

# 変分法による周期解の存在証明

柴山允瑠 (京大・理)

sibayama@math.kyoto-u.ac.jp

## 要旨

---

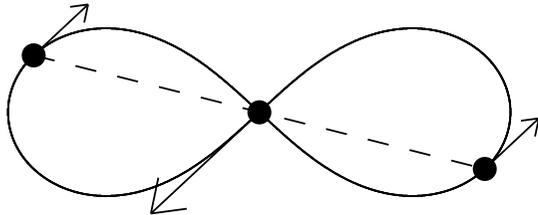
近年, 変分法を用いて  $N$  体問題の周期解の存在を証明する研究が盛んである. 今回はその概要を解説した後, その理論を適用して得た新しい周期解を紹介する.

# 1 Choreography の経緯

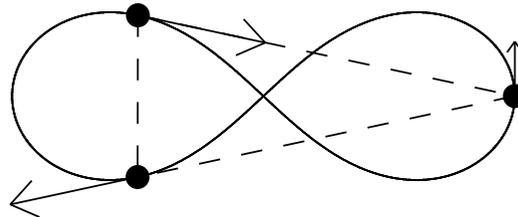
---

2000 年, Chenciner と Montgomery は 3 体 8 の字解の存在を証明した ([8, 18]).

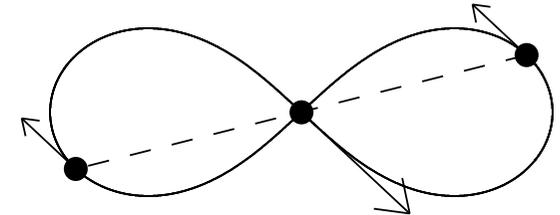
$$t = 0$$



$$t = \frac{T}{12}$$



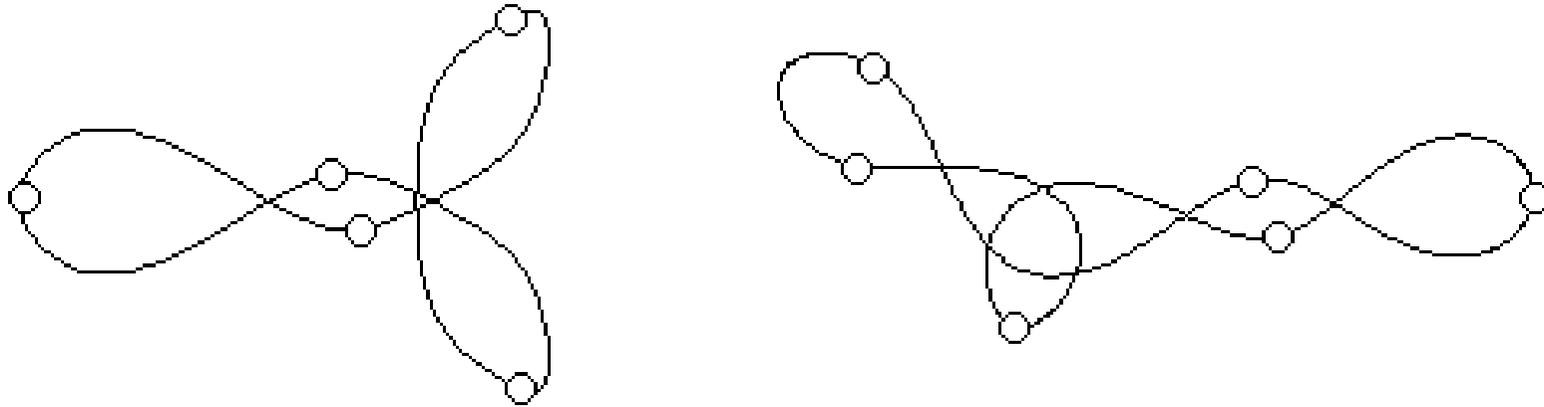
$$t = \frac{T}{6}$$



# 1 Choreography の経緯

---

その後, Simó がたくさん numerical solutions を求めた ([9, 21]).



このように質点が互いに追いかっこする軌道を Choreography と名付けた.

# 1 Choreography の経緯

その後, Choreography に関する研究が活発になされた (一部を紹介):

1. Chenciner and Venturelli: 4 体 hip-hop 軌道の存在 (2000 年 [10])
2. Chen: 4 体 Chen 軌道の存在 (2001 年 [3])
3. Chen:  $2n$  体問題の対称的な軌道の存在 (2003 年 [4])
4. Ferrario and Terracini: 対称性を持つ軌道の存在の一般的証明 (2004 年 [12])
5. 藤原 and Montgomery: 3 体 8 の字解の左右の葉の凸性の証明 (2005 年 [13])
6. Chen: 直線配置を初期位置とする周期軌道の存在 (2006 年 [5])
7. Chen: 3 体の retrograde 軌道の存在 (2006 年 [6])
8. 柴山:  $2n$  体問題の多様な軌道の存在 (2006 年 [20])

## 2 $N$ 体問題と変分法

---

$N$  体問題を考える:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3}$$
$$i = 1, \dots, N$$
$$x_i \in V = \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$$

$N$  体問題は作用積分

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{x}_i\|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|} dt$$

に関する変分問題として定式化できる (例えば [1, 12 節と 13 節] または [14, 3.2 節と 3.3 節] を参照).

$\mathcal{A}(x) > 0$  だから, minimizer( $\mathcal{A}$  を最小にする  $x$ ) の存在が期待される.

