自己重力無衝突系での局所ビリアル関係

お茶大　井口 修 osamu@phys.ocha.ac.jp

2007 **年** 3 **月** 7 **日**–9 **日 木更津N体**

共同研究者: **曽田康秀，田代徹，森川雅博**

概要

重力多体系の数値シミュレーションから、自己重力無衝突系で現れる準平衡状態を特徴づけるいくつかの性質がある。特に Cold collapse **の後に現れる準平衡状態で見られる、局所ビリアル関係を満たす解や安定性について調べた。局所ビリアル関係は、長距離相互作用で開放系の場合に、十分激しい緩和を受けた場合に現れ、安定な状態であることが分かった。**

参考文献

1. Iguchi O., Sota Y., Nakamichi A.,and Morikawa M., 2006, Phys.Rev.E73, 046112
2. Iguchi O., Sota Y.,Tatekawa T., Nakamichi A.,and Morikawa M., 2005, Phys.Rev.E71, 016102.

内容

1. ビリアル関係
2. 局所ビリアル関係
3. Vlasov 方程式の定常解
4. 安定性
5. 粒子の振るまい

初期条件 $\xrightarrow{\text{free fall time}}$ 力学平衡状態（ビリアル比 $|2K/W| = 1$） $\xrightarrow{2\text{体緩和}}$ 熱平衡状態？

Vlasov 方程式の定常解

ビリアル関係:自己重力多体系

$$\textbf{慣性モーメント}: \quad I_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha x_j^\alpha x_k^\alpha.$$

$$\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\ddot{x}_j^\alpha x_k^\alpha + 2\dot{x}_j^\alpha \dot{x}_k^\alpha + x_j^\alpha \ddot{x}_k^\alpha \right) = 2K_{jk} + W_{jk}.$$

$$K_{jk} := \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{x}_j^\alpha \dot{x}_k^\alpha, \qquad W_{jk} := G \sum_{\alpha,\beta=1(\alpha\neq\beta)}^{N} m_\alpha m_\beta \frac{x_j^\alpha (x_k^\beta - x_k^\alpha)}{|\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}^\beta|^3}.$$

$$\textbf{定常} \left(\frac{d^2 I}{dt^2} = 0 \right) \Longrightarrow 2K_{jk} + W_{jk} = 0.$$

Scalar virial theorem: $2K + W = 0 \Longrightarrow \left| \frac{2K}{W} \right| = 1.$

ビリアル関係:一粒子

$$
\begin{aligned}
\text{Hamiltonian:}\quad H &= K(\boldsymbol{p}) + U(\boldsymbol{q}). \\
G &:= \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}, \\
\dot{G} &= \sum_{i=1}^{3} \left(p_i \partial_{p_i} H - q_i \partial_{q_i} H \right) \quad = 2K - \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}U.
\end{aligned}
$$

時間平均: $\frac{2}{\tau}\int_0^\tau K dt - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}U dt = \frac{G(\tau)-G(0)}{\tau}.$

有界運動:$2 < K > = < \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}U > \longrightarrow \left| \frac{2 < K >}{< \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}U >} \right| = 1$

$$
U = G \sum_{\beta=1(\alpha\neq\beta)}^{N} \frac{m_\alpha m_\beta}{|\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}^\beta|}, \quad \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}U = G \sum_{\beta=1(\alpha\neq\beta)}^{N} m_\alpha m_\beta \frac{\boldsymbol{x}^\alpha(\boldsymbol{x}^\beta - \boldsymbol{x}^\alpha)}{|\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}^\beta|^3}
$$

LV **の定義**: $\left| \frac{2 < K >}{< U/2 >} \right| = 1 \qquad \left(\boldsymbol{q}^\alpha \boldsymbol{\nabla}U + \boldsymbol{q}^\beta \boldsymbol{\nabla}U = U(\boldsymbol{q}^\alpha, \boldsymbol{q}^\beta) \right)$

局所ビリアル関係

◯ **初期条件**

Cold collapse(spherical collapse, pair-collision)

