

二体の軌道決定法の新進展

浅田 秀樹
(弘前大 理工)

asada@phys.hirosaki-u.ac.jp

2007年3月8日

天体力学N体力学研究会

木更津高専

天文月報 2006年11月号

「2体の軌道決定法の新展開」 (浅田)

日本物理学会誌 2006年8月号

「観測的2体問題の進展」 (浅田)

これらの解説記事 + その後の話

予定：

1：イントロ

2：厳密解

3：観測データへの拡張

4：Open orbit

1. Introduction

2体問題

ケプラー、ニュートン、...

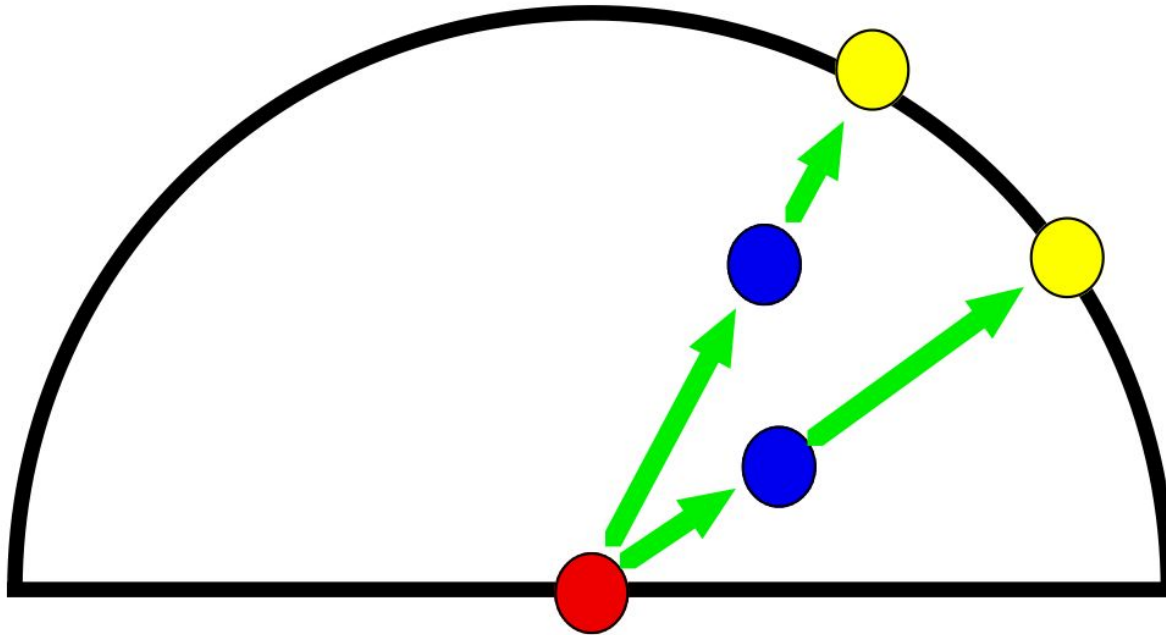
すべて歴史的事実。

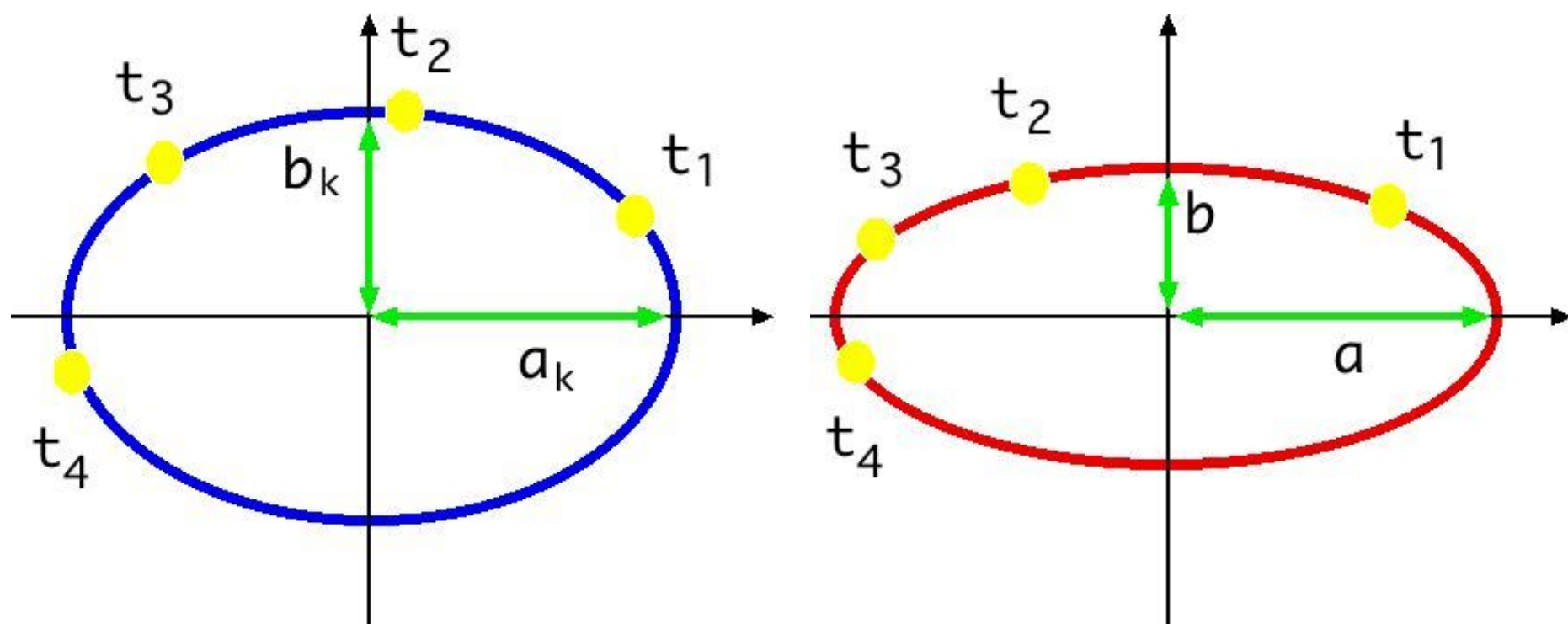
観測的な 2 体問題 …

観測から軌道・質量をどう決定するか？

視線に対して軌道面傾斜

