

# エノン写像の記号列に対する新しい解釈 II

山口喜博 (帝京平成大学), 谷川清隆 (国立天文台)

平成 22 年 11 月 30 日

## 概要

面積保存でかつ方向保存エノン写像における相平面のある領域は、共鳴チェーンで埋め尽くされている。この事実を考慮して、共鳴チェーンの中の軌道を記述するためにブロック語が導入された。また記号平面でも共鳴チェーンという概念が導入される。そして記号平面の寄木細工構造を調べる。馬蹄の中の軌道が共鳴チェーンを経巡るならば、その軌道はブロック語で記述される。この論文では下記の 4 つの目的について議論する。最初の目的は、周期軌道の記号列の偶奇性という概念を導入することである。第 2 の目的は記号平面の構造を明らかにすることである。第 3 の目的は、共鳴領域内の対称周期軌道の振る舞いを明らかにし、それらの対称周期軌道のブロック語の列を決定することである。最後の目的は、ひとつの共鳴領域に存在する対称非バーコフ軌道の位相的エントロピーを計算する手法を改良することである。

## 1 序

面積保存でかつ方向保存エノン写像 (以下ではエノン写像と書く) では、あるパラメータ領域でスメールの馬蹄 (以下では馬蹄と略す) が存在することは良く知られている。馬蹄内のそれぞれの軌道は、2 つの記号 0 と 1 で記述される記号列で特徴付けられる [1]。一方、エノン写像の相平面のある領域は、バーコフ型楕円周期軌道の無限個の共鳴チェーンで埋め尽くされていることが分かっている。馬蹄の中の周期軌道は、共鳴チェーンの内部に軌道点をもつ。このことから記号列はブロック語 (BW) で書き直される (BW の定義は 2.5 節を見よ)。もし軌道が共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  ( $q \geq 3$ ) に滞在していれば、この軌道は 4 つのブロック語  $E(p/q)$ ,  $F(p/q)$ ,  $S(p/q)$ ,  $D(p/q)$  のひとつで特徴付けられる。また、軌道が共鳴チェーン  $\langle Z_{1/2} \rangle$  に滞在していれば、この軌道は 2 つのブロック語  $E(1/2)$  と  $S(1/2)$  のどちらかで特徴付けられる。一般に共鳴チェーンの中に滞在するすべての軌道は、0 と 1 の記号列の代わりに BW を用いて記述できる。新しい語列をブロック語列 (Block word sequence: BWS) と呼ぶ。前の論文 (第 1 部) [2] において BWS を導入し、BWS を利用して馬蹄内の周期軌道とホモクリニック軌道に関するいくつかの問題を調べた。この論文 (第 2 部) では第 1 部で議論しなかった 4 つの問題について調べる。

第 2 部の第 1 番目の目的は、記号列と BWS の偶奇性という概念を導入することにある。偶奇性を利用して周期軌道をサドル型と楕円型に分類する。第 2 番目の目的は記号平面の詳細なる性質を調べることにある。記号平面で共鳴チェーンが定義される。そして記号平面は共鳴チェーンで埋め尽くされていることを示す。

第 3 番目の目的は、共鳴領域内の対称周期軌道の振る舞いを明らかにし、それらの対称周期軌道の BWS を決定することである。不動点を除いたすべての周期軌道は不動点  $Q$  の周りを時計回りに回転している。この場合、視点は  $Q$  にある。次に  $Q$  から分岐したバーコフ型 (B 型) 楕円周期軌道の点  $z$  に視点を移し、 $z$  から分岐した周期軌道を眺める。これらの周期軌道もバーコフ型である。これらの軌道は天文現象における周転円 [3] と似ているため、これ

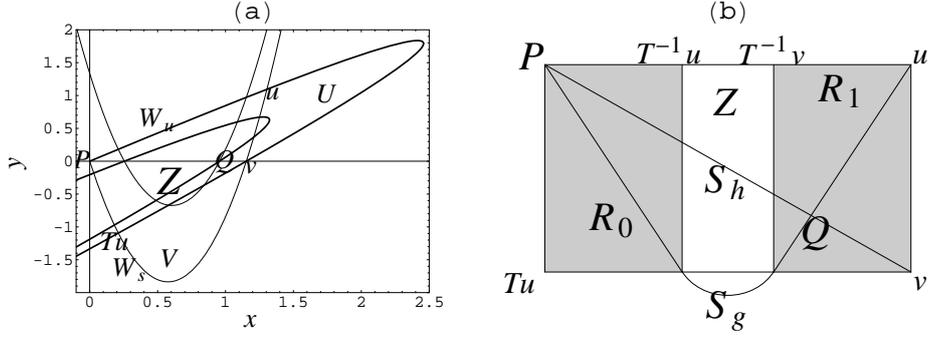


図 1: (a) 安定多様体  $W_s$  と不安定多様体  $W_u$  ( $a = 5.5$ ). (b) 馬蹄を構成するための基本領域  $Z$  の模式図.

は周転円モデルと呼ばれる。パーコフ型周期軌道の”島の周りの島構造”の始まりでもある。共鳴チェーンの内部でサドルノード分岐で生じた周期軌道は非パーコフ型 (NB 型) である。ひとつの共鳴チェーン内の対称 NB 型の性質も調べる。そして、対称 B 型周期軌道ならびに対称 NB 型周期軌道の BWS を決定する。

第 4 番目の目的は正の位相的エントロピーを計算する方法を提示することである。共鳴領域の中にある対称 NB 型周期軌道の組みひも型は可約型である [4]。対称 NB 型周期軌道の組みひもの作り方を改良し、擬アノソフ型の組みひもを構成する。この結果、正の位相的エントロピーが計算できる。

第 2 節において、我々が使用するエノン写像の形式を紹介し、基本的な数学的道具を準備する。第 3 節では周期軌道の時間反転性について議論する。第 4 節で、第 1 番目の目的が議論される。第 5 節で、記号平面における周期軌道の軌道の描き方を説明する。第 6 節で、第 2 番目の目的が議論される。第 7 節と第 8 節において、第 3 番目の目的が議論される。第 9 節で、第 4 番目の目的が議論される。

## 2 準備

### 2.1 この論文で使用するエノン写像

この論文では下記の形式の面積保存方向保存エノン写像 (以下では単純にエノン写像と呼ぶ) を用いる。この写像は平面上で定義されている [1, 2].

$$y_{n+1} = y_n + af(x_n), \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (2)$$

ここで  $f(x) = x - x^2$  であり、 $a$  は正のパラメーターである。2 つの不動点  $P = (0, 0)$  と  $Q = (1, 0)$  が存在する。  $P$  はサドル不動点で、一方の  $Q$  は  $0 < a < 4$  では楕円型不動点であるが、 $a > 4$  では反転型サドル不動点である。  $W_u$  を  $P$  の不安定多様体とする。不安定多様体は  $P$  より右上方に出て行く。また  $W_s$  を安定多様体とする。安定多様体は右下方向から  $P$  に入ってくる。(図.1(a) を参照)。不安定多様体と安定多様体は  $a > 0$  では横断的に交差している [6]。  $a \geq a_{HS} = 5.17661 \dots$  のパラメーター領域において馬蹄が存在し、 $T$  の位相的エントロピーは  $\ln 2$  である。

エノン写像  $T$  は可逆である。正確に言うと、エノン写像  $T$  はパーコフの意味での可逆な写像である。つまり、2 つの対合  $h$  と  $g$  の積で写像は  $T = hg$  と記述できる。ここで 2 つの対合  $h$  と  $g$  は次のように定義されている。

$$h(x, y) = (x - y, -y), \quad (3)$$

$$g(x, y) = (x, -y - af(x)). \quad (4)$$

ここで  $h^2 = g^2 = id$  と  $\det \nabla h = \det \nabla g = -1$  が成立していることに注意しよう。

対称線は対合の不動点の集合として得られる。つまり、下記の2つの対称線が存在する。

$$S_h : y = 0, \quad (5)$$

$$S_g : y = -(a/2)f(x). \quad (6)$$

それぞれの対称線を2つに分けよう。  $x > 1$  の領域にある対称線  $S_g$  の部分を  $S_g^+$  とし、  $x < 1$  の領域にある部分を  $S_g^-$  とする。同様に、  $x > 1$  の領域にある対称線  $S_h$  の部分を  $S_h^+$  とし、  $x < 1$  の領域にある部分を  $S_h^-$  とする。対合と対称線に関する詳細な性質は参考文献 [2] を見ていただきたい。

## 2.2 エノン写像の相平面の構造

サドル不動点  $P$  の安定多様体  $W_s$  と不安定多様体  $W_u$  の構造について説明しよう (図.1(a) を参照の事)。これらの多様体は  $S_g$  上の点  $u$  と、  $S_h$  上の点  $v$  で交差する [7]。点  $u$  と点  $v$  は主ホモクリニック点である。ホモクリニックローブ  $U$  と  $V$  も図.1(a) に描かれている。  $hU = V$  が成立する。次に不安定多様体の2つの弧  $[P, u]$  と  $[v, Tu]$  と、安定多様体の2つの弧  $[u, v]$  と  $[Tu, P]$  とを用いて馬蹄を作るための元の閉領域  $Z$  を構成する (図.1(b) を見よ)。この領域は安定多様体の弧によって3つの領域に分割されている。左側の灰色領域を  $R_0$  とし、右側の灰色領域を  $R_1$  とする。2つの対称線  $S_g$  と  $S_h$  は図.1(a) と (b) の両方の図で描かれている。

ここで軌道点  $z$  に対する記号を  $Symb(z)$  と書く。軌道点  $z$  が領域  $R_0$  にあれば、記号は  $Symb(z) = 0$  と決める。一方、軌道点  $z$  が領域  $R_1$  にあれば、記号は  $Symb(z) = 1$  と決める。次に  $Z, R_0, R_1$  に関する基本的な性質を性質 2.2.1 としてまとめておく。これらはすべて可逆性より簡単に導かれるので証明は省く。

性質 2.2.1.

[i]  $hZ = Z$ .

[ii]  $gR_0 = R_0, gR_1 = R_1$ .

[iii]  $z \in R_0$  ならば、  $Symb(z) = Symb(gz) = 0$  が成立する。また  $z \in R_1$  ならば、  $Symb(z) = Symb(gz) = 1$  が成立する。

## 2.3 周期軌道, 共鳴領域ならびに共鳴チェーン

周期軌道が対称線上に2つ軌道点をもてば、その周期軌道を対称周期軌道と呼ぶ。また周期軌道が単調性を満たせば、その周期軌道を単調周期軌道と呼ぶ。単調周期軌道は、不動点の周りを固定回転で回る。2つの独立した性質より周期軌道は以下のように4つのタイプに分類される。周期軌道の回転数を  $p/q$  と記す。

分類 2.3.1.

[1]  $p/q$ -S-B: 対称単調周期軌道。この周期軌道は対称バーコフ型周期軌道と呼ばれる。  $p/q$ -S-BE は楕円型周期軌道を表し、  $p/q$ -S-BS はサドル型周期軌道を表す。楕円型周期軌道が反射を伴うサドル型軌道になっても、  $p/q$ -S-BE を使用する。これは [2],[3],[4] においても同様である。

[2]  $p/q$ -S-NB: 対称非単調周期軌道。この周期軌道は対称非バーコフ型周期軌道と呼ばれる。  $p/q$ -S-NBE は楕円型周期軌道を表し、  $p/q$ -S-NBS はサドル型周期軌道を表す。

[3]  $p/q$ -N-B: 非対称単調周期軌道。この周期軌道は非対称バーコフ型周期軌道と呼ばれる。  $p/q$ -N-BE は楕円型周期軌道を表し、  $p/q$ -N-BS はサドル型周期軌道を表す。

[4]  $p/q$ -N-NB: 非対称非単調周期軌道。この周期軌道は非対称非バーコフ型周期軌道と呼ばれる。  $p/q$ -N-NBE は楕円型周期軌道を表し、  $p/q$ -N-NBS はサドル型周期軌道を表す。

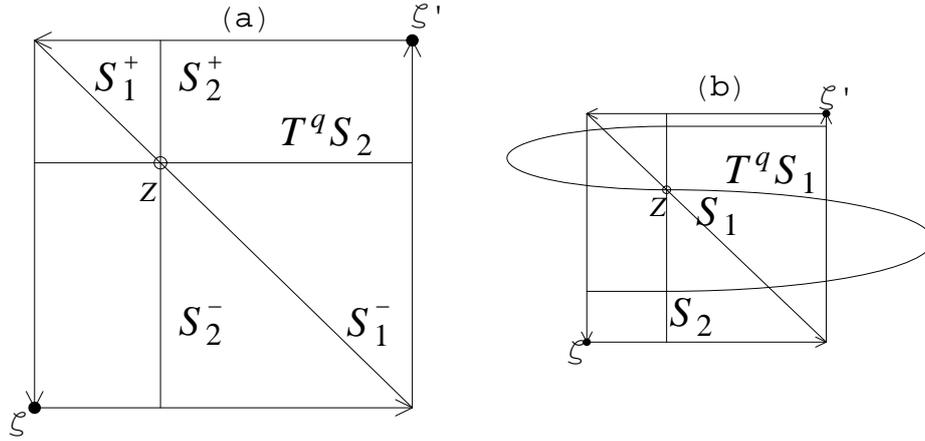


図 2: 図.(a) と (b) の両方で,  $z$  は  $p/q$ -S-BE の軌道点であり,  $\zeta$  と  $\zeta'$  は  $p/q$ -S-BS の軌道点である. (a)  $S_1$  と  $S_2$  は共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) に含まれる対称線の閉弧. また  $T^q S_2$  も描かれている. この図は  $S_1^+$  と  $S_2^+$  を定義している. ここで  $S_1 = S_1^+ \cup z \cup S_1^-$  ならびに  $S_2 = S_2^+ \cup z \cup S_2^-$ . (b)  $T^q S_1$  は S 字形をしている.