初期ビリアル比 $\Longrightarrow$ **小さいほどよい**

初期密度分布 $\Longrightarrow$ **中心集中しすぎない**

十分に混ざる $\Longrightarrow$ LV**？**

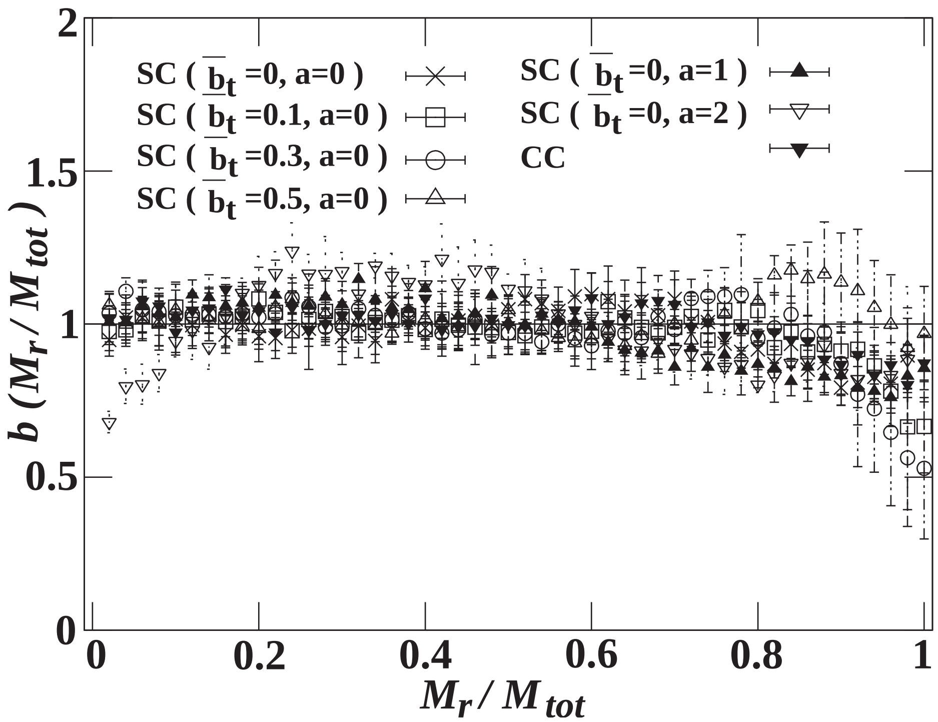
◯ **相互作用**

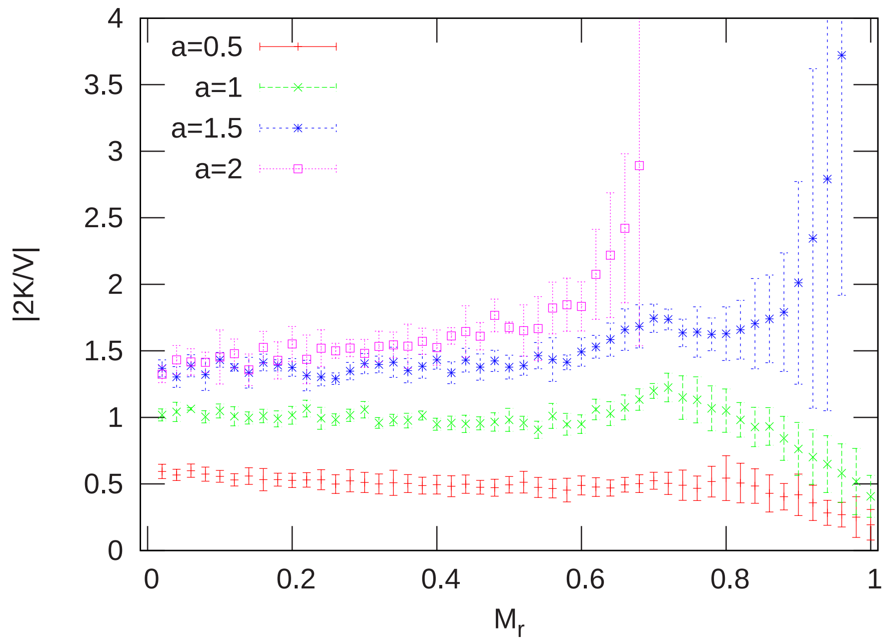
重力 $(V \propto 1/r), 1/r^{0.5}, 1/r^{1.5} \Longrightarrow$ LV