### 3 関数空間

---

重心を 0 とした配位空間を  $\mathcal{X}$  とおく:

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in V^N \mid \sum_{i=1}^N m_i x_i = 0 \right\}$$

関数空間はソボレフ空間

$$\Lambda = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$$

とする.

つまり,  $x \in \Lambda$  ということは,  $x$  が  $\mathcal{X}$  上の  $T$  周期の曲線で,  $x$  は  $L^2$  関数で, その超関数の意味における微分が  $L^2$  関数として存在するを意味する (関数解析の本, たとえば [2] を参照. この辺の  $L^2$  とか超関数は後であまり使わないので理解しなくてもよい,  $\Lambda$  が  $\mathcal{X}$  上の閉曲線全体であることだけ分かっていたらよい).

## 4 目標

---

$\Lambda$  の部分集合  $\Gamma$  を選び,

$\mathcal{A}|_{\Gamma}$  (作用積分  $\mathcal{A}$  の  $\Gamma$  への制限) の minimizer をとり, 周期軌道を得たい.

問題点

1.  $\mathcal{A}|_{\Gamma}$  の critical point は  $\mathcal{A}$  の critical point か?
2.  $\mathcal{A}|_{\Gamma}$  の minimizer は存在するか?
3. minimizer は衝突しないか?
4. minimizer は新しい解か?  
(central configuration になっていないか?)

## 5 制限の方法

---

1. 対称性による制限
2. 質点の運動が成す braid による制限  
(配位空間から衝突を除いたところの homotopy class)
3. 境界条件 ( $x(0), x(\bar{T})$  の配置) を制限

## 6 対称性による制限

---

$G$  を有限群とし,

$$\rho : G \rightarrow O(d) \quad (d \text{ 次直交群}, d = 2, 3)$$

$$\sigma : G \rightarrow \mathfrak{S}_N \quad (N \text{ 次対称群})$$

$$\tau : G \rightarrow O(2) \quad (2 \text{ 次直交群}, \text{時間を } S^1 \text{ と同一視している})$$

を表現 (準同型) とする.

$G$  の  $\Lambda$  への作用を

$$g \cdot ((x_1, \dots, x_N)(t)) = (\rho(g)x_{\sigma(g^{-1})(1)}, \dots, \rho(g)x_{\sigma(g^{-1})(N)})(\tau(g^{-1})t)$$

によって定める. ここで,  $g \in G$  で  $x(t) = (x_1, \dots, x_N)(t) \in \Lambda$  である.

$\Lambda^G$  を  $\Lambda$  の中で  $G$  の作用で不変な曲線全体の集合とする:

$$\Lambda^G = \{x \in \Lambda \mid g \cdot x = x\}$$

## 7 対称性の例 1( 3 体 8 の字解 [8])

平面等質量 3 体問題を考え, 群を 3 つの元から生成される群  $G = \langle a, b, c \rangle = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  を考える.  $G$  の表現を次のようにとる:

位置の変換

$$\rho(a) = 1,$$

$$\rho(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

質点の置換

$$\sigma(a) = (1, 2, 3),$$

$$\sigma(b) = 1,$$

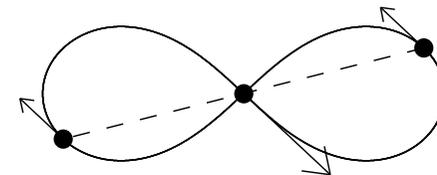
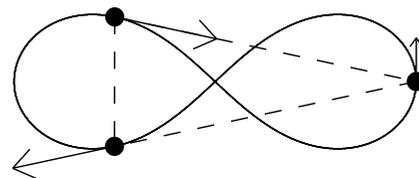
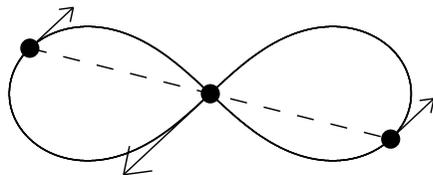
$$\sigma(c) = (2, 3)$$

時間の変換

$$\tau(a)t = t + \frac{T}{3},$$

$$\tau(b)t = t + \frac{T}{2},$$

$$\tau(c)t = -t + \frac{T}{6}.$$



## 8 対称性の例 2(柴山 [20])

---

平面上の等質量  $2n$  体問題を考え, 各  $p = 1, 2, \dots, [n/2]$  に対して 2 つの元から生成される群  $G_{n,p} = \langle g_n, h_{n,p} \rangle$  を考える.

$G_{n,p}$  の表現を次のようにとる:

$$\rho(g_n) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(g_n) = (1, 2, \dots, 2n)$$

$$\tau(g_n)t = -t$$

$$\rho(h_{n,p}) = 1$$

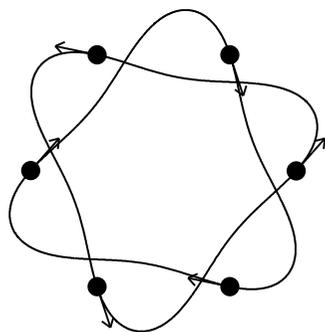
$$\sigma(h_{n,p}) = (1, 3, \dots, 2n-1)^{-p} (2, 4, \dots, 2n)^p$$

$$\tau(h_{n,p})t = t + \frac{d}{n}T.$$

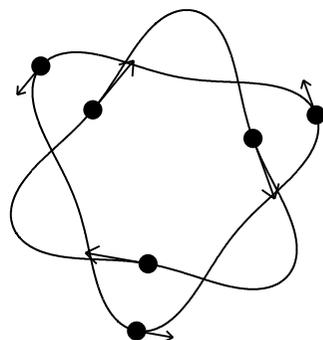
ここで,  $d$  は  $n$  と  $p$  の最大公約数である.