次に共鳴領域と共鳴チェーンを定義する.  $z_k$  ( $0 \leq k < q$ ) を  $p/q$ -S-BE の軌道点とする.  $z_k$  の共鳴領域を  $Z_{p/q}(z_k)$  とする. 共鳴領域の詳細な構成方法は第 1 部に述べてある. すべての共鳴領域を集めて共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  が得られる.

$$\langle Z_{p/q} \rangle = \bigcup_{0 \leq k \leq q-1} Z_{p/q}(z_k). \quad (7)$$

## 2.4 共鳴領域における対称線と周期軌道

図.2(a) に共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) の模式図が描かれている.  $p/q$  は既約分数である. ここで  $z$  は  $p/q$ -S-BE の軌道点で,  $\zeta$  と  $\zeta'$  は  $p/q$ -S-BS の軌道点である. 図.2(a) には  $Z_{p/q}(z)$  に含まれる対称線の閉弧  $S_1$  と  $S_2$  が描かれている. ここで  $S_1 = S_1^+ \cup z \cup S_1^-$  であることに注意する. 同様に  $S_2^+$  と  $S_2^-$  も定義され,  $S_2 = S_2^+ \cup z \cup S_2^-$  である.  $p/q = 1/3$  の場合,  $S_1$  は  $S_h$  の一部であり,  $S_2$  は  $T^{-1} S_g^+$  の一部である. 図.2(b) には, 像  $T^q S_1$  が描かれている.  $T^q S_1$  は文字の S に形状が似ているので S 字形と呼ぶ. 像  $T^q S_2$  は S 字形をもたない. 図.2(a) において, 像  $T^q S_2$  は水平な線分として描かれていて,  $S_1$  と  $z$  で交差している. 像  $T^{2q} S_2$  は S 字形をしている. よって  $T^q S_1$  と  $T^{2q} S_2$  はともに  $S_1$  ならびに  $S_2$  と 3 点で交差していることが分かる. 3 点には  $z$  も含まれる.

次に共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  における対称周期軌道を定義する.

### 定義 2.4.1.

[1] 周期が  $(2k+1)q$  ( $k \geq 1$ ) の場合. それぞれの共鳴領域の中には  $(2k+1)$  個の軌道点がある. 共鳴領域を  $Z_{p/q}(z)$  に固定する. 共鳴領域の軌道点を  $\{w_j\}_{0 \leq j < 2k}$  とする. ただし,  $T^q w_j = w_{j+1}$  ( $0 \leq j < 2k$ ),  $T^q w_{2k} = w_0$ .  $w_0 \in S_1$  と  $w_k \in S_2$  が成り立つとする. つまり  $w_k \in T^{kq} S_1 \cap S_2$  である. 更に, 軌道は  $w_0$  から  $w_{k-1}$  の間に  $S_2$  を  $(r-1)$  回通過するとする. すると  $z$  を回る回転数は  $r/(2k+1)$  ( $1 \leq r \leq k$ ) である. この種の周期軌道の全表現は  $p/q : r/s$ -S-B または  $p/q : r/s$ -S-NB である. ここで  $s = 2k+1$ . この表現の意味はほとんど明らかである. つまり,  $p/q$  は  $Q$  から分岐した周期軌道の回転数である. この周期軌道が共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  を構成する. 共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  の中で分岐して現れた周期軌道の  $z$  の周りの回転数が  $r/s$  である. この表示は時計表示と呼ばれている [3]. 考えている共

鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  がはっきりしている場合、この周期軌道は周期  $(2k+1)$  の奇数周期軌道と呼ばれる。

[2a] 周期  $2kq$  ( $k \geq 1$ ) の第1の場合。[1] で定義された共鳴領域の中での周期軌道の表現をここでも利用する。交差点  $T^{kq}S_1 \cap S_1$  は周期  $2k$  の軌道点である。  $w_0 \in S_1$  かつ  $w_k \in S_1$  であると仮定する。更に、軌道は  $w_0$  から  $w_{k-1}$  の間に  $S_1$  を  $(r-1)$  回通過するとしよう。そうすると  $z$  を回る回転数は  $r/(2k)$  ( $1 \leq r \leq k$ ) である。この種の周期軌道の全表現は  $p/q : r/s$ -S-B または  $p/q : r/s$ -S-NB である。ここで  $s = 2k$ 。[1] と同様に考えている共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  がはっきりしている場合、この周期軌道は周期  $2k$  の偶数周期軌道と呼ばれる。

[2b] 周期  $2kq$  ( $k \geq 1$ ) の第2の場合。[1] で定義された共鳴領域の中での周期軌道の表現をここでも利用する。交差点  $T^{kq}S_2 \cap S_2$  は周期  $2k$  の軌道点である。  $w_0 \in S_2$  かつ  $w_k \in S_2$  であると仮定する。更に、軌道は  $w_0$  から  $w_{k-1}$  の間に  $S_2$  を  $(r-1)$  回通過するとしよう。そうすると  $z$  を回る回転数は  $r/(2k)$  ( $1 \leq r \leq k-1$ ) である。この種の周期軌道の全表現は  $p/q : r/s$ -S-B または  $p/q : r/s$ -S-NB である。ここで  $s = 2k$ 。[1] と同様に考えている共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  がはっきりしている場合、この周期軌道は周期  $2k$  の偶数周期軌道と呼ばれる。

$p/q$ -B と  $p/q$ -NB はクラス-1 周期軌道と呼ばれ、  $p/q : r/s$ -B と  $p/q : r/s$ -NB はクラス-2 周期軌道と呼ばれる。考えている共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  がはっきりしているならば、  $r/s$ -B と  $r/s$ -NB の簡略化表現を用いる。共鳴チェーンの中のすべての軌道は  $z$  を反時計周りに回転する。

## 2.5 馬蹄内の軌道に対するブロック語と遷移行列

馬蹄内には2種類の軌道が存在する。第1番目のタイプは、共鳴チェーン内に軌道点をもつ軌道である。これらの軌道はBWSで記述される。周期軌道とホモクリニック軌道がこのタイプに含まれる。第2番目のタイプは、共鳴チェーン内に軌道点をもたない軌道である。このような軌道に対してBWSという概念を適用できない。この論文ではこのような軌道については議論しない。

それぞれの共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) は、図.3で示したように安定多様体  $W_s$  と不安定多様体  $W_u$  によって4つの領域に分けられる。もし軌道点が左上の分割領域にあれば、その軌道はブロック語  $E(p/q)$  で記述される。この事より、ブロック語  $E(p/q)$  を左上の分割領域の名前としても用いることにする。同様にして左下の分割領域を  $S(p/q)$  と名付ける。更に右上の分割領域を  $F(p/q)$  と、右下の分割領域を  $D(p/q)$  と名付ける。一方、  $Z_{1/2}(z)$  は  $E(1/2)$  ならびに  $S(1/2)$  と名付けられた2つの分割領域をもつ。分割領域に関してブロック語を分割領域の名前としても用いることによって、BWSで記述された軌道を簡単に思い描ける。また下記の遷移行列の意味も理解しやすくなる。以下では引数を省いた省略語  $E, S, F, D$  も使用する。

$\langle Z_{p/q} \rangle$  の4つの分割領域間の遷移行列  $J(p/q, p/q)$  ( $0 < p/q < 1/2$ ) と、  $\langle Z_{1/2} \rangle$  の2つの分割領域間の遷移行列  $J(1/2, 1/2)$  の表式は次のように得られている。

$$J(p/q, p/q) = \left( \begin{array}{c|cccc} & E(p/q) & S(p/q) & F(p/q) & D(p/q) \\ \hline E(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ S(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ F(p/q) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D(p/q) & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad (8)$$

$$J(1/2, 1/2) = \left( \begin{array}{c|cc} & E(1/2) & S(1/2) \\ \hline E(1/2) & 1 & 1 \\ S(1/2) & 1 & 1 \end{array} \right). \quad (9)$$

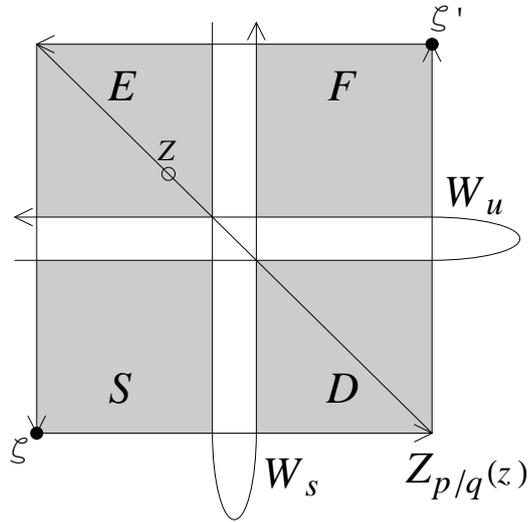


図 3: 共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) の中の 4 つの分割領域の名称として, ブロック語  $E(p/q)$ ,  $S(p/q)$ ,  $F(p/q)$ ,  $D(p/q)$  を使用する.

#### 性質 2.5.1.

馬蹄が存在するならば, 下記の性質が成立する.

- [1] 共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  ( $q \geq 3$ ) の中で周期軌道数の発散率は 3 である. よって位相的エントロピーの下界は,  $(\ln 3)/q$  である.
- [2] 共鳴チェーン  $\langle Z_{1/2} \rangle$  の中で周期軌道数の発散率は 2 である. よって位相的エントロピーの下界は,  $(\ln 2)/2$  である.

証明. 最初の結果は  $J(p/q, p/q)$  ( $q \geq 3$ ) の最大固有値が 3 であることから導かれる. 2 番目の結果は,  $J(1/2, 1/2)$  の最大固有値が 2 であることから導かれる.(Q.E.D.)

#### 定理 2.5.2.

共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  において,  $p/q$ -S-BE と  $p/q$ -S-BE を除いた周期軌道の BWS を  $w$  とする.  $w$  のブロック語の個数を  $n_{\text{BW}}(w)$  とし,  $w$  に含まれる  $E$  の個数を  $n_E(w)$  とする. 条件  $n_{\text{BW}}(w) \geq 2$  を満たすブロック語  $w$  に対して,  $1 \leq n_E(w) \leq n_{\text{BW}}(w) - 1$  が成立する.

証明.  $n_E(w) = n_{\text{BW}}(w)$  の場合は考える必要がない. 実際, この場合  $w$  は  $p/q$ -S-BE の BWS を表現している. 遷移行列  $J(p/q, p/q)$  と  $J(1/2, 1/2)$  の性質より, 長さが 2 以上の BWS では  $E$  を含まない BWS を構成できないことが導かれる. よって証明が終わる. (Q.E.D.)

記号力学では, 馬蹄内の軌道の特徴付けるために 2 つの記号 0 と 1 またはブロック語  $E(p/q)$ ,  $S(p/q)$ ,  $F(p/q)$ ,  $D(p/q)$  を用いる. 軌道点が対称線上にあるとき, 記号として  $\dot{0}$  または  $\dot{1}$  を用いる. ブロック語においても  $\dot{E}(p/q)$ ,  $\dot{S}(p/q)$ , または  $\dot{D}(p/q)$  を用いる. 対称線  $S_1$  と  $S_2$  は領域  $F(p/q)$  を通過していない.

### 3 時間反転対称性

$s$  を有限な長さ  $k > 0$  の語とする.  $s^n$  は  $s$  の  $n$  回の繰り返しを表し,  $s^\infty$  は無限回の繰り返しを表す.  $s$  がより短い周期を持たなければ,  $s^\infty$  は周期  $k$  の周期記号列である. ここで,  $s$  を周期記号列  $s^\infty$  の長さ  $k$  の周期語と呼ぶ. 簡単に周期 ( $k$ )-語と呼ぶ. 長さが明らかな場合とか, 長さが不要な場合は周期 ( $k$ )-語を単に周期語と呼ぶ.

例として周期語  $s = 0001001$  と  $s' = 0001101$  を考えよう. これらの時間反転語は  $s^{-1} = 1001000$  と  $s'^{-1} = 1011000$  である. 周期語の場合, 語の巡回置換をしてもよい. 言い替えると, 周期語は巡回置換に関して不変である. 語の巡回置換を行うと  $s = s^{-1}$  が成立す

ることは簡単に分かる. 巡回置換のもとで  $s' \neq s'^{-1}$  であることも簡単に確認できる. これより, 以下の定義を行う.

定義 3.1.

[1]  $s = s^{-1}$  が成立するならば, 周期語  $s$  は時間反転性をもつ. または語  $s$  は時間的に可逆であるという.

[2]  $s \neq s^{-1}$  ならば, 周期語  $s$  は時間反転性をもたない. 周期語  $s$  と  $s^{-1}$  は時間反転対と呼ばれる.

定理 3.2 が成立する.

定理 3.2.

周期語が時間反転性をもつならば, 対応する周期軌道は対称である. また逆も成り立つ. 証明 (←).  $\{z_i\}$  を軌道とする.

i) 周期が  $q = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) の場合.  $z_0 \in S_g$  と仮定するならば,  $z_{k+1} \in S_h$  が成立する.  $gz_0 = z_0$  が成立し,  $gz_j = z_{-j}$  が成立する. 性質 2.2.1 より,  $s_j = s_{-j}$  ( $0 \leq j \leq k$ ) が得られる. よって, 周期語  $s_{-k}s_{-k+1} \cdots s_0 \cdots s_k$  は  $s_0$  に関して対称である. つまり可逆である.

ii) 周期が  $q = 2k + 2$  ( $k \geq 0$ ) の場合.  $z_0 \in S_g$  と仮定するならば,  $z_{k+1} \in S_g$  が成立する. 周期語  $s = s_{-k} \cdots s_0 \cdots s_k s_{k+1}$  は, 関係  $s_j = s_{-j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) を満たす.  $s^{-1} = s_{k+1}s_k \cdots s_0 \cdots s_{-k}$  が得られる.  $s_j = s_{-j}$  であることより, これを  $s^{-1} = s_{k+1}s_{-k} \cdots s_0 \cdots s_k$  と書き直す. 巡回置換後,  $s^{-1} = s$  が得られる.

次に,  $z_0 \in S_h$  を仮定する. この場合,  $z_{k+1} \in S_h$  が成立する.  $hz_0 = z_0$  であることに注意すると,  $gz_{-j-1} = z_j$  が得られる. よって, 性質 2.2.1 より  $s_{-j-1} = s_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) が得られる. 周期語  $s = s_{-k-1} \cdots s_0 \cdots s_k$  を考える.  $s^{-1} = s_k \cdots s_0 \cdots s_{-k-1}$  が得られ, これは  $s^{-1} = s_{-k-1} \cdots s_0 \cdots s_k = s$  と書き直せる. (Q.E.D.)

