

ハミルトンヤコビ方程式を用いた宇宙機の軌道移行問題 の数値解法

坂東麻衣¹, 山川 宏

京都大学宇宙総合学研究ユニット

Abstract. The two-point boundary value problem for Keplerian motion, which is known as Lambert's problem, is considered. We develop a method to approximate the solution of the Hamilton-Jacobi equation which can solve Lambert's problem. The proposed method is based on the successive approximation and Galerkin spectral method with Chebyshev polynomials. This approach is easily applied to the perturbed motion where the potential function is specified. Numerical simulation is given to illustrate the theory.

1. はじめに

宇宙機が効率よくミッションを達成するためには最適な軌道を選ぶ必要がある。少ない燃料でより多くの対象の観測を行うためには、膨大な数の対象の中から、どの対象に、いつ、どのような順番でいくか、を決める必要がある。この問題は、組み合わせ最適化の問題に加え、組み合わせ毎に軌道最適化を行う必要があるため、膨大な計算量必要とする難しい問題である。従来の軌道最適化では、対象の数は限られていたため、膨大な情報を効率よく扱うという観点での理論は研究されておらず、計算量の観点から軌道理論の研究を行った例は少ない。近年 Scheeres らにより提案された軌道の最適制御理論は、直接、最適軌道を求めるのではなく、ハミルトン系の正準変換の理論を用いて、最適軌道を生成する母関数を求める [1, 2]。そうすることにより、必要な制御量が、初期位置、目標位置および時刻をパラメータとする関数として得られる。つまり、対象とするハミルトン系の母関数を一度求めておけば、あとは各問題で異なる初期条件等のパラメータを代入するだけで解を得ることができる。このため、この方法を用いることにより、組み合わせ毎に問題を解くのではなく、関数の値の評価のみ

¹m-bando@rish.kyoto-u.ac.jp

を行えばよいことになり，計算量を大幅に減らすことが可能である．ところが，母関数を求めるための非線形偏微分方程式の一般的な解法は存在しない．このため，基準軌道まわりの線形なダイナミクスに対する解法は提案されているものの，単純な 2 体問題に対してさえも，母関数を求めるための理論は確立されていない [1, 2]．そこで本稿では，軌道最適化問題の解を生成する母関数のみたすべき Hamilton-Jacobi 方程式が，非線形システムに対する最適制御問題で現れる，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式と同様の構造をもつことに着目し，軌道力学の問題に対して非線形最適制御理論の逐次近似法を適用することにより，従来扱うことができなかった非線形性や摂動項を含むダイナミクスの軌道問題を解くことができることを示す [3, 4]．さらに，この手法を拡張することで，母関数を求めることも可能であることを示し，軌道の計算例を示す．

2. 問題設定

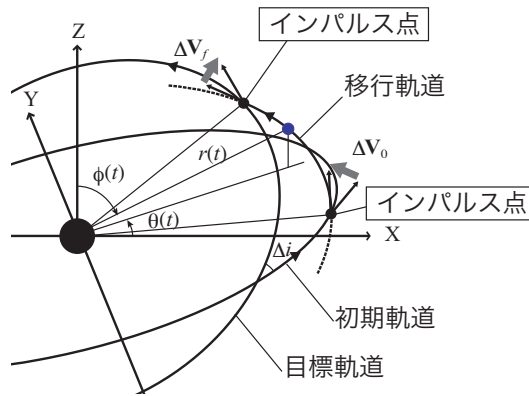


Figure 1. 速度制御を用いた軌道移行．

逆二乗法則に従う中心力場を運動する宇宙機の運動を考える．無次元化した運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

で表される．このとき，宇宙機のダイナミクスを，速度制御を適切に設定することで制御し，小惑星にフライバイするように軌道設計を行う (図 1)．この問題は Lambert 問題と呼ばれ [5]，以下の問題として表される．

[問題]