天体の位置は、射影される





太陽系内

完全に解かれている ...

太陽を焦点とする軌道の決定

小惑星第1号 Ceres (Piazzi, 1801)

行方不明 (太陽に接近)

ガウスの方法,
ラプラスの改良, ...

太陽系外

部分的に解かれている ...

「実視連星」

(両方の星が観測可能)

Savary (1827), Encke (1832),
Herschel (1833), ...

しかし,
未だ完全には解かれていない …

「位置天文的連星」 → ???

主星 と 見えない 伴星

例えば,
ブラックホール, 中性子星, ...,
(巨大)惑星

位置天文観測

→ 軌道要素 ($a, e, \dots$)

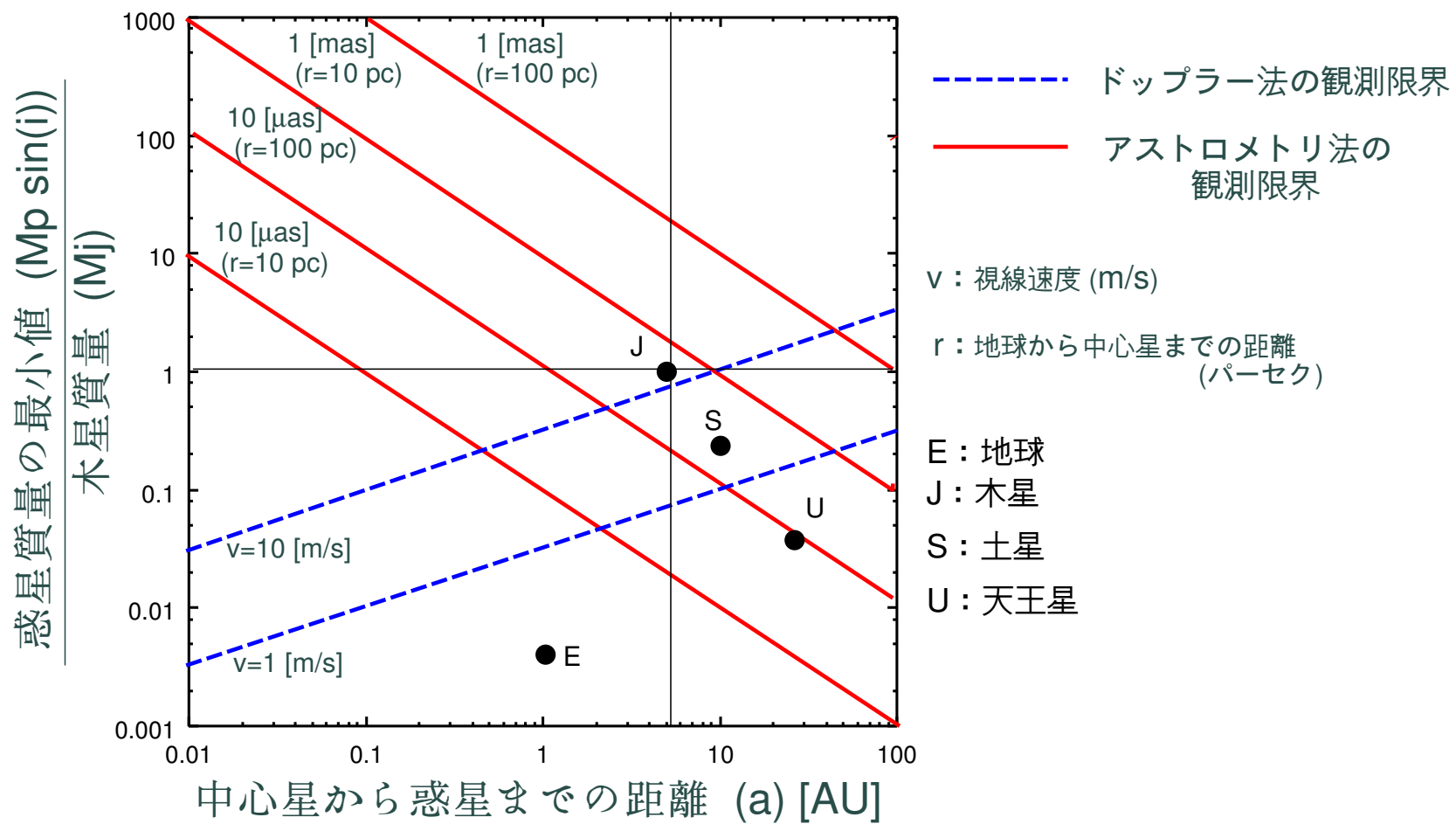
Doppler Method ($M_p \sin i$)

