

コンピュータソフトウェア AUTO による，周期軌道および安定/不安定多様体，ホモ/ヘテロクリニック軌道の数値計算

新潟大学自然科学系 矢ヶ崎 一幸

1. はじめに

コンピュータソフトウェア AUTO [1] は，カナダ Concordia 大学の Doedel 氏を中心に開発された，解の追跡と分岐解析用ソフトウェアである．最初のリリースは 1980 年で，その後改良され，AUTO86，AUTO94，AUTO97，AUTO2000 がリリースされた後，最新版は AUTO-07P と呼ばれるバージョンである．UNIX/Linux 機で動作し，解析対象を FORTRAN の簡単な SUB プログラムで与えて，計算を行うようになっている（AUTO2000 では C 言語が使用されている）．現在，力学系および関連する分野で広く用いられている．

AUTO の標準的な使用法では，代数方程式の解あるいは常微分方程式の平衡点の分枝と分岐を計算することができる．特に，パラメータ平面におけるサドル・ノードおよび Hopf 分岐曲線を求めることが可能である．また，離散系の不動点（周期軌道），常微分方程式の周期軌道，境界値問題の解に対する分枝と分岐（周期倍分岐を含む），目的（汎）関数の極値の発見と追跡（最適化問題）を扱うことができる．HomCont と呼ばれるパッケージにより，常微分方程式の平衡点に対するホモクリニック軌道の追跡や，余次元 2 の分岐の発見と追跡を行うことも可能である．

さらに，取り扱う問題を常微分方程式の境界値問題として定式化することにより，標準的ではない，少し高度な使用法が可能である．例えば，両端が安定および不安定部分空間上にあるという境界条件を取ることで，周期軌道，不変多様体に対するホモ/ヘテロクリニック軌道を，境界の一方が安定/不安定部分空間，もう一方は安定/不安定多様体上の点を取ることで，平衡点，周期軌道，不変多様体に対する安定/不安定多様体（上の軌道）を計算することができる．また，可逆系（3.5 節を参照）に対しては，その性質を利用した特別な扱いも可能である．

本稿では，AUTO の標準的および少し高度な使用法について，具体的な例をあげて解説する．標準的な使用法では，平衡点のサドル・ノード分岐と Hopf 分岐および境界値問題の計算を取りあげる．また，少し高度な使用法では，安定/不安定多様体とホモ/ヘテロクリニック軌道の計算方法について概略を述べた後，エノン・ハイレス系とある 3 自由度近可積分ハミルトン系に対する計算結果を与える．さらに，可逆系について，その性質を述べた後，その計算方法について簡単に説明し，2 等辺 3 体問題を例として周期軌道と安定/不安定多様体に対する計算結果を与える．なお，ここでの計算はすべて，最新版の AUTO-07P ではなく AUTO97 [2] を使用している．

2. 標準的な使用例

2.1. 平衡点のサドル・ノード分岐と Hopf 分岐 AUTO の最初の例として，次の 2 次元自律系を考える．

$$u_1' = -u_1 + p_1(1 - u_1)e^{-u_2}, \quad u_2' = -u_2 + p_1p_2(1 - u_1)e^{-u_2} - p_3u_2 \quad (1)$$

```

SUBROUTINE FUNC(NDIM,U,ICP,PAR,IJAC,F,DFDU,DFDP)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION U(NDIM), PAR(*), F(NDIM), ICP(*)
U1=U(1)
U2=U(2)
E=DEXP(U2)
F(1)=-U1 + PAR(1)*(1-U1)*E
F(2)=-U2 + PAR(1)*PAR(2)*(1-U1)*E - PAR(3)*U2
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE STPNT(NDIM,U,PAR)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION U(NDIM), PAR(*)
PAR(1)=0.
PAR(2)=14.
PAR(3)=2.
U(1)=0.
U(2)=0.
RETURN
END

```

図 1. 式 (1) に対する AUTO の SUB プログラム

2 1 0 1	NDIM, IPS, IRS, ILP
1 1	NICP, (ICP(I), I=1, NICP)
50 4 3 1 1 0 0 0	NTST, NCOL, IAD, ISP, ISW, IPLT, NBC, NINT
100 0 0.15 0 100	NMX, RL0, RL1, A0, A1
100 10 2 8 5 3 0	NPR, MXBF, IID, ITMX, ITNW, NWTN, JAC
1.e-6 1.e-6 0.0001	EPSL, EPSU, EPSS
0.01 0.005 0.05 1	DS, DSMIN, DSMAX, IADS
1	NTHL, ((I, THL(I)), I=1, NTHL)
11 0.	
0	NTHU, ((I, THU(I)), I=1, NTHU)
0	NUZR, ((I, UZR(I)), I=1, NUZR)

図 2. AUTO のデータファイルの例

```

alpha% @R ab 1
f77 -c -O ab.f -o ab.o
f77 -O ab.o -o ab.exe /home/yagasaki/bin/auto/97/lib/*.o
Starting ab ...

