

3 体問題の 3 体近衝突現象

柴山允瑠 (京大・理)

sibayama@math.kyoto-u.ac.jp

要旨

3 体問題の 3 体衝突特異点は McGehee 座標を用いると衝突多様体になるが, そこに新しいヘテロクリニック軌道が存在することを証明する. その応用として近 3 体衝突を無限に繰り返す軌道, 特に振動解の存在を証明する.

1 はじめに

3 体問題を考える:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

ここで, $m_i > 0$ は質点の質量, $x_i \in \mathbb{R}^3$ を位置とし,

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

とする.

2 体衝突... 正則化可能

3 体衝突... 正則化不可能

⇒ 3 体衝突が 3 体問題の複雑さの一因となっていると思われる.

2 結果と応用

衝突多様体 ... 3 体衝突特異点を Blow up して現れる不変多様体

主結果

衝突多様体上の平衡点間の可算個の新しいヘテロクリニック軌道が存在する.

応用

ヘテロクリニック軌道たちからなる path を追跡する軌道の存在が言える.
このことから, 3 体近衝突を繰り返す多様な軌道の存在が示される.

3 自由落下軌道

$m_1 = m_2$ とし,

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{x}_i|^2 - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} = -1$$

とする.

$a > 0$ に対し, 3 質点の配置 $\Delta(a)$ を

$$\Delta(a) : \begin{cases} x_1 = (b, -\frac{1}{2}m_3a) \\ x_2 = (-b, -\frac{1}{2}m_3a) \\ x_3 = (0, m_1a) \\ U(x_1, x_2, x_3) = 1 \end{cases}$$

で定める (各 $a > 0$ に対して, ただ一つ $b > 0$ が存在する).

$\Delta(a)$ を初期位置とする自由落下軌道 x^a を考える:

$$x^a(0) = \Delta(a), \quad \dot{x}^a(0) = 0$$

この軌道は常に二等辺三角形であり, m_1 と m_2 の 2 体衝突が自然と起こる. 2 体衝突は正則化されたものとみなす.

$N(a) :=$ 「 m_3 が原点に達するまでに m_1 と m_2 が衝突する回数」
と定義する.

命題 1

- (i) $N(a)$ は非減少関数で, $a \rightarrow \infty$ のとき $N(a) \rightarrow \infty$ である.
- (ii) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $N(a_k) = k$ となる N の不連続点が存在する.
- (iii) 不連続点 a_k に対応する軌道 x^{a_k} は k 回の m_1 と m_2 の 2 体衝突をした後, 3 体衝突する.

これから各 $k \in \mathbb{N}$ に対して m_1 と m_2 が k 回衝突した後, 3 体衝突する自由落下軌道 γ_k が存在する.

Time reversibility ($x(t)$ が解ならば $x(-t)$ も解) により, 過去においても同様の振る舞いをする. 従って, 3 体衝突の間に $2k$ 回の 2 体衝突を起こす.

また, m_1 と m_2 が衝突し, m_3 が自由落下する軌道を考えると, 同様な考察で 3 体衝突間に $2k + 1$ 回の 2 体衝突を起こす軌道が得られる.

4 衝突多様体

3 体問題

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{1}{m_i} p_i \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} \end{cases}$$

の 3 体衝突特異点 ($|q| \rightarrow 0$) を Blow-up する.

McGehee 座標 ($[2, 3]$):

$$\begin{cases} r &= |q| \\ s &= r^{-1} q \\ z &= r^{1/2} p \\ d\tau &= r^{-3/2} dt \end{cases}$$

を用いると, 3 体問題の方程式は

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} &= rv \\ \frac{ds}{d\tau} &= A^{-1}z - vs \\ \frac{dz}{d\tau} &= \nabla U(s) + \frac{1}{2}vz \end{cases}$$

となる. ここで,

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, v = (s \cdot z)$$

である.

エネルギー:

$$h = r^{-1} \left(\frac{1}{2} z^T A^{-1} z - U(s) \right) = -1$$

角運動量:

$$\omega = r^{1/2} \sum_k s_k \times z_k$$

Sundman 不等式:

$$\frac{dv}{d\tau} \geq rh + \frac{1}{2} r^{-1} |\omega|^2$$

特に, $r = 0$ ($\omega = 0$ の時しかかなり得ない) の時は

$$\frac{dv}{d\tau} \geq 0$$

不変集合

$$M(\omega) = \left\{ (r, s, z) \mid r^{-1} \left(\frac{1}{2} z^T A^{-1} z - U(s) \right) = -1, r^{1/2} \sum_k s_k \times z_k = \omega \right\}$$

$$M_+ = \left\{ (r, s, z) \mid r^{-1} \left(\frac{1}{2} z^T A^{-1} z - U(s) \right) = -1, r^{1/2} \sum_k s_k \times z_k = 0 \right\}$$

$$M_0 = \left\{ (r, s, z) \mid r = 0, \frac{1}{2} z^T A^{-1} z - U = 0 \right\}$$

$$M = M_+ \cup M_0$$

$$C = M_+ \cap M_0$$

$\omega \rightarrow 0$ の時, $M(\omega) \rightarrow M$ である.