$V \propto r^{\alpha}(\alpha > 0) \Longrightarrow$ **等温**

長距離, 開放系 $\Longrightarrow$ LV**？**

局所ビリアル関係 1

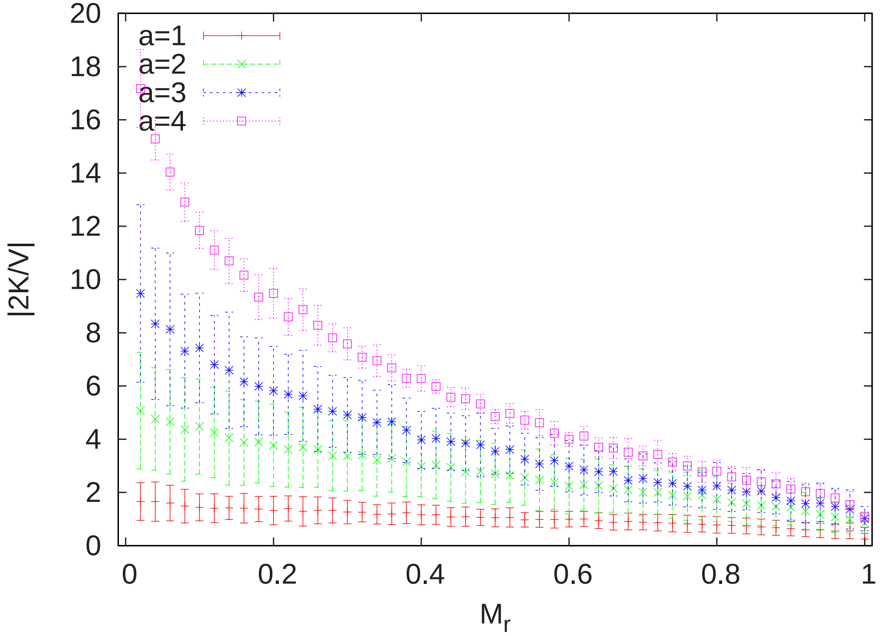




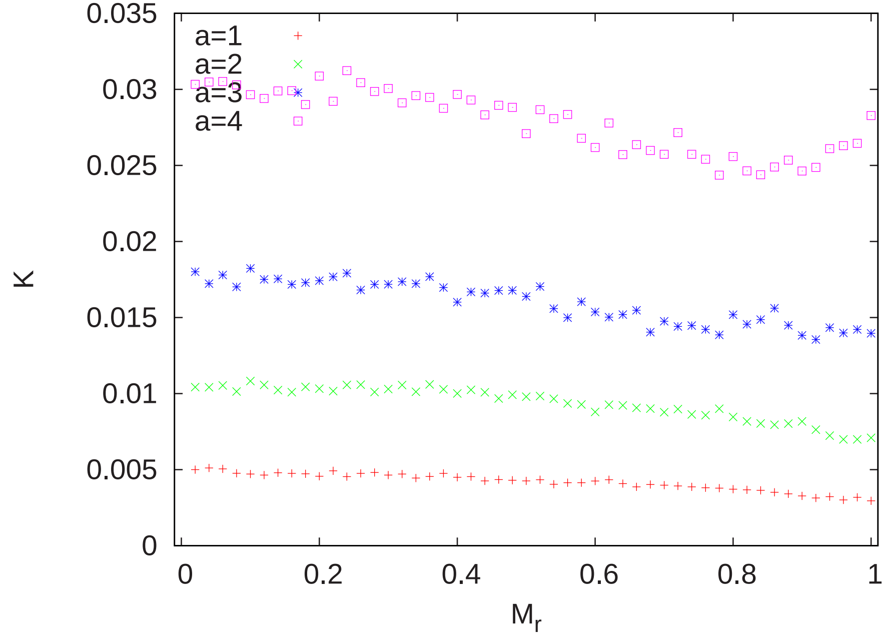
The LV relation:
$\overline{b_t} := |2K/V|_{initial}$, $\rho_{initial} \propto r^{-a}$

LV for negative powerlaw potential:$V \propto r^{-a}$

局所ビリアル関係 2



LV for positive powerlaw potential: $V \propto r^a$



Kinetic energy for positive powerlaw potential

Vlasov方程式の定常解

球対称静水圧平衡:
$$\frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta}{r}\rho\sigma_r^2 = \rho\frac{d\phi}{dr} \tag{1}$$
$$\beta(r) := 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}$$

Poisson **方程式**:
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\phi\right) = -4\pi G\rho \tag{2}$$

球対称Vlasov **方程式の定常解** $\Longrightarrow f = f(E, L)$

$$\boxed{\rho, \quad \phi, \quad \sigma_r, \quad \beta}$$

Vlasov方程式の定常解

$x := r/r_0$, $y := \rho/\rho_0$, $z := \phi/\phi_0$ として、Poisson 方程式 (2) を書き直すと、

$$\Psi' - \Psi^2 + \Psi = \kappa x^2 y/z, \tag{3}$$

prime は $\ln x$ での微分、$\kappa := 4\pi G r_0^2 \rho_0/\phi_0$、$\Psi := -d\ln z/d\ln x$。(3) 式の右辺は常に正であるので、解は

$$\Psi' - \Psi^2 + \Psi \geq 0, \tag{4}$$

の領域にある。

ここで次の general LV 関係を仮定する。

$$\frac{2\sigma^2(r)}{\phi(r)} = b(\Psi), \tag{5}$$

b は Ψ の任意関数 (LV なら $b = 1$)。

さらに、(3) 式を $\ln x$ で微分して、さらに (3) 式を使って κ を消去すると、

$$\Psi'' = (1-\gamma+3\Psi)\Psi' - (2-\gamma+\Psi)(\Psi-1)\Psi, \tag{6}$$

ここで $\gamma := -d\ln y/d\ln x$。

(1) 式と (5) 式から、σ_r を消去すると、

$$\beta' = \frac{3-2\beta}{2}\left[\gamma - \frac{\dot{b}}{b}\Psi' - 2\beta - \frac{6-b-4\beta}{b}\Psi\right], \tag{7}$$

ここで $\beta = \beta(\Psi)$ とすれば、

$$\beta' = \frac{\partial\beta}{\partial\Psi}\Psi' =: \dot{\beta}\Psi', \tag{8}$$

となり、

$$\gamma = \left(\frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta} + \frac{\dot{b}}{b}\right)\Psi' + 2\beta + \frac{6-b-4\beta}{b}\Psi, \tag{9}$$

と書ける。

(6) 式と (9) 式から γ を消去すれば、解くべき方程式は Ψ についての閉じた 2 階微分方程式になる。

$$\frac{d}{d\ln x}\begin{pmatrix}\Psi \\ P_\Psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_\Psi \\ -A(b,\beta)P_\Psi^2 + \left[1-2\beta+(3-B(b,\beta))\Psi + A(b,\beta)(\Psi-1)\Psi\right]P_\Psi \\ -\left[2(1-\beta)+(1-B(b,\beta))\Psi\right](\Psi-1)\Psi \end{pmatrix}$$

$$A(b,\beta) := \frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta} + \frac{\dot{b}}{b}, \qquad B(b,\beta) := \frac{6-b-4\beta}{b}$$

局所ビリアルを満たす解 $(b=1)$

$$\frac{d}{d\ln x}\begin{pmatrix}\Psi \\ P_\Psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_\Psi \\ -\frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta}P_\Psi^2 + \left[(1-2\beta)(1-2\Psi) + \frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta}(\Psi-1)\Psi\right]P_\Psi \\ -2(1-\beta)(1-2\Psi)(\Psi-1)\Psi \end{pmatrix}$$

固定点

$$\begin{pmatrix}\Psi \\ P_\Psi\end{pmatrix} = \underset{\text{原点}}{\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}},\ \underset{\text{無限遠}}{\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}},\ \underset{\text{スケーリング解}}{\begin{pmatrix}1/2 \\ 0\end{pmatrix}}$$

- **固定点まわりの固有値**
  - $(\Psi, P_\Psi) = (0, 0)$
    固有値 $\Longrightarrow -1, 2(1-\beta)$ (saddle point)
  - $(\Psi, P_\Psi) = (1, 0)$
    固有値 $\Longrightarrow 1, -2(1-\beta)$(saddle point)
  - $(\Psi, P_\Psi) = (1/2, 0)$
    固有値 $\Longrightarrow (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(1-\beta)})/2$ (attractor)
    $\alpha := \dot{\beta}/2(3-2\beta) \geq 0$