```

BR	PT	TY	LAB	PAR(1)	L2-NORM	U(1)	U(2)
1	1	EP	1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	33	LP	2	1.05739E-01	1.48439E+00	3.11023E-01	1.45144E+00
1	70	LP	3	8.89318E-02	3.28824E+00	6.88982E-01	3.21525E+00
1	90	HB	4	1.30900E-01	4.27187E+00	8.95080E-01	4.17704E+00
1	92	EP	5	1.51242E-01	4.36975E+00	9.15589E-01	4.27275E+00

```

Total Time 0.400E-02
ab ... done
alpha% @sv ab
Saving fort.7 as p.ab ... done
Saving fort.8 as q.ab ... done
Saving fort.9 as d.ab ... done
alpha%

```

図 3. AUTO の実行コマンドと出力結果

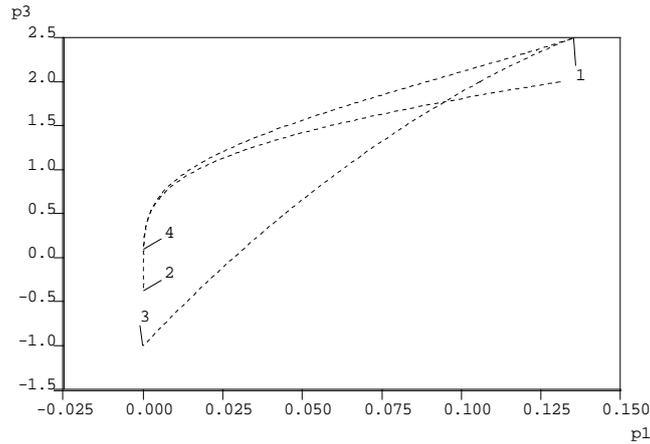


図 4. $p_2 = 14$ のときの式 (1) の分岐曲線

ここで, ' は独立変数 t についての微分を表す (以下では, 微分を $\dot{\cdot}$ で表す場合もある). この系はある化学反応の数学モデルで [3], AUTO97 のチュートリアル・デモ (ab) として用いられている (AUTO-07P でもこのデモ自体は含まれている). この例に対する AUTO の SUB プログラムと, 最初の実行で用いられるデータファイル (r.ab.1) を図 1 と 2 に, AUTO の実行コマンドと出力結果を図 3 に与える. 詳細は AUTO97 [2] のマニュアルを参照されたい.

図 1 において, $U(i)$, $i=1,2$, が変数 u_1, u_2 を, $PAR(i)$, $i=1,2,3$, がパラメータ p_1, p_2, p_3 を表す. SUBROUTINE FUNC では, $F(1)$ と $F(2)$ に微分方程式 (1) の右辺が代入され, SUBROUTINE STPNT では, 初期解についての情報, パラメータの値 $p_1 = 0, p_2 = 14, p_3 = 2$ と平衡点の座標 $u_1 = u_2 = 0$ が与えられている. 図 2 のデータファイルでは, コントロール・パラメータなどの, 解の追跡を行う際の設定が与えられている. 図 3 に示されるように, 最初の実行では図 2 のファイル r.ab.1 が用いられ (実行コマンド "@R ab 1" の "1" がそれを表している), 平衡点の追跡が行われて 2 つのサドル・ノード分岐 (ラベル LP) と Hopf 分岐 (ラベル HB) が発見されている.

詳細については触れないが, デモ ab において, 2 番目の実行では Hopf 分岐で発生した周期軌道の追跡が行われ, 3 番目と 4 番目の実行ではパラメータ平面におけるサドル・ノード分岐曲線が, 5 番目の実行ではパラメータ平面における Hopf 分岐曲線が求められる. このようにして得られた, $p_2 = 14$ のときの (p_1, p_3) 平面における分岐曲線を図 4 に示す. 1 とラベルされた点を含む曲線がサドル・ノード分岐曲線, もう 1 つの曲線が Hopf 分岐曲線である.

2.2. 境界値問題 2 番目の例として, 区間 $[0, 1]$ において, 次式で与えられる常微分方程式の境界値問題を考える.

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = -p_1 e^{u_1}, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0 \quad (2)$$

この例も AUTO97 でデモ (exp) として採用されている (AUTO-07P にも含まれている). AUTO の SUB プログラムを図 5 に与える. 前の例にはなかった境界条件が, SUBROUTINE BCND において $FB(1)=FB(2)=0$, すなわち $U_0(1)=U_1(1)=0$ となるように設定されている. ここで, $U_0(1)$ と $U_1(1)$ は, それぞれ, u_1 の左端と右端の値を表す変数である. また, SUBROUTINE STPNT で初期解としてパラメータの値が $p_1 = 0$ のときの定数解 $u_1(t) = u_2(t) = 0$ が与えられている. 詳

```

SUBROUTINE FUNC(NDIM, U, ICP, PAR, IJAC, F, DFDU, DFDP)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
DIMENSION U(NDIM), PAR(*), F(NDIM)
E=EXP(U(1))
F(1)=U(2)
F(2)=-PAR(1)*E
RETURN
END

SUBROUTINE STPNT(NDIM, U, PAR, T)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
DIMENSION U(NDIM), PAR(*)
PAR(1)=0
U(1)=0.0
U(2)=0.0
RETURN
END

SUBROUTINE BCND(NDIM, PAR, ICP, NBC, U0, U1, FB, IJAC, DBC)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
DIMENSION PAR(*), ICP(*), U0(NDIM), U1(NDIM), FB(NBC)
FB(1)=U0(1)
FB(2)=U1(1)
RETURN
END