初期位置 $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ からスタートした宇宙機が，所望の時間 t_f 後に， $\mathbf{r}(t_f) =$

r_f に移動するものとする．このとき，初期位置 r_0 から目的位置 r_f に到達するために必要な初期速度 $\dot{r}(t_0)$ を求めよ．

3. 正準変換と変換の母関数

正準変換について簡単に説明する [6]．ハミルトニアンを $H(q, p, t)$ とし，固定した終端状態と $(q_f(t_f), p_f(t_f))$ ，移動する初期状態 $(q(t), p(t))$ の間の正準変換を考える．このとき，以下の4種類の母関数を考えることができる．

$$F_1 = F_1(q_f, q, t), F_2 = F_2(q_f, p, t), F_3 = F_3(p_f, q, t), F_4 = F_4(p_f, p, t). \quad (2)$$

それぞれの状態の関係は，

$$p_f = \frac{\partial F_1(q_f, q, t)}{\partial q_f}, \quad (3)$$

$$p(t) = -\frac{\partial F_1(q_f, q, t)}{\partial q}, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial F_1(q_f, q, t)}{\partial t} + H(q, -\frac{\partial F_1(q_f, q, t)}{\partial q}, t) = 0, \quad (5)$$

$$p_f = \frac{\partial F_2(q_f, p, t)}{\partial q_f}, \quad (6)$$

$$q(t) = \frac{\partial F_2(q_f, p, t)}{\partial p}, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial F_2(q_f, p, t)}{\partial t} + H(\frac{\partial F_2(q_f, p, t)}{\partial p}, p, t) = 0, \quad (8)$$

$$q_f = -\frac{\partial F_3(p_f, q, t)}{\partial p_f}, \quad (9)$$

$$p(t) = -\frac{\partial F_3(p_f, q, t)}{\partial q}, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial F_3(p_f, q, t)}{\partial t} + H(q, -\frac{\partial F_3(p_f, q, t)}{\partial p}, t) = 0, \quad (11)$$

$$q_f = \frac{\partial F_4(p_f, p, t)}{\partial p_f}, \quad (12)$$

$$q(t) = -\frac{\partial F_4(p_f, p, t)}{\partial p}, \quad (13)$$

$$-\frac{\partial F_4(p_f, p, t)}{\partial t} + H(-\frac{\partial F_4(p_f, p, t)}{\partial p}, p, t) = 0, \quad (14)$$

により表される．ここで，(5), (8), (11), (14) は Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式とよばれる非線形偏微分方程式である．また， F_2, F_3 母関数は終端時刻において，恒等変換となることから以下の境界条件が得られる．

$$F_2(q_f, p, t_f; t_f) = q_f^T p, \quad (15)$$

$$F_3(p_f, q, t_f; t_f) = -p_f^T q. \quad (16)$$

また，すべての母関数は同等であり，Legendre 変換:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + P^T Q,$$

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - p^T q,$$

$$F_4(p, P, t) = F_2(q, Q, t) + p^T q,$$

により，独立変数を変換することができる．

(3), (4) より， p の初期値および終端値は $F_1(q_f, q_0, t_f; t_0)$ 母関数を用いて

$$p_f = \frac{\partial F_1}{\partial q_f}, \quad p_0 = -\frac{\partial F_1}{\partial q_0}, \quad (17)$$

により，直接求めることができる．このように，正準変換の母関数を用いて，位置と速度に関する 2 点境界値問題を解くことができる [1]．

4. 提案手法

4.1. 漸近近似による母関数の解法

最適制御問題に現れる HJB 方程式に対しては，文献 [7–9] で漸近近似と呼ばれる方法で近似解を求める方法がすでに提案されている．HJB 方程式と HJ 方程式は同じ構造を持つため，同様な考え方に基づいて，正準変換の母関数の近似解を求める方法を提案する．漸近近似を用いて母関数の近似解を得るために，母関数のみたすべき HJ 方程式と関連する最適化問題を考え，評価関数を最小化することにより解を実現することを考える．以下では，簡単のためハミルトニアン $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$ で表される一次元運動について考える．ここで， $U(q) \leq 0$ はポテンシャル関数を表す．この問題に対して，非線形システム:

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad (18)$$

$$x = \begin{bmatrix} p_f \\ q \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

評価関数:

$$J(\mathbf{u}; \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - U(q) dt - p_f q. \quad (20)$$

を考えると, この最適制御問題に対応する HJB 方程式は,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + B\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - U(q) \right] = 0, \quad (21)$$

$$V(\mathbf{x}(t_f), t_f) = -p_f^T q, \quad (22)$$

で与えられ, (18), (19) を代入すると

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 - U(q) = 0, \quad (23)$$

が得られる. 一方で F_3 の満たすべき HJ 方程式 (11) は,

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} \right)^2 - U(q) = 0, \quad (24)$$

$$F_3(p_f, q, t_f; t_f) = -p_f^T q \quad (25)$$

となる. このことから, $F_3(p_f, x, t_f; t)$ のみたす HJ 方程式を解くことは, 上の最適制御問題に対応する HJB 方程式を解くことと同じであり, 漸近近似により評価関数 (20) を逐次下げることによって解を求めることができる. また, F_3 母関数は終端時刻における境界条件を持つこと, 同じく境界条件をもつ F_2 母関数については HJ 方程式が異なる構造となることから, (5), (8), (11), (14) のうちで F_3 に関する HJ 方程式のみを解くことが可能である. よって, 漸近近似 [7] を適用することにより, F_3 の近似解は, GHJB:

$$\frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial q} p^{(k)} + \frac{\|p^{(k)}\|^2}{2} + \frac{1}{q} = 0, \quad (26)$$

$$F_3^{(k)}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = -p_f^T q. \quad (27)$$

および,

$$p^{(k+1)} = \frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial q}. \quad (28)$$

を繰り返し解くことにより得られる.

4.2. チェビシェフ多項式を用いた母関数の近似

切断次数 N のチェビシェフ多項式は、区間 $x \in [-1, 1]$ において、以下で定義される [10] .

$$\cos n\theta \triangleq T_n(\cos \theta) = T_n(x), \quad x = \cos \theta$$

チェビシェフ多項式は、 $\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$ の内積に関する直交多項式である . (26) の解を切断次数 N のチェビシェフ多項式を用いて

$$F_3^{(k)}(p_f, x, t) \triangleq \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N c_{n_1, n_2}^{(k)}(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(x) \quad (29)$$

と定義する . 次に、(26) の各項をチェビシェフ級数展開したものを

$$\frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial t}(p_f, q) = \sum_{n_1, n_2=0}^N \dot{c}_{n_1, n_2}^{(k)}(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q), \quad (30)$$

$$u^{(k)} = \frac{\partial F_3^{(k-1)}}{\partial q} \triangleq \sum_{n_1, n_2=0}^N c'_{n_1, n_2}{}^{(k-1)}(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q), \quad (31)$$

$$\frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial q} u^{(k)} \triangleq \sum_{n_1, n_2=0}^N (P c_{n_1, n_2}^{(k)})(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q), \quad (32)$$

$$U(q) \triangleq \sum_{n_1, n_2=0}^N l_{n_1, n_2} T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q), \quad (33)$$

$$\|u^{(k)}\|^2 = \left(\sum_{n_1, n_2=0}^N c'_{n_1, n_2}{}^{(k-1)}(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q) \right)^2 \quad (34)$$

$$\triangleq \sum_{n_1, n_2=0}^N a_{n_1, n_2}(t) T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(q). \quad (35)$$

と表すと、(26) は基底関数 $T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(x)$ の 1 次結合で書くことができる .