VS

Astrometry (M_p and i)

Hipparcos (1989~)

projects ... SIM, GAIA, JASMINE
(several micro arcsec., 2010s~)



$\delta\theta$ 位置揺らぎの大きさは？

If

Jupiter-mass planet around Solar-mass

Separation $\sim 1\text{AU}$

Distance $\sim 100\text{pc}$,

then, $\delta\theta \sim 10 \text{ micro arcsec}$.

軌道要素(や質量)の決定という逆問題は、
逐次法や数値計算を用いなければ解けない
とされていた。

連立方程式系が **非線形** かつ
ケプラー方程式が **超越的** だから。

Murray and Dermott,

Solar System Dynamics (Cambridge U. Press, 1999),

“Colwell (1993) points out that papers have been published about the solution of Kepler’s equation in virtually every decade since 1650 and that many eminent scientists have attempted solutions. Kepler’s equation cannot be solved directly because it is transcendental ... “

$$x_1 = \dots$$

$$y_1 = \dots$$

$$t_1 = t_0 + \frac{T}{2\pi}(u_1 - e_K \sin u_1)$$

$$x_2 = \dots$$

$$y_2 = \dots$$

$$t_2 = t_0 + \frac{T}{2\pi}(u_2 - e_K \sin u_2)$$

しかし、軌道決定に関する常識は間違っていた。

(初等関数をもちいた)解析解!

HA, Akasaka, Kasai, PASJ 56, L35 (2004)

2. 厳密解

2-1. 視楕円の決定

天球面上 … $(\bar{x}, \bar{y})$

楕円の一般形

$$\alpha \bar{x}^2 + \beta \bar{y}^2 + 2\gamma \bar{x}\bar{y} + 2\delta \bar{x} + 2\varepsilon \bar{y} = 1$$

5回の観測 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ **for** $i = 1, \dots, 5$