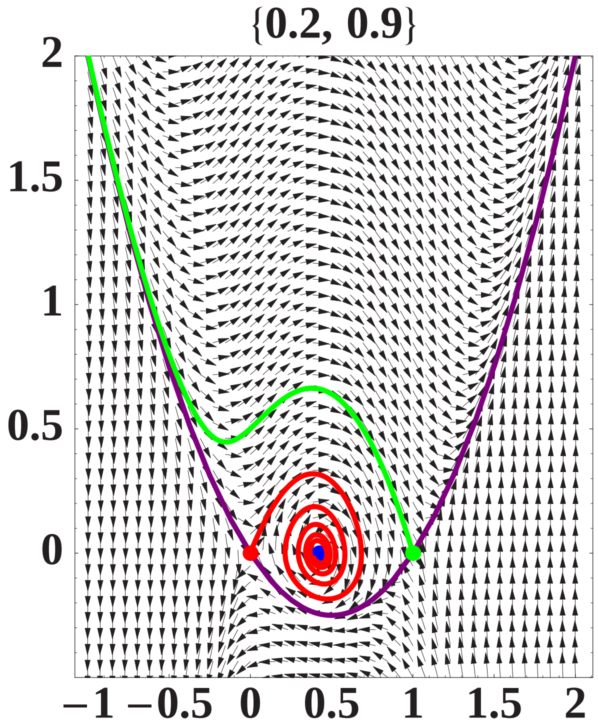
local virial relation $\Longrightarrow$ **無限遠でべき的な振舞を持つ解**

- **密度の漸近的振るまい**
  - $r \Longrightarrow 0$ $\gamma(0) = 2\beta(0)$
  - $r \Longrightarrow \infty$ $\gamma(1) = 5 - 2\beta(1)$

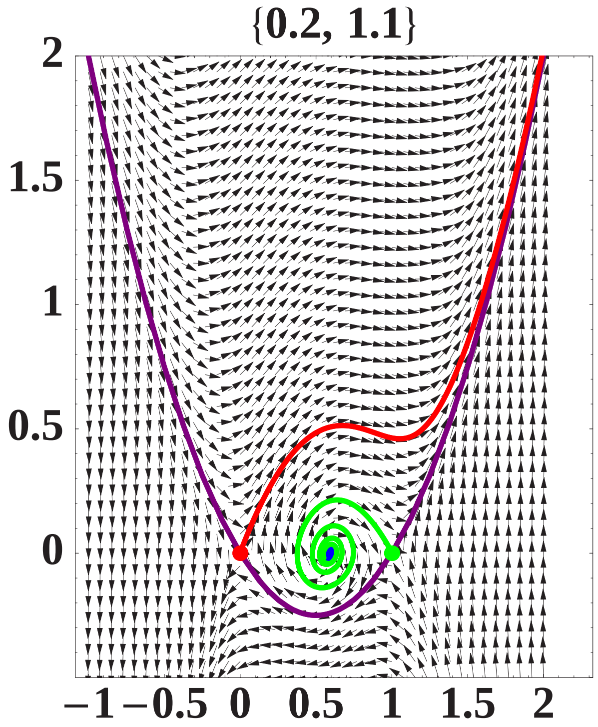
$\gamma(0)$	$\beta(0)$	$\gamma(1)$	$\beta(1)$
0	0	4	0.5
1	0.5	3.5	0.75
1.5	0.75	3	1

境界条件

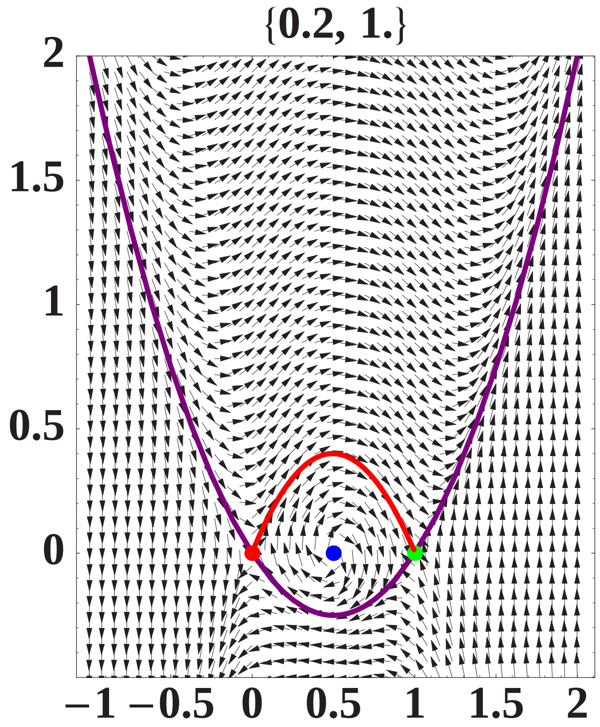
$\rho(r) \longrightarrow 0(r \longrightarrow \infty) \Longrightarrow$ LV? $\begin{cases} \text{等方}\ (\beta = 0) \Longrightarrow \text{LV (Plummer model)} \bigcirc \\ \text{非等方}\ (\beta \neq 0) \Longrightarrow \text{LV and others} \times \text{(安定性から LV?)} \end{cases}$



Flow diagram for $b < 1$.

