共鳴平衡点におけるバーコフ標準化と超可積分性

伊藤 秀一（金沢大学・大学院自然科学研究科）

hideito@kenroku.kanazawa-u.ac.jp

アブストラクト．ハミルトン系の可積分性と平衡点のまわりでのバーコフ標準化について考える．とくに，収束バーコフ標準化変換の存在について，平衡点の共鳴度と第一積分の個数の関係の観点から議論し，超可積分系（非可換可積分系）の共鳴平衡点での収束バーコフ変換の存在とバーコフ標準形の一意性に関する結果について報告する．

- 1．可積分系とその摂動
- 2．バーコフ標準化とは？
- 3．収束バーコフ変換の存在と可積分性
- 4．主結果
- 5．主結果の証明のアイデア
- 6．参考文献

2007年3月8日 天体力学 N 天体力学研究会 於 木更津高専

1 . 可積分系とその摂動

ハミルトン系の重要な問題： **近可積分系** (nearly integrable systems)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}, & \dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} & (k = 1, \dots, n), \\ H = H(\theta, I, \epsilon) = H_0(I) + \epsilon H_1(\theta, I, \epsilon) \end{cases}$$

ここで $\epsilon > 0$ は微小パラメータ, $(\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ であり, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $I = (I_1, \dots, I_n)$ はそれぞれ角変数, 作用変数と呼ばれる. θ が n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ の元であるとは, H が $\theta_1, \dots, \theta_n$ について周期 2π をもつことを意味する.

↓

$\epsilon = 0$ のときは “解ける” :

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega t, \quad I(t) = I(0) \quad (\omega \in \mathbb{R}^n)$$

解 $(\theta(t), I(t))$ は n 次元トーラス $I = I(0)$ (= 定数) 上の準周期的または周期的な運動.

近可積分系 $\Leftarrow$ **KAM 理論**, Nekhoroshev 評価, etc. ([1,2,6,9] 参照)

可積分系： “解ける座標” の存在 $\Leftarrow$ 十分な個数の第一積分の存在

関数 $F(z)$ が m 次元の微分方程式系 $\dot{z}_k = f_k(z)$ ($k = 1, \dots, m$) の第一積分であるとは, $F(z)$ の値が任意の解 $z(t)$ に沿って一定, すなわち

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial z_k} f_k(z) = 0$$

ということ. $H = H(q, p)$ をハミルトニアンとするハミルトン系

X_H : $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$

ならば, 上式は次と同値:

$$\frac{d}{dt}F(q(t), p(t)) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0.$$

ここで, 解 $(q(t), p(t))$ の選び方は任意なので, これは恒等式

$$\{F, H\} := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

が成り立つことを意味する. ハミルトニアン H は X_H の第一積分である.

定理 (Liouville-Arnold-Jost)

$\mathbb{R}^{2n}$ の領域 D で定義された自由度 n のハミルトン系 X_H が互いにポアソン可換な n 個の第一積分 $F_1(q, p)(= H), \dots, F_n(q, p)$ をもち, 連結なレベル集合

$$F^{-1}(c) = \{(q, p) \in D \mid F_k(q, p) = c_k (= \text{定数}) \quad k = 1, \dots, n\}$$

上で勾配ベクトル $\text{grad } F_1, \dots, \text{grad } F_n$ が 1 次独立とする. このとき, もし集合 $F^{-1}(c)$ が有界ならば, $F^{-1}(c)$ は n 次元トーラスであり, その近傍で正準変換によって作用 - 角変数 (θ, I) が導入できて, 関数 $F_1, \dots, F_n$ は $I = (I_1, \dots, I_n)$ だけの関数になる.

