

## 連星を公転する褐色矮星の階層安定性

斎藤正也<sup>1</sup> 谷川清隆<sup>2</sup> Victor V. Orlov<sup>3</sup>

要旨 連星のまわりを褐色矮星が公転している場合を想定して、階層三体系の安定性を考察する。特に、第三天体が大きい離心率を持つ場合は、近点近傍でのみ相互作用が有効であるとする、いわゆるインパルス近似により軌道要素の変化を見積もることができる。近点通過時の第一、第二天体の位相は平均運動共鳴を除き毎回異なるので、軌道要素の変化はランダムウォークでモデル化でき、適当な基準によって軌道の安定性を評価することができそうである。他方で、近可積分系では必ずKAMトーラスが残存するため、無条件にランダムウォーク・モデルを適用すると、不安定性を過剰評価してしまうであろう。そこで、本研究では数値積分によって階層安定限界を調べ、ランダムウォーク・モデルから導かれる階層安定限界との乖離を評価した。その結果、内側の楕円軌道の軌道長半径に対する外側の楕円軌道の近点距離を単位として、1以上の乖離があることがわかった。また、安定限界近傍での横断面は、安定限界線と最終KAMとがほぼ一致することを示唆するものとなった。

### 1. はじめに

重力相互作用する三質点  $m_0, m_1, m_2$  がつくる系のうち、特に  $m_0$  に対する  $m_1$  の軌道、 $m_0$  と  $m_1$  の重心に対する  $m_2$  の軌道が、交叉しない楕円によって近似されるものを考えよう。これは階層三体問題とよばれる。この力学系は、連星系や系外惑星系の運動のモデルを与えるものであるが、本報では連星の周りを公転する巨大惑星または褐色矮星を適用対象に想定して、 $m_0 = m_1 = 1, m_2 = 10^{-2}(m_0 + m_1)$  の質量比を持つ場合を扱う。また、簡単のために、三質点が同一平面上を運動する場合を考える。慣性系での三質点の座標を  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^2$  とすると、系の運動方程式は

$$H = \frac{p_1^2}{2\mu_1^*} - \frac{G\mu_1\mu_1^*}{r_1} + \frac{p_2^2}{2\mu_2^*} - \frac{G\mu_2\mu_2^*}{r_2} + R$$

<sup>1</sup>統計数理研究所：〒190-0014 東京都立川市緑町10-3, saitohm@ism.ac.jp

<sup>2</sup>国立天文台：〒181-8588 東京都三鷹市大沢2-21-1

<sup>3</sup>Sobolev Astronomical Institute, St. Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, 198504 St. Petersburg, Russia

$$R = \frac{G\mu_2\mu_2^*}{r_2} - \frac{Gm_2m_0}{|\rho_2 - \rho_0|} - \frac{Gm_2m_1}{|\rho_2 - \rho_1|}$$

で定義されるハミルトニアン  $H$  から生成される。ここで、 $i = 1, 2$  に対して、部分系の質量  $\mu_i$ 、部分系の重心  $g_i$ 、換算質量  $m_i$ 、ヤコビ系での位置ベクトル  $r_i$  は、漸化式

$$\mu_i = \mu_{i-1} + m_i, \quad \mu_i^* = (\mu_{i-1}/\mu_i)m_i,$$

$$g_i = (\mu_{i-1}g_{i-1} + m_i\rho_i)/\mu_i, \quad r_i = \rho_i - g_{i-1}$$

から得られる。ただし、 $\mu_0 = m_0, g_0 = \rho_0$  である。摂動項  $R$  を無視すれば、このハミルトニアンは明らかにふたつの独立な二体系のハミルトニアンになっていることがわかる。摂動項  $R$  がそれほど小さくなく、したがって  $r_1$  と  $r_2$  が近似的に楕円軌道であり、 $|r_1| < |r_2|$  が成立する場合がここでの考察の対象である。その場合、軌道要素による解の表示が便利であり、 $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対する (接触) 軌道要素を慣習に従って、軌道長半径  $a_i$ 、離心率  $e_i$ 、近点距離  $q_i \equiv a_i(1 - e_i)$ 、平均近点離角  $l_i$ 、近点経度  $\omega_i$ 、平均近点経度  $\lambda_i \equiv \omega_i + l_i$  と表すことにする。