```

図 5. 境界値問題 (2) に対する AUTO の SUB プログラム

細は省略するが，デモ `exp` において，2 回の AUTO の実行により，パラメータ p_1 の値を変化させたときの解の分枝が求められる．その結果を図 6 に与える．ここで，縦軸は u_1 の $t = 0$ から $t = 1$ までの (数値) 積分の値を表している．

3. (少し) 高度な使用例

2.2 節で触れた境界値問題に対する AUTO の機能は，単に境界値問題の解析だけでなく，工夫することにより，周期軌道やホモ/ヘテロクリニック軌道，さらには安定/不安定多様体を数値計算し，また，可逆系に対してはその性質を利用した特別な扱いが可能となる．本節では，これらの使用例について概説する．

3.1. 安定/不安定多様体 次の一般的な系を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

平衡点 $x = x_0$ に対する安定/不安定多様体 $W^{s,u}(x_0)$ は以下のようにして近似的に計算することができる．まず，ヤコビ行列 $Df(x_0)$ の固有値問題を解き，実部が負および正の固有ベクトルが張る線形空間により， $x = x_0$ における安定/不安定部分空間 $E^{s,u}$ を求める． T をある正数として， $x(T) \in E^s$ ， $x(0) \in W^s(x_0)$ あるいは $x(0) \in E^u$ ， $x(T) \in W^u(x_0)$ という境界条件のもとで式 (3) を解き， T や境界条件を変化させて解の追跡を行い， $x(0)$ あるいは $x(T)$ から安定/不安定多様体を計算する．ここで，境界条件 $x(0) \in W^s(x_0)$ ， $x(T) \in W^u(x_0)$ は便宜上与えるものである．

周期軌道 $\gamma(t)$ に対しては，そのまわり変分方程式

$$\dot{\xi} = Df(\gamma(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

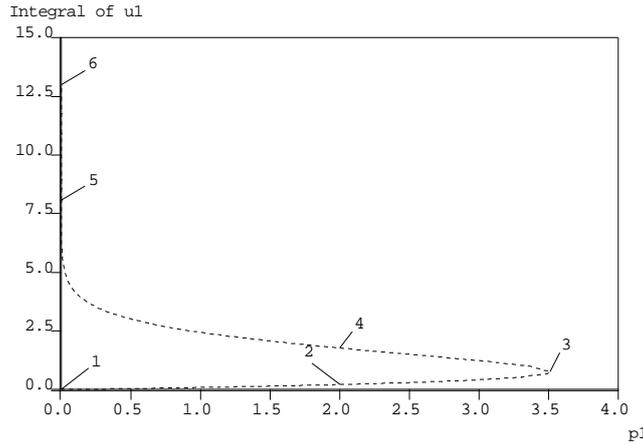


図 6. 境界値問題 (2) の解の分枝

のモノドロミー行列の固有値問題を解き，絶対値が 1 よりも大きい固有値に対するそれぞれの固有空間から $\gamma(t)$ に対する安定/不安定部分空間を求め，平衡点の場合と同様にして，安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\gamma(t))$ を計算する．さらに，不変多様体 \mathcal{M} に対しては，まず， τ_1, τ_2 を $\tau_2 - \tau_1 \gg 1$ を満たす定数， $\gamma(t)$ を \mathcal{M} 上の軌道として， $\gamma(t)$ のまわりの変分方程式の基本行列 $X(\tau_j)$ ， $j = 1, 2$ ，を計算する．次に，行列 $X(\tau_1)X^{-1}(\tau_2)$ および $X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)$ の固有値問題を解き，絶対値が 1 よりも大きい固有値に対するそれぞれの固有空間を求め，前の 2 つの場合と同様にして安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\gamma(t))$ を計算する． \mathcal{M} 上で $\gamma(t)$ を動かしてこの計算を継続して行うことにより， \mathcal{M} に対する安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\mathcal{M})$ が求められる．

3.2. ホモ/ヘテロクリニック軌道 3.1 節と同様な計算によりホモ/ヘテロクリニック軌道を求めることができる．例えば，平衡点 x_s と x_e に対するヘテロクリニック軌道は， x_s の不安定部分空間 E^u と x_e の安定部分空間 E^s を計算し， T をある正数として境界条件 $x(0) \in E^u$ ， $x(T) \in E^s$ を満たす式 (3) の解により近似的に求められる． $x_s = x_e = x_0$ としてこの計算を行えば，平衡点 x_0 に対するホモクリニック軌道が求められ，周期軌道や不変多様体のホモ/ヘテロクリニック軌道に対しても同様に計算することができる．なお，平衡点のホモ/ヘテロクリニック軌道の計算は，HomCont という付属のパッケージを用いることにより AUTO の標準機能で行うことができる．