証明 (→). 再度,  $\{z_i\}$  を軌道とする.

i) 周期が  $q = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) の場合. 周期軌道の 1 周期分を  $\{z_{-k}, z_{-k+1}, \dots, z_0, z_1, \dots, z_k\}$  とする. ただし,  $z_{k+1} = z_{-k}$ . この周期軌道に対応する周期語は  $s = s_{-k} \cdots s_0 \cdots s_k$  である. ただし,  $s_j = \text{Symb}(z_j)$  ( $j = -k, \dots, k$ ).  $s$  の時間反転性は  $s_{-j} = s_j$  ( $0 \leq j \leq k$ ) を意味する. 次に軌道  $\{gz_{-k}, gz_{-k+1}, \dots, gz_0, gz_1, \dots, gz_k\}$  を考えよう. 2 つの軌道  $O(gz_{-k})$  と  $O(z_{-k})$  は, 性質 2.2.1 より  $\text{Symb}(z_j) = \text{Symb}(gz_j)$  が成立するため同じ記号列をもつ. これは, 2 つの軌道が同じ軌道を表していることを意味している. ここで,  $gz_0 = z_0$  であることを証明する.  $gz_0 = z_i$  ( $i \neq 0$ ) と仮定して矛盾を導く.  $\text{Symb}(gz_0) = \text{Symb}(z_i)$  が成立し,  $\text{Symb}(z_0) = \text{Symb}(gz_j 0)$  が成立するので,  $s_0 = s_i$  が得られる. これは一般化され  $s_l = s_m$  ( $l + m = i$ ) が得られる. これらは  $s_0$  を中心として非対称な位置にある 2 つの記号に対する関係式である. 仮定  $s_j = s_{-j}$  は,  $s_0$  を中心として対称な位置にある 2 つの記号に対する関係式である. これらを一緒にすると, すべての記号が同じになってしまうという矛盾が導かれる.  $z_0$  が  $S_g$  上にあることが導かれ, 軌道は対称であることが示された.

ii) 周期が  $q = 2k + 2$  ( $k \geq 0$ ) の場合. 同様の方法で,  $g$  または  $h$  の不動点が存在することが示せる. 詳細な証明は省く.  $q = 2$  の場合,  $g$  の不動点が存在することを注意しておく. すなわち,  $gz_0 = z_0$  かつ  $gz_1 = z_1$  が成立する.(Q.E.D.)

定理 3.2 は与えられた語が対称周期軌道の語であるかどうかの簡単な判定方法を与える. 時間反転性をもつ周期語に対して, 対称線上にある軌道点の記号を決定できる. 決定方法をアルゴリズム 3.3 として以下に示す.

アルゴリズム 3.3.

[1] 奇数周期  $q = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) の場合. 周期語  $s_0 s_1 \cdots s_{2k}$  が時間反転対称性をもつと仮定する. 周期的な巡回をほどこすことで, この語は条件  $t_j = t_{-j}$  ( $0 \leq j \leq k$ ) を満たすように  $s = t_{-k} \cdots t_0 t_1 \cdots t_k$  と書き換えられる.  $\{z_k\}_{-k \leq j \leq k}$  ( $\text{Symb}(z_j) = t_j$ ) を,  $s$  に対応する周期軌道とする. そうすると軌道点  $z_0$  は  $S_g$  上にあり, 軌道点  $z_{-k}$  は  $S_h$  上にある.

表 1: 領域間の遷移と関係する方向反転

遷移	反転	遷移	反転	遷移	反転	遷移	反転
$E \rightarrow E$	+1	$S \rightarrow E$	+1	$D \rightarrow E$	0	$F \rightarrow E$	0
$E \rightarrow S$	0	$S \rightarrow S$	0	-	-	-	-
$E \rightarrow F$	+1	$S \rightarrow F$	+1	$D \rightarrow F$	0	$F \rightarrow F$	0
$E \rightarrow D$	0	$S \rightarrow D$	0	-	-	-	-

[2] 偶数周期  $q = 2k + 2$  ( $k \geq 1$ ) の場合. 周期語  $s_0 s_1 \cdots s_{2k+1}$  が時間反転対称性をもつと仮定する.

(a) 周期的な巡回をほどこすことで, この語は条件  $t_j = t_{-j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) を満たすように  $t_{-k-1} \cdots t_0 t_1 \cdots t_k$  と書き換えられる.  $s = \{z_k\}_{-k-1 \leq j \leq k}$  ( $\text{Symb}(z_j) = t_j$ ) を,  $s$  に対応する周期軌道とする. そうすると軌道点  $z_0$  と軌道点  $z_{-k-1}$  は  $S_g$  上にある.

(b) 周期的な巡回をほどこすことで, この語は条件  $t_j = t_{-j-1}$  ( $0 \leq j \leq k$ ) を満たすように  $s = t_{-k-1} \cdots t_0 t_1 \cdots t_k$  と書き換えられる.  $\{z_k\}_{-k-1 \leq j \leq k}$  ( $\text{Symb}(z_j) = t_j$ ) を,  $s$  に対応する周期軌道とする. そうすると軌道点  $z_0$  と軌道点  $z_{-k-1}$  は  $S_h$  上にある.

## 4 偶奇性

### 4.1 方向反転の原因

馬蹄を構成するための基本過程を検討してみよう (図.1(b) を見よ). 最初に基本領域  $Z$  の任意の点をと, ここに右向きのベクトルを用意する.  $Z$  の上辺の方向へ下方から圧縮し右方向に引き延ばす.  $Z$  から出て行った領域を折り曲げる. この過程で  $Z$  の左領域にあった領域  $R_0$  は領域  $R_0$  と  $R_1$  に写像される. また  $Z$  の右領域にあった領域  $R_1$  は領域  $R_1$  と  $R_0$  に写像される. この過程で  $R_1$  の任意の点に置いたベクトルの反転 (180 度時計回りの回転) が生じる. 語では,  $R_0$  から  $R_0$  への遷移は 00 と,  $R_0$  から  $R_1$  への遷移は 01 と記述される. これらの遷移ではベクトルは反転しない. 一方  $R_1$  から  $R_0$  への遷移は 10 と,  $R_1$  から  $R_1$  への遷移は 11 と記述される. これらの遷移でベクトルは 1 回反転する.

上記のアイデアを BW で記述される周期  $q$  の周期軌道に対しても拡張できる.  $p/q$ -S-BE の共鳴領域は 4 つの領域  $E, S, F, D$  に分割されている (図.3 を見よ). それぞれの領域は遷移行列  $J$  (§2.5 を見よ) によって写像される. この遷移に伴うベクトルの反転を表 1 にまとめておく.

ここで表 1 の説明を加える. すべての領域  $E, S, D, F$  において右向きのベクトルを用意する.  $T^q$  によるベクトルの回転を測る. ベクトルが 180 度反時計回りに回転すると +1 を与える. 遷移と書かれた列は領域間の遷移を表し, 反転と書かれた列は方向の反転を表している.  $E$  から  $E$  への遷移 ( $E \rightarrow E$  と記載) では, ベクトルの反転が生じるので +1 と記載されている. 同様に, その他の遷移に関しても +1 または 0 が与えられている. ハイフン (-) は関係する遷移が無いことを意味している (§2.5 の  $J$  を見よ). 表 1 は次のように読むことができる. 語  $EE, EF, SE, SF$  が BWS に現れると, ベクトルの反転が 1 回生じる. しかし, 語  $ES, ED, SS, SD, DE, DF, FE, FF$  が現れても, 反転は生じない.

## 4.2 周期軌道の方向反転回数

方向反転の回数に関して命題 4.2.2 と命題 4.2.3 が得られる. これらの命題を述べる前に周期軌道の偶奇性に関する定義を与える.

定義 4.2.1.

馬蹄の中の周期軌道の偶奇性は, 0 と 1 で記述された周期語に含まれる記号 1 の個数の偶奇性と定義する.

命題 4.2.2.

共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  における周期軌道に対して 0 と 1 で記述された周期語を  $s$  とする. また  $w$  を  $s$  の BWS とする. ここで  $N_{\uparrow,SS}(s)$  を  $s$  の方向反転回数とし,  $N_{\uparrow,BW}(w)$  を  $w$  の方向反転回数とする.

[1]  $N_{\uparrow,SS}(s)$  は  $s$  に含まれる 1 の個数に等しい. よって,  $N_{\uparrow,SS}(s)$  の偶奇性が, 馬蹄の中の周期軌道の偶奇性と等しい.

[2]  $N_{\uparrow,SS}(s)$  の偶奇性が奇ならば周期軌道は楕円型であり, 偶ならばサドル型である.

証明 [1]. 語に部分語  $1^{n-1}10$  ( $n \geq 1$ ) と必ず反転が  $n$  回生じる. 語はこれらの部分語の組み合わせで記述される. ことから [1] は導かれる. (Q.E.D.)

証明 [2]. 反転回数が奇数の場合,  $z$  の近傍の点は 1 周期で  $z$  の周りを 180 度回転する. よって  $z$  は楕円型である. 反転回数が偶数の場合,  $z$  の近傍の点は 1 周期で  $z$  の周りを 180 度回転しない. よって  $z$  はサドル型である. (Q.E.D.)

命題 4.2.3.  $\langle Z_{p/q} \rangle$  ( $q \geq 2$ ) における周期軌道に対して下記の性質が成立する.

[1]  $N_{\uparrow,BW}(w) = n_E(w) - n_D(w) \geq 0$  が成立する.

[2]  $N_{\uparrow,SS}(s)$  の偶奇性と  $N_{\uparrow,BW}(w)$  の偶奇性は等しい.

証明 [1]. 最初に  $q \geq 3$  の場合の証明を行う.  $N_{\uparrow,BW}(w) = n_E(w) - n_D(w)$  を示すためには, BWS の中に  $E$  が現れる毎に反転回数が +1 増加し,  $D$  が現れる毎に反転回数が -1 増加することを示せば良い. 表 1 を異なった観点から見直す. BWS において  $E$  が生じたとする. これに続く BW は  $E, S, F, D$  である. つまり  $EE, ES, EF, ED$  が可能である. 反転が生じるかどうかという意味では, 2 つの語  $EE$  と  $EF$  で +1 の寄与がある. 語  $ES$  では寄与は無い. この場合,  $ES$  で始まる 3 語  $ESE, ESS, ESF$  を考えよう. これらの語のうち  $SE$  または  $SF$  を含む語では反転が生じる. これを  $E$  の効果として読める.  $ESS$  の場合は, 更に長い語  $ES^kE, ES^{k'}F, ES^{k''}D$  を考える必要がある. 途中の  $S^k, S^{k'}, S^{k''}$  を無視すると,  $EE, EF, ED$  が得られる.  $EE$  と  $EF$  の場合は既に検討が終わっているので,  $ED$  について考える. この語では反転は生じない. これは表 1 で  $E$  の寄与を +1 とし,  $D$  の寄与を -1 とした事に矛盾しない. 周期軌道の語は最後の BW の次に最初の BW がくる. よって最後の BW からの寄与は最初の BW と一緒にして反転するかどうか判定する.

BWS では  $D$  の個数が  $E$  の個数より多い周期語はないことを示す. 定理 2.5.2 より BWS は少なくともひとつの  $E$  を含むことが分かる. よって  $E$  より始まる BWS を考える.  $D$  を含まない語に対しては自明.  $D$  を 1 個含む語の場合, 出発点に  $E$  があるから,  $n_E(w) \geq n_D(w)$  が得られる.  $D$  を 2 個含む語の場合を考える.  $DD$  は不可能であるから, 最初の  $D$  と次の  $D$  の間に必ず  $E$  がある. これは, 最初の  $D$  から  $E$  への遷移した場合は自明である. よって  $D$  から  $F$  に遷移した場合を考える.  $F$  から  $S$  または  $D$  へ遷移できない. よって再度  $D$  へ戻るためには  $F$  から  $E$  へ遷移する必要がある. 先頭の  $E$  を含め  $E$  の個数は 2 以上である. よって  $n_E(w) \geq n_D(w)$  が得られる. この議論は  $D$  が  $k$  ( $\geq 3$ ) 個含む BWS にも適応できる.

次に  $q = 2$  の場合の証明を行う.  $D(1/2)$  は定義されていないので,  $n_D(w) = 0$  が成立する.  $1/2$ -S-BE の軌道点は領域  $E(1/2)$  に存在する. このことより  $E(1/2)$  から  $E(1/2)$  へ, または  $S(1/2)$  への遷移が生じれば反転が起きる. よって  $N_{\uparrow,BW}(w) = n_E(w)$  が示され証明が終わる. (Q.E.D.)

証明 [2]. 最初に  $q \geq 3$  の場合を考える. DMS[3] の構成規則より,  $S$  の偶奇性は偶であることと,  $E$  の偶奇性が奇であることが導かれる.  $S$  を巡回すると  $F$  が得られる. よって,  $F$  の偶奇

性も偶である。第 1 部において  $D$  を導入した。その構成規則より、 $D$  の偶奇性は奇であることが分かる。よって BWS の偶奇性は、 $n_E(w) + n_D(w)$  の偶奇性に等しいし、 $n_E(w) - n_D(w)$  の偶奇性に等しい。後者は [1] で得られた結果に一致する。以上で [2] は証明された。

次に  $q = 2$  の場合を考える。  $S(1/2) = 11$  と  $E(1/2) = 01$  より、 $S(1/2)$  の偶奇性は偶で、 $E(1/2)$  の偶奇性は奇である。よって、この場合において [2] は自明である。(Q.E.D.)

ベクトルの反転回数の偶奇性が奇の場合、指数として  $(+1)$  を与える。またベクトルの反転回数の偶奇性が偶の場合、指数として  $(-1)$  を与える。そうするとこれらの指数はポアンカレ指数と一致する。

命題 4.2.4.

共鳴チェーン  $\langle Z_{p/q} \rangle$  ( $q \geq 3$ ) における対称周期軌道を考えよう。この軌道の BWS が  $w$  であるとする。また、 $n_{\text{BW}}(w)$  を  $w$  に含まれるブロック語数とする。  $n_{\text{BW}}(w) \geq 2$  の場合、 $N_{\uparrow, \text{BW}}(w)$  の偶奇性は  $n_{\text{BW}}(w)$  の偶奇性に等しい。

証明.

[1] 奇数周期  $2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) で、条件  $z_0 \in S_1$  と  $z_k \in S_2$  を満たす場合.

[2a] 偶数周期  $2k$  ( $k \geq 1$ ) で、条件  $z_0, z_k \in S_1$  を満たす場合.

[2b] 偶数周期  $2k$  ( $k \geq 2$ ) で、条件  $z_0, z_k \in S_2$  を満たす場合.