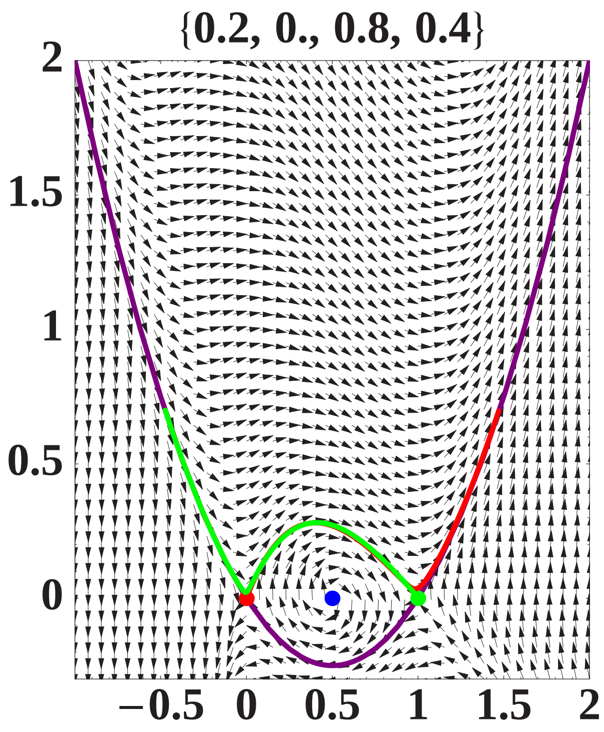


Flow diagram for $b > 1$.

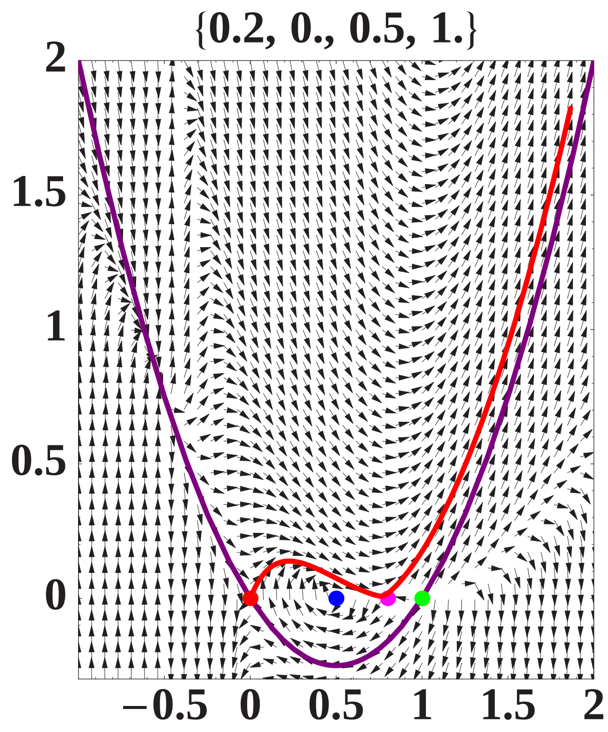


Flow diagram for $b = 1$.

Vlasovの定常解



Flow diagram for $b(\Phi_1) = 1(b(\Psi) \neq 1)$.



Flow diagram for $b(\Phi_1) = 1$.

安定性

$$\frac{\partial f}{\partial E} < 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial f}{\partial L} < 0 \Longrightarrow \textbf{安定}$$

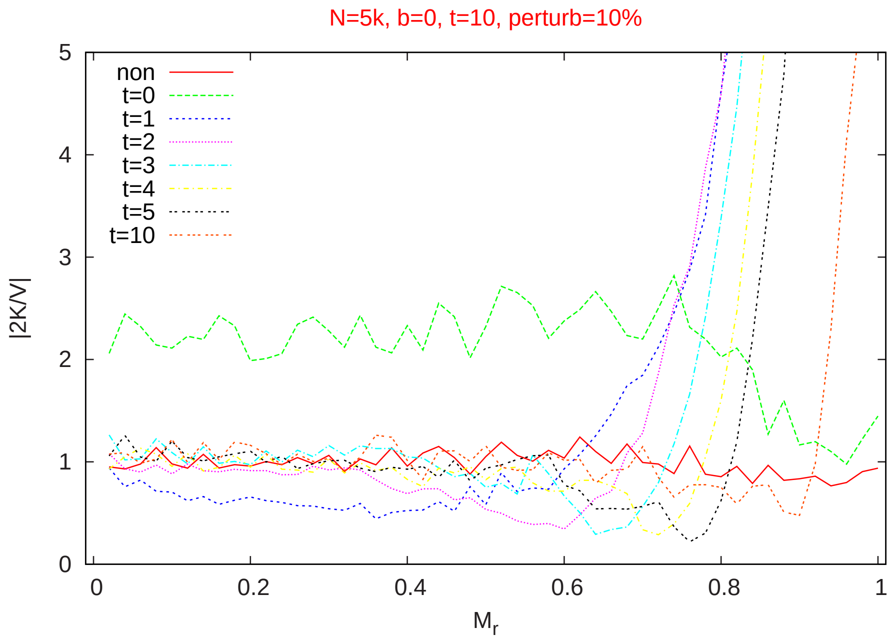
$$\boxed{\beta = \textbf{一定} \Longrightarrow f(E, L) \propto L^{-2\beta}|E|^{(7-6\beta)/2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} f_E < 0 \Longrightarrow \beta < 7/6 \\ f_L < 0 \Longrightarrow \beta > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 < \beta < 1$$