注意: 1 . 関数 $F_1, \dots, F_n$ が互いにポアソン可換 (包合的) であるとは, 恒等式

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

が成り立つことである. このときベクトル場 X_{F_i} と X_{F_j} の流れは可換であり, 多様体 $F^{-1}(c)$ 上には n 個の可換な流れが定義される (これが証明の鍵. [1,6,8] 参照). 勾配ベクトル $\text{grad } F_1, \dots, \text{grad } F_n$ は D のすべての点で 1 次独立になるとは限らないが, D の稠密な開部分集合上で 1 次独立になるとき, $F_1, \dots, F_n$ は関数的に独立であるという. このような n 個のポアソン可換な第一積分が存在するとき, X_H は D で Liouville の意味で可積分であるという.

2 . 作用 - 角変数は D 全体で大域的に定義されるとは限らない.

2. バーコフ標準化（標準形）とは

近可積分系は特殊な系であるが，平衡解や周期解の近傍では類似の状況が現れることが**バーコフ標準化 (Birkhoff normalization)**を通じてわかる ([1, 2, 6, 9]) .

$\mathbb{R}^{2n}$ の原点の近傍でハミルトン系 X_H を考え，ハミルトニアンがテーラー展開

$$H(q, p) = H_2 + H_3 + \cdots; \quad H_2 = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j^2 + p_j^2)$$

をもつとする．ここで， H_j は j 次の同次多項式である．原点 $(q, p) = (0, 0)$ は X_H の楕円型平衡点である（原点での線形化系の固有値は $\pm i\omega_j$ である）．

目的 : 適当な正準変換 $(q, p) = \varphi(\xi, \eta)$ を行って（標準化），ハミルトニアン $H \circ \varphi(\xi, \eta)$ ができるだけ簡単な形（標準形）にする．

最も簡単な標準化は線形化であり， $H \circ \varphi = H_2$ とすることにほかならないが，ハミルトン系の場合には一般に線形化は不可能．以下のように標準形を定義する：

定義

$$H \circ \varphi \text{ がバーコフ標準形} \stackrel{\text{def}}{\iff} \{H \circ \varphi(\xi, \eta), H_2(\xi, \eta)\} = 0$$

関係式 $\{H, H_2\} = 0$ の意味 ($H \circ \varphi$ を改めて H とする)

• $\{H, H_2\} = 0 \Leftrightarrow H$ が X_{H_2} の流れで不変 (X_{H_2} の流れに沿って平均化)

$\Leftrightarrow H_2$ が X_H の流れで不変 (H_2 を第一積分にもつ)

($\{H, H_2\} = -\{H_2, H\}$ に注意)

バーコフ標準形の形: 関数 $H(\xi, \eta)$ をベキ級数で書いて, バーコフ標準形の各項の形を調べる. そのためには, 複素変数を用いて書き下すほうが便利. そこで, 複素線形正準変換を行い,

$$H_2(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j \eta_j \quad (\lambda_j = \sqrt{-1} \omega_j)$$

と仮定する (線形ベクトル場 X_{H_2} は対角化される). あらためてハミルトニアンを

$$H = \sum_{|\alpha|+|\beta| \geq 2} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta$$

と書く. ただし, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \dots$

こうすると,

$$\begin{aligned}\{H, H_2\} &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\geq 2} c_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^n \{\xi^\alpha \eta^\beta, \lambda_j \xi_j \eta_j\} \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\geq 2} c_{\alpha\beta} \langle \alpha - \beta, \lambda \rangle \xi^\alpha \eta^\beta\end{aligned}$$

ここで, 整数ベクトル $k \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\langle k, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j$$

である. よって,

補題

$H = \sum c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta$ がバーコフ標準形 $\iff c_{\alpha\beta} = 0$ if $\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle \neq 0$

とくに $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が有理的に独立ならば, バーコフ標準形は n 変数 $\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n$ だけの関数になる.

定理

解析的ハミルトニアン $H(x, y) = H_2 + H_3 + \cdots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$ が与えられたとき, 任意の自然数 N に対して, 適当な解析的な正準変換 $(x, y) = \varphi(\xi, \eta)$ で, $H \circ \varphi(\xi, \eta)$ が N 次までバーコフ標準形となるものが存在する.