ここでは [1] の場合の証明のみ与える。[2a] と [2b] に対する証明も同様に行える。

[1] の場合の証明. 最初に  $q \geq 3$  の場合を考える。条件  $z_0 \in S_1$  と  $z_{k+1} \in S_2$  より、 $\dot{E}W^{-1}\dot{E}$ ,  $\dot{E}W^{-1}\dot{S}$ ,  $\dot{D}W^{-1}\dot{E}$  と  $\dot{D}W^{-1}\dot{S}$  の 4 つが可能である。対称性を考慮して後半の軌道が自動的に決まる。最終的に以下の 4 つの BWS が得られる。

$$\dot{E}W^{-1}\dot{E}EW, \dot{E}W^{-1}\dot{S}FW, \dot{D}W^{-1}\dot{E}EW, \dot{D}W^{-1}\dot{S}FW.$$

異なった BWS で使用されている  $W$  は必ずしも同じである必要は無い。これらの BWS において使用されているブロック語の個数は奇数である。実際、 $\dot{E}W^{-1}\dot{E}EW$  では、 $n_E(w)$  は奇数で  $n_D(w)$  は偶数である。よって、 $n_E(w) - n_D(w)$  は奇数である。残りの BWS に対しても同様の結果が導かれる。最後の BWS に関して注意を与える。定理 2.5.2 より BWS は少なくとも 1 個の  $E$  を含まなければならない。これより  $W$  は少なくとも 1 個の  $E$  を含まなければならないことが導かれる。よってこの BWS は偶数個の  $E$  を含み、奇数個の  $D$  を含む。

次に  $q = 2$  の場合を考える。この場合、 $S(1/2)^{-1} = S(1/2)$  である。よって、上記の証明で使用した  $F$  を  $S(1/2)$  と読みかえる。その結果、可能な BWS は  $\dot{E}W^{-1}\dot{E}EW$  と  $\dot{E}W^{-1}\dot{S}SW$  の 2 つである。これらに対して同じ議論を繰り返せば、 $q = 2$  の場合の証明が得られる。(Q.E.D.)

## 5 記号平面上の軌道

馬蹄が存在している場合、軌道の記号列を構成する記号化は簡単である。最初に馬蹄における軌道の記号化は区間  $[0, 1]$  のテント写像の記号化と同じであることを指摘しておこう。

$$x_{n+1} = 2x_n \quad (0 \leq x_n \leq 1/2), \quad 2 - 2x_n \quad (1/2 < x_n \leq 1). \quad (10)$$

軌道が領域  $0 \leq x \leq 1/2$  ( $1/2 < x \leq 1$ ) に入れば、記号は 0 (1) とする。この記号化を TM と名付け、 $s_{\text{TM}}$  と記す。

別の記号化を紹介する。下記のようにベーカー写像を導入する。

$$x_{n+1} = 2x_n \quad (0 \leq x_n \leq 1/2), \quad 2x_n - 1 \quad (1/2 < x_n \leq 1). \quad (11)$$

軌道が領域  $0 \leq x \leq 1/2$  ( $1/2 < x \leq 1$ ) に入れば、記号は 0 (1) とする。この記号化を BM と名付け、 $s_{\text{BM}}$  と記す。

ここで、直交座標系の記号平面を導入する。  $s$  を軌道の両側無限記号列とする。  $s$  を分離記号 (.) で、以下のように 2 つの部分に分割する。

$$\cdots s_{-3}s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2s_3\cdots \quad (12)$$

対応する軌道は  $O(z_0) = \{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  で  $\text{Symb}(z_k) = s_k$  が成立している。通常、分離記号は未来と過去を分離する。  $s_0$  は現在を表現し、  $s_0$  の右の記号は未来を表現し、分離記号の左の記号は過去を表現している。記号平面の座標を  $\hat{x}$  軸、  $\hat{y}$  軸とする。

$$\hat{x}_0 = .s_0s_1s_2\cdots, \quad (13)$$

$$\hat{y}_0 = .s_{-1}s_{-2}s_{-3}\cdots. \quad (14)$$

記号平面における時間発展を行うためにシフト演算子  $\sigma$  を定義する。シフト演算子により、時間発展は  $\sigma(s)_k = s_{k+1}$  と得られる。

TM と BM の記号化の違いを見ることにしよう。例として記号平面における  $\hat{Q}$  を考える。記号平面で、  $\hat{x}_Q|_{\text{TM}} = .111\cdots = 1$ 、  $\hat{y}_Q|_{\text{TM}} = .111\cdots = 1$  と位置が得られる。しかし、正しい位置は  $(2/3, 2/3)$  である。これらは 2 進法の表記では  $.1010\cdots$  である。つまり TM の表現を BM の表現に変換する下記のアルゴリズムが必要となる。

#### アルゴリズム 5.1.

RO は、  $\text{RO}(0) = 1$ 、  $\text{RO}(1) = 0$  と定義された反転作用子とする。

[1] 長さ  $q$  の語  $s$  を用意する。

[2] 語  $s$  の偶奇性が偶ならば、2 つの同じ 2 進法表現  $b|_{\text{TM}} = .s = s_0s_1\cdots s_{q-1}$  と  $b = .t_0t_1\cdots t_{q-1}$  を用意する。ただし、  $s_j = t_j$  ( $0 \leq j \leq q-1$ )。語  $s$  の偶奇性が奇ならば、2 つの同じ 2 進法表現  $b|_{\text{TM}} = .s^2 = .s_0\cdots s_{q-1}s_0\cdots s_{q-1} \equiv .s_0s_1\cdots s_{2q-1}$  と  $b = .t_0t_1\cdots t_{2q-1}$  を用意する。ただし、  $s_j = t_j$  ( $0 \leq j \leq 2q-1$ )。

[3]  $s$  の偶奇性が偶ならばステップ [3a] を実行し、奇ならばステップ [3b] を実行する。

[3a]  $k = 0, 1, \dots, q-2$  として、  $0 \leq j \leq q-1$  に対しては  $t_j^{(k)} = t_j^{(k-1)}$  とする。次に  $s_k = 1$  ならば、  $k+1 \leq j \leq q-1$  に対して  $t_j^{(k)} = \text{RO}(t_j^{(k-1)})$  とする。ここで、  $t_j^{(-1)} = t_j$  ( $0 \leq j \leq q-1$ )。最終的に  $b|_{\text{BM}} = .t_0^{(q-2)}t_1^{(q-2)}\cdots t_{q-1}^{(q-2)}$  が得られる。

[3b]  $k = 0, 1, \dots, 2q-2$  として、  $0 \leq j \leq 2q-1$  に対しては  $t_j^{(k)} = t_j^{(k-1)}$  とする。次に  $s_k = 1$  ならば、  $k+1 \leq j \leq 2q-1$  に対して  $t_j^{(k)} = \text{RO}(t_j^{(k-1)})$  とする。ここで、  $t_j^{(-1)} = t_j$  ( $0 \leq j \leq 2q-1$ )。最終的に  $b|_{\text{BM}} = .t_0^{(2q-2)}t_1^{(2q-2)}\cdots t_{2q-1}^{(2q-2)}$  が得られる。

[4]  $s$  の偶奇性が偶ならば、  $b|_{\text{BM}}$  の値は  $\alpha/2^q$  である。よって  $\hat{x}$  または  $\hat{y}$  の位置は  $\alpha/(2^q - 1)$  と得られる。  $s$  の偶奇性が奇ならば、  $b|_{\text{BM}}$  の値は  $\alpha/2^q$  である。よって  $\hat{x}$  または  $\hat{y}$  の位置は  $\alpha/(2^{2q} - 1)$  と得られる。

アルゴリズム 5.1 の [4] で導入した  $\alpha$  が偶数であることに注意しよう。アルゴリズム 5.1 の [2] で用意した  $b|_{\text{TM}}$  の偶奇性は、  $s$  の偶奇性と関係なく偶である。  $b|_{\text{TM}}$  の末尾の記号が 0 の場合、末尾の記号の反転は偶数回生じる。よって  $b|_{\text{BM}}$  の末尾の記号は 0 である。1 の場合、末尾の記号の反転は奇数回生じる。よって  $b|_{\text{BM}}$  の末尾の記号は 0 である。これより主張が示された。

記号平面における写像  $\hat{T}$  を定義しよう。

定義 5.2. 記号平面 ( $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$ )、写像  $\hat{T}$  は以下のように定義される。

$$\hat{x}_{n+1} = 2\hat{x}_n, \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n/2, (0 \leq \hat{x}_n \leq 1/2), \quad (15)$$

$$\hat{x}_{n+1} = 2 - 2\hat{x}_n, \hat{y}_{n+1} = 1 - \hat{y}_n/2. (1/2 < \hat{x}_n \leq 1). \quad (16)$$

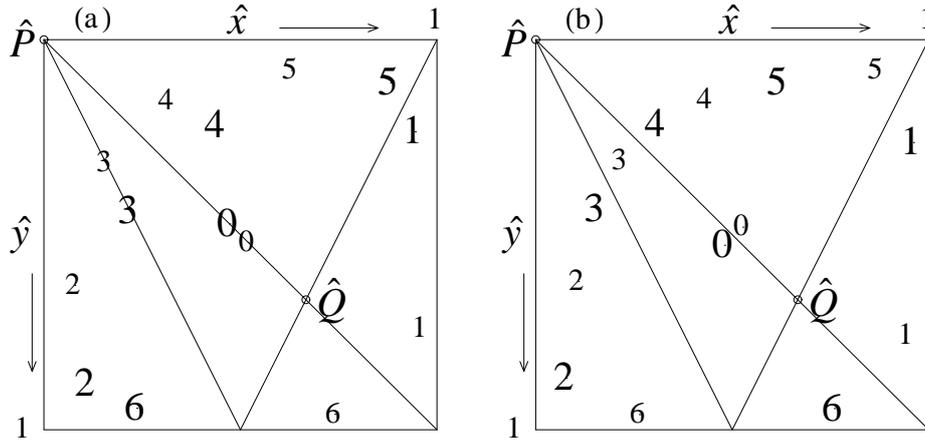


図 4: 記号平面における軌道. (a) 語  $0001001 (= E(1/4)E(1/3))$  で記述される軌道は大きい文字で描かれている. 語  $0001111 (= E(1/4)D(1/3))$  で記述される軌道は小さい文字で描かれている. これらはともに対称軌道である. 軌道は  $\hat{S}_h$  上より出発し,  $0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 0$  の順に運動する. (b) 語  $0001101 (= E(1/4)S(1/3))$  で記述される軌道は大きい文字で描かれている. 語  $0001011 (= E(1/4)F(1/3))$  で記述される軌道は小さい文字で描かれている. これらの周期軌道は母周期軌道  $E(1/4)D(1/3)$  から同周期分岐で生じた非対称周期軌道である.

次に, 両側無限列  $\cdots s_{-3}s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\cdots$  の記号平面での軌道を描く方法を説明する. 初期点は  $\hat{z}_0 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0)$  である. ただし,  $\hat{x}_0 = .s_0s_1s_2\cdots$ ,  $\hat{y}_0 = .s_{-1}s_{-2}s_{-3}\cdots$ . アルゴリズム 5.1 を利用し記号平面での位置を決め, その位置を  $\hat{z}_0$  とする. 時間発展作用子  $\sigma$  を作用し, 分離記号を右に 1 文字分移動する. アルゴリズム 5.1 を利用して  $\hat{z}_1 = \hat{T}\hat{z}_0$  の位置が決定される. 周期語  $q$  に関してこの手順を  $q - 1$  回繰り返す.

記号平面での周期軌道の基本的な性質を主張 5.3 として与える. これは, テント写像の良く知られた性質 [6] より得られる. またアルゴリズム 5.1 の後の注意も参考にせよ.

主張 5.3.

$\hat{z}_0 = (m_0/n_0, i_0/j_0)$  ( $0 < m_0/n_0, i_0/j_0 < 1$ ) を記号平面の点とする. ただし 2 つの分数は既約である. 周期軌道が  $\hat{z}_0$  を通過するならば, 分母  $n_0$  と  $j_0$  は 3 以上の奇数である. また分子  $m_0$  と  $i_0$  は 2 以上の偶数である.

次に図.4(a) を利用して記号平面の構造を説明する. 図.4(a) では  $\hat{y}$  軸の方向が通常の方角とは逆転している. 左上のコーナーが原点  $(0, 0)$  でサドル不動点  $\hat{P}$  がある. 右上のコーナーが  $(1, 0)$  で, 主ホモクリニック点  $\hat{u}$  がここにある. 左下のコーナーが  $(0, 1)$  で,  $\hat{T}\hat{u}$  がある. 右下のコーナーが  $(1, 1)$  で, 主ホモクリニック点  $\hat{v}$  がある. 対角線は対称線  $\hat{S}_h$  である.  $(0, 0)$  と  $(1/2, 1)$  を結び,  $(1/2, 1)$  と  $(1, 0)$  を結んでできる V 字形が対称線  $\hat{S}_g$  を表している. 記号平面における対称線の構造に関しては付録 A の解説をみていただきたい. 2 つの対称線  $\hat{S}_h$  と  $\hat{S}_g$  の交点  $(2/3, 2/3)$  が楕円型不動点  $\hat{Q}$  である.

語  $0001001 (= E(1/4)E(1/3))$  と  $0001111 (= E(1/4)D(1/3))$  で記述される周期軌道が図.4(a) に描かれている. これら是对称周期軌道である, よってこれらの軌道は  $\hat{S}_h$  と  $\hat{S}_g$  の上に軌道点をもつ. 図.4(b) には, 時間反転対である  $0001101 (= E(1/4)S(1/3))$  と  $0001011 (= E(1/4)F(1/3))$  の軌道を描いてある.