階層三体系の安定性の研究は、草分けである Harrington (1972, 1977) の研究以来、階層安定限界の近似式の改良が、理論的 (Golubev, 1967; Marchal & Saari, 1975)、数值的 (Mardling & Aarseth, 1999; Holman & Wiegert, 1999) の両面から続けられている。ここで、階層安定とは、構成メンバを変えずに上述の交叉しない楕円の重ね合わせによる軌道の近似表現が永続することをさす。ただし、この定義に従って与えられた初期値に対する軌道が安定かどうかを判定するには無限時間の数値積分が必要であるので、研究毎に異なる便宜的な安定性基準が用いられる (Georgakarakos, 2008)。理論的研究では、Hill 安定性が用いられる。これは、制限三体問題における同種の問題を一般三体問題に拡張したもので、 $m_0$  と  $m_1$  の運動領域と  $m_2$  のそれとが配位空間上で分離されるための必要十分条件として定義される。数値的研究では、軌道要素の変化が設定した閾値を超える場合や、一定時間内に第三天体が脱出するための十分条件を満たす場合に、不安定とするものがある。安定限界の近似式は、内側の楕円軌道の軌道長半径を  $a_1$ 、外側の楕円軌道の近点距離を  $q_2$ 、離心率を  $e_2$ 、二つの楕円軌道の相互傾斜角を  $I$  とするとき、比  $q_2/a_1$  を  $e_2, I, m_i$  ( $i=0,1,2$ ) の関数として表現することが多い。

特に  $m_2$  が低質量で高離心率の軌道を描く場合、その軌道進化がランダムウォークでモデル化できるという考え方がある。これは、二つの楕円軌道が尽数関係にない場合には、 $m_2$  が近点近傍を通過するときの  $m_0, m_1$  の位置は、周ごとに異なり、一周あたりに受ける摂動の効果はランダムであるみなせるというものである。このランダムウォーク・モデルは、大規模な数値計算が困難であった 80 年代には、彗星の軌道進化を推定するのに利用された (例えば、Fernandez (1980))。近年、Orlov et al. (2008) は、この考え方に従って安定限界の近似式を Mardling & Aarseth (1999) よりも改良することに成功した。彼らによると、

$$\left(\frac{q}{a}\right)_{\text{st}} = 3 \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)^{1/3} \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2} \cos I - \cos^2 I\right)^{1/3} (1 - e_2)^{-1/6} \quad (1)$$

と置くと、 $q_2(0)/a_1(0) \geq (q_2/a_1)_{st}$  のとき階層安定である。

しかし、一般に近可積分系では、KAM 安定な領域が残存するために、無条件にランダムウォークを仮定すると、実際の解よりも不安定性を多く見積もってしまう可能性がある。そこで、我々は数値計算により実際の軌道進化がランダムウォーク的である初期値の範囲を調べる。また、この計算に基づく安定限界を求め、(1) 式とのギャップがどの程度であるかを示す。

## 2. 主結果

数値計算の結果を分析すると、初期値空間上でのランダムウォーク的である領域と階層不安定である領域とがほぼ一致することがわかった。 $a_1(0) = 1$  である軌道集団に対して、安定性の分布を  $(q_2, e_2)$ -平面上に描くと、 $q_2$  に依存する臨界離心率  $e_{crit}(q_2)$  があって、 $e_2(0) > e_{crit}$  では階層不安定となる。ただし、 $e_{crit}$  には初期位相によるばらつきがあるので、図 1 ではいくつかの初期位相についての  $e_{crit}$  が描く曲線を示している。初期条件を  $e_2(0) > e_{crit}$  と取ると、ランダムウォーク的な進化により、やがて  $e_2 \geq 1$  に到達する。厳密には、接触軌道要素である  $e_2 \leq 1$  になったことは、 $m_3$  が脱出することを含意しないが、再び楕円軌道に戻ることはまれであるので、ある時点で  $e_2 \geq 1$  に到達することを以って、 $m_3$  が脱出したとみなす。反対に、 $e_2(0) \leq e_{crit}$  と取れば、離心率の変化は一定範囲に限定される。次節でみるように、横断面の適切な射影を行うと、KAM 曲線状のプロットが得られるため、この領域での軌道進化は準周期的であると考えられる。