ここで、 P は (n_1, n_2) 成分が $\frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial x} u^{(k)}$ のチェビシェフ級数展開の c_{n_1, n_2} の係数を表す定数行列とする . $T_{n_1}(p_f) T_{n_2}(x)$, $0 \leq n_1 \leq N$, $0 \leq n_2 \leq N$ との内積をとることにより、(26) は $c_{n_1, n_2}^{(k)}(t)$ に関する常微分方程式に帰着される:

$$\frac{dc_{n_1, n_2}^{(k)}}{dt}(t) + P c_{n_1, n_2}^{(k)}(t) + l_n + a_{n_1, n_2}(t) = 0. \quad 0 \leq n \leq N.$$

境界条件は、時刻 T において母関数が恒等変換となる条件より、 $c_{1,1} = -1$, $c_{n_1, n_2} = 0$, $n_1 \neq 1, n_2 \neq 1$ で与えられる .

5. 計算例

平面運動のハミルトニアン

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, t) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r), \quad (36)$$

を考える．ここで，ポテンシャルは $U(r) = -\frac{1}{r}$ とする．初期位置 $\mathbf{r}_0 = [r_0, \theta_0] = [1.0, 0.0]$ から終端位置 $\mathbf{r}_f = [r_f, \theta_f] = [1.0, 2.0]$ に， $\pi/2$ （無次元した時間）で以降する軌道を考える．正準方程式は

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \quad (37)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \quad (38)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{1}{r^2}, \quad (39)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = 0. \quad (40)$$

となるので，(37) - (40) は以下のアファイン非線形システムとみなすことができる．

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (41)$$

ここで，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_r \\ \frac{p_\theta}{r} \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}.$$

であり，制御入力 $\mathbf{u}(t)$ は評価関数を最小化するように決定される．

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + R(\mathbf{x}) dt \quad (42)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left(|p_r|^2 + \frac{|p_\theta|^2}{r^2} \right) - U(r) dt. \quad (43)$$

HJB 方程式と GHJB 方程式は

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} - U(\mathbf{x}) - \frac{\partial V^{*T}}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})^T \frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (44)$$

および

$$\frac{\partial V^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial V^{(k)T}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - U(\mathbf{x}) + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} = 0 \quad (45)$$

で与えられる．2点境界値問題の解は

$$p_r^{(k+1)} = u_r^{(k+1)} = -\frac{\partial V^{(k)}}{\partial r} \quad (46)$$

$$p_\theta^{(k+1)} = ru_\theta^{(k+1)} = -\frac{\partial V^{(k)}}{\partial \theta}. \quad (47)$$

となる．求める境界値問題の解軌道は，円軌道であり，初期速度，終端速度はそれぞれ $[\dot{r}_0, \dot{\theta}_0] = [\dot{r}_f, \dot{\theta}_f] = [0.0, 1.0]$ で与えられる．GHJB 方程式 (47) は，切断次数 $N = 4$ のチェビシェフ多項式により近似した．150 回の反復計算の後，収束した軌道を Fig. 2 に示す．近似誤差は 10^{-5} 程度のオーダーであった．

次に摂動ハミルトニアン $U(r) = -\frac{1}{r} - \frac{0.1}{r^3}$ に対して，同じ2点境界値問題を考える．HJB 方程式と GHJB 方程式には，新たな項 $\frac{0.1}{r^3}$ を追加し，同じアルゴリズムを用いた．Fig. 4 の点線 (Trajectory 2) は，摂動のない問題での初速度 $[\dot{r}_0, \dot{\theta}_0] = [0.0, 1.0]$ による軌道である．実践 (Trajectory 1) に新たに求めた初速度による軌道を示す．Fig. 5 は r , θ , p_r and p_θ の時間履歴を示している．提案するアルゴリズムにより，ポテンシャルが変動した場合でも，境界条件をみたす解が求まっていることがわかる．

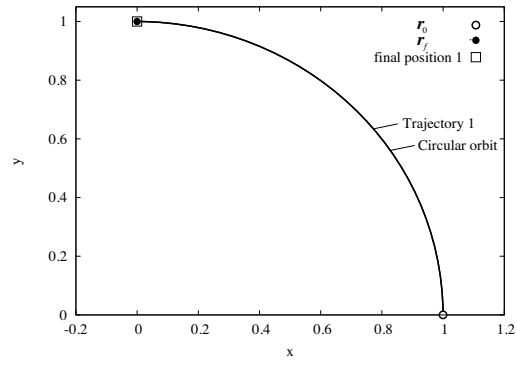


Figure 2. Trajectory in inertial frame.