# 6 体の例 ( $n = 3, p = 1$ )

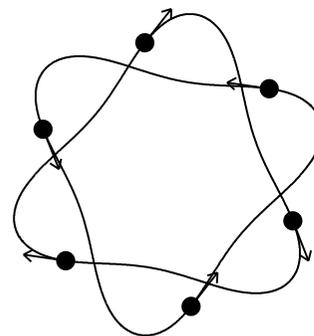
$$t = 0$$



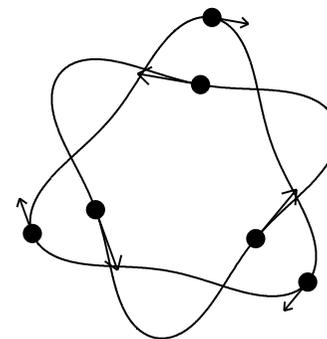
$$t = \frac{T}{12}$$



$$t = \frac{T}{6}$$

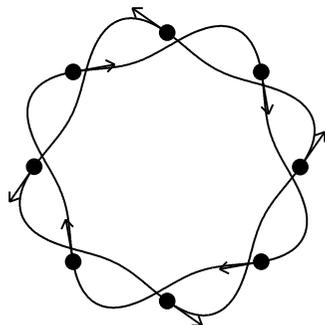


$$t = \frac{T}{4}$$

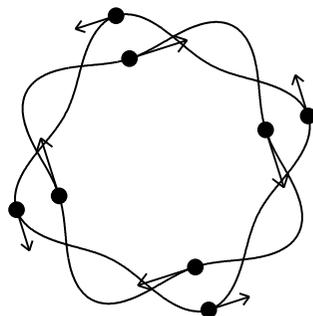


# 8 体の例 1 ( $n = 4, p = 1$ )

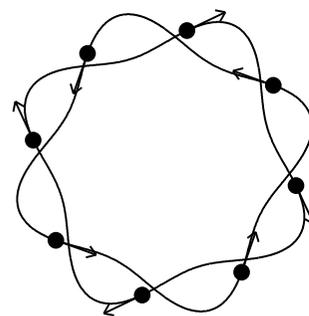
$$t = 0$$



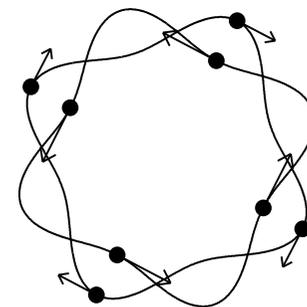
$$t = \frac{T}{16}$$



$$t = \frac{T}{8}$$

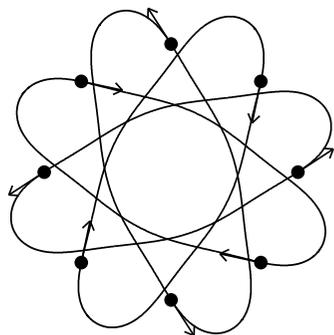


$$t = \frac{3T}{16}$$

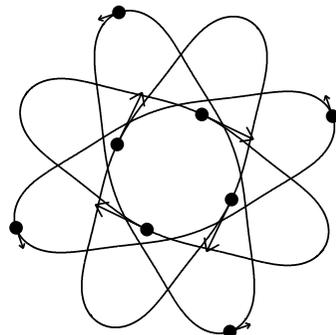


# 8 体の例 2 ( $n = 4, p = 2$ )

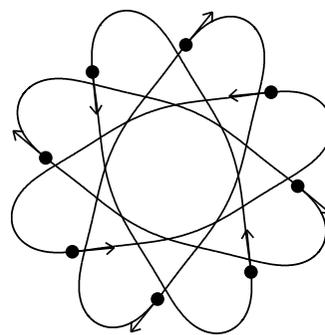
$$t = 0$$



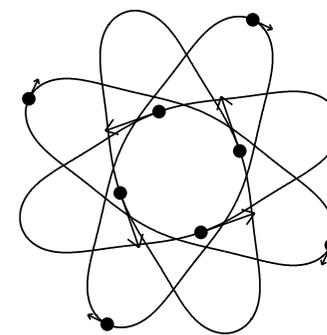
$$t = \frac{T}{8}$$



$$t = \frac{T}{4}$$

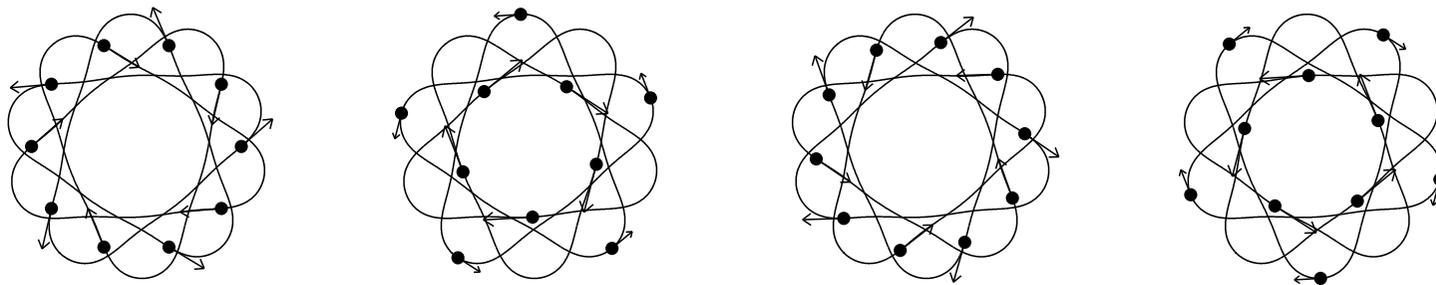


$$t = \frac{3T}{8}$$



$G_{n,p}$ -不変な曲線というのは, 次のような対称性を持っている:

- $2n$  個の質点は常に 2 つの正  $n$  角形を成している.
- 最初 ( $t = 0$ ), 質点全体は正  $2n$  角形を成す.
- ある時間 ( $t = \bar{T}$ ) が経つと (最初と質点は入れ替わっているが) 再び正  $2n$  角形を成す.
- 最初 ( $t = 0$ ) とその時 ( $t = 2\bar{T}$ ) の 2 つの正  $n$  角形の変化を見ると, 一方は  $\frac{2\pi p}{n}$  回転し, もう一方は  $-\frac{2\pi p}{n}$  回転している.



$$n = 5, p = 2$$

## 9 Palais principle

---

### 第一の問題

$\mathcal{A}|_{\Gamma}$  の critical point は  $\mathcal{A}$  の critical point だろうか?

この問題は対称性による制限の場合だけを考えればよい。これは次の Palais principle によって簡単に判定できる。

Palais principle ([19])

$\mathcal{A}$  が  $G$ -不変 (すなわち  $x \in \Lambda$  に対して  $\mathcal{A}(g \cdot x) = \mathcal{A}(x)$ ) ならば  $\mathcal{A}|_{\Lambda}$  の critical point は  $\mathcal{A}$  の critical point である。

先ほどの 3 体 8 の字解や  $2n$  体問題の例では、等質量であり、群の作用では質点が入れ替わったり、全体を回転させたり反射させたり、時間をずらしたりするだけだから、 $\mathcal{A}$  は不変である。

等質量の仮定が必要なのははこの Palais principle のためである。

## 10 minimizer の存在

---

$\Gamma$  を  $\Lambda$  の閉部分集合とする.

### coercive の定義

$\mathcal{A}|_{\Gamma}$  が coercive とは  $\|x_k\|_{H^1} \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$  なる点列  $x_k \in \Gamma$  に対して  $\mathcal{A}(x_k) \rightarrow \infty$  となることである ( $\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T \|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 dt$ ).

### minimizer の存在定理

$\mathcal{A}|_{\Gamma}$  が coercive ならば,  $\mathcal{A}|_{\Gamma}$  の minimizer が存在する.

しかも, minimizer は ( $\Gamma$  としてすごく特殊なものをとらない限り) 滑らかである.

# 11 minimizer の存在定理の証明

---

minimizer の存在定理の証明のすごくおおざっぱな流れ:

1.  $\mathcal{A}|_{\Gamma} > 0$  だから下限  $a = \inf_{x \in \Gamma} \mathcal{A}(x)$  が存在する.
2.  $\mathcal{A}(x_k) \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$  となる列  $x_k \in \Gamma$  がとれる.
3.  $\mathcal{A}|_{\Gamma}$  は coercive だから  $x_k$  は無限に逃げていくことはない. したがって,  $H^1$  は Hilbert 空間だから弱収束する部分列  $x_{k_l} \rightarrow x_*$  ( $k \rightarrow \infty$ ) がとれる.
4.  $\mathcal{A}$  は弱下半連続だから,  $\mathcal{A}(x_*) = a$  となり  $x_*$  は minimizer になっている.
5. Sobolev の埋め込み定理を使ったりすると, 実は  $x_*$  は滑らかな曲線である.

存在証明に関するコメント (変分法のつらいところ): この存在証明からは, minimizer  $x_*$  は  $\Gamma$  に属するという以外は存在しか分からない.

## 12 対称性によって制限されている場合の minimizer の存在

対称性によって制限されている場合 ( $\Gamma = \Lambda^G$ ), coercive という性質は  $\mathcal{X}^G = \{0\}$  と同値である ([12, Proposition 4.1]).

すなわち,

$G$  は  $\rho$  と  $\sigma$  によって配位空間  $\mathcal{X}$  に作用するが, その作用で不変な元は  $0$  だけであるという性質である.

従って, minimizer が存在するためには, 対称性が弱すぎてはいけない.

(対称性による制限に加えて, braid による制限などがある場合には対称性が弱くても minimizer は存在することはある. )

## 13 例

---

この性質を確かめるには、時間に関する表現  $\tau$  を忘れて、 $\rho$  と  $\sigma$  だけを考えればよい。

先ほどの 3 体 8 の字解や  $2n$  体問題の例では全ての質点を動かす循環置換  $(1, 2, 3)$  や  $(1, 2, \dots, 2n)$  が含まれていたため、群の作用で 1 つの質点は他の全ての質点と入れ替わる。

従って、 $\mathcal{X}^G$  では全ての質点が同じ位置にある。しかも、重心は 0 だから結局、 $\mathcal{X}^G = \{0\}$  である。

故に、 $\mathcal{A}|_{\Lambda^G}$  は coercive であり minimizer が存在する。

## 14 衝突について

---

minimizer が衝突した場合, 衝突していない間は  $N$  体問題の解となっているが衝突の前と後が適切に接続されているとは限らない. (2 体衝突においては弾性衝突のように衝突してきた方向にはね返るのが自然であるが, minimizer では別の方向にはね返ったりすることがある. まして 3 体以上の衝突でうまく接続されていることは, ほとんど期待できない. 衝突前後のエネルギーが変化しないことは示されている ([12])).