得られた安定限界を他の安定限界と比較してみる。まず、(1) 式で与えられる Orlov et al. (2008) の安定限界 (図 1 を再び参照せよ) は、 $q_2/a_1$  の値で 1 以上の開きがある。他方、これら 2 つの限界曲線は  $(e_2, q_2)$ -平面上おおよそ平行である。したがって、彼らの RW モデルによるアプローチは、低離心率の場合に不安定性を過大評価しているが、 $q_2$  を固定した場合、 $e_2$  が一定値以上になると軌道が不安定になるという定性的な特徴は捉えているといえる。次に、Hill 安定性と比較する。ここでは、Hill 安定性の境界を軌道要素で表現した Marchal & Bozis (1982) の表式を使って、図 1 に青色で境界曲線を表示した。我々の数値計算による限界曲線とは定量的にも定性的にも異なっており、Hill 安定性は階層安定性とは異なる概念であることを示しているといえる。Hill 安定性は単に  $m_1$  と  $m_2$  の運動可能領域と  $m_3$  のそれとが交叉しないことを保証するだけである。近接遭遇によらない、小さい摂動の蓄積によって  $m_3$  の離心率を上昇させることは禁止されないもので、階層安定限界と Hill 限界安定限界の不一致は驚くにはあたらない。ただし、 $e_2 = 0$  ときは、両境界線の合流している点は、興味深い。

## 3. 数値計算結果

本節では、2. 節で述べた結論の根拠になっている数値実験の結果を紹介する。安定境界を可視化するための手段として、 $\ell_2 = 0$  を横断面に取り、これを  $(e_2, \omega_2 - \lambda_1)$  平面への射影したものをを用いる。図 2~4 にその結果を示す。内容の説明の前に、この図を作成す