証明: 以下 $z = {}^t(x, y)$, $\zeta = {}^t(\xi, \eta)$ と書く. $H(z)$ が d 次までバーコフ標準形になっているとして, 適当な正準変換 φ によって $H \circ \varphi$ が $d + 1$ 次までバーコフ標準形にできることを示せばよい. そこで, $h = H_2 + \cdots + H_d$ とおき,

$$H(z) = h(z) + \widehat{H}(z); \quad \{h, H_2\} = 0, \quad \widehat{H}(z) = O(|z|^{d+1})$$

とする. この $\widehat{H}$ の $d + 1$ 次の項を標準化するために, $d + 1$ 次同次多項式 W をハミルトニアンとするハミルトン系 X_W の流れ (時間 1 写像) によって座標変換 $z = \varphi(\zeta)$ を定義する. このとき,

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + J \nabla W(\zeta) + O(|\zeta|^{2d-2}), \quad J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

なので (∇W は W の勾配ベクトル場),

$$H(\varphi(\zeta)) = h(\zeta) + \{h(\zeta), W(\zeta)\} + H_{d+1} + \cdots$$

となる．したがって，

$$W(\zeta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=d+1} d_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta, \quad H_{d+1}(\zeta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=d+1} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta$$

とおくと，

$$\begin{aligned} H \circ \varphi(\zeta) \text{ の } d+1 \text{ 次部分} &= \{H_2(\zeta), W(\zeta)\} + H_{d+1}(\zeta) \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=d+1} (d_{\alpha\beta} \langle \alpha - \beta, \lambda \rangle + c_{\alpha\beta}) \xi^\alpha \eta^\beta \end{aligned}$$

なので，前述の補題より，この部分がバーコフ標準形になるように， $\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle \neq 0$ のときの係数 $d_{\alpha\beta}$ を定めることができる（ $\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle$ が小分母になる）（証明おわり）．

注意： 1 . $\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle = 0$ に対する係数 $d_{\alpha\beta}$ は決まらない．その意味でバーコフ標準化のための変換（**バーコフ変換**と呼ぶ）は一意的には決まらない．

2 . 上の係数 $d_{\alpha\beta}$ の取り方によって， $H \circ \varphi$ の $d+1$ 次部分は影響されないが， $d+2$ 次以上の部分は一般に影響を受ける．この意味でバーコフ標準形も一意的でないが，条件「 $\langle k, \lambda \rangle \neq 0 \quad (|k| \leq N) \Rightarrow k = 0$ 」が成り立つならば，バーコフ標準形の N 次以下の部分はバーコフ変換の取り方によらず一意的に定まる（[5] 参照）．

定理

解析的ハミルトニアン $H(z) = H_2 + H_3 + \cdots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$ が与えられたとし, 4以上の自然数 N に対して, 条件 (**N 次の非共鳴条件**)

$$\langle k, \lambda \rangle = 0 \quad (|k| \leq N) \Rightarrow k = 0$$

が成り立つとする. このとき, 適当な解析的な正準変換 $z = \varphi(\zeta)$ が存在して

$$(*) \quad H \circ \varphi(\zeta) = h(\tau) + O(|\zeta|^{N+1}); \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \tau_j = \xi_j \eta_j$$

となる (これを **N 次のバーコフ標準形**と呼ぶ). ここで, $h(\tau)$ は $\tau_1, \dots, \tau_n$ についての $[N/2]$ 次以下の多項式で, 変換 φ の取り方によらずに一意的に定まる.

注意: もし $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が有理的に独立 ($N = \infty$ と取れる) ならば, バーコフ変換 φ によって

$$H \circ \varphi(\zeta) = h(\tau)$$

となる. もし収束するバーコフ変換が存在するならば, 系は可積分である (以下で示す) が, 一般に収束するバーコフ変換は存在しない (C.L. Siegel [2, 9]).