標準形 (x, y)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

離心率 $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

2-2. 軌道要素の決定

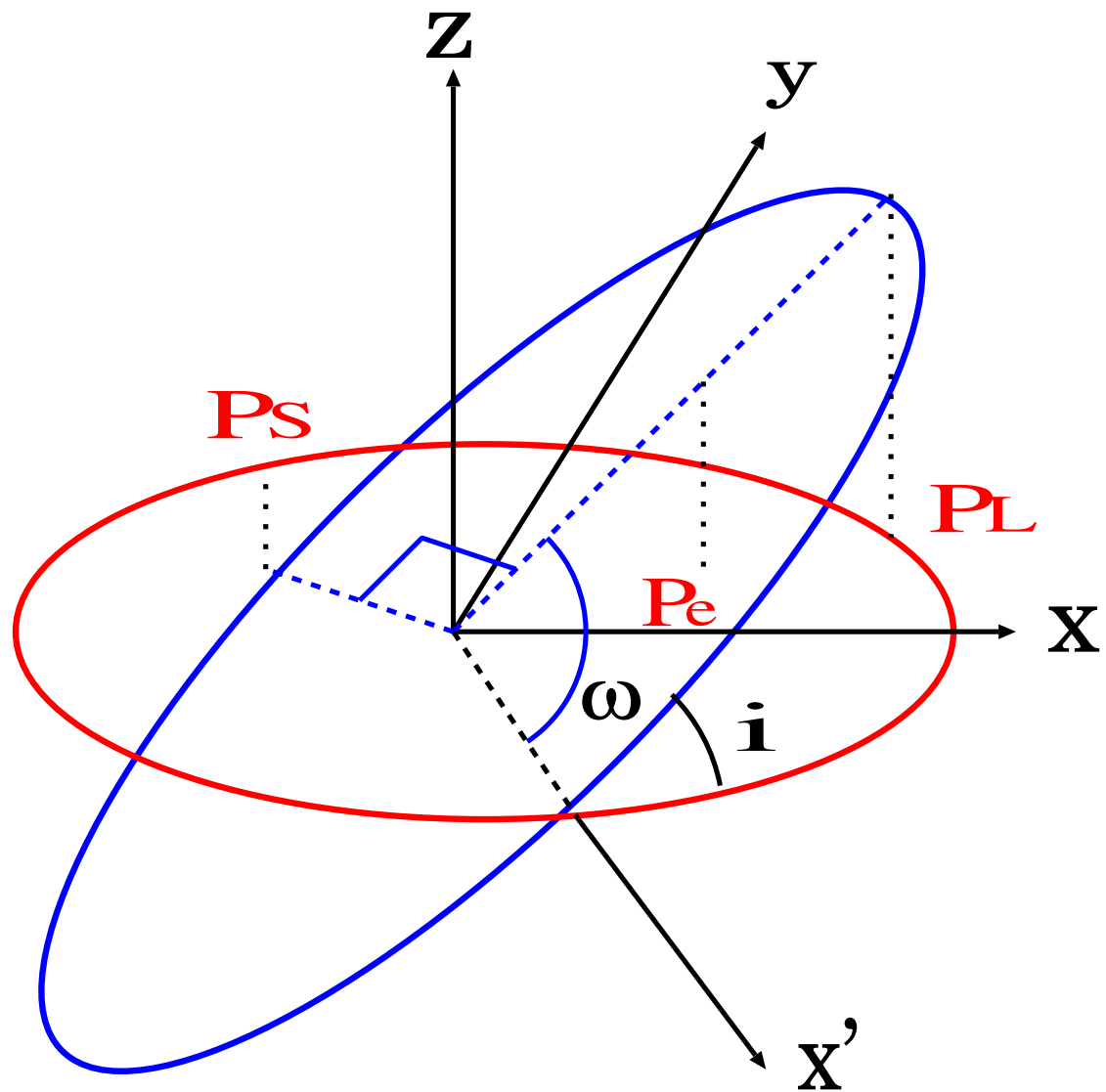
4回の観測 時刻 t_i ($i = 1, \dots, 4$)