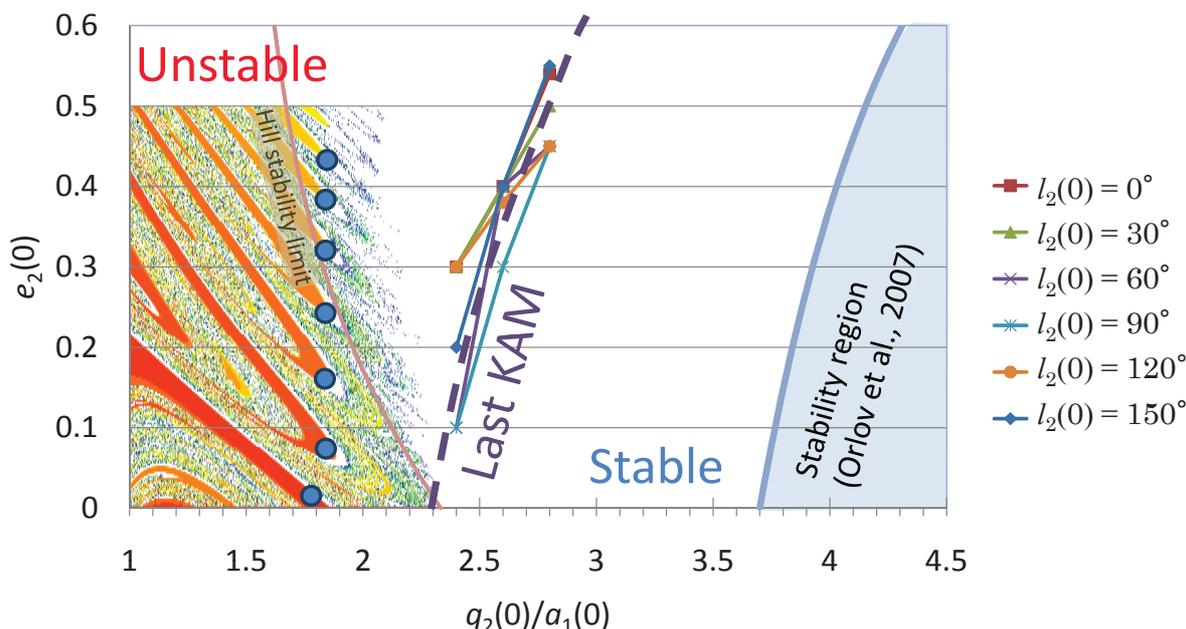


Figure 1. 数値計算にもとづく階層安定限界と既存の限界曲線との比較

るための数値計算上の手続きを少し述べる。図のすべてのパネルで共通な初期条件の成分として  $\omega_2(0) = 0, a_1(0) = 1, e_1(0) = 0, \lambda_1 = 0$  を取る。ひとつのパネルは、ひとつの  $q_2(0)$  と  $l_2(0)$  の組み合わせに対応し、残る初期条件の成分である  $e_2(0)$  のいくつかの値に対する軌道の横断面との交叉点を描いている。これらの交叉点は、数値積分によって、時刻の列  $t_0, t_1, \dots$  での軌道要素を得たとすると、 $l_2(t_{n-1}) < 0$  かつ  $l_2(t_n) > 0$  となる区間  $[t_{n-1}, t_n]$  を検出し、適当な微小量  $\epsilon > 0$  に対して挟み撃ち法により  $|l_2(t_n^*)| < \epsilon$  を満たす時刻  $t_n^* \in [t_{n-1}, t_n]$  での軌道要素を求めることで得られる。

図2~4に現れる結果に移ろう。いずれのパネルでも、 $e_2(0)$  の値により、軌道は2種類に別れることが明らかである。すなわち、 $0.1 \lesssim e_2(0) \lesssim e_{\text{crit}}$  に取った場合には、交叉点は波打った曲線を描くことから  $e_2$  の変化は一定範囲内に制限されるのに対し、 $e_2(0) \gtrsim e_{\text{crit}}$  に取った場合には、交叉点は  $e_2 \gtrsim e_{\text{crit}}$  の領域に散乱される。図2から読み取られる  $e_{\text{crit}}$  は初期位相  $l_2(0)$  に依存して、 $q_2(0) = 2.4$  で  $0.1 \sim 0.3$ 、 $q_2(0) = 2.6$  で  $0.3 \sim 0.45$ 、 $q_2(0) = 2.8$  で  $0.5 \sim 0.55$  である。横断面上での波打った曲線の層と散乱した点との対比は、多くの力学系で観測される現象であり (Lichtenberg & Lieberman, 1992)、それらの系との類似性を仮定すると、それぞれ KAM トーラスとその外部のカオスの海が表出であると考えられる。

その他の横断面上に見られる特徴を述べる。まず、図2(a)には、曲線の層ではなく、4つの島が  $e_2 < 0.1$  の領域にみられる。これらの島はそれぞれ、 $\omega_2 - \lambda_1 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  に中心を持つ。これらの中心はひとつの周期軌道の通過点である。その周期を調べると、ほぼ内外の楕円軌道の会合周期にほぼ一致するため、この4つの島は Hadjidemetriou (2005) での近円 (near circular) 周期軌道の安定領域であると考えられる。一方、例えば図3(b)に