3.3. エノン・ハイレス系 周期軌道の安定/不安定多様体の計算例として次の一般化されたエノン・ハイレス系を考える．

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - cy_1^2 - dx_1^2, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_1 - 2cx_1y_2 \quad (5)$$

ここで， c, d は定数である．式 (5) において適当な座標変換を施すと，次式が得られる [4]．

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_1^2 - \frac{1}{2}a_2y_1^2, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\omega^2y_1 - a_2x_1y_1 - a_3y_1^2 \quad (6)$$

ここで， a_j ， $j = 1, 2, 3$ は c, d, ω に依存する定数であり，原点 $(x, y) = (0, 0)$ はサドル・センターとなる． $c/d \neq 0, \frac{1}{6}, 1$ のとき，式 (5) は非可積分で [5-7]，周期軌道に対する横断的ホモクリニック

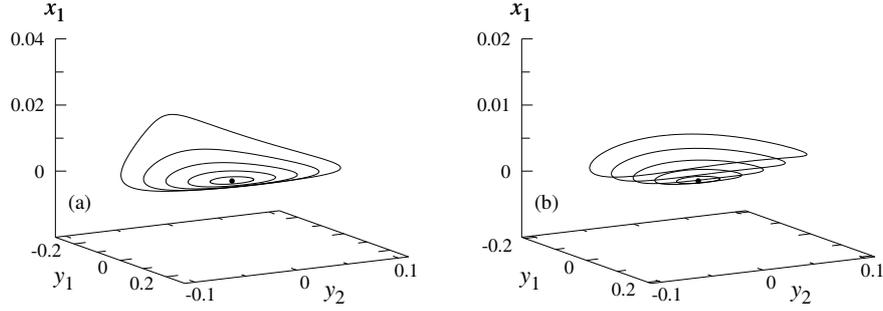


図 7. 式 (6) における原点のまわりの周期軌道: (a) (i) の場合; (b) (ii) の場合

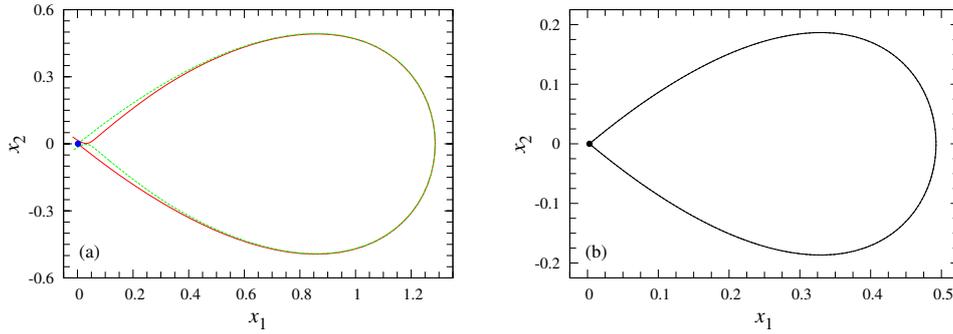


図 8. 図 7 で与えられた外側の周期軌道に対する，ポアンカレ断面 $\{y_1 = 0\}$ 上の安定/不安定多様体: (a) (i) の場合; (b) (ii) の場合

ク軌道が存在することが証明されている [4, 8, 9] . 特に，サドル・センターからの距離が $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の微小周期軌道に対して，安定多様体と不安定多様体の分離は $c/d \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ のとき $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $c/d = \frac{3}{4}$ のとき $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$, $c/d = \frac{1}{2}$ のとき $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ となることが示されている .

以下では，次の 2 つの場合の結果を与える .

$$(i) \quad a_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad a_3 = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(ii) \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ここで，(i) と (ii) の場合は，それぞれ， $(c, d) = (0.75, 1)$ と $(0.5, 3)$ の場合に対応する . 図 7 は式 (6) における原点まわりの周期軌道を，図 8 は図 7 の外側の周期軌道に対する，ポアンカレ断面 $\{y_1 = 0\}$ 上の安定/不安定多様体を示す . 図 7 と 8 の計算を行うため，それぞれ，原点にある平衡点とその平衡点まわりの変分方程式の微小軌道を初期解として選んでいる . 図 8(a) の非可積分の場合，安定多様体 (赤線) と不安定多様体 (緑線) は横断的に交差しているが，図 8(b) の可積分の場合，これらの多様体は (ほぼ) 一致していることが確認できる . より詳細は文献 [10] の付録 B を参照されたい .