従って, 周期軌道を求めるには minimizer が衝突しないことを示さなければならない. そして, これが変分法を用いた周期軌道の存在証明で一番困難な部分である.

## 15 minimizer は衝突し得るか

minimizer において, たとえば  $m_1$  と  $m_2$  が  $t = a$  で衝突したとすると, その作用積分の値は

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} L(x, \dot{x}) dt \sim 4m_1m_2 \left( \frac{6}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

となり有限値である.

この値は微妙な大きさである.

minimizer が衝突を必ず含むと言えるほど小さいわけでもなく, minimizer は必ず衝突しないと言えるほど大きいわけでもない.

$\Gamma$  の取り方によって, minimizer が衝突することもあるし, しないこともある.

## 16 衝突しないことを証明する方法 1(Global estimate)

---

$\Gamma$  を  $\Lambda$  の閉部分集合とする.

$$\Gamma_{\text{col}} := \{x \in \Gamma \mid x \text{ は衝突をもつ}\}$$

とし,

$\mathcal{A}|_{\Gamma_{\text{col}}}$  の最小値を (1) を用いたりして下から評価する:

$$\mathcal{A}(x) > b \quad (x \in \Gamma_{\text{col}})$$

一方で, 作用積分の値が計算可能で  $\mathcal{A}(x_{\text{test}}) < b$  となる  $x_{\text{test}} \in \Gamma \setminus \Gamma_{\text{col}}$  を見つける.

minimizer の作用積分の値は  $\mathcal{A}(x_{\text{test}})$  以下のはずだから, minimizer は  $\Gamma_{\text{col}}$  上にはない, つまり minimizer は衝突しないことがわかる.

とくに、対称性が課されていると複数回衝突するので、より大きな値によって下から評価できる。

近年、変分法を用いて得られている多数の周期軌道はどれも何らかの対称性をもっているのは、このためである。

(Simo は対称性をもたない周期軌道の数値解も多数得ているが、それらに対する数学的な存在証明はまだない。)

しかし、対称性が強すぎると  $x_{\text{test}}$  が見つけにくいので、対称性は強すぎても弱すぎてもいけない。

この手法は 3 体 8 の字解 ([8]) や 4 体の Chen 解 ([3]) の証明に用いられた。

## 17 衝突しないことを証明する方法 2(Local estimate)

---

$x \in \Gamma$  を任意にとり,  $x$  が  $t = a$  において衝突すると仮定する.

$x$  の  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  の部分を  $\Gamma$  の中で摂動した曲線  $x_\varepsilon$  をうまく構成し,

$$\mathcal{A}(x) > \mathcal{A}(x_\varepsilon)$$

となることを証明する.

すると,  $x$  は minimizer になり得ないことが分かる.

この方法でも対称性が強すぎると摂動する方向が限られてしまい, 証明が困難になる.

この方法の方が一般性があり多く適用されている.

## 18 Marchal の定理

---

Marchal はこの証明法 (Local estimate) によって次の結果を得た.

Marchal の定理 ([17])

$a, b \in V^N$  を任意の配置とし,  $T > 0$  を任意にとる.

$$\Omega := \{x : [0, T] \rightarrow \mathcal{X} \mid x(0) = a, x(T) = b\}$$

とすると,  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  の minimizer は  $(0, T)$  において衝突しない.

(この場合, coercive は言えるので minimizer は存在している.)

(この証明の本質的な部分は [17] でなされたが少し間違いがあるし, 読みづらい. 完璧で簡潔な証明が [7] にある.)

## 19 Ferrario-Terracini の定理

---

Marchal の定理を一般化し, Ferrario と Terracini は対称性によって制限されている場合に, 衝突しないための十分条件を与えた.

### Ferrario-Terracini の定理 ([12])

群  $G$  の  $\Lambda$  への作用が rotating circle property を満たすならば,  $\mathcal{A}|_{\Lambda^G}$  の minimizer は衝突しない.

