^K b_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$$
(1)

により近似できる. この形の曲線全体の集合は, 座標系 $(a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_K)$ をもつと見なせる. 前節の手法と同じく, この $2K$ 次元空間上の関数 $\mathcal{A}$ の勾配ベクトルを考える.

$e_k(t) = \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$ とおく. 勾配ベクトルの $(e_k(t), 0), (0, e_k(t))$ 成分はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_k} = \int_0^T \dot{x} \dot{e}_k + y \dot{e}_k - \dot{y} e_k + x e_k - \frac{(1-\mu)(x+\mu)e_k}{((x+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu(x-1+\mu)e_k}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial b_k} = \int_0^T \dot{y} \dot{e}_k - x \dot{e}_k + \dot{x} e_k + y e_k - \frac{(1-\mu)y e_k}{((x+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu y e_k}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} dt$$
(2)

である. 各ステップで a_k, b_k をそれぞれ $-h \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_k}, -h \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial b_k}$ 変化させるとよい.

(2) の積分の中身を $f(t)$ として, シンプソンの公式により積分値を求める. $2N$ 分割して,

$$\int_0^T f(t) dt = \frac{1}{3} \{ (f(0) + f(T)) + 4 \sum_{j=1}^N f\left(\frac{2j-1}{2N} T\right) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{2j}{2N} T\right) \}$$

により近似する. これにより, (2) を数値計算する. 適当な初期値から始め, 十分長い時間経過した位置を求める. その後, それが実際に微分方程式をよく満たしていることを確かめる.

4. 地球-月-探査機モデルへの応用

例として, 地球-月-探査機モデルを考える. μ は地球と月の合計の質量に対する月の質量比であり, 約 $\mu = 0.012154$ である. 単位時間は, 約 104.2 時間である. 地球の地表から 167km の円周は停留軌道である. 地球の位置が P_E であり, そこを中心とする半径 $r_1 = 0.01703$ の円周が対応する.

探査機は, 月の地表から 100km の停留軌道上の点に向かう. 停留軌道上の点は, 様々にとって試みる. $a_k(s), b_k(s)$ の初期値 $a_k(0), b_k(0)$ は乱数で選び, 何度か試みる. さらに, それが制限 3 体問題の微分方程式をよく満たしていることを確かめる. その中で, 停留軌道に対する最初の加速ベクトルの絶対値と, 最後の減速ベクトルの絶対値の和が最小のものを選ぶようにする.

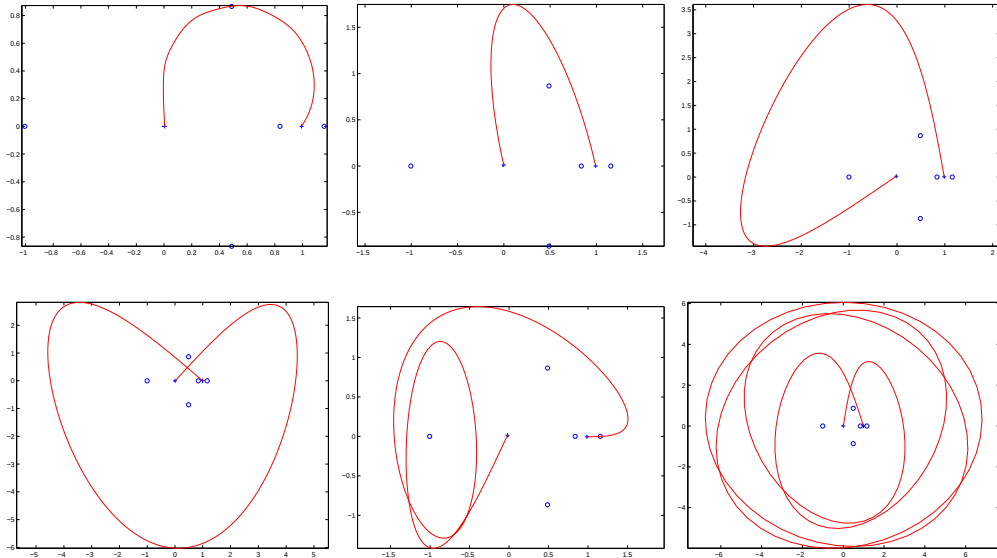


Figure 1. 得られた数値解: 左上 $T = 1$, 中上 $T = 5$, 右上 $T = 10$, 左下 $T = 20$, 中下 $T = 50$, 右下 $T = 100$.

5. まとめ

最急降下法を Lambert 問題に適用し, 地球-月-探査機モデルに応用した.

References

Moore, C., 1993, “Braids in classical dynamics” Phys. Rev. Lett. **70**, 3675–3679.

Shibayama, M., 2012, “Action minimizing periodic solutions in the N-body problem”, proceedings of Sino-Japan conference, 170-183.