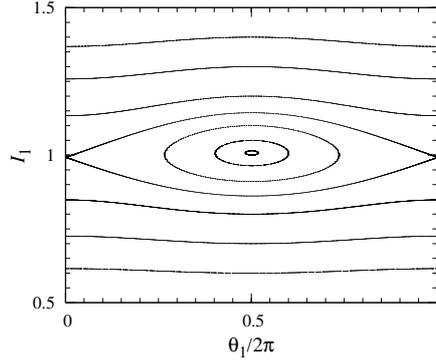


図 9. 式 (7) における (I, θ) -超平面上の軌道

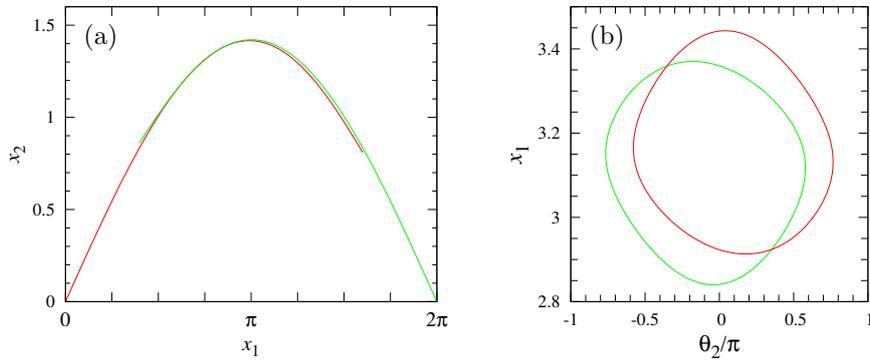


図 10. 不変な (I, θ) -超平面の安定/不安定多様体: (a) $I_2 = 0.3, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$ のときの (x_1, x_2) 平面への射影; (b) $x_2 = \sqrt{2}, I_2 = 0.3, \theta_1 = 0$ のときの $(\theta_2/\pi, x_1)$ 平面への射影

3.4. 3 自由度近可積分ハミルトン系 次の 3 自由度ハミルトン系を考える .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \frac{1}{3}I_1 \sin x_1 + \varepsilon(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \sin x_1, \\ \dot{I}_1 &= \varepsilon[\sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_1] \cos x_1, & \dot{I}_2 &= \varepsilon[-\sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_2] \cos x_1, \\ \dot{\theta}_1 &= I_1 + \frac{1}{3}(\cos x_1 + 2), & \dot{\theta}_2 &= I_2 + 1 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, $\varepsilon = 0$ のとき, $\theta_j, j = 1, 2$, は循環変数で, それらと共役な変数 $I_j, j = 1, 2$, は定数となり, 式 (7) は可積分である. $\varepsilon \neq 0$ のとき, (I, θ) -超平面はまた不変で, KAM あるいは非 KAM トーラスでほとんど埋め尽くされる. 図 9 に (I, θ) -超平面上における式 (7) の軌道を数値計算した結果を与える. ここで, $\varepsilon = 0.01, H_0 + \varepsilon H_1 = 3$ であり, ポアンカレ断面 $\{\theta_2 = 0 \pmod{2\pi}\}$ が取られている.

図 10 と 11 に, それぞれ, 不変な (I, θ) -超平面の安定/不安定多様体と (I, θ) -超平面上の不変トーラスのヘテロクリニック軌道を与える. ここで, $\varepsilon = 0.01, H_0 + \varepsilon H_1 = 3$ である. 図 10 と 11 の計算では, それぞれ, $\varepsilon = 0$ の場合の (I, θ) -超平面まわりの変分方程式

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{3}I_1 x_1, \quad \dot{I}_j = 0, \quad \dot{\theta}_j = I_j + 1, \quad j = 1, 2$$

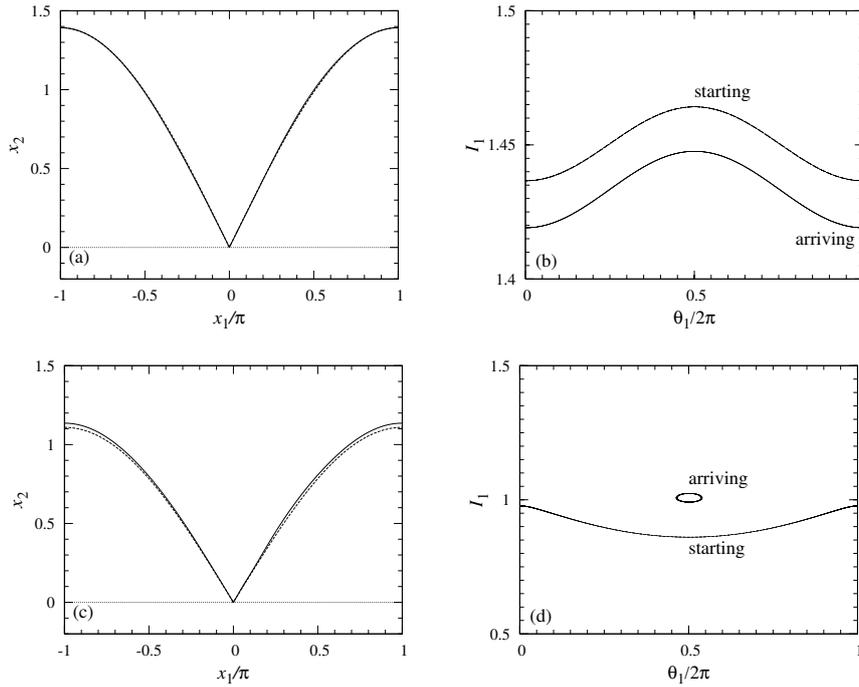


図 11. (I, θ) -超平面上の不変トーラスのヘテロクリニック軌道

の微小軌道と不変トーラスのホモクリニック軌道

$$x = \left(\sqrt{2} \operatorname{sech} t, -\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t \right), \quad I = \text{const},$$

$$\theta_1 = (I_1 + 1)t + \theta_{10} - \frac{2}{\sqrt{3}I_1} \tanh \sqrt{\frac{1}{3}I_1} t, \quad \theta_2 = (I_2 + 1)t + \theta_{20}$$