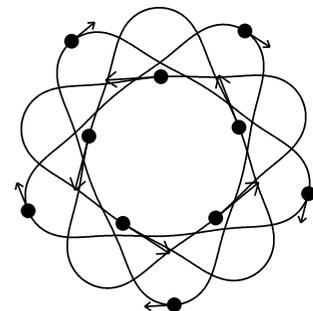
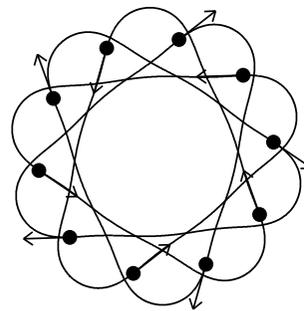
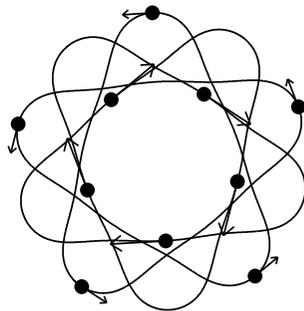
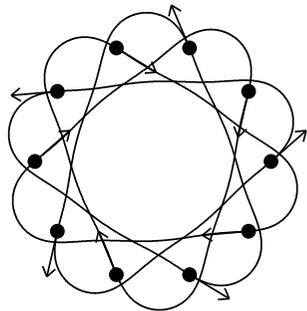
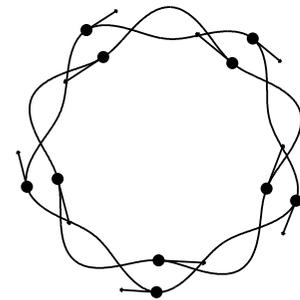
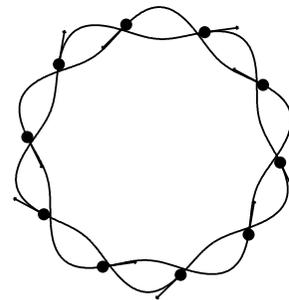
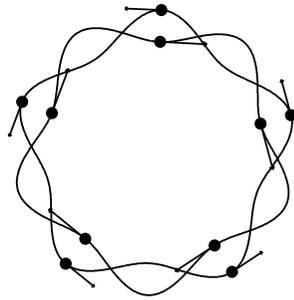
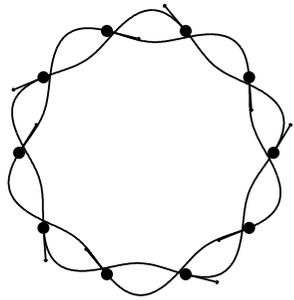
rotating circle property とは群の作用 (対称性) が強すぎないことを表している:

時間  $t$  毎に質点に課される対称性は変化するが, 時間  $t$  を任意に固定する毎に, その対称性を保ったまま  $N - 1$  個の質点が原点の周りを同じ向きに回ることができるとき, rotating circle property を満たすという.

## 20 例 1( $2n$ 体問題)

---

質点が正  $2n$  角形を成す  $t$  のとき (例えば  $t = 0$ ), 正  $2n$  角形を成したまま全体をまわすことができる. それ以外の  $t$  では, 2 つの正  $n$  角形を成していればよいので, それぞれまわすことができる. 従って, Ferrario-Terracini の定理が適用できて, 衝突しないことが言える.



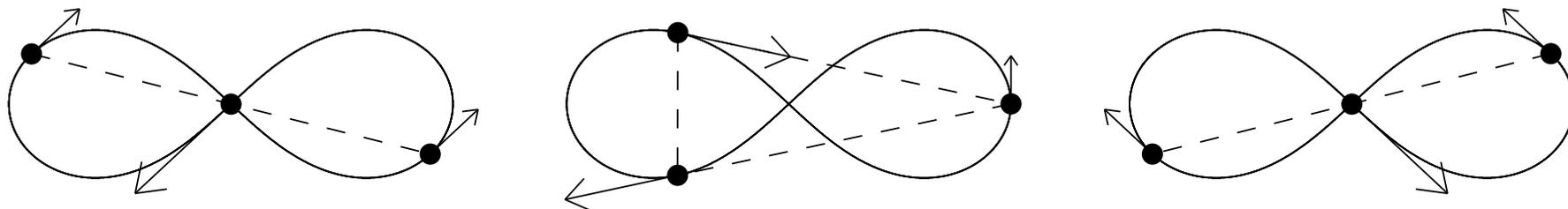
## 21 例 2(3 体 8 の字解)

---

3 体 8 の字解は  $t = T/12$  の時  $x$  軸について対称的な二等辺三角形になることが課される. このとき,  $m_1$  は  $x$  軸上に,  $m_2$  と  $m_3$  は  $x$  軸に関して対称的な位置にある.  $m_1$  は原点の周りを回れないし,  $m_2$  と  $m_3$  は原点の周りを回るとき互いに逆回りにしか回れない.

従って, Ferrario-Terracini の定理から衝突しないことを証明することはできない.

Chenciner と Montgomery は Global estimate によって衝突しないことを示した.



## 22 例 3(対称性を弱めた 3 体 8 の字解 1)

---

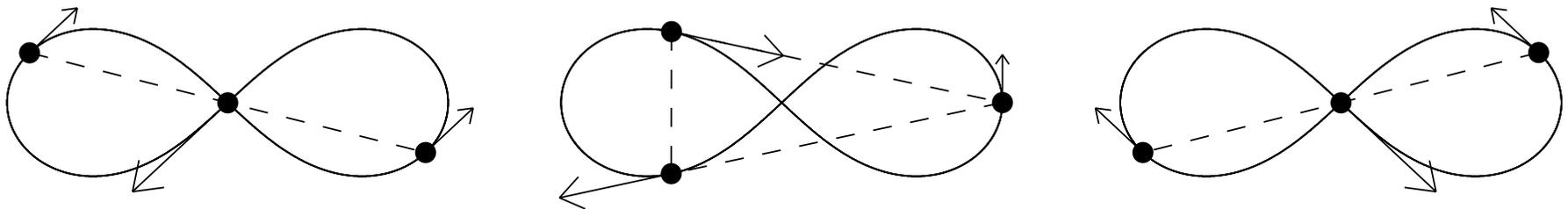
3 種類の collinear central configuration を  $C_k$  ( $m_k$  が他の 2 質点の midpoint にくる) とおく.

3 体問題において  $T/3$  毎に質点は循環的に入れ替わり,  $m_1$  は  $t = 0$  のとき  $C_1$ ,  $t = T/6$  のとき  $C_2$ ,  $t = T/3$  のとき  $C_3$  を通るという対称性を考える. ( $x$  軸対称性,  $y$  軸対称性はいれない)

$C_k$  にある時は中心にある  $m_k$  以外の 2 質点をまわすことができる.

