

舞踏解に関する第二変分の数値計算

柴山允瑠¹

大阪大学大学院基礎工学研究科

1. はじめに

等質量の平面3体問題において8の字解の存在が証明されたあと, Simó(2001) は n 体問題の多様な周期解を数値計算により発見した. それらは同一曲線上を互いに追跡し合うという特質をもち, そのような一連の周期解は舞踏解 (choreography) と名付けられた. 特に1つの閉曲線上を質点が追跡し合うことを強調したいときは, 単舞踏解 (simple choreography) という.

単舞踏解に関して変分法による存在証明がなされているのは3体の8の字解のみである. 8の字解以外の単舞踏解に対しては精度保証付き数値計算による存在証明がある程度なされている. 4体超8の字解のように軌道が上下左右の対称性を持つものに対しては Kapela & Zgliczyński (2003) が, 上下のみの対称性を持つものは Kapela (2005) が, そのような対称性を持たない解のいくつかは Kapela & Simó (2007) が精度保証付き数値計算により存在を示した. これらの結果は, 変分法的なアプローチとは全く異なる.

単舞踏解的な, すなわち互いに質点が追跡し合うという制約のもとで作用積分の最小化法を試みても, Simó が得たような周期解は得られず, 最小化軌道は回転する正 n 角形解となる (Barutello & Terracini (2004)). そこで, Simó が数値的に求めた周期解の第二変分を数値計算により求め, 変分法による存在証明の可能性について考える.

2. 第二変分

$\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ における等質量の n 体問題を考える. 各質点の位置を $q_k \in \mathbb{R}^d$ とし, 配置を $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ と表す. 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

¹shibayama@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

はそれぞれ,

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \|\dot{q}_k\|^2, \quad U(q) = \sum_{i < j} \frac{1}{\|q_i - q_j\|}, \quad (q_k \in \mathbb{R}^d)$$

である. Lagrangian は

$$L(\dot{q}, q) = K(\dot{q}) + U(q)$$

であり, 作用積分は $q : [0, T] \rightarrow (\mathbb{R}^d)^n$ に対して

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T L(\dot{q}, q) dt$$

で定められる. $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$ 方向の第二変分は

$$\left. \frac{d^2}{dh^2} \mathcal{A}(q + h\delta) \right|_{h=0} = \int_0^T \delta^* K_{\dot{q}\dot{q}}(\dot{q}) \dot{\delta} + \delta^* U_{qq}(q) \delta dt$$

である. $*$ は転置を表す. ここで, $K_{\dot{q}\dot{q}}, U_{qq}$ は K, U の Hesse 行列である. $K_{\dot{q}\dot{q}}$ は単位行列であり, U_{qq} は

$$\delta^* U_{qq}(q) \delta = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\delta_i^* \{ -\|q_i - q_j\|^2 E + 3(q_i - q_j)(q_i - q_j)^* \} \delta_i}{\|q_i - q_j\|^5} + \frac{\delta_i^* \{ \|q_i - q_j\|^2 E - 3(q_i - q_j)(q_i - q_j)^* \} \delta_j}{\|q_i - q_j\|^5} \right\}$$

で定まる.

U_{qq}, δ の各成分の Fourier 級数展開を考える. f^k, g^k を dn 次正方行列, a^k, b^k を dn 次元ベクトルとし,

$$U_{qq} = \sum_{k \geq 0} f^k \cos kt + g^k \sin kt \quad \delta = \sum_{k \geq 0} a^k \cos kt + b^k \sin kt$$

とする. ここで, f^k, g^k は

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{qq}(q(t)) dt & f^k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{qq}(q(t)) \cos ktdt, \\ g^k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{qq}(q(t)) \sin ktdt \end{aligned}$$

である. 運動エネルギー部分の第二変分は

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\dot{\delta}\|^2 dt &= \int \sum_{k=1}^{\infty} \|ka^k \cos kt + kb^k \sin kt\|^2 dt \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\|a^k\|^2 + \|b^k\|^2)\end{aligned}$$

である.