が初期解として用いられている．図 10 より，安定多様体（緑線）と不安定多様体（赤線）が横断的に交差していることが確認できる．また，図 11(b) と (d) では，ヘテロクリニック軌道が $t \rightarrow \pm\infty$ のとき漸近する不変トーラスが示され，KAM トーラス同士あるいは KAM トーラスと非 KAM トーラスに対するものとなっている．図 11(a) と (c) には非摂動ホモクリニック軌道が点線でプロットされており，ヘテロクリニック軌道との差が非常に小さいこともわかる．

3.5. 可逆系: 2 等辺 3 体問題 図 12 に示されたような，互いに万有引力の影響を受け，等質量の 2 質点 m_1, m_2 と 1 質点 m_3 が 2 等辺 3 角形の配置を保ちながら運動する（実際にこのような運動は可能である），古典力学の 2 等辺 3 体問題を考える． xyz を絶対座標系， z 軸を対称軸とし，また， $\alpha = m_3/m_1$ を質量比として， $z' = (\sqrt{(\alpha + 1)/\alpha})z$ とおく． xyz' 座標系において，質点 m_3 は z' 軸上を運動し，3 質点と共に回転する $x'y'z$ 座標系の回転角を θ ，質量中心から質量 m_2 までの距離を r ，その方向と x' 軸とのなす角を φ とする．適当な時間変換を行い，2 体衝突を blow-up

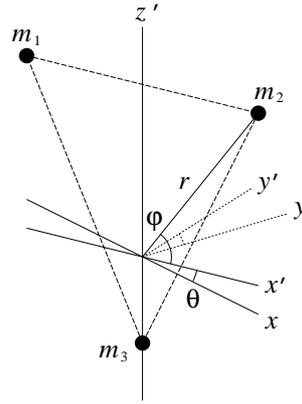


図 12. 2 等辺 3 体問題

することにより，次の運動方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{r} &= vr \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = w, \quad \dot{v} = \left(U(\varphi) - \frac{1}{2}v^2 + 2rh \right) \cos \varphi, \\ \dot{w} &= \frac{dU}{d\varphi}(\varphi) \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}vw \cos \varphi - (2U(\varphi) - v^2 + 2rh) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (8)$$

ここで，変数 r, φ, v, w は θ とは独立で，

$$U(\varphi) = \sec \varphi + \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha + 2 \sin^2 \varphi}}$$

であり，式 (8) はエネルギー保存則

$$\frac{1}{2} \left(v^2 \cos^2 \varphi + w^2 + \frac{\omega^2}{r} \right) - U(\varphi) \cos^2 \varphi = rh \cos^2 \varphi \quad (9)$$

を有する．式 (8) と (9) の導出に対しては文献 [12] を参照されたい． rv 平面は不変で，その上の軌道は平衡点か周期軌道となり，オイラー軌道として知られているものに対応する [11]．特に，平衡点

$$(r, v) = (2\alpha + \frac{1}{2}, 0)$$

は円軌道を表し，円周オイラー軌道に対応する．

容易にわかるように，式 (8) は線形対合

$$R_1 : (r, \varphi, v, w) \mapsto (r, \varphi, -v, -w), \quad R_2 : (r, \varphi, v, w) \mapsto (r, -\varphi, -v, w)$$

に対して可逆的である．すなわち， $X = (r, \varphi, v, w)$ として式 (8) を

$$\dot{X} = F(X) \quad (10)$$

と書くと，

$$F(R_j(X)) + R_j(F(X)) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

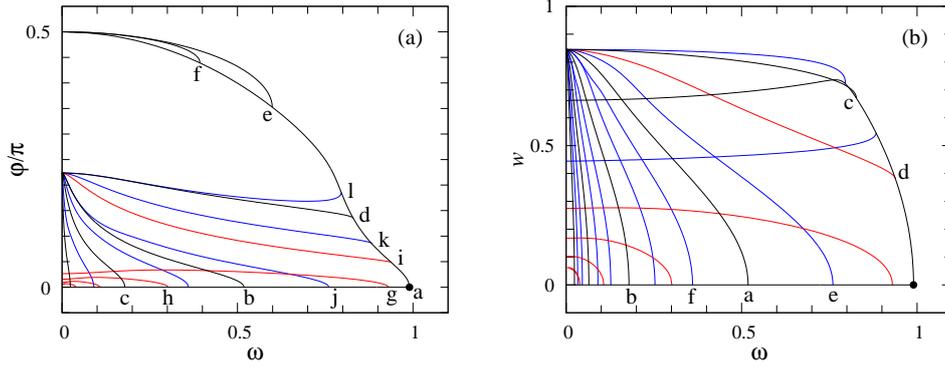


図 13. $\alpha = 0.1$ に対する対称周期軌道の枝: (a) R_1 -対称; (b) R_2 -対称

を満たす．可逆系の重要な性質の 1 つは， $X(t)$ が式 (10) の解ならば $R_j(X(-t))$ も式 (10) の解となることである． $X(t) = R_j(X(-t))$ のとき，式 (10) の解および対応する軌道は対称であるという．対合 R_j の不変平面は