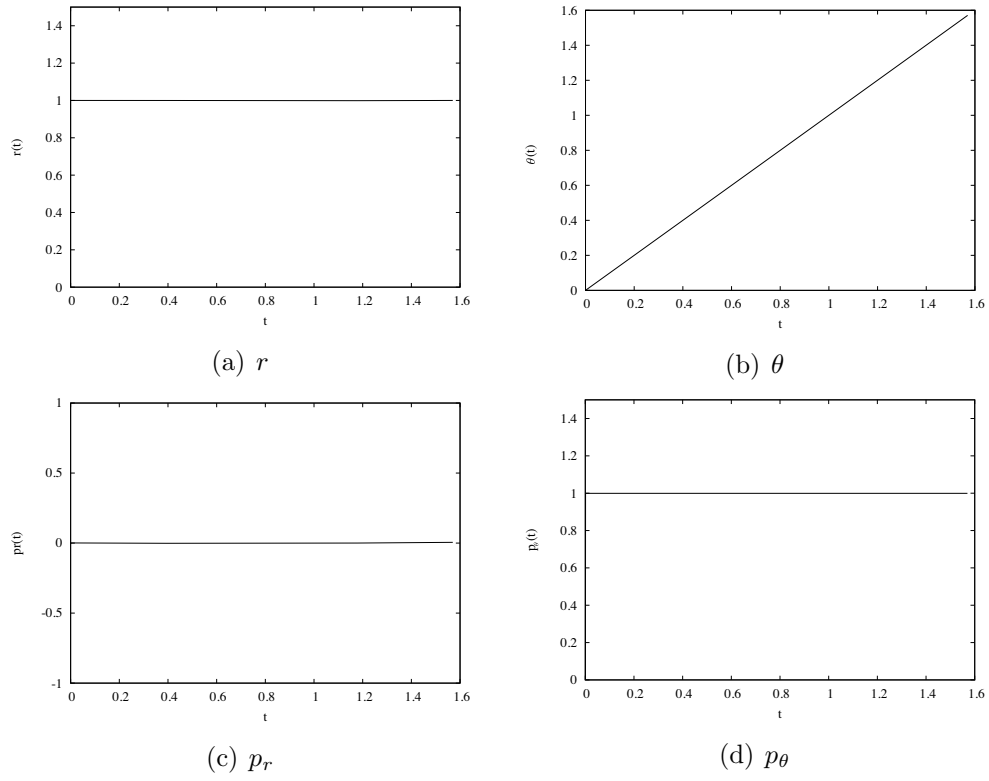


Figure 3. Evolution of r , θ , p_r , p_θ

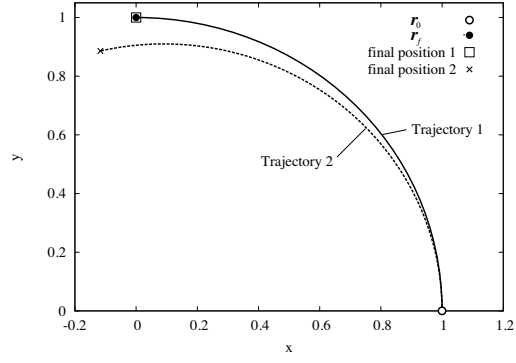


Figure 4. Trajectory in inertial frame.