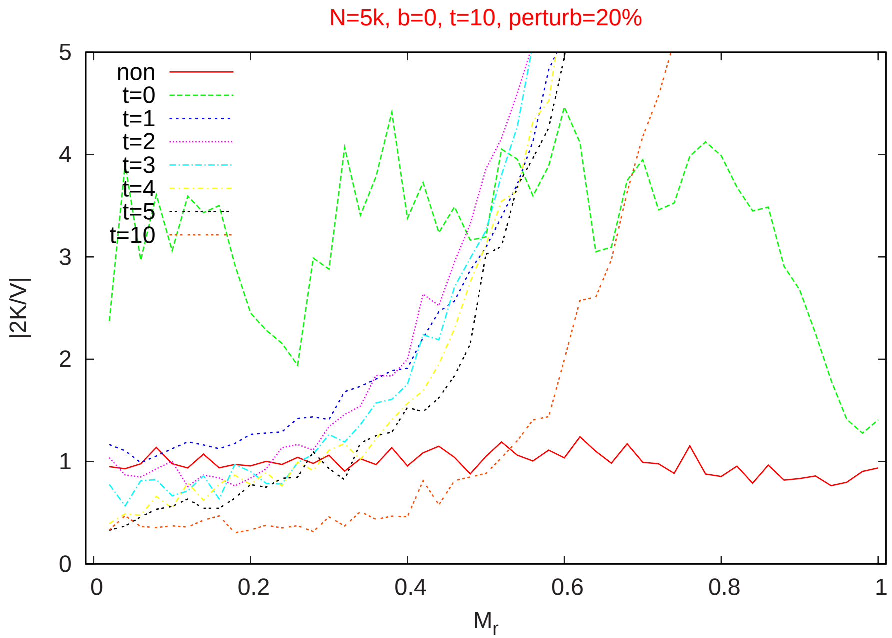
$$\boxed{\beta = \textbf{一定}\,(0 \leq \beta < 1) \Longrightarrow \textbf{安定}}$$

安定性

非等方 $(\beta = \beta(r)) \Longrightarrow$ **安定？**



LV for perturbation 10%



LV for perturbation 20%

粒子の振るまい

◯ **一粒子に対するビリアルと** LV

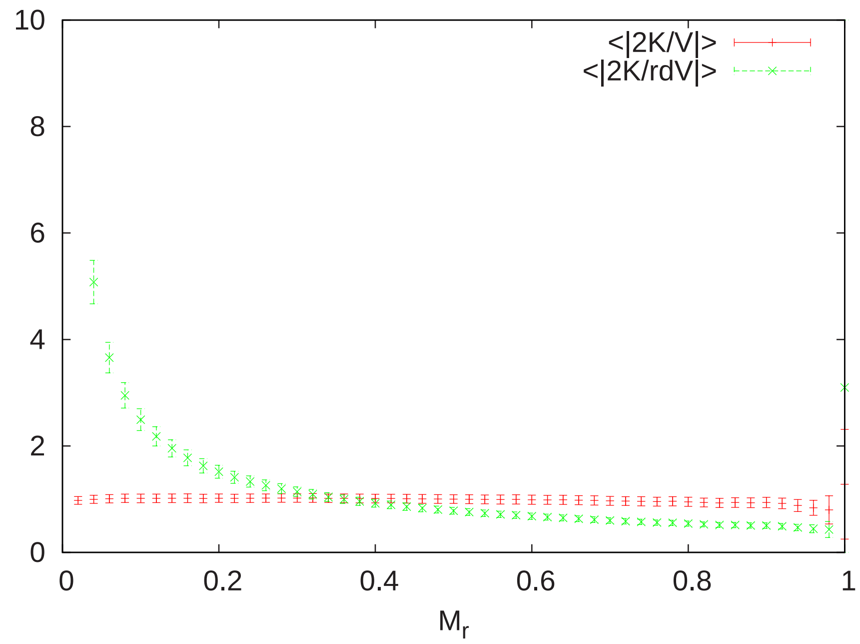
$2 < K >_t = < \boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla} U >_t$

中心ではかなり悪い。

$\Longrightarrow$ **時間平均** $\neq$ **空間平均**

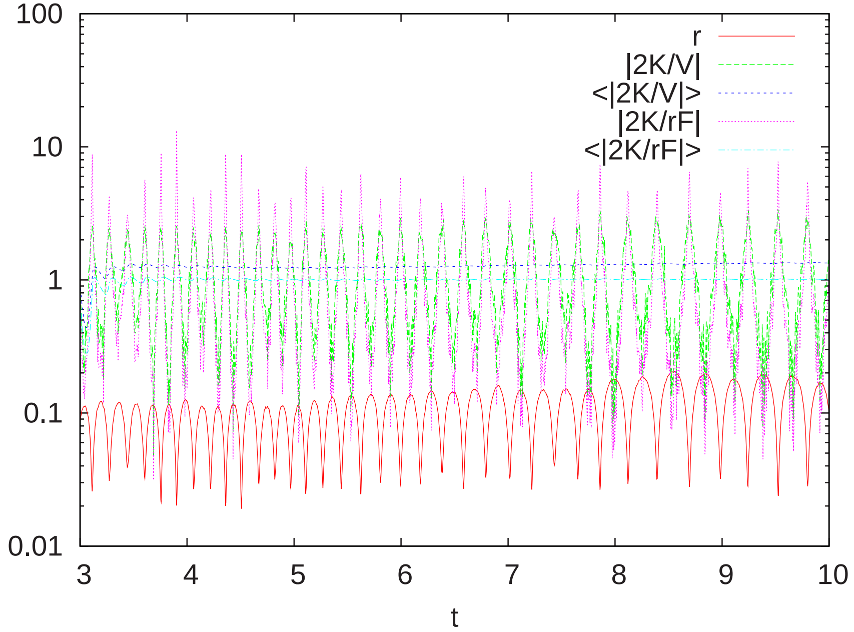
各粒子は、平均的に LV **の回りで振動？**

$\Longrightarrow$ LV? (**時間平均も空間平均も**◯)