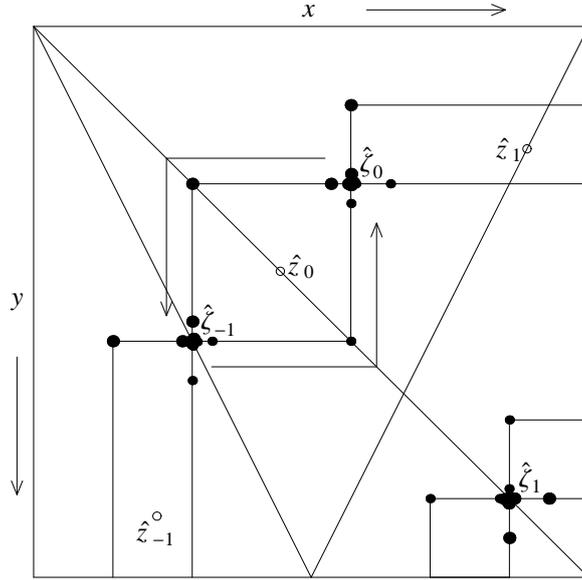


図 5: ヘテロクリニック軌道  $F(1/3)^\infty E(1/3)S(1/3)^\infty$  の軌道点は大きな黒丸で描かれている。またヘテロクリニック軌道  $S(1/3)^\infty D(1/3)F(1/3)^\infty$  の軌道点は小さな黒丸で描かれている。  $\hat{z}_{-1}$ ,  $\hat{z}_0$ ,  $\hat{z}_1$  に位置するサドルの安定多様体と不安定多様体は実線で描かれている。これらの実線で囲まれた領域が共鳴チェーン  $\langle \hat{Z}_{1/3} \rangle$  である。  $1/3$ -S-BE の軌道点  $\hat{z}_k$  ( $k = -1, 0, 1$ ) は  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_k)$  の中に存在する。

## 6 記号平面における共鳴領域

### 6.1 共鳴領域

記号平面での周期軌道の位置に関する主張 5.3 を利用し、記号平面での共鳴領域について調べる。相平面で  $p/q$ -S-BE と名付けられた軌道は定義されている。同様の名称を記号平面でも利用する。記号平面において  $p/q$ -S-BE の共鳴領域と共鳴チェーンを構成しよう。例として  $1/3$ -S-BE の共鳴領域を構成しよう (図.5 を見よ)。最初に記号平面で  $1/3$ -S-BE の軌道点を見つけ、次に隣同士のサドル間のヘテロクリニック軌道を構成する。  $1/3$ -S-BE の軌道点は  $\hat{z}_{-1} = (2/7, 4/7)$ ,  $\hat{z}_0 = (4/7, 2/7)$ ,  $\hat{z}_1 = (6/7, 6/7)$  であり、  $1/3$ -S-BE の軌道点は  $\hat{z}_{-1} = (2/9, 8/9)$ ,  $\hat{z}_0 = (4/9, 4/9)$ ,  $\hat{z}_1 = (8/9, 2/9)$  である。  $\hat{z}_0$  と  $\hat{z}_{-1}$  を結ぶヘテロクリニック軌道は  $F(1/3)^\infty E(1/3)S(1/3)^\infty$  と  $S(1/3)^\infty D(1/3)F(1/3)^\infty$  である。第 7.3 節で、ヘテロクリニック軌道の BWS の構成方法は説明される。

図.5 を見ると、ヘテロクリニック軌道は非常に簡単な振る舞いをすることが分かる。ヘテロクリニック軌道点は共鳴チェーンの境界にあることが分かる。これをもとに共鳴領域と共鳴チェーンを構成する。  $\hat{z}_0$  の共鳴領域は 4 つの辺で囲まれた領域である。4 つの辺は、  $\hat{z}_{-1}$  と  $(4/7, 4/7)$  をつないだ辺、  $(4/7, 4/7)$  と  $\hat{z}_0$  をつないだ辺、  $\hat{z}_0$  と  $(2/7, 2/7)$  をつないだ辺、  $(2/7, 2/7)$  と  $\hat{z}_{-1}$  をつないだ辺である。第 1 の辺と第 3 の辺は不安定多様体の弧であり、第 2 の辺と第 4 の辺は安定多様体の弧である。この領域を  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_0)$  と名づける。  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_0)$  に  $\hat{T}$  または  $\hat{T}^{-1}$  を作用して、2 つの共鳴領域  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_1)$  と  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_{-1})$  が得られる。  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_1)$  は右上の長方形と、右下でかつ  $\hat{S}_h$  の上部にある正方形に分割されている。一方、  $\hat{Z}_{1/3}(\hat{z}_{-1})$  は左下の長方形と、右下でかつ  $\hat{S}_h$  の下部にある正方形に分割されている。これらの領域を集めて共鳴チェーン  $\langle \hat{Z}_{1/3} \rangle$  が決定される。図.6 に描かれている共鳴チェーンの集合は寄木細工に似た構造をしている。つまり 2 つの共鳴チェーンの間は別の共鳴チェーンで埋められている。 §6.2 で寄木細工構造の原因を調べる。

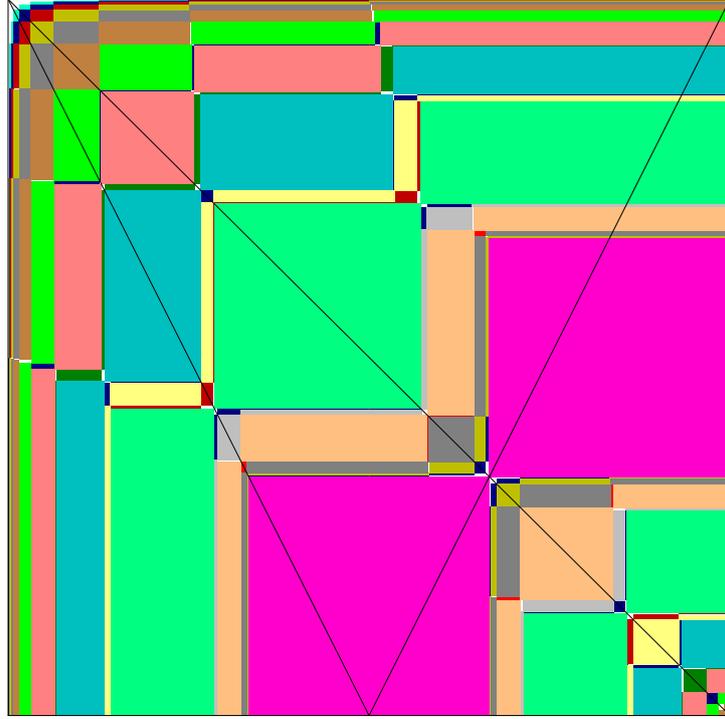


図 6: 記号平面における周期が 2 から 12 までの共鳴チェーン.

記号平面における  $p/q$ -S-BS の位置を利用して  $p/q$ -S-BE の共鳴チェーンを構成できる. また共鳴チェーンの面積も計算できる.  $1/3$ -S-BS の位置を利用すると,  $\widehat{Z}_{1/3}(\widehat{z}_0)$  の面積が  $2^2/(2^3 - 1)^2$  と得られる. よって  $\langle \widehat{Z}_{1/3} \rangle$  の全面積  $A(1/3)$  は  $3 \cdot 2^2/(2^3 - 1)^2$  である. ひとつの周期に対して複数の回転数が存在する場合がある. 例として,  $q = 5$  の場合には, 2 つの回転数  $1/5$  と  $2/5$  がある. この個数は久留島-オイラー関数  $\phi(q)$  の半分として記述される. ここで  $\phi(q)$  は,  $q$  と互いに素である  $q$  より小さい正の整数の個数である [7].  $A(1/5) = A(2/5)$  に注意しよう. 以下でこの事実について説明する.

ここでは,  $q \geq 3$  の場合を考える. 共鳴領域の  $x$  方向の長さの最小値を  $l_0$  とする. ここでテント写像の折り返しを無視することにしよう. つまり 2 倍写像を考える. そうすると共鳴領域の長さは  $l_i^{(x)} = 2^i l_0$  ( $0 \leq i \leq q-1$ ) であることが分かる. 折り返しを考慮するとひとつの共鳴領域が 2 つに分離される事がある. 辺も 2 つに分かれるが, 2 つの辺の長さを足すと  $l_i^{(x)}$  である (図. 6 を見よ).  $y$  方向の長さに関しても同様で,  $l_i^{(y)} = 2^i l'_0$  ( $0 \leq i \leq q-1$ ) が得られる. 対称線  $\widehat{S}_h$  に関する対称性より  $l_0 = l'_0$  が得られる. 共鳴チェーンの長さを  $L(p/q)$  とすると,  $L(p/q) = \sum_{0 \leq i \leq q-1} 2^i l_0 = (2^q - 1)l_0$  が得られる.  $L(p/q) > 1$  が成立するならば, 隣接した共鳴領域に重なりが生じる. 逆に  $L(p/q) < 1$  が成立するならば, 共鳴チェーンが連結にならない. よって,  $L(p/q) = 1$  が成立し,  $l_0 = 1/(2^q - 1)$  が得られる. すべての共鳴領域の面積は等しいから,  $x$  方向の長さが  $l_i^{(x)}$  ならば  $y$  方向の長さは  $l_{q-1-i}^{(y)}$  である. よって, ひとつの共鳴領域の面積は  $l_i^{(x)} l_{q-1-i}^{(y)} = 2^{q-1}/(2^q - 1)^2$  である. これは周期  $q$  のみで決まる. 総面積は  $A(p/q) = q2^{q-1}/(2^q - 1)^2$  ( $q \geq 3$ ) である.

次に,  $L(1/2) = 1$  が成立することに注意しよう. 回転数  $1/2$  の左下の共鳴領域は右上の共鳴領域に写像される. 引き延ばした折り返しにより, 左下の共鳴領域の上辺 (長さ:  $1/3$ ) は右上の共鳴領域の上辺と下辺に写像される. よって,  $L(1/2) = 1/3 + 2/3 = 1$  が得られる. 最後に 2 つの共鳴領域の面積の和は  $A(1/2) = 2/(2^2 - 1)^2$  である.

面積の合計  $A$  は下記のように計算できる.

$$A = \sum_{q \geq 2} \frac{q\phi(q)/2}{(2^q - 1)^2} 2^{q-1}. \quad (17)$$

$\phi(2) = 1$  であることに注意しよう. 次に  $A = 1$  が成り立つことを証明する.

$$\begin{aligned} A &= (1/4) \sum_{q \geq 2} \frac{q\phi(q)2^q}{(2^q - 1)^2} = (1/4) \sum_{m \geq 1} \sum_{q \geq 2} \frac{mq\phi(q)}{2^{mq}} \\ &= (1/4) \sum_{n \geq 2} \frac{n}{2^n} \left( \sum_{q|n, 1 < q \leq n} \phi(q) \right) = (1/4) \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{2^n} = (1/4) \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

ここで  $\sum_{m \geq 1} m/2^{mq} = 2^q/(2^q - 1)^2$ ,  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)/2^n = 4$ ,  $\sum_{q|n, 1 < q \leq n} \phi(q) = n - 1$ . 記号  $q|n$  は,  $n$  は  $q$  で割り切れることを表現している. 総和の計算では参考文献 [8] で利用された方法を用いている. 以上より下記の定理 6.2.1 が得られる.

定理 6.1.1. すべての共鳴チェーンは記号平面の全面積を占める.

図.6 では, 周期が 2 から 12 までの共鳴チェーンを描いた. 周期が 2 から 12 までの共鳴チェーンの総面積は約 0.9917 である.

## 6.2 寄木細工構造の原因

図.6 をよく見ると,  $p/q$ -S-BS の軌道点は  $\hat{S}_g^+$  上には全くない. この事実より, 寄木細工構造の原因は,  $p/q$ -S-BE のみが  $\hat{S}_g^+$  上に軌道点をもつことにある. これはクラス-1 のバーコフ型周期軌道に対する主軸仮説と呼ばれている [2, 3]. 以下で馬蹄が存在するときに主軸仮説が正しいことを証明する.

$s|_{\text{TM}}$  を  $p/q$ -S-BE を表す語とする. 第 4 節で述べたように,  $s|_{\text{TM}}$  (もとの語と名付ける) を  $s|_{\text{BM}}$  (変換された語) に変換する. 点  $\hat{z}_0 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0)$  とその軌道は  $s|_{\text{BM}}$  で決まる. 対称線  $\hat{S}_g^+$  は  $\hat{y} = 2 - 2\hat{x}$  ( $2/3 \leq \hat{x} \leq 1$ ) である. ここで  $(2/3, 2/3)$  が楕円型不動点  $\hat{Q}$  を表している. よって条件  $\hat{y}_k = 2 - 2\hat{x}_k$  を満たす軌道点  $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$  が存在することを示せばよい. しかし, この手続きは非常に面倒である. よって別の方法を考える. もとの語  $s|_{\text{TM}}$  を用いて位置  $\hat{z}_0 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0)$  とその軌道を決めることにする. この場合,  $\hat{S}_g^+$  は  $\hat{y} = 2\hat{x} - 1$  ( $1/2 \leq \hat{x} \leq 1$ ) となることに注意しよう.  $\hat{y}_k = 2\hat{x}_k \pmod{1}$  を満たす軌道点  $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$  が存在することを証明すればよい. 実際, テント写像では折り曲げ過程は領域  $1/2 < \hat{x} \leq 1$  で生じるが, ベーカー写像では折り曲げ過程は生じない. それゆえ図.7(b) で描かれている領域  $1/2 < \hat{x} \leq 1$  にある  $\hat{S}_g$  を反転する. そうすると上記の表現が得られる. つまり, 図.7(a) で描かれている領域  $1/2 < \hat{x} \leq 1$  にある対称線が得られる.

図.7(a) に, もとの語で記述された  $p/q$ -S-BE ( $2 \leq q \leq 9$ ) の軌道点が描かれている. 対称線も描かれている.  $p/q$ -S-BE は  $\hat{y} = 2\hat{x} - 1$  ( $1/2 < \hat{x} \leq 1$ ) で記述される対称線  $\hat{S}_g^+$  上に軌道点をもつことに注意しよう. 図.7(b) に, 変換された語で記述された  $p/q$ -S-BE ( $2 \leq q \leq 9$ ) の軌道点が描かれている.  $p/q$ -S-BE は,  $\hat{S}_g$  の領域  $2/3 \leq \hat{x} \leq 1$  における  $\hat{S}_g^+$  上に軌道点をもつことが分かる.

ここで,  $E(p/q)$  ( $q \geq 3$ ) において”孤立した 1” [4] が存在することを示す. 例として  $2/5$ -S-BE の 10110 と  $2/5$ -S-BS の 11110 を考えよう. DMS による記号化規則によると, 11110 の第 2 番目の記号 1 を 0 に変換して 10110 が得られる. 巡回をすると 01011 が導かれる. この手順より  $E(2/5)$  には孤立した 1 が存在することが分かる. この事実は  $E(p/q)$  ( $q \geq 2$ ) に一般化できる.

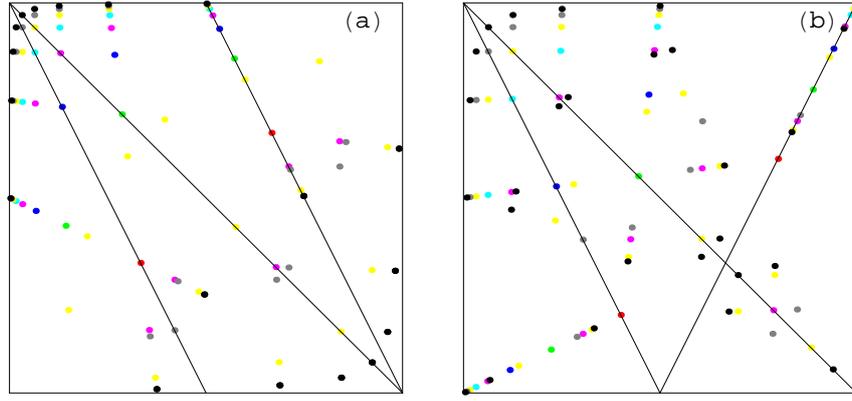


図 7: (a) もとの語で記述された  $p/q$ -S-BE ( $2 \leq q \leq 9$ ) の記号平面での軌道. (b) 変換された語で記述された  $p/q$ -S-BE ( $2 \leq q \leq 9$ ) の記号平面での軌道.