$$P_i = (x_i, y_i) = (a \cos u_i, b \sin u_i)$$

時間間隔 $t_{ij} \equiv t_i - t_j$

元のケプラー軌道をきめる量

a_K, e_K, T



焦点 は天球面上の $P_e = (x_e, y_e)$

に射影される。

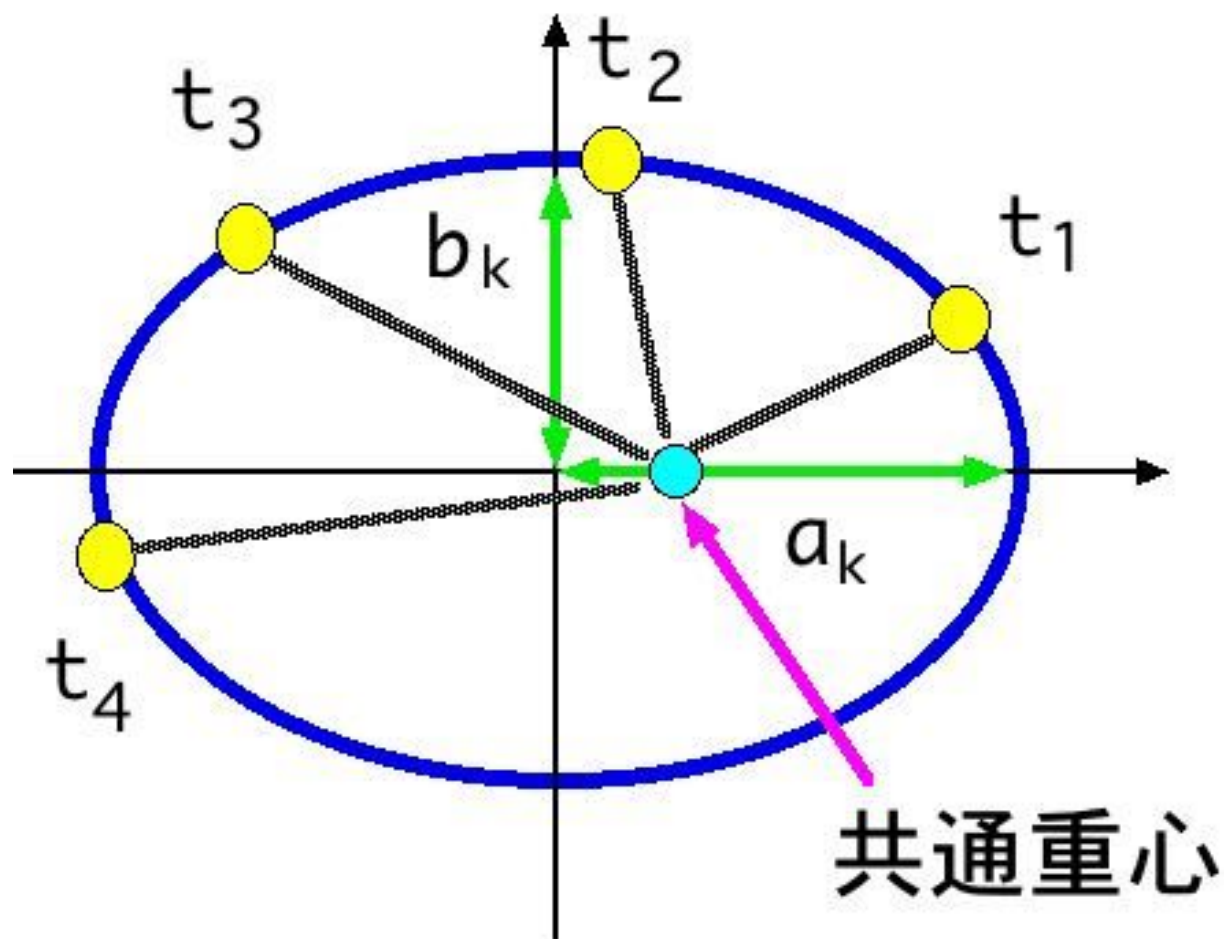
これを決めなければならない。

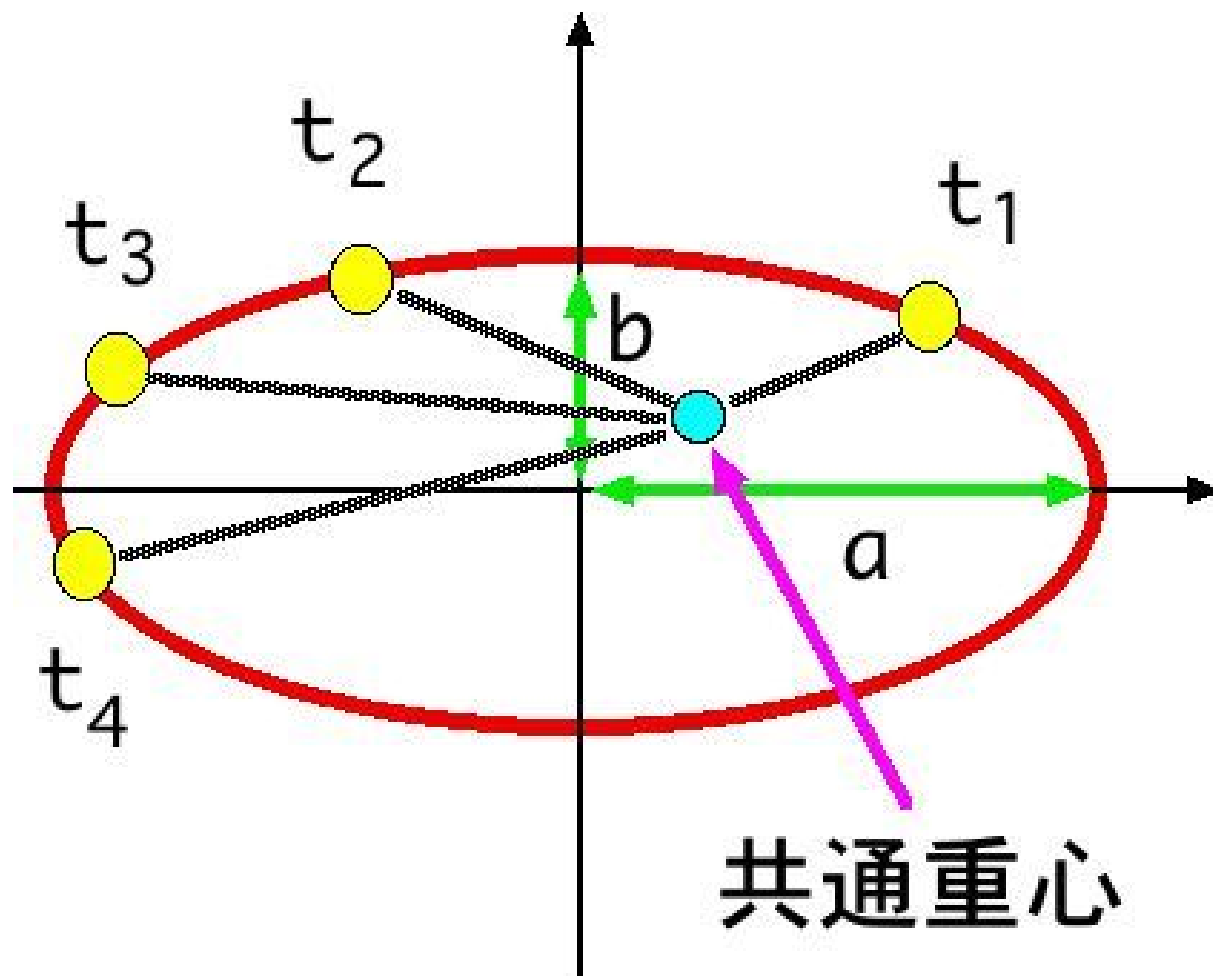
Key:

射影後も,

面積速度一定の法則が成立。

ただし, 射影した焦点に対する面積。





$S = \pi ab$ — 視楕円の全面積

S_{ij} — 時間間隔 t_{ij} に掃く面積

$$S_{ij} = \frac{1}{2}ab \left[u_i - u_j - \frac{x_e}{a}(\sin u_i - \sin u_j) + \frac{y_e}{b}(\cos u_i - \cos u_j) \right]$$

$$\frac{S}{T} = \frac{S_{ij}}{t_{ij}}$$

$$\frac{S_{21}}{t_{21}} = \frac{S_{32}}{t_{32}} \quad \frac{S_{32}}{t_{32}} = \frac{S_{43}}{t_{43}}$$

$$A_3 - \frac{x_e}{a}A_1 + \frac{y_e}{b}A_2 = 0$$

$$B_3 - \frac{x_e}{a}B_1 + \frac{y_e}{b}B_2 = 0$$

ただし

$$A_1 = t_{21} \sin u_3 + t_{32} \sin u_1 - t_{31} \sin u_2$$

$$A_2 = t_{21} \cos u_3 + t_{32} \cos u_1 - t_{31} \cos u_2$$

$$A_3 = t_{21} u_3 + t_{32} u_1 - t_{31} u_2$$

B_1, B_2, B_3 も同様

$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)$.