$$\text{fix}(R_1) = \{v = w = 0\}, \quad \text{fix}(R_2) = \{\varphi = w = 0\}$$

となり， $\text{fix}(R_j)$ と交差するときそのときに限って，軌道は対称となる．特に， $\text{fix}(R_j)$ と 2 点で交差するとき，軌道は対称な周期軌道となる．このことを利用して， T をある正数として式 (10) を境界条件

$$X(\pm T) \in \text{fix}(R_j) \quad (12)$$

の下で解くことにより対称周期軌道を求めることができる．

AUTO97 を用いてこの境界値問題を解くことにより求めた， $\alpha = 0.1$ に対する対称周期軌道の枝を図 13 に示す．ここで，初期解として円周オイラー解を用いている．図 13(a) と (b) では，それぞれ，軌道が $\text{fix}(R_1)$ と $\text{fix}(R_2)$ を横切るときの φ と w の値がプロットされている．黒線，赤線，青線は，それぞれ，元の枝の軌道の 1 倍，2 倍，3 倍の周期をもつ軌道の枝を表している．

平衡点 $E_+ = (0, \varphi_c, v_c, 0)$ の安定多様体 $W^s(E_+)$ と不安定多様体 $W^u(E_+)$ の計算結果を図 14 と 15 に与える．ここで， $\Sigma = \{(r, \varphi, v, w) \mid v = 0\}$ ， $U'(\varphi_c) = 0$ ， $v_c = \sqrt{2U(\varphi_c)}$ であり， E_+ まわりの変分方程式の微小軌道を初期解として用いている．式 (8) の可逆性により， E_+ と対称な平衡点 $E_{\pm}^* = (0, \pm\varphi_c, -v_c, 0)$ が存在し， R_1 あるいは R_2 を用いて， $W^{s,u}(E_+)$ からこれらの平衡点の不安定/安定多様体を得られる．特に， $W^{s,u}(E_+)$ が $\text{fix}(R_1)$ あるいは $\text{fix}(R_2)$ (すなわち，図 14 と 15 において φ 軸あるいは w 軸) と交差するとき， E_+ と E_+^* あるいは E_-^* とのヘテロクリニック軌道が存在する．したがって，図 14 と 15 から多くのヘテロクリニック軌道が存在することがわかる．また，図 15 において白丸は $W^u(E_+^*) \cap \{r, v = 0\}$ を表す．本節の結果のより詳細は文献 [13, 14] を参照されたい．

4. 最後に

少し高度なものを含めて，コンピュータソフトウェア AUTO の使用方法について概説した．AUTO はユーザーフレンドリーではないが，基本的な計算機能を工夫して用いることにより，多様な応用

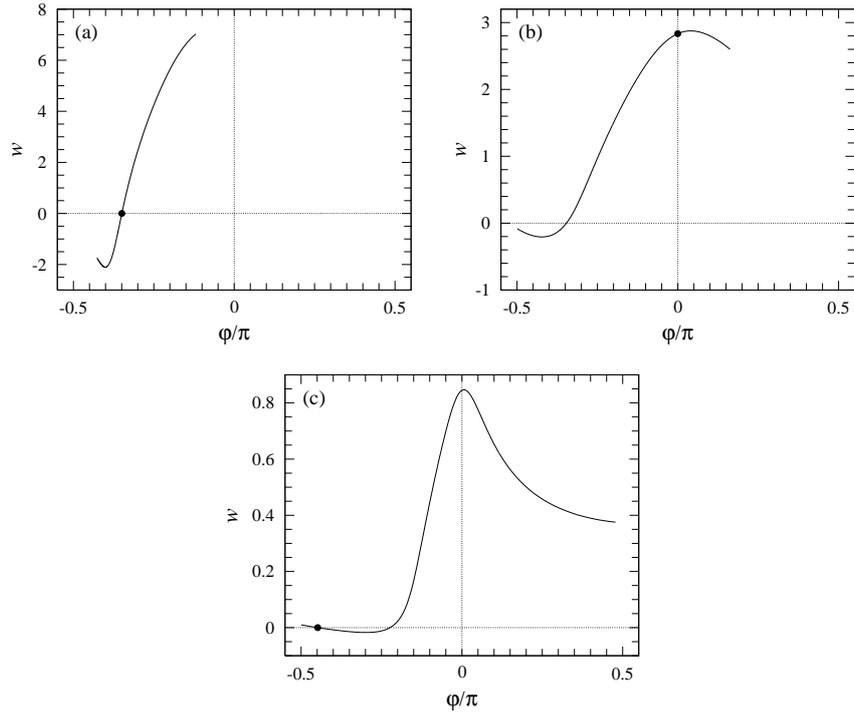


図 14. $\Sigma = \{v = 0\}$ 上での平衡点 E_+ の安定多様体: (a) $\alpha = 7$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 0.1$