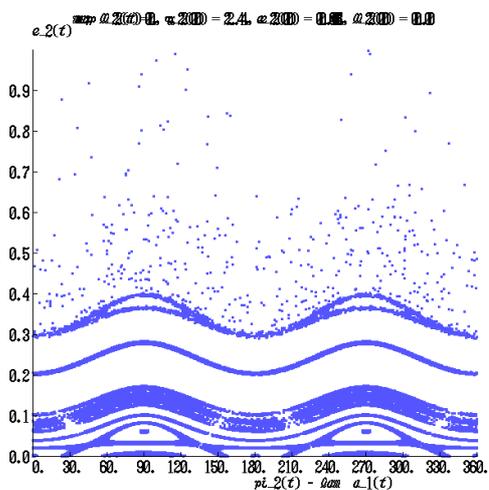
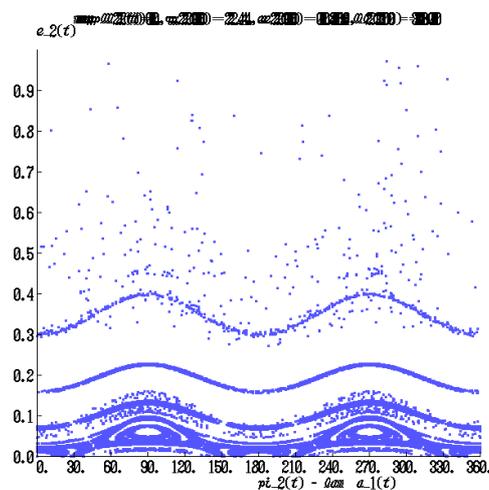
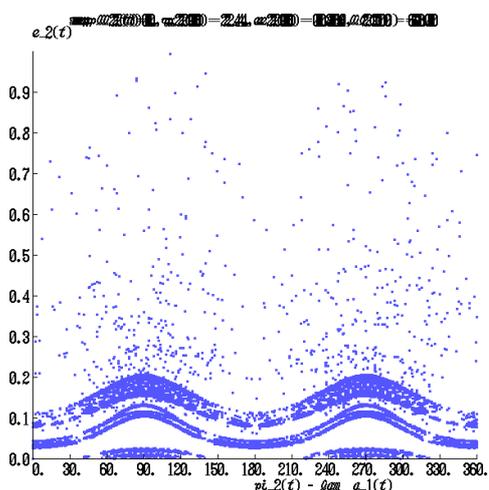
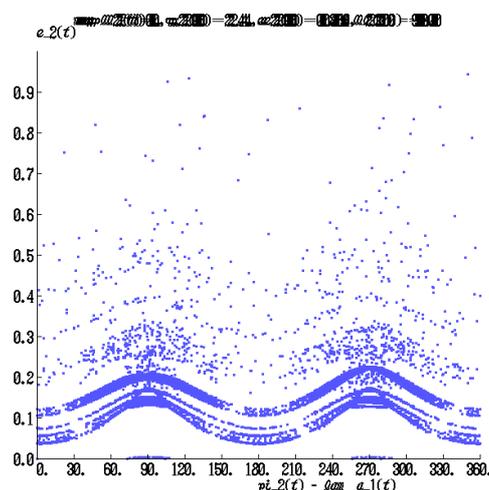
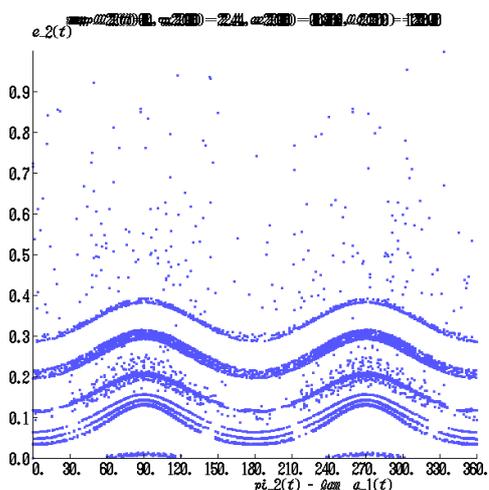
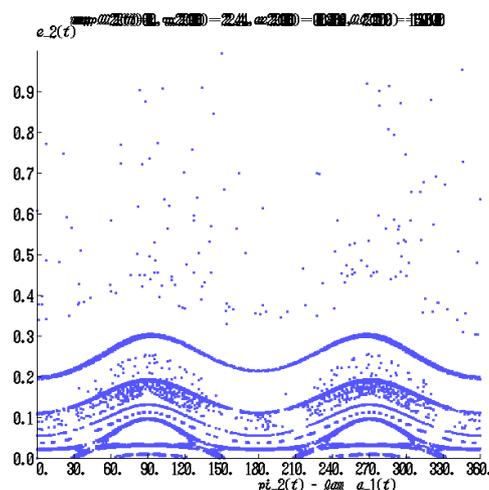
は,  $e_2 = 0.35$  および  $e_2 = 0.45$  にも島が見られるが, これらは平均運動共鳴の安定領域に対応する。