軌道列  $s^\infty$  を考える. 例えば,  $s = 01101$  として  $\dots 0110101101\dots$  を考える. この例は下記のように孤立した 1 を中心にした形式に書き直せる.

$$\dots (10110)(10110)1(01101)(01101)\dots$$

次に  $E(2/5) = 01101$  と  $E(2/5)^{-1} = 10110$  を用いると, これは更に下記のように書き直せる.

$$\dots E(2/5)^{-1}E(2/5)^{-1}1E(2/5)E(2/5)\dots$$

一般に  $E(p/q)^\infty$  は孤立した 1 を中心にした形式で下記のように記述できる.

$$\dots E(p/q)^{-1}E(p/q)^{-1}.1E(p/q)E(p/q)\dots \quad (18)$$

ここではセパレータ (.) を孤立した 1 の左に置いた. よって位置  $\hat{z}_0 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0)$  は下記のように決まる.

$$\hat{x}_0 = .1E(p/q)E(p/q)\dots, \quad (19)$$

$$\hat{y}_0 = .E(p/q)E(p/q)\dots \quad (20)$$

$2\hat{x}_0(\text{Mod } 1) = .E(p/q)E(p/q)\dots = \hat{y}_0$  が成立する.

$E(p/q)$  の第 1 番目の記号が 0 であることから,  $\hat{x}_0$  を  $.10*|_{\text{TM}}$  と書こう. ここで \* は残りの部分を意味する. これを変換すると  $.11*'|_{\text{BM}}$  が得られる. ここで \*' は残りの部分を変換した語である.  $.11*'|_{\text{BM}} > .11|_{\text{BM}} > x^* = .(10)^\infty|_{\text{BM}} = 2/3$  が成立する. 以上をまとめて  $\hat{z}_0$  が  $\hat{S}_g^+$  上にあることが分かる. よって定理 6.2.1 が得られた.

定理 6.2.1. 馬蹄が存在するならば,  $p/q$  ( $q \geq 2$ )-S-BE は主軸  $S_g^+$  上に軌道点をもつ. 記号平面の共鳴チェーンへの分割は一意的である.

## 7 共鳴領域 $Z_{p/q}(z)$ ( $q \geq 3$ ) の中の対称周期軌道

ここでは共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) の中の対称周期軌道の個数を調べる. 次に対称周期軌道の BWS を順次決定する規則を与える. 同様のことが共鳴領域  $Z_{1/2}(z_0)$  と馬蹄の中の対称周期軌道についても行える. この論文ではこの部分を省略する.

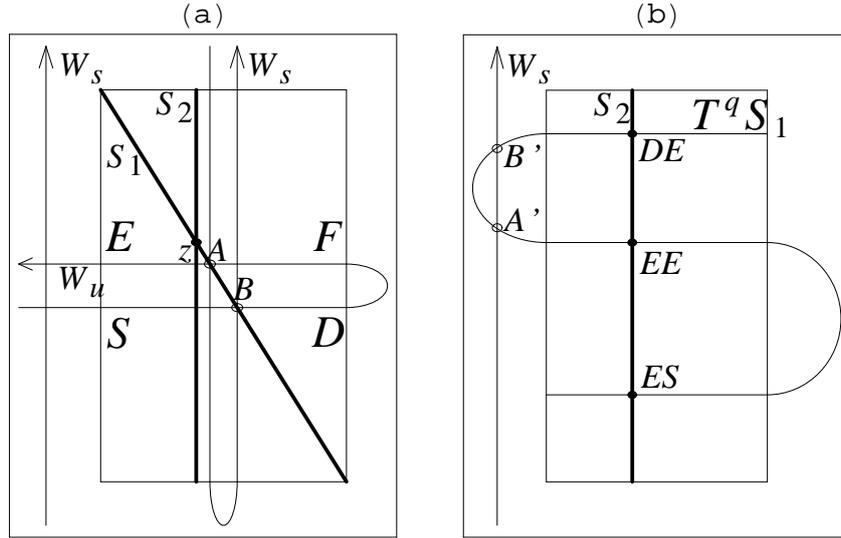


図 8: 共鳴領域における  $S_1$  の最初の引き延ばしと折り曲げ.

## 7.1 共鳴領域内の対称周期軌道の個数

$T^q S_1$  と  $T^{2q} S_2$  が S 字構造をしていることを思い出そう.  $k \geq 1$  において,  $T^{kq} S_1 \cap S_1$ ,  $T^{kq} S_1 \cap S_2$ ,  $T^{(k+1)q} S_2 \cap S_2$  の交差点は  $3^k$  個ある. これらの事実から周期  $kq$  の対称周期軌道の個数  $N(k)$  を求めることができる.  $k$  が偶数の場合は下記の式が成立する.

$$N(k) = (2/3)3^{k/2} - \sum_{m|k, 1 \leq m < k} N(m). \quad (21)$$

$k$  が奇数の場合は下記の式が成立する.

$$N(k) = 3^{(k-1)/2} - \sum_{m|k, 1 \leq m < k} N(m). \quad (22)$$

ここで  $N(1) = 1$ .  $N(1) = 1$  は  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) の中の  $z$  の存在を表している.  $k$  が 3 以上の素数ならば, 式. (22) は以下のように簡単になる.

$$N(k) = 3^{(k-1)/2} - 1. \quad (23)$$

式. (23) より,  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) 内の対称周期軌道の個数の発散率は  $\sqrt{3}$  である. 全周期軌道の発散率は 3 であることに注意しよう. 周期軌道の個数を求め方は簡単であるので説明は省略する.

## 7.2 対称周期軌道の BWS

共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) の中の対称線  $S_1$  または  $S_2$  上に軌道点をもつ対称周期軌道の BWS を決定したい. BWS の一般的な表現を与えることは難しいので, BWS を決定する手順を以下で示そう. 図.8(a) には 4 つの領域  $E, F, S, D$  と対称線  $S_1$  と  $S_2$  が描かれている.  $k = 1, 2, \dots$  においてすべての対称周期軌道点は  $S_1 \cap T^{kq} S_1$ ,  $S_2 \cap T^{kq} S_1$  と  $S_2 \cap T^{kq} S_2$  の交点として得られる. 図.2(a) では,  $T^q S_2$  は水平な弧として描かれている.  $z$  以外の周期軌道は  $T^{kq} S_2$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) を考えることによって得られる.

表 2: 対称周期軌道の BWS を決定するための規則.

位置	点の個数 ステージ数 : $n = 1, 2, \dots$	偶数周期: $S_1$ 上	偶数または奇数周期: $S_2$ 上
上	上: $3^{n-1}$ 中央: $3^{n-1}$ 下: $3^{n-1}$	$\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ $\dot{D} \rightarrow D\dot{E}$	$\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ $\dot{S} \rightarrow D\dot{E}$
中央	上: $3^{n-1}$ 中央: $3^{n-1}$ 下: $3^{n-1}$	(上下反転) $\dot{D} \rightarrow S\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{E}$	(上下反転) $\dot{S} \rightarrow S\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{E}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{E}$
下	上: $3^{n-1}$ 中央: $3^{n-1}$ 下: $3^{n-1}$	$\dot{E} \rightarrow E\dot{D}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{D}$ $\dot{D} \rightarrow S\dot{D}$	$\dot{E} \rightarrow E\dot{S}$ $\dot{E} \rightarrow E\dot{S}$ $\dot{S} \rightarrow S\dot{S}$

BWS を決定するには,  $Z_{p/q}(z)$  と対称線が  $T^q$  によってどのように写された像の幾何学的形状を調べる必要がある. 対称線は  $T^q$  によって 3 つ折れになるという基本的な性質をもつ. 図.8(a) では対角線で描かれた  $S_1$  は, 写像後は S 字形になる. S 字形は図.8(b) に描かれている.  $z$  は楕円型不動点であるので,  $S_1$  の弧は回転する. 安定多様体上の左端点は下方に移動し, 同じく安定多様体上の右端点は上方に移動する.  $Z_{p/q}(z)$  全体は上方に圧縮され左方向に延ばされ S 字形になるように折り曲げられる. これをもとの  $Z_{p/q}(z)$  に重ねる. この過程で  $z$  はもとの位置にもどる.  $z$  の近傍は 180 度回転する. 対称線の像と対称線の交点は 3 個である. 次に  $T^q$  を作用すると交差点は 3 倍に増えて 9 個になる. この過程が無限に続く.

BWS の決定方法を述べよう.  $S_2 \cap T^{kq} S_1$  の場合の BWS の決定方法を簡単に説明する. 図.8(b) に  $S_2 \cap T^q S_1$  が描かれている. 3 つの交差点がある. これらを「上」, 「中央」, 「下」と名付ける. これらの BWS は  $DE$ ,  $EE$ ,  $ES$  である. 「上」は最初  $D$  にあり,  $T^q$  の作用で  $E$  にくる. よって  $DE$  が得られる. 「上」の写像による移動は, 図.8(a) と (b) より理解できるであろう. 「中央」が  $EE$  であることは自明である. 「中央」は不動点である. 「下」は最初に  $E$  に存在し,  $T^q$  の作用で  $S$  にくる. よって  $ES$  が得られる. 出発点と到着点は共に対称線上にある. このことが分かるように明示的に  $\dot{D}\dot{E}$ ,  $\dot{E}\dot{E}$ ,  $\dot{E}\dot{S}$  と書く. 3 つの交点に関しては BWS が決定できた.

$S_2 \cap T^{2q} S_1$  は 9 個の点で構成される. この場合, S 字形した  $T^q S_1$  は上方に圧縮され, 引き延ばされ 3 つに折り曲げられる. これをもとの  $Z_{p/q}(z)$  に重ねる. そうすると 9 個の交差点が現れる. この様子を図.9 に描いた. これら 9 個の点の BWS は図示されている. 特に「中央」においては交差の順序が反転することに注意する必要がある. よって, 交差点「上」, 「中央」, 「下」は, 最初のステージの「下」, 「中央」, 「上」から生じる. 表 2 ではこれを注意するために「上下反転」と注意書きを入れてある. 図.8 と 9 を初期の例として, より長い周期の BWS を決める規則を導こう. 最初のステージ  $n = 1$  は, 図.8(b) に相当する.

表 2 の最後の列の「上」の 3 つの点について説明する. これらの点の過去はすべて  $F$  にあった. 図.8 では「上」の BWS は  $\dot{D}\dot{E}$  であった.  $\dot{D}$  と  $\dot{E}$  の間に  $F$  を挿入しよう. 「中央」の過去は  $F$  にあった. 図.8 では「中央」の BWS は  $\dot{E}\dot{E}$  であった.  $\dot{E}$  と  $\dot{E}$  の間に  $F$  を挿入しよう. 「下」の過去は  $S$  にあった.  $S$  の領域は圧縮され左に引き延ばされ折り曲げられる. 一方  $D$  の領域は圧縮され左に引き延ばされるだけである. つまり「下」の過去は  $D$  にあっ

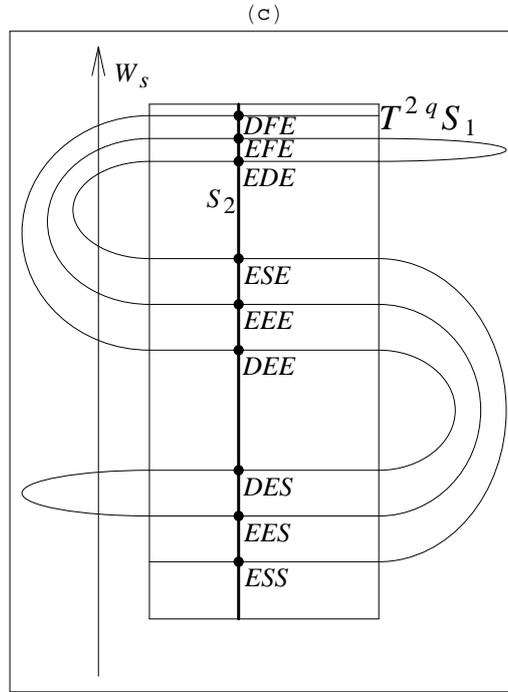


図 9: 共鳴領域における  $S_1$  の第 2 回目の圧縮と引き延ばし.

たことが分かる. よって  $\dot{S}$  を  $DE\dot{E}$  と置き換える. 上部の 3 つの点に対して, 図.8 の 3 点から出発し, 図.9 の BWS を決定する規則が得られた.

規則:  $\dot{E}$  を  $F\dot{E}$  で置き換える.  $\dot{E}$  を  $F\dot{E}$  で置き換える.  $\dot{S}$  を  $DE\dot{E}$  で置き換える.

表 2 では, これらを簡単に  $\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ ,  $\dot{E} \rightarrow F\dot{E}$ ,  $\dot{S} \rightarrow DE\dot{E}$  と書いてある.

次に「中央」の 3 点を考える. これらはすべて領域  $E$  にある. 一般にこれらの点は  $z$  の周りに 180 度回転する. これが S 字形の原因である. この回転を考慮して, 点の順序を反転する. つまり上から  $\dot{E}\dot{S}$ ,  $\dot{E}\dot{E}$ ,  $\dot{D}\dot{E}$  と並べる.  $S_2^+$  上の上の点の過去は領域  $S$  であることから,  $\dot{S}$  を  $S\dot{E}$  で置き換える. 中央の点は  $z$  であり, 過去も  $z$  であるので,  $\dot{E}$  を  $E\dot{E}$  と置き換える.  $S_2^+$  上にある下の点の過去は  $E$  である. これより  $\dot{E}$  を  $E\dot{E}$  で置き換える. 以上で「中央」に対する規則が得られた.

規則:  $\dot{S}$  を  $S\dot{E}$  で置き換える.  $\dot{E}$  を  $E\dot{E}$  で置き換える.  $\dot{S}$  を  $E\dot{E}$  で置き換える.

表 2 では, これらを簡単に  $\dot{S} \rightarrow S\dot{E}$ ,  $\dot{E} \rightarrow E\dot{E}$ ,  $\dot{S} \rightarrow E\dot{E}$  と書いてある.

最後に「下」の 3 点について議論する. これらは領域  $S$  の中にある  $S_2^-$  上にある. 上と中央の点の過去は領域  $E$  にあり, 下の点の過去は領域  $S$  にある. 「下に」対する図.8 から図.9 への置き換え規則は以下のように得られる.