これを用いると,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \delta^* U_{qq}(q) \delta dt \\ &= \int \sum_{l,m,k \geq 1} (a^l \cos lt + b^l \sin lt)^* (f^k \cos kt + g^k \sin kt) (a^m \cos mt + b^m \sin mt) dt \\ &= \sum_{l,m,k \geq 1} \int a^{l*} f^k a^m \cos kt \cos lt \cos mt + b^{l*} f^k b^m \cos kt \sin lt \sin mt \\ &\quad + 2a^{l*} g^k b^m \cos lt \sin kt \sin mt dt \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k \geq 0} \{a^{k*} (f^0 + f^{2k}) a^k + b^{k*} (f^0 - f^{2k}) b^k + 2a^{k*} g^{2k} b^k\} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{l < m} \{a^{l*} (f^{l+m} + f^{m-l}) a^m + b^{l*} (f^{m-l} - f^{l+m}) b^m + 2a^{l*} (g^{l+m} + g^{m-l}) b^m\} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{l > m} \{a^{l*} (f^{l+m} + f^{l-m}) a^m + b^{l*} (f^{l-m} - f^{l+m}) b^m + 2a^{l*} (g^{l+m} - g^{l-m}) b^m\}.\end{aligned}$$

Fourier 級数を有限次 M までに制限した部分空間における第二変分は

$$\begin{aligned}&D^2 \mathcal{A}(q)(\delta, \delta) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^M \{2k^2 (\|a^k\|^2 + \|b^k\|^2) + a^{k*} (f^0 + f^{2k}) a^k + b^{k*} (f^0 - f^{2k}) b^k + 2a^{k*} g^{2k} b^k\} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{l < m} \{a^{l*} (f^{l+m} + f^{m-l}) a^m + b^{l*} (f^{m-l} - f^{l+m}) b^m + 2a^{l*} (g^{l+m} + g^{m-l}) b^m\} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{l > m} \{a^{l*} (f^{l+m} + f^{l-m}) a^m + b^{l*} (f^{l-m} - f^{l+m}) b^m + 2a^{l*} (g^{l+m} - g^{l-m}) b^m\}.\end{aligned}$$

$$c = \begin{pmatrix} a^0 \\ \vdots \\ a^M \\ b^1 \\ \vdots \\ b^M \end{pmatrix} \quad \text{とし, 第二変分を二次形式 } \frac{\pi}{2} c^* B c \text{ で表すと, } dn(2M+1) \text{ 次}$$

対称行列 B の成分は次のようにして決まる:

- $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 行, $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 列の小行列は $2k^2E + f^0 + f^{2k}$ ($k=0, \dots, M$)
- $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 行, $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 列の小行列は $2k^2E + f^0 - f^{2k}$ ($k=M+1, \dots, 2M$)
- $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 行, $dn(k+M)+1, \dots, dn(k+M+1)$ 列の小行列は g^{2k} ($1 \leq k \leq M$)
- $dn(k+M)+1, \dots, dn(k+M+1)$ 行, $dnk+1, \dots, dn(k+1)$ 列の小行列は g^{2k} ($1 \leq k \leq M$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $f^{l+m} + f^{m-l}$ ($0 \leq l < m \leq M$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $-f^{l+m} + f^{m-l}$ ($M+1 \leq l < m \leq 2M+1$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dn(m+M)+1, \dots, dn(m+M+1)$ 列の小行列は $g^{l+m} + g^{m-l}$ ($1 \leq l < m \leq M$)
- $dn(l+M)+1, \dots, dn(l+M+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $g^{l+m} - g^{m-l}$ ($1 \leq l < m \leq M$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $f^{l+m} + f^{l-m}$ ($0 \leq m < l \leq M$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $-f^{l+m} + f^{l-m}$ ($M+1 \leq m < l \leq 2M+1$)
- $dn(l+M)+1, \dots, dn(l+M+1)$ 行, $dnm+1, \dots, dn(m+1)$ 列の小行列は $g^{l+m} + g^{l-m}$ ($1 \leq m < l \leq M$)
- $dnl+1, \dots, dn(l+1)$ 行, $dn(m+M)+1, \dots, dn(m+M+1)$ 列の小行列は $g^{l+m} - g^{l-m}$ ($1 \leq m < l \leq M$)