(有限次) 非共鳴条件下で, バーコフ標準形は近可積分系である

$h(\tau)$ をハミルトニアンとする系 X_h では, 微分方程式は

$$\dot{\xi}_k = \frac{\partial h}{\partial \tau_k} \xi_k, \quad \dot{\eta}_k = -\frac{\partial h}{\partial \tau_k} \eta_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

となるので,

$$\frac{d}{dt} \tau_k(t) = \dot{\xi}_k \eta_k + \xi_k \dot{\eta}_k = 0$$

であり, τ_k は X_h の第一積分になる. よって $h(\tau)$ も第一積分であり, 解は次のように求まる:

$$\xi_k(t) = e^{t\omega_k} \xi_k(0), \quad \eta_k(t) = e^{-t\omega_k} \eta_k(0) \quad \left(\omega_k = \frac{\partial h}{\partial \tau_k}(\tau(0)) \right).$$

この意味で, N 次のバーコフ標準形は近可積分系といえる. とくに, $N = \infty$ の場合で収束するバーコフ変換が存在するならば, X_H は可積分になる.

3 . 収束バーコフ変換の存在と可積分性

今示したように，非共鳴平衡点の近傍で収束バーコフ変換が存在するならば，系 X_H は可積分である．とくに，*Louville* の意味で可積分である．実際， $\{\tau_i, \tau_j\} = 0$ が成り立つ．それでは，

Q 収束（つまり解析的な）バーコフ変換が存在するのはどのようなときか？

これについて次が成り立つ：

定理 1 ([5])

解析的ハミルトニアン $H(z) = H_2 + H_3 + \dots$ ， $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$ が与えられたとし，非共鳴条件「 $\langle k, \lambda \rangle = 0 \Rightarrow k = 0$ 」が成り立つとする．このとき，もし X_H が n 個の関数的に独立な解析的第一積分 $G_1 (= H), \dots, G_n$ をもつならば，解析的なバーコフ変換 $z = \varphi(\zeta)$ が存在して， $G_1 \circ \varphi, \dots, G_n \circ \varphi$ は $\tau_1, \dots, \tau_n$ ($\tau_j = \xi_j \eta_j$) だけの関数になる．

注意： 1 . 定理において， $G_1, \dots, G_n$ がポアソン可換なことは仮定されていないが， $G_k \circ \varphi$ は $\tau_1, \dots, \tau_n$ だけの関数だからポアソン可換である．これは， $G_1, \dots, G_n$ が実際にはポアソン可換なことを意味する．

2 . この結果は , 先行する Rüssmann, Vey の結果を一般化したもので , 非共鳴平衡点の近傍では , 収束バーコフ変換の存在と Liouville 可積分性が同値なことを示している . Rüssmann, Vey の結果は , $G_2, \dots, G_n$ のテーラー展開が 2 次の項から始まり , ある種 of 非退化条件を満たすことを仮定するものである . この条件下で Eliasson ([3]) は , 滑らかな関数の範疇での可積分性のもとでの (滑らかな) バーコフ変換の存在を示している .

Q 共鳴平衡点の場合に同様の結果は成り立つか ?

共鳴平衡点の場合は , H がバーコフ標準形であることは必ずしも X_H が可積分なことを意味しない (自由度 2 の場合は可積分になる) . しかし , 最近次が示された :

定理 2 (Zung, 2005 [10])

解析的ハミルトニアン $H(z) = H_2 + H_3 + \dots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$ に対して , ハミルトン系 X_H が n 個の関数的に独立かつ互いにポアソン可換な解析的な第一積分をもつならば , 解析的なバーコフ変換が存在する .