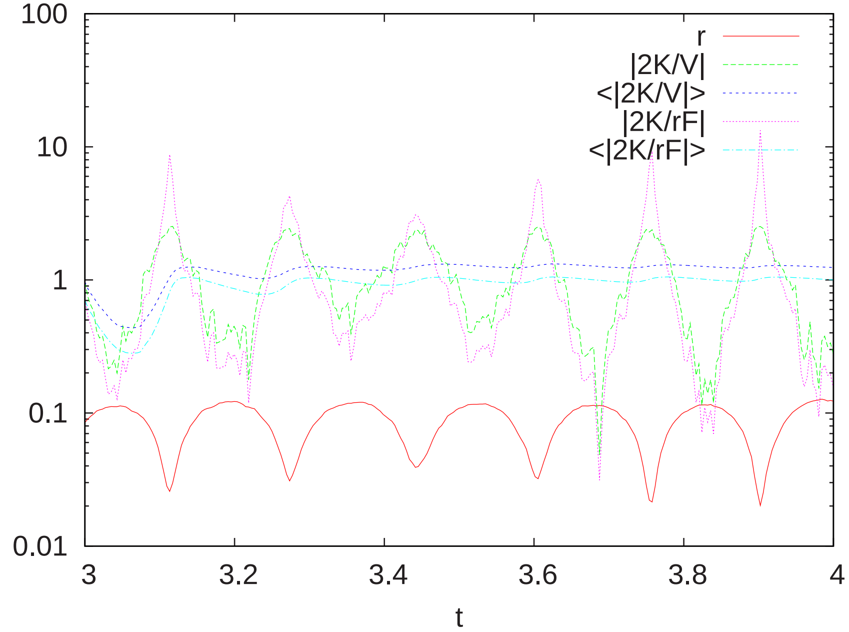


LV and virial for particles.