求めたいのは, $M = \infty$ としてできる無限次行列 B の負の固有値の個数である. もちろん数値計算で $M = \infty$ の場合を計算することはできないので, 十分大きな M に対して計算してみるしかない. しかし, 十分大きな M の場合を計算すれば十分であろうことが, 以下のような理由で期待できる.

$|f^k|, |g^k|$ は十分大きな k に対しては非常に小さい. 特に解析的ならば k の増加に伴い指数的に減衰する. 十分大きな M の場合に M から $M+1$ にしたとすると, B の新たな対角成分には運動エネルギー部分からくる $2(M+1)^2$ があり, 他は M に関わらず一様に有界である. 従って, B のサイズを大きくしたときに現れる固有値は $2(M+1)^2$ と近似され, 正であると思われるからである.

3. 単舞踏解的制約

$$\delta_j = \sum_{k \geq 0} a_j^k \cos kt + b_j^k \sin kt$$

とおく.

単舞踏解的制約 $\delta_j(t) = \delta_1(t + \frac{2\pi(j-1)}{n})$ を課すと,

$$\begin{aligned} \delta_j &= \sum_{k \geq 0} a_j^k \cos kt + b_j^k \sin kt \\ &= \sum_{k \geq 0} (a_1^k \cos(\frac{2\pi k(j-1)}{n}) + b_1^k \sin \frac{2\pi k(j-1)}{n}) \cos kt \\ &\quad + (-a_1^k \sin(\frac{2\pi k(j-1)}{n}) + b_1^k \cos \frac{2\pi k(j-1)}{n}) \sin kt \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a_j^0 &= a_1^0 \\ a_j^k &= a_1^k \cos(\frac{2\pi k(j-1)}{n}) + b_1^k \sin \frac{2\pi k(j-1)}{n} & (k \geq 1) \\ b_j^k &= -a_1^k \sin(\frac{2\pi k(j-1)}{n}) + b_1^k \cos \frac{2\pi k(j-1)}{n} & (k \geq 1) \end{aligned}$$

とし, $2M+1$ 次ベクトル $v = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^M \\ b_1^1 \\ \vdots \\ b_1^M \end{pmatrix}$ とおく. $c = Rv$ とする $dn(2M+1) \times d(2M+1)$ 行列 R は次のように定まる.

1 行から dn 行目に関しては, 1 列から d 列目には d 次正方行列が縦に n 個並び, 他は 0.

各 $k = 1, \dots, M$ と $j = 1, \dots, n$ と $l = 1, \dots, d$ に対しては,

- $dnk + jl$ 行 $dk + l$ 列を $\cos(\frac{2\pi k(j-1)}{n})$
- $dnk + jl$ 行 $d(M+k+1) + l$ 列を $\sin \frac{2\pi k(j-1)}{n}$
- $dn(M+k) + jl$ 行 $dk + l$ 列を $-\sin(\frac{2\pi k(j-1)}{n})$
- $dn(M+k) + jl$ 行 $d(M+k) + l$ 列を $\cos \frac{2\pi k(j-1)}{n}$

- 他は全て 0

とする.

そうして, 単舞踏解的制約のもとでの第二変分を表す行列は R^*BR となる.