それ以外の時は対称性は課されていないので回れる.

従って, Ferrario-Terracini の定理より衝突しない周期軌道が得られる.

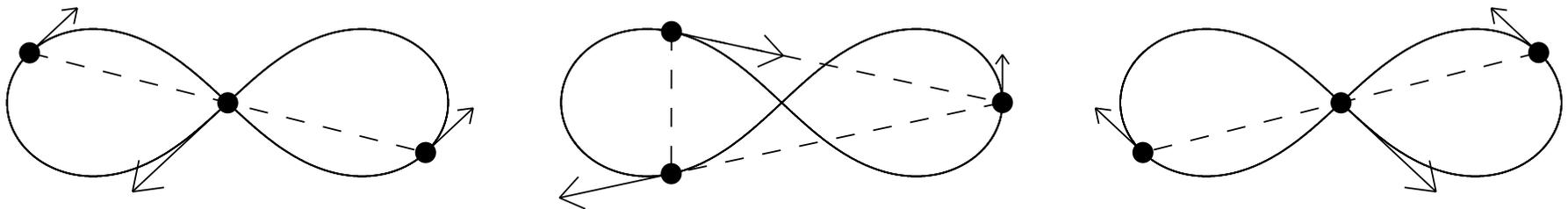


## 23 例 4(対称性を弱めた 3 体 8 の字解 2)

---

1/3 周期で質点は互いに入れ替わり,  $t$  の時と  $t+T/2$  の時は互いに  $y$  軸に関して対称的な位置にあるという設定である. この場合も同様に rotating circle property を満たす.

例 2,3,4 の 3 つの 8 の字解が同じものなのかどうかは分からない. (Barutello, Ferrario and Terracini が同じ解であることを主張した論本を書いているが, 決定的な間違いがある.)



## 24 変分法における衝突問題の今後

---

この例からも分かる通り rotating circle property は衝突しないための必要十分条件ではない。

従って, Ferrario-Terracini の定理は改良の余地がある。

### 未解決問題

1. minimizer が衝突しないための必要条件は何か?
2. 対称性に加えて他の制限 (braid など) を加えた場合に対する, minimizer が衝突しないための一般的な条件は?

## 25 得られた軌道は新しい軌道か

---

### 例 1(2n 体問題)

2n 体問題の例では, 最初正 2n 角形を成しており, その後質点を入れ替えた正 2n 角形となる.

従って, これは central configuration ではない.

また,  $p = 1, \dots, [n/2]$  毎に異なる解になっていることは, 課されている対称性を考慮すると自由度は 3 まで下げれる.

そこで見てみると,  $p$  に対して異なる直線  $B_{2p-1}$  を境界条件として minimizer をとっていることが分かる.

そのことから, すべて異なる軌道であることが分かるので,

2n 体問題の周期解が  $[n/2]$  個得られる (詳細については [20] 参照).

### 例 2(3 体 8 の字解)

3 種類のどの 3 体 8 の字解でも対称性の仮定から配置が変化していることが分かるので, central configuration ではない.

## 25 得られた軌道は新しい軌道か

---

Gerver 軌道 (super-eight, [9])

Gerver 軌道のもつ対称性:

- 常に平行四辺形を成す
- $T/4$  毎に質点が入れ替わる
- $x$  軸,  $y$  軸対称性

この対称性を持つ曲線全体  $\Lambda^G$  の中には relative equilibrium(正方形を成したまま円運動をする)が含まれており, それが minimizer となってしまう。(つまり, 対称性がちょっと弱い.)

Gerver 軌道は  $\mathcal{A}|_{\Lambda^G}$  の (global) minimizer ではなく, local minimizer となっていると考えられる.

Gerver 軌道の存在は Kapela and Zgliczyński ([15]) が精度保証付き数値計算を用いて証明したが, 変分法による数学的な証明はまだない.

## 26 おおざっぱなまとめ

A... minimizer の存在

B... 制限を外したところでも critical point

C... 衝突しない

D... 新しい解である (central configuration でない)

対称性	位相的制限	A	B	C	D
なし, かなり弱い	なし	×	○	-	-
なし, かなり弱い	あり	○	○	×	-
弱い	なし	○	○	○	×
弱い	弱い	○	○	○	○
弱い	強い	○	○	×	-
ほどほど	-(できない)	○	等質量なら ○	○	○
強い	-(できない)	○	等質量なら ○	?	(○)
かなり強い	-(できない)	○	等質量なら ○	×	-

## 27 もう一つ新しい軌道

---

等質量空間 8 体問題を考える.

立方体から立方体へ変化し質点が入れ替わる軌道:

位置の変換

$$\rho(a) = 1,$$

$$\rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

質点の置換

$$\sigma(a) = (1, 6, 3, 8)(5, 4, 7, 2),$$

$$\sigma(b) = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8),$$

時間の変換

$$\tau(a)t = t + \frac{T}{4},$$

$$\tau(b)t = -t.$$

## 28 課題と最近の進展

---

### 軌道のさらなる探求

1. minimizer 以外の critical point を求める方法はないか?  
Simó の数値解のほとんどは (本当に存在するとすれば) そういうもののはずである.
2. 制限 3 体問題への応用  
(昨年の研究会で, 質量 0 では変分法は使えないと口走りしましたが, 定式化を変えれば変分法は使えて, いろんな定理もだいたいそのまま適用できるそうです.)
3. 衝突しても適切に接続するような解を得られないか?