4 . 主結果

Zung の定理は定理 1 を含むものであるが，すでに見たように，共鳴平衡点の場合のバーコフ標準形は一意的に決まらない．一般に共鳴の場合のバーコフ標準形はそれだけでは可積分性を意味しない．したがって，

Q 定理 2 のバーコフ標準形は何らかの形で可積分性を反映したものであるが，そのくわしい形は？

この問に対して，ここでは超可積分性 (**super-integrability**) の観点からアプローチする (超可積分系の一般論については [4] 参照) ．

● **準備** まず，平衡点の共鳴度を定義するために，整数ベクトルの全体 $\mathbf{Z}^n$ の部分群として $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R} := \{k \in \mathbf{Z}^n \mid \langle k, \lambda \rangle = 0\} \quad (\langle k, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j)$$

と定義する．これを**共鳴格子 (resonant lattice)** と呼ぶ．

定義

原点が共鳴度 q の平衡点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \dim \mathcal{R} = q$

$0 \leq q \leq n - 1$ であり, $q = 0$ は非共鳴平衡点に対応する.

$\mathcal{R}$ は $\mathbb{Z}^n$ の離散部分群であり, その生成元を $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(q)} \in \mathbb{Z}^n$ とすると, 1 次独立な整数ベクトル $\rho^{(q+1)}, \dots, \rho^{(n)} \in \mathbb{Z}^n$ で, 条件

$$\langle \rho^{(i)}, \rho^{(j)} \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, q; \quad j = q + 1, \dots, n)$$

を満たすものが存在する. このとき, 変数 $v_1, \dots, v_n$ を以下のように定義する:

変数 v_k の定義

$v_k := \sum_{j=1}^n \rho_j^{(k)} \xi_j \eta_j \quad (k = 1, \dots, n)$ ただし $\rho_1^{(k)}, \dots, \rho_n^{(k)}$ はベクトル $\rho^{(k)}$ の成分.

例: $q = n - 1$ ならば, $\rho^{(n)}$ は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に平行なベクトルであり, v_n は H_2 の定数倍である.

以上の準備のもとで, 次が成り立つ:

定理 3 (主定理 [7])

解析的ハミルトニアン $H(z) = H_2 + H_3 + \dots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$ が与えられたとし, X_H は原点を共鳴度 q の平衡点にもつとする. このとき, もし X_H が $n + q$ 個の関数的に独立で解析的な第一積分をもつならば, 次が成り立つ:

- (i) 解析的なバーコフ変換 φ が存在する.
- (ii) X_H の任意の第一積分 G に対して, $\{G \circ \varphi, H_2\} = 0$ が成り立つ. とくに, $H \circ \varphi$ は変換 φ の取り方によらずに一意的に定まり, $n - q$ 個の変数 $v_{q+1}, \dots, v_n$ の関数になる.

注意: 1. 定理において, $n + q$ 個の第一積分の間のポアソン可換性は仮定しない. したがって Zung の定理は適用できない. しかし, ハミルトニアン $H \circ \varphi$ は $\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n$ の関数であるから, $\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n$ は X_H のポアソン可換な第一積分である. すなわち, 実際には X_H は原点の近傍で Liouville 可積分になる. しかし, これは仮定ではなく, 定理からの帰結である.

2. この定理は $q = 0$ の場合には定理 1 に帰着する.

共鳴度 q の平衡点の近傍でのバーコフ標準形の具体的な形について

関数 G がバーコフ標準形 (i.e., $\{G, H_2\} = 0$) $\Leftrightarrow G = \sum_{\alpha - \beta \in \mathcal{R}} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta$ であるが, これをよりくわしく考察する.

まず, 多項式 $v_1, \dots, v_n$ よりも, 単項式の方が扱いやすいので, あらためて単項式として

$$\tau_k := \xi_k \eta_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

を導入する. さらに, $\rho_+^{(k)}, \rho_-^{(k)}$ を整数ベクトル $\rho^{(k)}$ の正 (非負) の部分, 負の部分とし (つまり $\rho^{(k)} = \rho_+^{(k)} - \rho_-^{(k)}$), 次の変数 $\tau_{n+1}, \dots, \tau_{n+q}$ を導入する:

$$\tau_{n+k} := \xi^{\rho_+^{(k)}} \eta^{\rho_-^{(k)}} \quad (k = 1, \dots, q).$$

このとき次が成り立つ．

定理 4 ([7])