4. 数値計算

等質量の平面 N 体問題のいくつかの単舞踏解について, 第二変分の数値計算を行った. Noether の定理より, 各第一積分に対しそれをハミルトニアンとするハミルトン流について対称的である. 周期解がそのハミルトン流で不変でなければ, その方向への変分については, 固有値 0 となるはずである. Simó が得ている単舞踏解はどれも第一積分により定まるハミルトン流で不変でないことは自明であり, 第一積分の個数だけ B の固有値 0 が現れることは理論的に保証される.

ここで計算した平面 N 体問題の場合は, エネルギー, 運動量 (2 成分), 角運動量の 4 成分の第一積分があるので, B には 4 つの 0 固有値が現れることが理論的に分かる. 2 体問題の場合は, さらに楕円軌道の方角を表す単位ベクトルが独立な不変量であるので, 5 つの 0 固有値が現れる.

4.1. 2 体問題

2 体問題における円 Kepler 運動をする解について計算した. B の固有値は小さい方から 20 個だけ記しておくと,

-0.0000, -0.0000, -0.0000, -0.0000, 0.0000, 2.0000, 2.0000,
2.0000, 2.0000, 2.4560, 2.4560, 6.0000, 8.0000, 8.0000,
8.0000, 8.0000, 8.6307, 8.6307, 11.0000, 11.0000

ここでは, $M = 2^{12}$ として計算している. 5 つの自明な固有値を除くと, 正の値であるから, 円軌道が極小点であることが分かる. Gordon (1977) は, 最小点であることを理論的に示しているので, 理論と整合している.

では, 単舞踏解的制約を課した R^*BR の固有値は,

0.0000, 1.0854, 1.2115, 2.7063, 4.8495, 8.4566, 9.0331,
12.0072, 18.6903, 18.8736, 24.4344, 24.6441, 32.5737, 32.5762,
50.0749, 50.0781, 57.1062, 57.1412, 72.4767, 72.4767

である.

4.2. 8 の字解

3 体問題の 8 の字解に関する B の固有値は小さい方から,

-0.2110	-0.2109	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0064
0.0064	1.9036	1.9036	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
3.1164	3.1164	3.8678	4.6499	7.0828	8.0000	

$M = 2^{11}$ である. 2 つの負の固有値があるので, 極小点ではない. 8 の字解は対称性を課したクラスでは minimizer だが, 周期的な曲線のクラスでは minimizer ではないことがわかる.

ちなみに, Chtcherbakova (2006) は 8 の字解の 0.52 周期部分は, 2 点境界値問題として minimizer ではないことを数値的に示している.

では, 単舞踏解的制約を課した R^*BR の固有値は,

-0.0000	4.1955	5.9387	7.9362	11.7629	13.0806	19.9294
24.6517	35.2038	36.3921	41.9974	44.2301	68.3502	71.7576
73.8713	75.2135	104.3925	105.9156	136.6611	139.5218	

である.

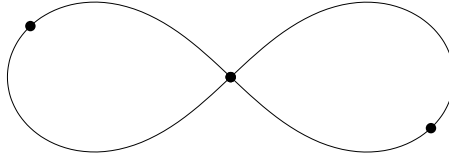


Figure 1. 3 体 8 の字解 (Simó(2001) から引用)

4.3. 4 体超 8 の字解

4 体問題の超 8 の字解 (図 3) は, Gerver が数値計算により発見した周期解である. この周期解に対して, Kapela & Zgliczyński (2003) は精度保証付き数値計算により存在証明をしている. 変分法による証明はまだない.

-0.2345	-0.2271	-0.0033	-0.0000	0.0000	0.0001	0.5214
0.7271	0.7275	0.7486	0.8657	0.8668	1.4015	1.5566
2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.4712	3.6915	

ここでは, $M = 2^{10}$ である.

2 つの負の固有値が現れて, minimizer ではない.

では, 単舞踏解的制約を課した R^*BR の固有値は,

-0.0000	10.8757	14.2576	17.6680	20.6719	25.1980
26.4542	35.0912	50.9677	54.1159	62.5540	64.0209
68.6302	75.5445	110.3838	127.2851	138.7193	155.9383
195.1076	201.2551				

である.