## 28 課題と最近の進展

---

以上の変分法を用いて得られた解は存在だけがようやく分かるという状況であるから、その解の性質はその指定した関数空間に入っている（指定した対称性をもっている）ということ以上のことはなかなか分からない。

### 性質が数学的に証明された例

1. 3 体 8 の字解の質点の角運動量の正負の変化 (Chenciner-Montgomery [8]) (これから左右の葉が Star-shaped であることが分かる)
2. 3 体 8 の字解の左右の葉の凸性 (藤原-Montgomery [13])
3.  $2n$  体周期軌道の角運動量の正負の決定 (柴山 [20])

## 28 課題と最近の進展

---

### 解の特徴付け

1. 軌道は代数曲線ではないのか?

(8 の字解が 4, 6, 8 次の代数曲線ではなさそうなことは数値的に確かめられた)

2. 解析的か?

3. 解は楕円関数とかで表現できないか?

(楕円関数による近似 (?) はできる ([11]))

### 変分法を使わない証明

変分法を使ってえた軌道の性質はなかなか分からないので, 変分法を用いずに存在が証明できないか?

Moeckel が 3 体 8 の字解の別証明を試みているところ.

## 28 課題と最近の進展

---

### 安定性

Chenciner 曰く、「 $N$  体問題の変分問題においても、たぶん 負曲率多様体上の測地流のような構造があって、minimizer は安定にはなりにくいのではないか?」

Simo の数値実験では、8 の字解を囲む KAM トーラスがあるように見えるらしい ([22]).

8 の字解以外の解は不安定なようである.

数学的な証明は何一つない.

分岐 Marchal  $P_{12}$ (数値結果 [16])

3 体 8 の字解を周期軌道のまま変化させて円軌道までつなげていくことができる.

Chenciner が最近証明を試みている.

## 28 課題と最近の進展

---

### その他

1. Morse 理論みたいなことはできないか？
2. Weinstein 予想 ([23] 参照) との関連？

## 参考文献

---

- [1] V. I. アーノルド, 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.
- [2] H. ブレジス, 関数解析, 産業図書, 1988.
- [3] K. C. Chen, Action-minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses. *Arch. Rational Mech. Anal.* **158**, 293-318 (2001).
- [4] K. C. Chen, Binary decompositions for planar N-body problems and symmetric periodic solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.* *170*, 247-276 (2003).
- [5] K. C. Chen, Removing collision singularities from action minimizers for the N-body problem with free boundaries. *Arch. Rational Mech. Anal.* , **181**, 311-331 (2006).
- [6] K. C. Chen, Existence and minimizing properties of retrograde orbits to the three-body problem with various choices of masses. *Annals of*

*Math.*, to appear.

- [7] A. Chenciner, Action minimizing solutions of the Newtonian n-body problem: from homology to symmetry, ICM, Pekin (2002)
- [8] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.* **152**(2000), 881-901.
- [9] Alain Chenciner, Joseph Gerver, Richard Montgomery et Carlès Simò, Simple choreographies of N bodies: a preliminary study, à paraître dans *Geometry, Mechanics and Dynamics*, Springer
- [10] A. Chenciner and A. Venturelli, Minima de l'intgrale d'action du Probleme newtonien de 4 corps de masses gales dans  $R^3$  : orbites "hip-hop", *Celestial Mechanics*, **77**, pp.139-152 (2000)
- [11] T. Fujiwara, H. Fukuda and H. Ozaki, Choreographic Three Bodies on the Lemniscate, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (21 March 2003)

2791-2800

- [12] D. L. Ferrario and S. Terracini, On the Existence of Collisionless Equivariant Minimizers for the Classical  $n$ -body Problem, *Invent. Math.* **155** (2004), no. 2, 305–362
- [13] T. Fujiwara and R. Montgomery, Convexity in the Figure Eight Solution to the Three-Body Problem, *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 219, No.2 (April 2005) 271–283.
- [14] 伊藤秀一, 常微分方程式と解析力学, 共立講座 21 世紀の数学, 第 11 卷, 共立出版, 1998.
- [15] T. Kapela and P. Zgliczyński, The existence of simple choreographies for the  $N$ -body problem—a computer-assisted proof. *Nonlinearity* **16** (2003), no. 6, 1899–1918.
- [16] C. Marchal, The family  $P_{12}$  of the three-body problem—the simplest family of periodic orbits, with twelve symmetries per period. New

developments in the dynamics of planetary systems (Badhofgastein, 2000). *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **78** (2000), no. 1-4, 279–298 (2001).

- [17] C. Marchal, How the method of minimization of action avoids singularities. Modern celestial mechanics: from theory to applications (Rome, 2001). *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **83** (2002), no. 1-4, 325–353.
- [18] R. Montgomery, A new solution to the three-body problem, *Notices of the American Mathematical Society*, 471-481, May, 2001.
- [19] Palais, R.S, The principle of symmetric criticality. *Commun. Math. Phys.* **69**, 19?30 (1979)
- [20] M. Shibayama, Multiple symmetric periodic solutions to the  $2n$ -body problem with equal masses, *Nonlinearity* **19**(2006) 2441-2453.
- [21] Simò の数值解: <http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>

- [22] C. Simó, Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem. *Celestial mechanics* (Evanston, IL, 1999), 209–228, Contemp. Math., 292, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [23] 田中和永, 非線形問題 2—変分問題入門—, 岩波 現代数学の展開, 2000.