規則:  $\dot{E}$  を  $E\dot{S}$  で置き換える.  $\dot{E}$  を  $E\dot{S}$  で置き換える.  $\dot{S}$  を  $S\dot{S}$  で置き換える.

表 2 では, これらを簡単に  $\dot{E} \rightarrow E\dot{S}$ ,  $\dot{E} \rightarrow E\dot{S}$ ,  $\dot{S} \rightarrow S\dot{S}$  と書いてある.

3 つの交差点から 9 つの交差点へより長い BWS を構成する規則の説明をした. 表 2 の手順がステージ  $n = 2$  に適用され, 9 つの交差点から 27 の交差点の BWS が得られる. 我々は軌道点が  $S_2$  上にやってくるすぐ前の位置のみを考えればよい. これより最後の語を対応する 2 語で置き換えればよいことが分かる.

表 2 に BWS を決める規則をまとめてある. 第 1 列は「上」, 「中央」, 「下」に対する初期の位置を示す. 第 2 列には第  $n$  番ステージにおける点の個数が与えられている. 第 3 列と

表 3: 初期のステージから 5 語の BWS を生成する過程.

初期のステージ: $S_2$ 上	規則適用後	5 語の BWS
$\dot{D}\dot{E}$ $\dot{E}\dot{E}$ $\dot{E}\dot{S}$	$\dot{D}F\dot{E}$ $\dot{E}F\dot{E}$ $\dot{E}D\dot{E}$	$\dot{D}F\dot{E}E\dot{S}$ $\dot{E}F\dot{E}E\dot{S}$ $\dot{E}D\dot{E}E\dot{D}$
$\dot{E}\dot{S}$ $\dot{E}\dot{E}$ $\dot{D}\dot{E}$	$\dot{E}S\dot{E}$ $\dot{E}E\dot{E}$ $\dot{D}E\dot{E}$	$\dot{E}S\dot{E}E\dot{F}$ $\dot{E}E\dot{E}E\dot{E}$ $\dot{D}E\dot{E}E\dot{E}$
$\dot{D}\dot{E}$ $\dot{E}\dot{E}$ $\dot{E}\dot{S}$	$\dot{D}E\dot{S}$ $\dot{E}E\dot{S}$ $\dot{E}S\dot{S}$	$\dot{D}E\dot{S}F\dot{E}$ $\dot{E}E\dot{S}F\dot{E}$ $\dot{E}S\dot{S}F\dot{F}$

第 4 列は長さがひとつ増やされた BWS を構成する規則が与えられている. 特に第 3 列は  $S_1$  上に軌道点をもつ偶数周期軌道に対する規則である. 第 4 列は  $S_2$  上に軌道点をもつ偶数周期軌道に対する規則と奇数周期軌道に対する規則である.

対称周期軌道の BWS の全表現をまだ与えていない. これは以下のように簡単に得られる.  $q' = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) に対する,  $\dot{X}_0 X_1 \cdots \dot{X}_k X_{k+1} \cdots X_{2k}$  を考える. ここで  $X_0, X_k \in \{E, S, D\}$ ,  $X_i$  ( $i \neq 0, k$ )  $\in \{E, S, F, D\}$  である. また,  $\dot{X}_0$  の軌道点は  $S_1$  上にあり,  $\dot{X}_k$  の軌道点は  $S_2$  上にある. 可逆性より  $X_j = X_{2k+1-j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) という関係が成り立つ. よって  $\dot{X}_0 X_1 \cdots \dot{X}_k$  が決まると, 後半の  $X_{k+1} \cdots X_{2k}$  は自動的に決まる.

同様に  $q' = 2k$  ( $k \geq 1$ ) に対する  $\dot{X}_0 X_1 \cdots \dot{X}_k X_{k+1} \cdots X_{2k-1}$  を考えよう. ここで  $X_0, X_k \in \{E, S, D\}$ ,  $X_i$  ( $i \neq 0, k$ )  $\in \{E, S, F, D\}$  である.  $\dot{X}_0$  と  $\dot{X}_k$  の軌道点が共に  $S_1$  にある場合, 可逆性より  $X_j = X_{2k-j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) が成立する. また  $\dot{X}_0$  と  $\dot{X}_k$  の軌道点が共に  $S_2$  にある場合, 可逆性より  $X_j = X_{2k+1-j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) が成立する. よって  $\dot{X}_0 X_1 \cdots \dot{X}_k$  が決まると, 後半の  $X_{k+1} \cdots X_{2k-1}$  は自動的に決まる.

図.9 で得られた 3 語は最終的に長さ 5 の BWS となる. 表 3 の第 1 列には初期のステージの 2 語が与えられ, 第 2 列には規則を適用した後の 3 語が与えられている. 第 3 列には可逆性を利用し完成した 5 語の BWS が記載されている.

### 7.3 ヘテロクリニック軌道の BWS

$Z_{p/q}(z)$  におけるヘテロクリニック軌道の BWS を決定しよう.  $Z_{p/q}(z)$  に左上コーナーを  $u_l$  とし, 右下コーナーを  $u_r$  とする.  $u_l$  の語は  $E$  である.  $u_l$  の過去の像は領域  $F$  にあり, 過去の軌道は右上のサドルに向かう.  $u_l$  の未来の像は領域  $S$  にあり, 過去の軌道は左下のサドルに向かう. これより  $O(u_l)$  の BWS は  $F^\infty \dot{E}S^\infty$  である. 同様にして  $O(u_r)$  の BWS は  $S^\infty \dot{D}F^\infty$  である. 次に  $Z_{p/q}(z)$  の境界と  $S_2^+$  の交差点を  $v_l$  とし,  $Z_{p/q}(z)$  の境界と  $S_2^-$  の交差点を  $v_r$  としよう.  $O(v_l)$  の BWS は  $F^\infty \dot{E}E\dot{S}^\infty$  であり,  $O(v_r)$  の BWS は  $S^\infty \dot{S}F^\infty$  である.

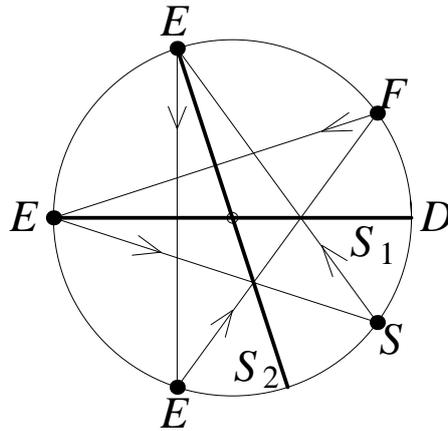


図 10: BW 間の遷移.

## 8 共鳴領域における対称バーコフ型周期軌道と対称非バーコフ型周期軌道

この節では  $\langle Z_{p/q} \rangle$  ( $q \geq 3$ ) における対称周期軌道について調べる. これらの BWS は既に第 7 節で得られている.

### 8.1 対称バーコフ型周期軌道の性質

クラス-2 対称バーコフ型周期軌道 ( $p/q : r/s\text{-S}\cdot\text{B}$ ) は下記の条件を満たすことに注意しよう.

条件 8.1.1.

[C1]  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 3$ ) における  $p/q : r/s\text{-S}\cdot\text{B}$  の回転数  $r/s$  は既約分数である. もし回転数  $r/s$  が  $1/s$  ( $s \geq 2$ ) ならば, この軌道は  $1/s\text{-S}\cdot\text{BE}$  または  $1/s\text{-S}\cdot\text{BS}$  である.

[C2] 単調性.

[C3] 対称線上における  $(p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)\text{-S}\cdot\text{B}$  の軌道点は,  $p_1/q_1\text{-S}\cdot\text{B}$  と  $p_2/q_2\text{-S}\cdot\text{B}$  の軌道点の間にある.

[C2] に関して例を示そう.  $EFEES$  と記述される周期軌道を考える. この周期軌道が  $2/5\text{-S}\cdot\text{B}$  であると仮定しよう. 単位円周上にブロック語を配置しよう (図.11(a) を見よ). 軌道は 1 と名付けた  $E$  より出発する. そうするとブロック語として  $EFEES$  とは異なる  $ESEEF$  が得られる. よってこの周期軌道はバーコフ型ではないことが分かる. 次に [C3] を説明する. 例として回転数  $2/5$  の軌道点が,  $1/3\text{-S}\cdot\text{B}$  の軌道点と  $1/4\text{-S}\cdot\text{B}$  の軌道点の間に見つかったとする. そうするとこの軌道点は  $2/5\text{-S}\cdot\text{B}$  の軌道点ではない. [C3] は [C2] より導ける.

$S_2$  上には,  $T^{3q}S_1$  と  $S_2$  の交差点が 27 個存在する. これらは表 4 に記載されている. 表 4 の 1 番から 13 番までの軌道点からバーコフ型の軌道点を選び出そう. [C1] より, 1 番は  $1/7\text{-S}\cdot\text{B}$  である. [C2] より, 2,3,5,6,10 番がバーコフ型でないことが分かる. これらの事実と [C3] より 4 番が  $2/7\text{-S}\cdot\text{B}$  であることが導かれる. 9 と 10 番が同じ回転数をもつことと, 対称非バーコフ型周期軌道はサドルノード分岐で生じることを利用すると, 9 と 10 番は  $2/7\text{-S}\cdot\text{NB}$  である. 7 と 8 番の回転数が 9 と 10 番の回転数より大きいことより, 7 と 8 番は  $3/7\text{-S}\cdot\text{NB}$  であることが得られる. 次に,  $S_1^-$  上でサドルノード分岐で 2 点が生じたとする. ひとつの点は領域  $E$  に移動し, もうひとつは領域  $D$  に移動する. 11 と 12 番はこの性質を満たすので, これらは  $3/7\text{-S}\cdot\text{B}$  である. 最終的に, 13 番が  $3/7\text{-S}\cdot\text{B}$  であることが導かれる.

表 4: 対称線  $S_2$  上にある 27 個の交差点 (すべて対称周期軌道).

番号	BWS	B,NB	回転数の分割	組みひも型	エントロピー
1	$\dot{D}FF\dot{E}ESS$	B	1/7	$\rho_{1/7}$	有限次数型
2	$\dot{E}FF\dot{E}ESS$	NB	$2/7 = 1/2 \oplus 1/5$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$ $\rho_{2/7}$	$(\ln 1.9468)/q$
3	$\dot{E}DF\dot{E}ESD$	NB	$2/7 = 1/2 \oplus 1/5$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$ $\rho_{2/7}$	$(\ln 1.9468)/q$
4	$\dot{E}SF\dot{E}ESF$	B	2/7	$\rho_{2/7}$	有限次数型
5	$\dot{E}EF\dot{E}ESE$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$ $\rho_{3/7}$	$(\ln 1.6109)/q$
6	$\dot{D}EF\dot{E}ESE$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$ $\rho_{3/7}$	$(\ln 1.6109)/q$
7	$\dot{D}ED\dot{E}EDE$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_1^{-1}$ $\sigma_5^{-1}\sigma_2^{-1}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.8097)/q$
8	$\dot{E}ED\dot{E}EDE$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_1^{-1}$ $\sigma_5^{-1}\sigma_2^{-1}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.8097)/q$
9	$\dot{E}SD\dot{E}EDF$	NB	$2/7 = 1/4 \oplus 1/3$	$\sigma_1^{-2}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.4655)/q$
10	$\dot{E}SS\dot{E}EFF$	NB	$2/7 = 1/4 \oplus 1/3$	$\sigma_1^{-2}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.4655)/q$
11	$\dot{E}ES\dot{E}EFE$	NB	$3/7 = 1/2 \oplus 2/5$	$\sigma_1^{-2}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.5560)/q$
12	$\dot{D}ES\dot{E}EFE$	NB	$3/7 = 1/2 \oplus 2/5$	$\sigma_1^{-2}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.5560)/q$
13	$\dot{D}EE\dot{E}EEE$	B	3/7	$\rho_{3/7}$	有限次数型
14	$\dot{E}$	B			
15	$\dot{E}SE\dot{E}EEF$	B	3/7	$\rho_{3/7}$	有限次数型
16	$\dot{E}DE\dot{E}EED$	NB	$3/7 = 1/2 \oplus 2/5$	$\sigma_1^{-2}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.5560)/q$
17	$\dot{E}FE\dot{E}EES$	NB	$3/7 = 1/2 \oplus 2/5$	$\sigma_1^{-2}\rho_{3/7}$	$(\ln 1.5560)/q$
18	$\dot{D}FE\dot{E}EES$	NB	$2/7 = 1/4 \oplus 1/3$	$\sigma_1^{-2}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.4655)/q$
19	$\dot{D}FES\dot{F}ES$	NB	$2/7 = 1/4 \oplus 1/3$	$\sigma_1^{-2}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.4655)/q$
20	$\dot{E}FES\dot{F}ES$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}$ $\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\rho_{3/7}$	$(\ln 2.0810)/q$
21	$\dot{E}DES\dot{F}ED$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}$ $\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\rho_{3/7}$	$(\ln 2.0810)/q$
22	$\dot{E}SES\dot{F}EF$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$ $\rho_{3/7}$	$(\ln 2.1478)/q$
23	$\dot{E}EES\dot{F}EE$	NB	$3/7 =$ $1/2 \oplus 1/3 \oplus 1/2$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$ $\rho_{3/7}$	$(\ln 2.1478)/q$
24	$\dot{D}EES\dot{F}EE$	B	2/7	$\rho_{2/7}$	有限次数型
25	$\dot{D}ESS\dot{F}FE$	NB	$2/7 = 1/2 \oplus 1/5$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_3^{-1}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.9468)/q$
26	$\dot{E}ESS\dot{F}FE$	NB	$2/7 = 1/2 \oplus 1/5$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_3^{-1}\rho_{2/7}$	$(\ln 1.9468)/q$
27	$\dot{E}SS\dot{S}FFF$	B	1/7	$\rho_{1/7}$	有限次数型

表 5:  $S_1$  と  $S_2$  上の 9 つの交差点.