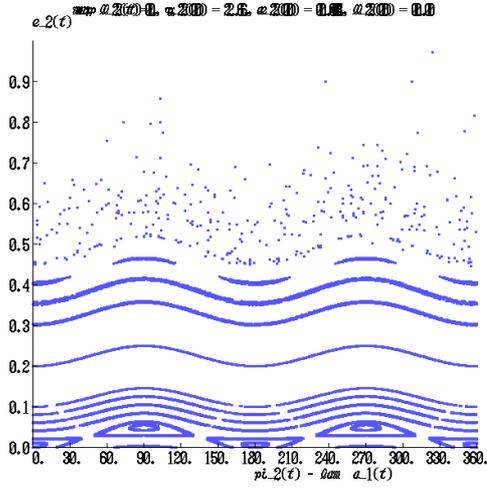
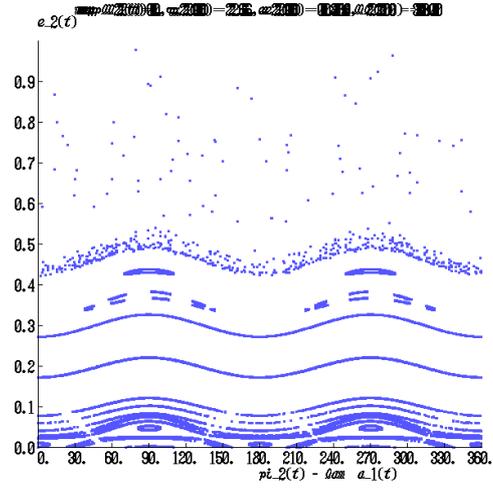
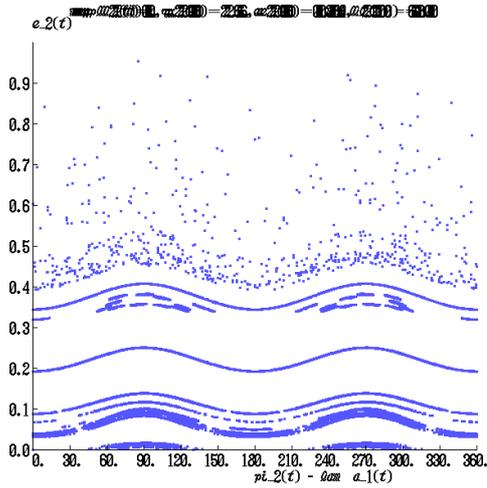
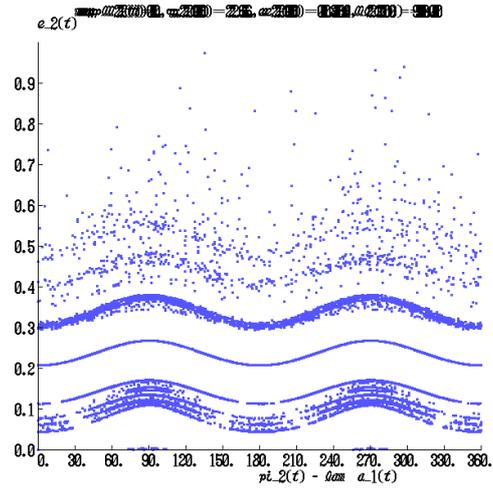
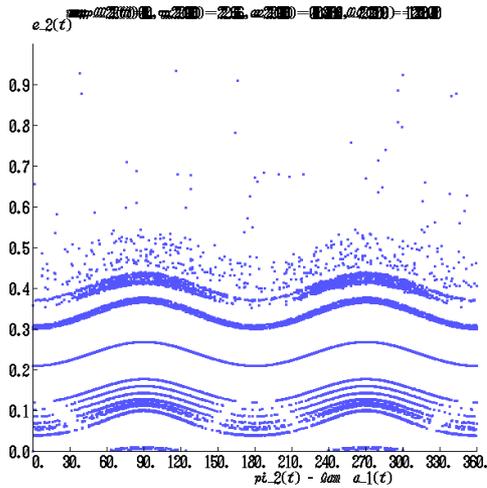
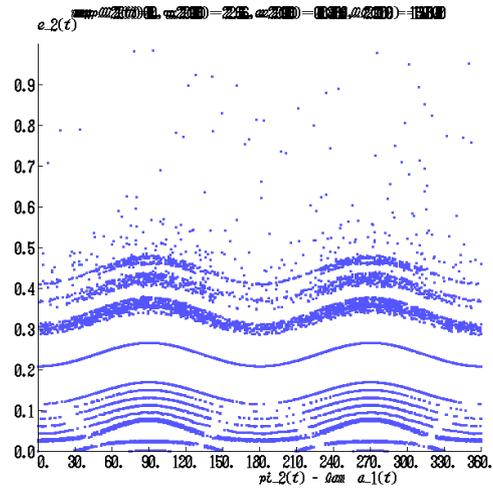
#### 4. まとめ