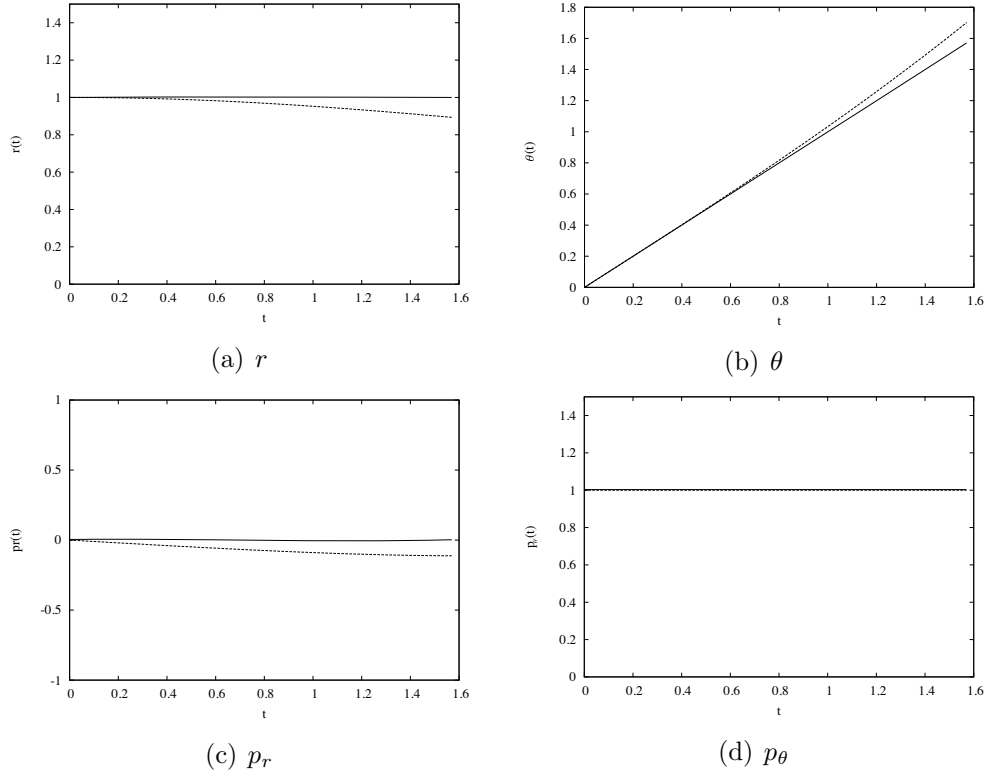


Figure 5. Evolution of r , θ , p_r , p_θ

References

- Guibout, V. M. and Scheeres, D. J. , “Solving Relative Two-Point Boundary Value Problems: Spacecraft Formulation Flight Transfers Application”, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 4, pp. 693–704, 2004.
- Park, C. and Guibout, V. M. and Scheeres, D. J., “Solving Optimal Continuous Thrust Rendezvous Problems with Generating Functions”, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pp. 321–331, 2006.
- Mai Bando and Hiroshi Yamakawa, “A New Optimal Orbit Control for Two-Point Boundary-Value Problem Using Generating Functions”, *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 134, pp. 245-260, 2009.
- Mai Bando and Hiroshi Yamakawa, “A New Lambert Algorithm Using the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation”, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, ol. 33 No. 3, pp. 1000-1008, 2010.
- Prussing, J. E. and Conway, B. A. , *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, USA, 1993.
- Goldstein, H. , *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980.
- Saridis, G. N. and Lee, C.-S. G. , “An Approximation Theory of Optimal Control for Trainable Manipulators”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 9, No. 4, pp. 152–159, 1979.
- Beard, R. W. and Saridis, G. N. and Wen, J. T. , “Galerkin Approximations of the Generalized Hamilton-Jacobi-Bellman Equation”, *Automatica*, Vol. 33, pp. 2159–2178, 1997.
- 水野 光, 藤本 健治, “Chebyshev 多項式を用いた Hamilton-Jacobi 方程式の近似解法”, *計測自動制御学会論文集*, Vol. 44, No.2, pp. 113–118, 2008.
- Boyd, J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Courier Dover Publications, 2001, pp. 19-80.