解析的ハミルトニアン $H(\zeta) = H_2 + H_3 + \cdots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j \eta_j$ が与えられたとし, X_H は原点を共鳴度 q の平衡点にもつとする．このとき, 次が成り立つ:

- (i) 関数 $G(\zeta)$ が恒等式 $\{G, H_2\} = 0$ を満たす $\iff G$ は $n + q$ 個の変数 $\tau_1, \dots, \tau_{n+q}$ のローラン級数で表される．
- (ii) $H(\zeta)$ が $n - q$ 個の変数 $v_{q+1}, \dots, v_n$ だけに依存する収束バーコフ標準形ならば, $\tau_1, \dots, \tau_{n+q}$ は X_H の関数的に独立な第一積分である．
- (iii) (ii) の仮定のもとで, X_H の任意の解は $n - q$ 次元以下の不変多様体上の周期解あるいは準周期解である．

定理 3 と定理 4 より, ハミルトン系 X_H が共鳴度 q の平衡点の近傍で持ち得る関数的に独立な第一積分は $n + q$ 個以下なことがわかる．

さらに次のようなこともいえる .

系

自由度 n のハミルトン系 X_H が $2n - 1$ 個の関数的に独立な第一積分をもつ .
 $\Rightarrow X_H$ の任意の平衡点は共鳴度 $n - 1$ であり , 収束バーコフ変換 φ が存在し ,
バーコフ標準形 $H \circ \varphi$ は H の 2 次部分の級数になる .

たとえば , Calogero-Moser 系

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + \omega^2 x_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{a^2}{(x_i - x_j)^2}$$

はそのようなケースになる .

5 . 定理 3 , 4 の証明のアイデア

1 . 定理 4 の主張 (i) は定理 3 の証明の準備になる .

2 . 定理 3 の収束バーコフ変換の存在 (主張 (i)) は , $n + q$ 個の関数 (X_H の第一積分) の同時標準化を通じて証明される . バーコフ変換 φ は既出のリー変換の方法で定義する (無限個の正準変換の合成となる) . その収束性を示すことが証明の主要部だが , そのためには $n + q$ 個の関数 $G_1, \dots, G_{n+q}$ のバーコフ標準形が $n + q$ 個の変数 $\tau_1, \dots, \tau_{n+q}$ の関数になることがポイント .

3 . 定理 3 の主張 (ii) の後半 , つまり , ハミルトニアン H のバーコフ標準形 $H \circ \varphi$ が $n - q$ 個の変数 $v_{q+1}, \dots, v_n$ だけの関数になることは , $n + q$ 個の恒等式

$$\{H, G_k\} = 0 \quad (k = 1, \dots, n + q)$$

から従う . また , この主張より , 定理 4 の (ii) と (iii) がいえる .

参考文献

- [1] Arnol'd, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed., Graduate Texts in Math. **60**. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
- [2] Arnol'd, V.I., Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I.: Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **3**, Springer, 2006 (3rd ed.).
- [3] Eliasson, H.: Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case, Comment. Math. Helv. **65**, 4-35 (1990).
- [4] Fassò, F.: Superintegrable Hamiltonian Systems: Geometry and Perturbations, Acta Applicandae Mathematicae **87**, 93-121 (2005).
- [5] Ito, H.: Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. Comment. Math. Helv. **64**, 412–461 (1989).
- [6] 伊藤秀一.: 常微分方程式と解析力学, 共立出版, 1998.
- [7] Ito, H.: Birkhoff normalization near a resonant equilibrium and superintegrability of Hamiltonian systems, preprint.
- [8] Moser, J., Zehnder, E.: Notes on Dynamical Systems, Courant Lectures Notes in Mathematics **12**, Amer. Math. Soc., 2005.
- [9] Siegel, C.L., Moser, J.K.: Lectures on Celestial Mechanics, Springer, 1973.
- [10] Nguyen Tien Zung, Convergence versus integrability in Birkhoff normal form, Annals of Math. **161**, 141-156 (2005).