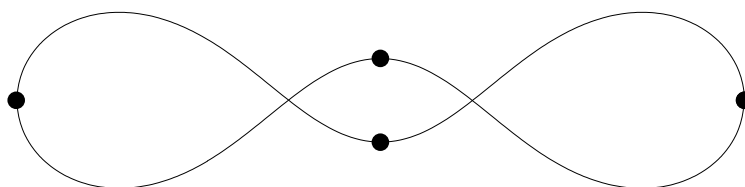


Figure 2. 4 体超 8 の字解 (Simó(2001) から引用)

4.4. 5 体超 8 の字解

-0.2231	-0.1704	-0.0007	-0.0000	0.0000	0.0324	0.6521
0.6748	0.8964	0.9128	0.9227	0.9347	1.0043	1.0291
1.4250	1.4412	1.6117	1.6480	1.6829	1.9128	

ここで, $M = 2^{10}$ である. -0.0007 から 0.0324 は実際は 0 であろうと推測される. 誤差が大きそうなので確証はないが, 2 つの負の固有値が現れて, minimizer ではないであろう.

では, 単舞踏解的制約を課した R^*BR の固有値は,

0.0000	25.2187	30.4519	32.7413	51.8657	56.9535
59.6089	63.5008	73.3266	75.7955	102.7673	113.7184
129.1245	133.8811	136.6286	139.9112	159.2879	166.9876
230.0465	233.9132				

である.

5. まとめ

周期的な曲線のクラスにおいては, 非自明な単舞踏解はどれも極小点でないようである. 8 の字解は対称性を課した, より小さなクラスにおいては

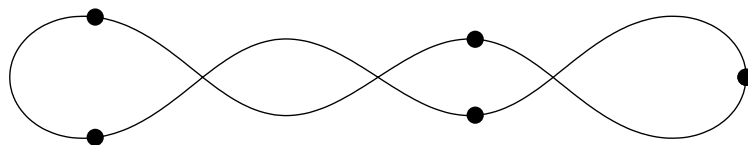


Figure 3. 5 体超 8 の字解 (Simó(2001) から引用)

最小点となっている. このことから, 今後の課題として, 他の舞踏解に対してももっと制限したクラスにおける第二変分を計算することが要求される. そのことが変分法による存在証明への手がかりとなるであろう. また, 最後の例から分かるように, Fourier 係数や固有値の計算からくる誤差も現段階では大きいので精度を高める必要もある.

References

- V. Barutello & S. Terracini, Action minimizing orbits in the n -body problem with simple choreography constraint, *Nonlinearity* **17** (2004) 2015–2039.
- A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery, C. Simó, Simple Choreographic Motions of N Bodies: A Preliminary Study, *Geometry, mechanics, and dynamics*, 287–308, Springer, New York, 2002.
- N. N. Chtcherbakova, Minimizing properties of the figure-eight solution of the three-body problem. *J. Math. Sci. (N. Y.)* **135** (2006) 3256–3268
- W. B. Gordon, A Minimizing Property of Keplerian Orbits, *American Journal of Mathematics* **99** (1977) 961–971.
- T. Kapela, N -body choreographies with a reflectional symmetry—computer assisted existence proofs. *EQUADIFF 2003*, 999–1004, *World Sci. Publ., Hackensack, NJ*, 2005.
- T. Kapela & C. Simó, Computer assisted proofs for non-symmetric planar choreographies and for stability of the eight. *Nonlinearity* **20**(5) (2007), 1241–1255.
- T. Kapela & P. Zgliczyński, The existence of simple choreographies for the N -body problem—a computer-assisted proof. *Nonlinearity* **16** (2003), 1899–1918.
- C. Simó, New Families of Solutions in N -Body Problems, *European Congress of Mathematics, Vol. I* (Barcelona, 2000), 101–115, *Progr. Math.*, 201, Birkhäuser, Basel, 2001.