粒子の振るまい１

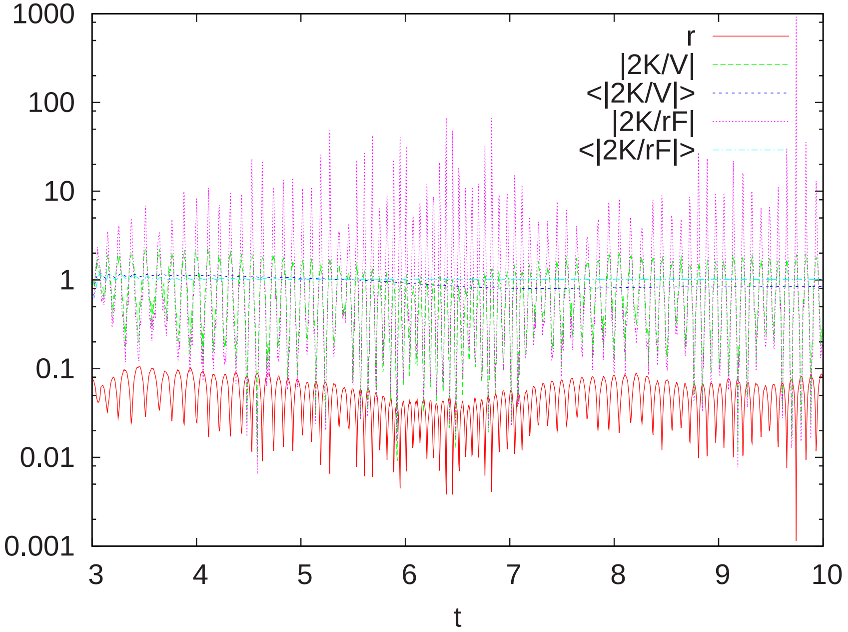


LV and virial for one particle:#2000

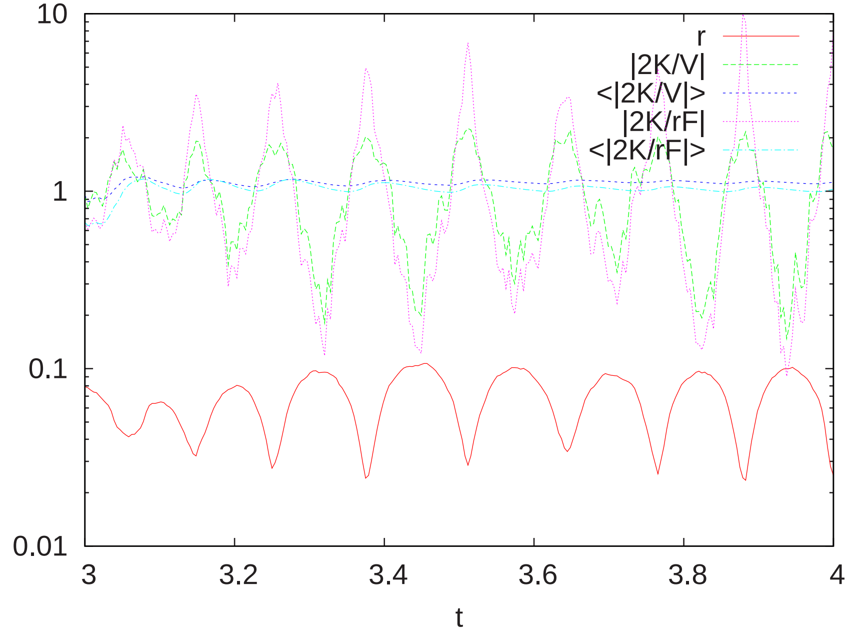


LV and virial for one particle:#2000

粒子の振るまい２

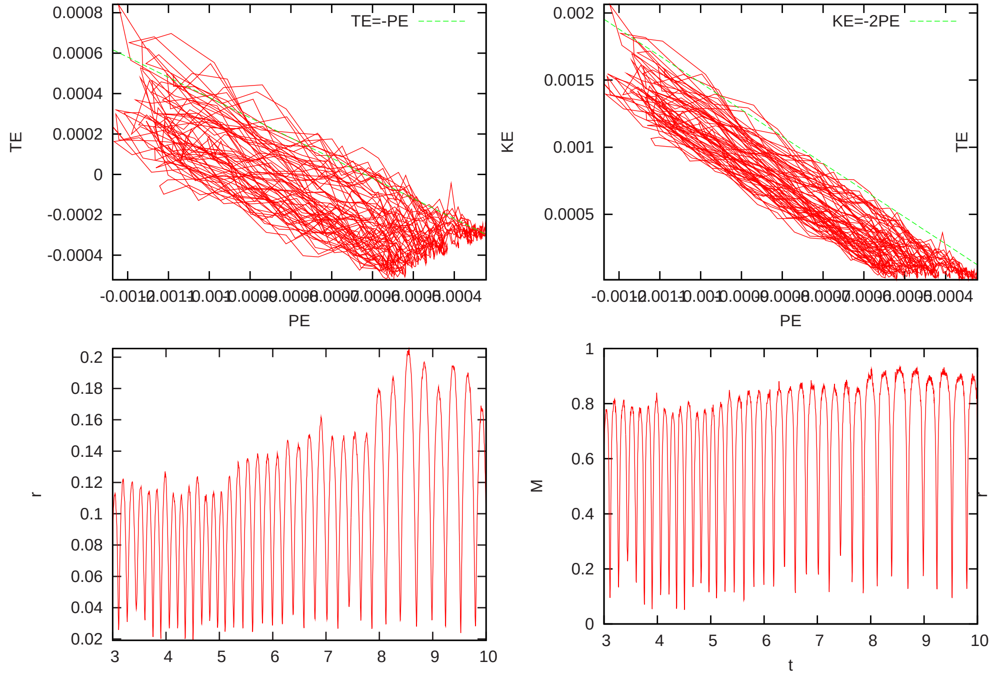


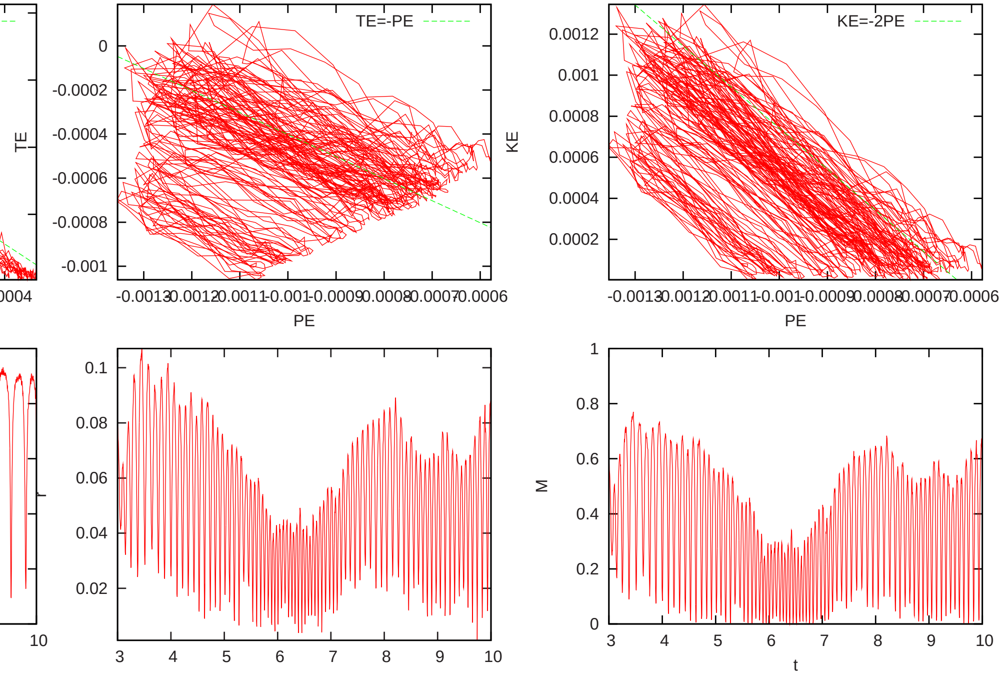
LV and virial for one particle:#50



LV and virial for one particle:#50

粒子の振るまい３





motion of one particle:#2000

motion of one particle:#50

まとめ

局所ビリアル関係を満たす状態

- ○ **初期条件**
  十分に混ざる $\Longrightarrow$ LV **？**
- ○ **相互作用**
  長距離, **開放系** $\Longrightarrow$ LV **？**
- ○ Vlasov **の定常解**
  local virial relation $\Longrightarrow$ **無限遠でべき的な振舞を持つ解**
- ○ **安定性**
  数値的には安定？
- ○ **各粒子の振るまい**
  各粒子は平均的に LV **の回りで振動**

$\Longrightarrow$ **無衝突系緩和の理解、銀河の位相空間のモデル**