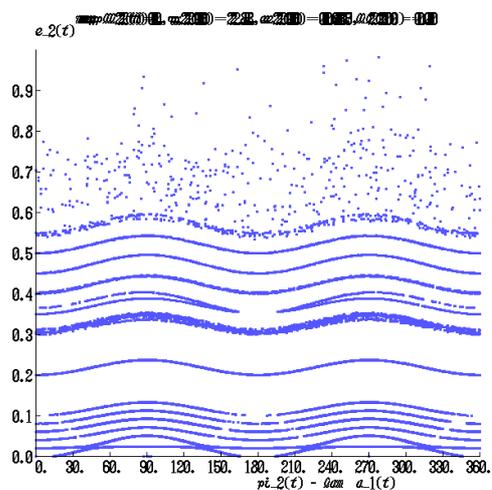
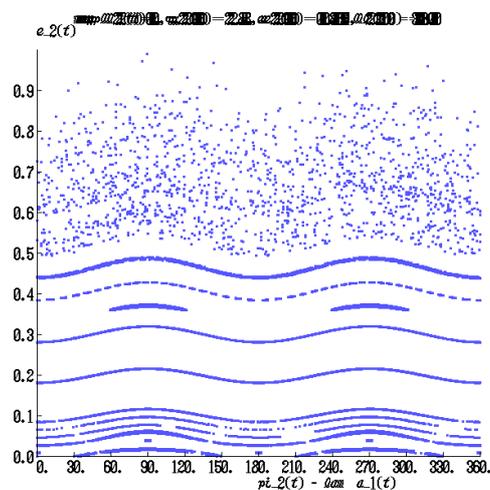
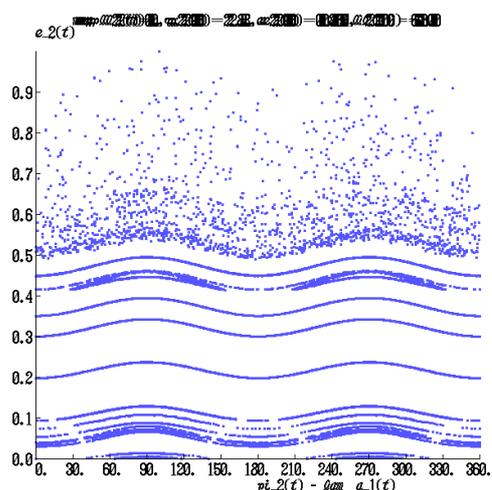
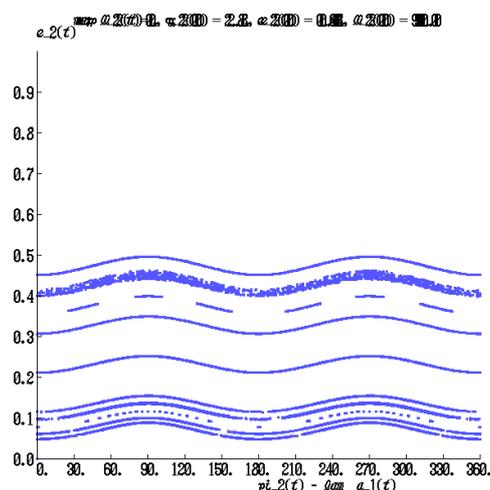
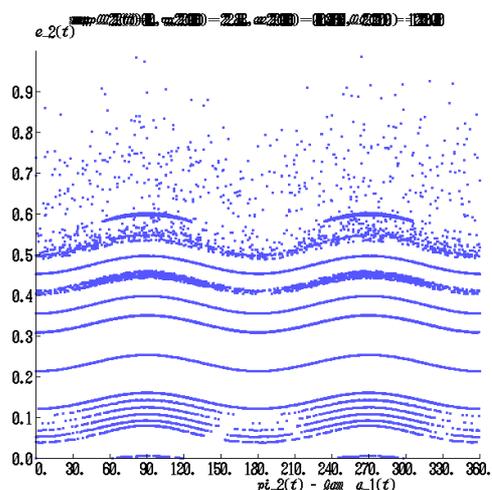
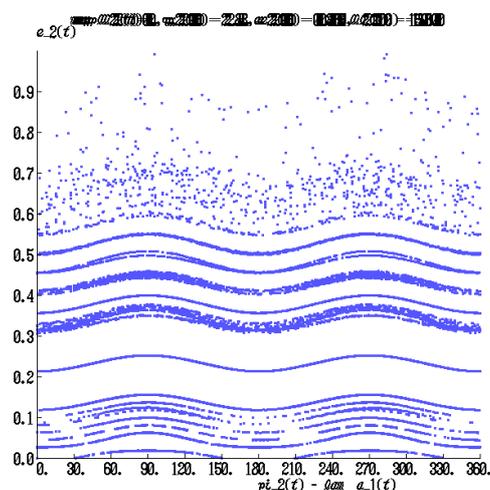
階層三体系の安定性を, 特に連星まわりの褐色矮星を想定した質量比設定 ( $m_0 = m_1 = 0.5, m_2 = 0.01$ ) で調べた。本研究の主目的は, 軌道進化のランダムウォークによるモデル化の適用限界を調べることである。先行研究では, 内外の楕円軌道の相互作用をインパルス近似することで, 軌道進化をランダムウォークでモデル化して安定限界の近似式を改良している。本研究での数値結果と比較すると,  $q_2/a_1$  の値で 1 程度の開きが出た。数値積分した軌道から横断面を構成すると, 最外 KAM と安定限界とが対応することが明らかになった。すなわち,  $q_2$  に依存する  $e_{\text{crit}}$  があって,  $e_2 \lesssim e_{\text{crit}}$  が KAM トーラスの層で覆われ,  $e_2 > e_{\text{crit}}$  はカオス的散乱領域になるのであるが, カオス的散乱領域に初期値を取ると, やがて  $e_2 > 1$  になる。