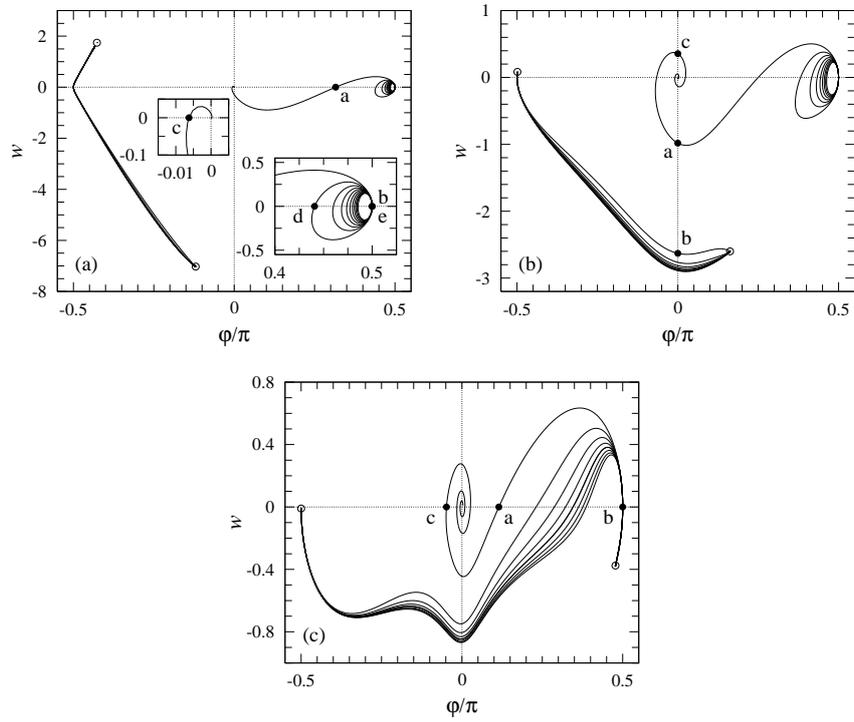


図 15. Σ 上での平衡点 E_+ の不安定多様体: (a) $\alpha = 7$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 0.1$

の可能性がある．例えば，上で見たように，境界値問題の解の追跡により，ホモ/ヘテロクリニック軌道，安定/不安定多様体を計算できる．また，制限 3 体問題あるいは 4 体問題のモデルを用いることにより，地球から月へ飛行する宇宙ロケットの低コストの遷移軌道の計算も行われている [15, 16]．AUTO により取り扱える問題は他にも数多く存在するであろう．

参考文献

- [1] E.J. Doedel and B.E. Oldeman, *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, with major contributions by A.R. Champneys, F. Dercole, T. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, R. Paffenroth, Björn Sandstede, X. Wang and C. Zhang, Concordia University, Montreal, 2009 (available at <http://cmv1.cs.concordia.ca/auto/>).
- [2] E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with Hom-Cont)* Concordia University, Montreal, 1997.
- [3] A. Uppal, W.H. Ray and A.B. Poore, On the dynamic behaviour of continuous stirred tank reactors, *Chem. Eng. Sci.*, **29** (1974), 967–985.
- [4] K. Yagasaki, Higher-order Melnikov method and chaos for two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Discrete Contin. Dyn. Syst. A*, **29** (2011), 387–402.
- [5] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [6] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods, Appl. Anal.* **8** (2001), 33–96.
- [7] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis and C. Simo, Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **40** (2007), 845–884.
- [8] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers *Arch. Rational Mech. Anal.* **154** (2000), 275–296.
- [9] K. Yagasaki, Existence of horseshoes in the generalized Hénon-Heiles system under degenerate conditions, *Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Eindhoven, The Netherlands*, 2005, D.H. van Campen, M.D. Lazurko and W.P.J.M. van der Oever (eds.), Paper No. 12-311.
- [10] T. Sakajo and K. Yagasaki, Chaotic motion of the N -vortex problem on a sphere: I. Saddle-centers in two-degree-of-freedom Hamiltonians, *J. Nonlinear Sci.*, **18** (2008), 485–525.
- [11] K.R. Meyer, G.R. Hall and D. Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -body Problem*, 2nd ed., Springer, New York, 2009.
- [12] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 857–876.
- [13] M. Shibayama and K. Yagasaki, Heteroclinic connections between triple collisions and relative periodic orbits in the isosceles three-body problem, *Nonlinearity* **22** (2009), 2377–2403.
- [14] M. Shibayama and K. Yagasaki, Families of symmetric relative periodic orbits originating from the circular Euler solution in the isosceles three-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, to appear.
- [15] K. Yagasaki, Computation of low energy Earth-to-Moon transfers with moderate flight time, *Phys. D*, **197** (2004), 313–331.
- [16] K. Yagasaki, Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with low energy and moderate flight time, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **90** (2004), 197–212.