平衡点は 10 個あり, 全て C 上にある.

$$E_{\pm}, E_{\pm}^*, C_k, C_k^* (k = 1, 2, 3)$$

命題 1. γ_k は E_+ から E_+^* への M_+ 上の横断的ヘテロクリニック軌道である.

証明.

極限が $E_+^{(*)}$ であること

平衡点の $*$ 付きは 3 体衝突で終わる極限に対応し, $*$ なしは衝突から始まる軌道に対応する. その極限の配置は $E_{\pm}^{(*)}$ が正三角形, $C_k^{(*)}$ が直線の central configuration (m_k が中心) である. 従って, $\gamma_k(\tau)$ の $\tau \rightarrow +\infty$ の極限として可能性があるのは E_+^* または C_3^* である. ところが, C_3^* の安定多様体は collinear な配置と運動量のなす不変空間に完全に含まれているので, 極限は E_+^* しかあり得ない.

同様に, $\tau \rightarrow -\infty$ のとき $\gamma_k(\tau) \rightarrow E_+$ である.

二等辺三体における横断性

m_3 の位置を上にはずらすと, 3 体衝突しなくなる.

そこで, m_3 に速度をもたせると, また 2 体衝突の回数を考察することで 3 体衝突するような速度が存在する.

また, m_3 の位置を下にはずらすと, 3 体衝突するためには上向きに速度を持たなくてはならない.

Time reversibility より速度の向きを逆にすると過去においても同様の振る舞いをする.

この状況を $\text{section}(m_1, m_2 \text{ の水平方向の速度が } 0)$ でみると, 安定多様体と不安定多様体が横断的になっていることが分かる.

平面 3 体における横断性

全体の相空間の中で二等辺 3 体の相空間は余次元 2 をもつ. それは, 位置と運動量が 1 次元ずつである. 二等辺 3 体の相空間に対して normal な座標 $(\tilde{s}, \tilde{z})$ をとる.

対称性より,

$$(\tilde{s}, \tilde{z}) \in \text{St}(E_+^*) \implies (-\tilde{s}, -\tilde{z}) \in \text{St}(E_+^*)$$

また, Time reversibility より

$$(\tilde{s}, \tilde{z}) \in \text{St}(E_+^*) \implies (\tilde{s}, -\tilde{z}) \in \text{Un}(E_+^*)$$

この状況から横断性がわかる.



5 二等辺 3 体の heteroclinic orbits

B_3 を $x_3 \rightarrow \infty$ に対応する仮想的な周期軌道とする.

Moeckel によって B_3 から E_+^* へ, E_+ から B_3 へ, また E_+^* から E_+ へのヘテロクリニック軌道の存在が示されている [4, 5]).

今回はこれに加えて新たな可算個のヘテロクリニック軌道を見つけたことになる.

6 等質量平面 3 体の heteroclinic orbits

平面 3 体においても E_+ から B_k へ, また E_+^* から E_+ へのヘテロクリニック軌道の存在が示されている [6, 7]).

等質量平面 3 体問題においては 3 種類の二等辺 3 体を含むので, 各 $l = 1, 2, 3$ に対し m_l が excursion するヘテロクリニック軌道 γ_k^l ($k \in \mathbb{N}, l = 1, 2, 3$) が今回得られた.

7 window theory

window: flow に横断的な $I^2 = [0, 1]^2$ (平面 3 体の時は I^4) の埋め込み

$$w : I^2(I^4) \rightarrow M$$

window w_1 と w_2 が correctly aligned とは Poincaré 写像によって境界が写されたときに window からはみ出していることである (詳しくは [1, 5, 6] 参照).

命題 2 (Moeckel). 端点を共有するヘテロクリニック軌道の *window* w_1, w_2 に対し, 十分角運動量を小さくすれば摂動された *window* は *correctly aligned* になる.

correctly aligned な *window* の列を通る軌道が存在する.

$\mathcal{A}$ をグラフ $\mathcal{H}$ の有限個の edge からなる部分グラフとする.

定理 1. $\mathcal{A}$ の任意の *path* をとったとき, それを追跡する軌道が存在する.

3 体問題の解 x は

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} \|x_i - x_j\| = \infty$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} \|x_i - x_j\| < \infty$$

を満たすとき振動解という.

系 1. 定理 1 において, $\{\eta_{\pm}^{\ell_i}, \underbrace{\beta^{\ell_i}, \dots, \beta^{\ell_i}}_{j_i}, \theta_{\pm}^{\ell_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($k_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$)

なる部分列を含めば得られる軌道は振動解である.

参考文献

- [1] R. W. Easton, Isolating blocks and symbolic dynamics, *J. Diff. Eq.*, **17** (1975), 96–118.
- [2] R. McGehee, Singularities in classical celestial mechanics, *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki, 1978, pp. 827–834.
- [3] R. McGehee, A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Diff. Eq.*, **14** (1973), 70–88.
- [4] R. Moeckel, Orbits near triple collision in the three-body problem, *Indiana Univ. Math. J.*, **32** (1983), 221–240.
- [5] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 857–876.
- [6] R. Moeckel, Chaotic dynamics near triple collision , *Arch. Rat. Mech.*

Anal. **107** (1989), 37–69.

- [7] R. Moeckel, Symbolic dynamics in the planar three-body problem, Preprint.