#### 参考文献

- Golubev, V.G.: Regions where motion is impossible in the three body problem. *Doklady. Akad. Nauk. SSSR* **174**, 767–770 (1967)
- Marchal, C., Saari, D.G.: Hill regions for the general three-body problem. *Celest. Mech.* **12**, 115–129 (1975)
- Mardling, R.A., Aarseth, S.J.: Dynamics and stability of three-body systems. In: Steves, B.A., Roy, A.E. (eds.) *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System, A Major Key to Solar System Studies*. NATO ASI, vol. 90, pp. 385–392. Kluwer, Dordrecht (1999)
- Holman, M.J., Wiegert, P.A.: Long-term stability of planets in binary systems. *Astr. J.* **117**, 621–628 (1999)
- Georgakarakos, N.: Stability criteria for hierarchical triple systems. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **100**, 151–168 (2008)
- Fernández, J.A.: Evolution of comet orbits under the perturbing influence of the giant planets and nearby stars, *Icarus* **42**, 406–421 (1980)
- Orlov, V.V., Rubinov, A.V., Valtonen, M., Mylläri, A., Zhuchkov, R. Stability of triple systems. In: Orlov, V.V., Rubinov, A.V. (eds.) *Resonances, Stabilization, and Stable Chaos in Hierarchical Triple Systems*, St. Petersburg State Univ., St. Petersburg (2008)
- Marchal, C. & Bozis, G.: Hill stability and distance curves for the general three-body problem. *Celest. Mech.* **26**, 311–333 (1982)

(a)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 0^\circ$ (b)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 30^\circ$ (c)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 60^\circ$ (d)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 90^\circ$ (e)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 120^\circ$ (f)  $q_2(0) = 2.4, l_2(0) = 150^\circ$ Figure 2. 横断面  $l_2 = 0$  の  $(\lambda_1 - \omega_2, e_2)$ -平面への投影 ( $q_2(0) = 2.4$ )

(a)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 0^\circ$ (b)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 30^\circ$ (c)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 60^\circ$ (d)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 90^\circ$ (e)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 120^\circ$ (f)  $q_2(0) = 2.6, l_2(0) = 150^\circ$ Figure 3. 横断面  $l_2 = 0$  の  $(\lambda_1 - \omega_2, e_2)$ -平面への投影 ( $q_2(0) = 2.6$ )

(a)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 0^\circ$ (b)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 30^\circ$ (c)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 60^\circ$ (d)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 90^\circ$ (e)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 120^\circ$ (f)  $q_2(0) = 2.8, l_2(0) = 150^\circ$ Figure 4. 横断面  $l_2 = 0$  の  $(\lambda_1 - \omega_2, e_2)$ -平面への投影 ( $q_2(0) = 2.8$ )

Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A.: Regular and Chaotic Dynamics. Springer, Berlin (1992)

Hadjidemetriou, J. D., *Celest. Mech. Dyn. Astr* **95**, :225–244 (2006)