$S_1$ 上の名前	BWS	$S_2$ 上の名前	BWS	R.N.	B,NB
A1	$\dot{S}FF\dot{E}\dot{S}$	B1=A9	$\dot{D}F\dot{E}\dot{E}\dot{S}$	1/5	B
A2	$\dot{E}FF\dot{E}\dot{S}$	B2=A4	$\dot{E}F\dot{E}\dot{E}\dot{S}$	2/5	NB
A3	$\dot{E}E\dot{D}\dot{E}\dot{D}$	B3=A3	$\dot{E}D\dot{E}\dot{E}\dot{D}$	2/5	NB
A4	$\dot{E}E\dot{S}\dot{E}\dot{F}$	B4=A2	$\dot{E}\dot{S}\dot{E}\dot{E}\dot{F}$	2/5	B
A5	$\dot{E}$	B5=A5	$\dot{E}$		
A6	$\dot{S}F\dot{E}\dot{E}\dot{E}$	B6=A8	$\dot{D}E\dot{E}\dot{E}\dot{E}$	2/5	B
A7	$\dot{S}F\dot{E}\dot{D}\dot{E}$	B7=A7	$\dot{D}E\dot{S}\dot{F}\dot{E}$	2/5	NB
A8	$\dot{E}E\dot{E}\dot{D}\dot{E}$	B8=A6	$\dot{E}\dot{E}\dot{S}\dot{F}\dot{E}$	2/5	NB
A9	$\dot{E}E\dot{S}\dot{D}\dot{F}$	B9=A1	$\dot{E}\dot{S}\dot{S}\dot{F}\dot{F}$	1/5	B

ここで共鳴領域における主軸について述べておこう. 下記の定義は DMS によって得られた結果を我々の用語に翻訳したものである.

性質 8.1.2. 弧  $S_1^+$  が  $Z_{p/q}(z)$  ( $q \geq 2$ ) における主軸である.

性質 8.1.2 より,  $p/q : r/s$ -S-BE は  $S_1^+$  上に軌道点をもつ. この事実を利用して, 表 6 のクラス-2 対称バーコフ型周期軌道をサドル型と楕円型に分類した. 一方,  $n(w)$  が奇数 (偶数) ならば周期軌道は楕円型 (サドル型) である. しかし,  $4/9$ -S-BS の BWS の偶奇性は奇であり,  $1/4$ -S-BE の偶奇性は偶である. この不一致は第 8.3 節で議論する. 表 6 には, TBWS とその偶奇性も記載されている. 列名 "E.B." は同周期分岐を意味する. これに関しても, 第 8.3 節で議論する.

性質 8.1.2 は DMS の数値計算による結果である. しかし, 表 6 の楕円型周期軌道の BWS の性質を利用して証明できる. 証明は長いので省略する.

## 8.2 バーコフ周期軌道の同周期分岐と非バーコフ周期軌道の発生

$S_1$  上には  $T^{3q}S_2 \cap S_1$  の 9 つの交差点があり,  $S_2$  上には  $T^{2q}S_1 \cap S_2$  の 9 つの交差点がある. 以下ではこれらの交差点について詳細に調べ, これらの交差点の性質を与える.  $S_1$  上の A3 と A4 の位置は,  $S_2$  上では B2=A4 と B3=A3 と逆転する. A2 は A3 と A4 の上部にある. しかし, B4=A2 は B3=A3 と B4=A2 の下部にある. 同様の逆転が A6, A7, A8 に対しても生じる.  $2/5$ -S-B の交差点と  $2/5$ -S-NB の交差点の逆転は,  $S_1$  における  $2/5$ -S-NB の速さは  $2/5$ -S-B の速さより速いことを意味している. このことは,  $2/5$ -S-NB の位置が A5 の上部にありかつ  $2/5$ -S-B の位置の下部にあることから分かる.  $S_2$  における  $2/5$ -S-NB の速さは  $2/5$ -S-B の速さより遅い. これは  $2/5$ -S-NB の点が  $2/5$ -S-B の点の上部にあることから分かる. A2 と A3 の逆転は S-NB の基本的な性質である.

$2/5$ -S-NB の軌道点 B7 と B8 を調べる. これらの点は  $Z_{1/3}(z_{-1})$  の内部にある. これは  $1/3$ -S-BE の  $z_{-1}$  が  $S_2^-$  上にあることより分かる. この事実より  $2/5$ -S-NB は,  $1/3$ -S-BE と  $1/2$ -S-BE の共鳴チェーン内に軌道点をもつことが分かる. 次に  $2/5$ -S-NB の軌道点 B2 と B3 について調べる.  $1/3$ -S-BS のサドル点が  $S_2^+$  上にあるので,  $S_2^+$  を含む共鳴領域は存在しな

表 6: クラス-2 対称バーコフ型周期軌道の BWS, 偶奇性. E.B. は等周期分岐を意味する.  $\circ$  は等周期分岐を生じることを表し,  $\times$  は生じないことを表す.

回転数	サドル型	偶奇性	E.B.	楕円型	偶奇性	E.B.
1/2	$EE$ (非存在)			$ED$	偶	$\circ$
4/9	$E^8D$	奇	$\circ$	$ESE^6F$	奇	$\times$
3/7	$E^6D$	奇	$\circ$	$ESE^4F$	奇	$\times$
5/12	$E^6SE^4F$	偶	$\times$	$ESE^4DE^4F$	偶	$\circ$
2/5	$E^4D$	奇	$\circ$	$ESE^2F$	奇	$\times$
5/13	$E^4DE^4SE^2F$	奇	$\circ$	$ESE^2FE^4SE^2F$	奇	$\times$
3/8	$E^4SE^2F$	偶	$\times$	$ESE^2DE^2F$	偶	$\circ$
4/11	$E^4SE^2DE^2F$	奇	$\circ$	$ESE^2SE^2FE^2F$	奇	$\times$
1/3	$E^2D$	奇	$\circ$	$ESF$	奇	$\times$
3/10	$E^2FE^2SE^2SF$	偶	$\times$	$ESFE^2DE^2SF$	偶	$\circ$
2/7	$E^2DE^2SF$	奇	$\circ$	$ESFE^2SF$	奇	$\times$
3/11	$E^2DE^2SFE^2SF$	奇	$\circ$	$ESFE^2SFE^2SF$	奇	$\times$
1/4	$E^2SF$	偶	$\times$	$ESDF$	偶	$\circ$
2/9	$E^2SFE^2SDF$	奇	$\circ$	$ES^2FE^2SF^2$	奇	$\times$
1/5	$E^2SDF$	奇	$\circ$	$ES^2F^2$	奇	$\times$
1/6	$E^2S^2F^2$	偶	$\times$	$ES^2DF^2$	偶	$\circ$

い. これは, 軌道点 B2 と B3 の存在は  $S_2^+$  上にある 1/3-S-BE のサドル点が分岐をして楕円型になっていることを意味する. その結果, 楕円型のまわりに新しい共鳴領域が現れる. この分岐は同周期分岐と呼ばれる. 結果として B2 と B3 が表している 2/5-S-NB は 1/2-S-BE の共鳴チェーンと 1/3-S-BE から分岐した 1/3-S-BE の共鳴チェーン内に軌道点をもつことが分かる. これらをまとめて性質 8.2.1 が得られる.

性質 8.2.1.

[1]  $S_1^+$  上の対称バーコフ型周期軌道に対して.

$s$  が偶数ならば  $p/q : r/s$ -S-BE が同周期分岐によってサドル型へと分岐する. そして 2 つの楕円型周期軌道が生じる. これらは非対称バーコフ型周期軌道である.

[2]  $S_2^+$  上の対称バーコフ型周期軌道に対して.

$s$  が奇数ならば  $p/q : r/s$ -S-BE が同周期分岐によって楕円型へと分岐する. そして 2 つのサドル型周期軌道が生じる. これらは非対称バーコフ型周期軌道である.

バーコフ型周期軌道が同周期分岐を起こすときは表 6 の E.B. を名前を付けた列に記号  $\circ$  をつけてある. 母周期軌道から同周期分岐で 2 つの娘周期軌道が生じるときの BWS の生成規則は得られていない.

## 9 共鳴領域内の周期軌道の組みひもの構成方法

共鳴領域内の周期軌道から構成される組みひもは可約な組みひもである. 組みひも型が, 有限次数型, 可約型, 擬アノソフ (pA) 型に分類されることはよく知られている. 可約型の組みひもが pA 成分を含むならば, pA 成分を利用して正のエントロピーを得ることができる. ここでは共鳴領域内の対称非バーコフ型周期軌道の BWS を利用して, pA 型の組みひもの

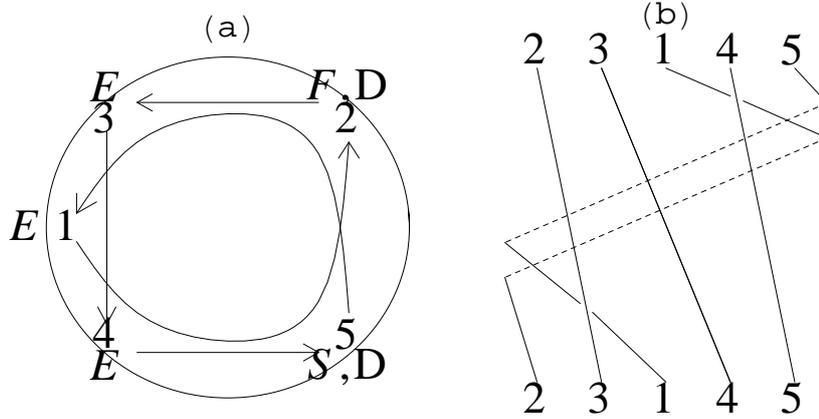


図 11: (a)  $EF(D)EES(D)$  の軌道の順序は円周上で  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$  である. 共鳴領域  $Z_{p/q}(z)$  の  $z$  は円の中心にある. (b) 得られた組みひも. 点線はすべての実線の後方を通過している.

構成法を説明する. 例として, 表 5 の  $EFEEES$  (B2) と  $EDEED$  (B3) を利用して組みひもを作る. 図.11(a) にこの軌道の時間的順番を描いた. 軌道は 1 と名付けられた  $E$  より出発する. この軌道点は  $S_1^+$  上にある. また 3 と名付けられた  $E$  の軌道点は  $S_2$  上にある. 時間発展の順は対称性をもつことに注意しよう. 1 から 2 の間で, 軌道は 4 と 5 と名付けられた軌道点を追い越す. そのためこの回転の速さは約  $3/5$  で,  $2/5$ -S·B の速さより速い. 一方 2 から 3 の間では, 回転の速さは約  $1/5$  である. これは  $1/3$ -S·B の速さより遅い. この事実からこの軌道は  $1/3 \oplus 1/2$ -S·NB と書けることが分かる. 円を 2 と 5 の間で切って, 次に広げて直線状にする. そうすると数字は図.11(b) で示したように並ぶ. これより組みひもを構成できる. 組みひも型は以下のように記述できる.

$$\beta = \sigma_3^{-1} \rho_{2/5} \sigma_2^{-1} \sim \sigma_1^{-2} \rho_{2/5}. \quad (24)$$

ここで  $\rho_{2/5} = (\sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^2$ . 特性方程式は  $(\lambda^2 - 2)(\lambda^3 - 2) = 3$  [9] と得られる. 固有値の最大値は  $\lambda_{\max} = 1.7220$  である. これらの軌道が  $\langle Z_{1/3} \rangle$  の中にあるとすると, 位相的エントロピーの下界は  $(\ln 1.7220)/3$  と得られる. 表 4 で使用されている記号  $\rho_{p/q}$  の定義は  $(\sigma_{q-1} \sigma_{q-1} \dots \sigma_2 \sigma_1)^p$  である.  $p/q$  が既約分数であるならば,  $\rho_{p/q}$  は  $p/q$ -S·B の組みひもを表す.

同様の方法を用いて表 4 の S·B と S·NB の組みひも型を決定した. 組みひも型は表の最後の列に記載してある. 組みひも型が擬アノソフ型と分類されるときは 位相的エントロピーの下界を記してある. 最後に我々の結果をまとめておく.

### 結果 9.1.

クラス-2 周期軌道  $p/q : r/s$ -S·NB を考えよう. ここで  $r/s = r_1/s_1 \oplus \dots \oplus r_n/s_n$  ( $n \geq 2$ ) とする.  $r_i/s_i \neq r_j/s_j$  を満たす整数  $i$  と  $j$  があるならば, 組みひも型は擬アノソフ型である.

## 参考文献

- [1] M. Hénon, Quart. Appl. Math. **27** (1969), 291.
- [2] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **122** (2009), 569.
- [3] H. R. Dullin, J. D. Meiss and D. G. Sterling, SIAM J. Appl. Dyn. Sys. **4** (2005), 515.
- [4] T. Hall, Nonlinearity **7** (1994), 861.
- [5] R. Brown, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995), 1045.

- [6] C. Robinson, *Dynamical Systems, Second Edition*. (CRC Press LLC, 1998). See Exercise 2.7.
- [7] H. To-yama, *Shoto-Seisuron*(in Japanese) (Nippon Hyoronsha, 1972).
- [8] S. Bullet, *Commun. Math. Phys.* **107** (1986), 241.
- [9] P. Boyland, *Topology and its Applications* **58** (1994), 223.

## A 記号平面における対称線

第4節の定義4.2で定義された馬蹄写像  $\hat{T}$  は、下記の2つの対合  $\hat{h}$  と  $\hat{g}$  の積で記述される [3].

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{y}, \hat{x}), \quad (25)$$

$$\hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} (\hat{y}/2, 2\hat{x}), & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ (1 - \hat{y}/2, 2 - 2\hat{x}). & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (26)$$

対称線は以下のように得られる.

$$\hat{S}_h : \hat{y} = \hat{x}, \quad (27)$$

$$\hat{S}_g : \begin{cases} \hat{y} = 2\hat{x}, & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ \hat{y} = 2 - 2\hat{x}. & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (28)$$

これらの対称線は図.4 に描かれている.

ここで下記の異なった写像  $\hat{T}_B$  を考えよう.

$$\hat{T}_B : \begin{cases} \hat{x}_{n+1} = 2\hat{x}_n, \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n/2, & (0 \leq \hat{x}_n \leq 1/2) \\ \hat{x}_{n+1} = 2\hat{x}_n - 1, \hat{y}_{n+1} = 1/2 + \hat{y}_n/2. & (1/2 < \hat{x}_n \leq 1) \end{cases} \quad (29)$$

この写像も2つの対合  $\hat{H}$  と  $\hat{G}$  の積で記述される.

$$\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{y}, \hat{x}), \quad (30)$$

$$\hat{G}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} (\hat{y}/2, 2\hat{x}), & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ (\hat{y}/2 + 1/2, 2\hat{x} - 1). & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (31)$$

よってこの写像の対称線は下記のように得られる.

$$\hat{S}_H : \hat{y} = \hat{x}, \quad (32)$$

$$\hat{S}_G : \begin{cases} \hat{y} = 2\hat{x}, & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ \hat{y} = 2\hat{x} - 1. & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (33)$$

これらの対称線は図.7(a) に描かれている.