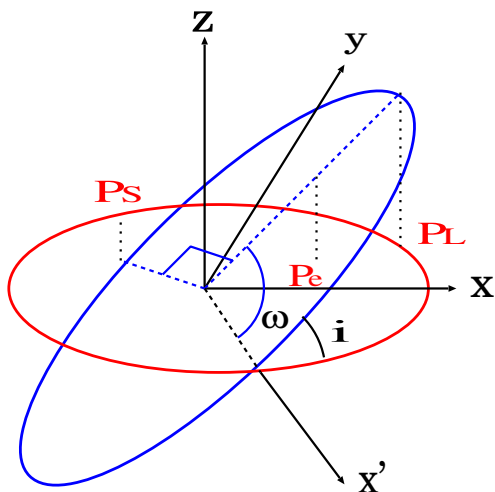
解は

$$x_e = -a \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

$$y_e = b \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

射影しても，線分上の長さの比は同じ：

$$P_L = \frac{1}{e_K} P_e$$

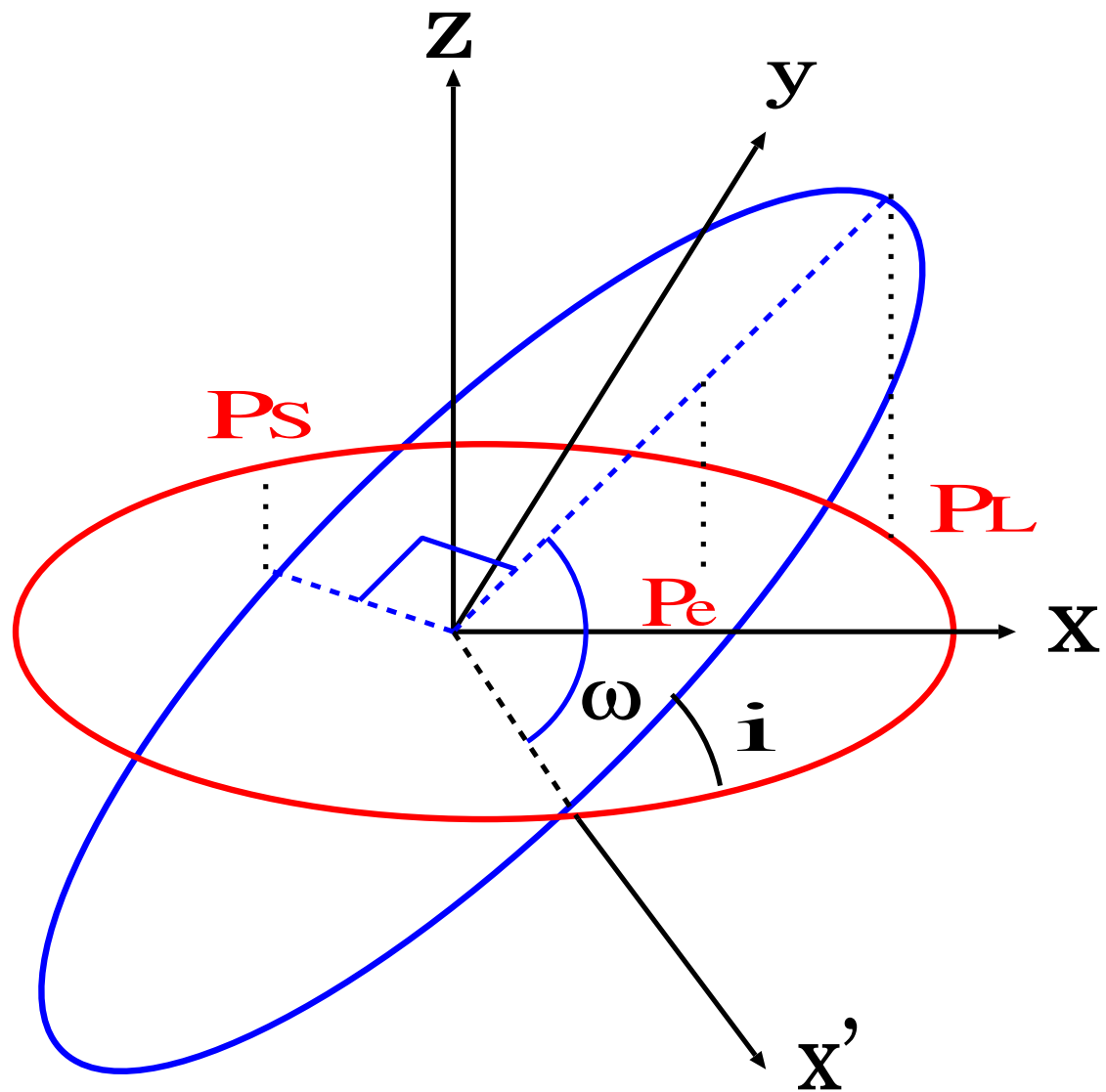


近日点の射影 $P_L \equiv (x_L, y_L) = (a \cos u_L, b \sin u_L)$
は視楕円上

$$e_K = \sqrt{\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2}}$$

例えば S_{21} を用いて,

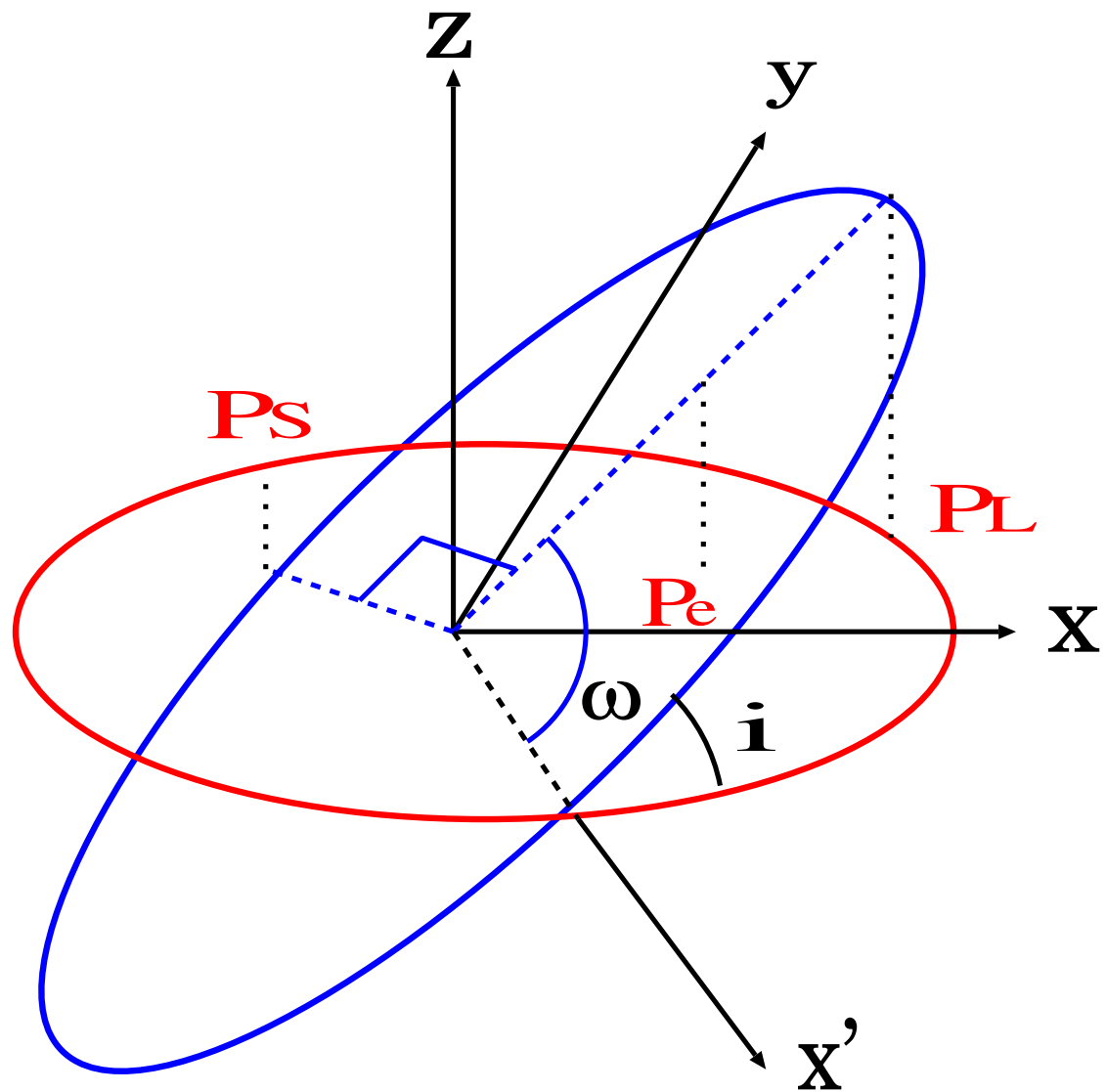
$$T = \frac{St_{21}}{S_{21}}$$



射影した短軸と視楕円の交点 $P_S \equiv (x_S, y_S)$

射影後も, P_L と P_S は視楕円の面積を4等分する

$$P_L = \left(\frac{x_e}{e_K}, \frac{y_e}{e_K} \right)$$
$$P_S = \left(-\frac{ay_e}{be_K}, \frac{bx_e}{ae_K} \right)$$



ここだけ、別のデカルト座標 …

昇交点方向を x' 軸にする (x', y')

軌道傾斜角 $i \in [0, \pi/2)$

$$P_L \equiv (x'_L, y'_L) = (a_K \cos \omega, a_K \sin \omega \cos i)$$

$$P_S \equiv (x'_S, y'_S) = (-b_K \sin \omega, b_K \cos \omega \cos i)$$

ベクトルの成分は座標系に依存。

不変量

$$|\mathbf{P}_L|, |\mathbf{P}_S|, |\mathbf{P}_L \times \mathbf{P}_S|$$

未知量 $\cdots a_K, \omega, i$

$$\cos i = \frac{1}{2}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 4})$$

$$a_K = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{1 + \cos^2 i}}$$

$$\cos 2\omega = \frac{C^2 - D^2}{a_K^2 \sin^2 i}$$

ただし

$$C = \frac{1}{e_K} \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$$

$$D = \frac{1}{abe_K} \sqrt{\frac{a^4 y_e^2 + b^4 x_e^2}{1 - e_K^2}}$$

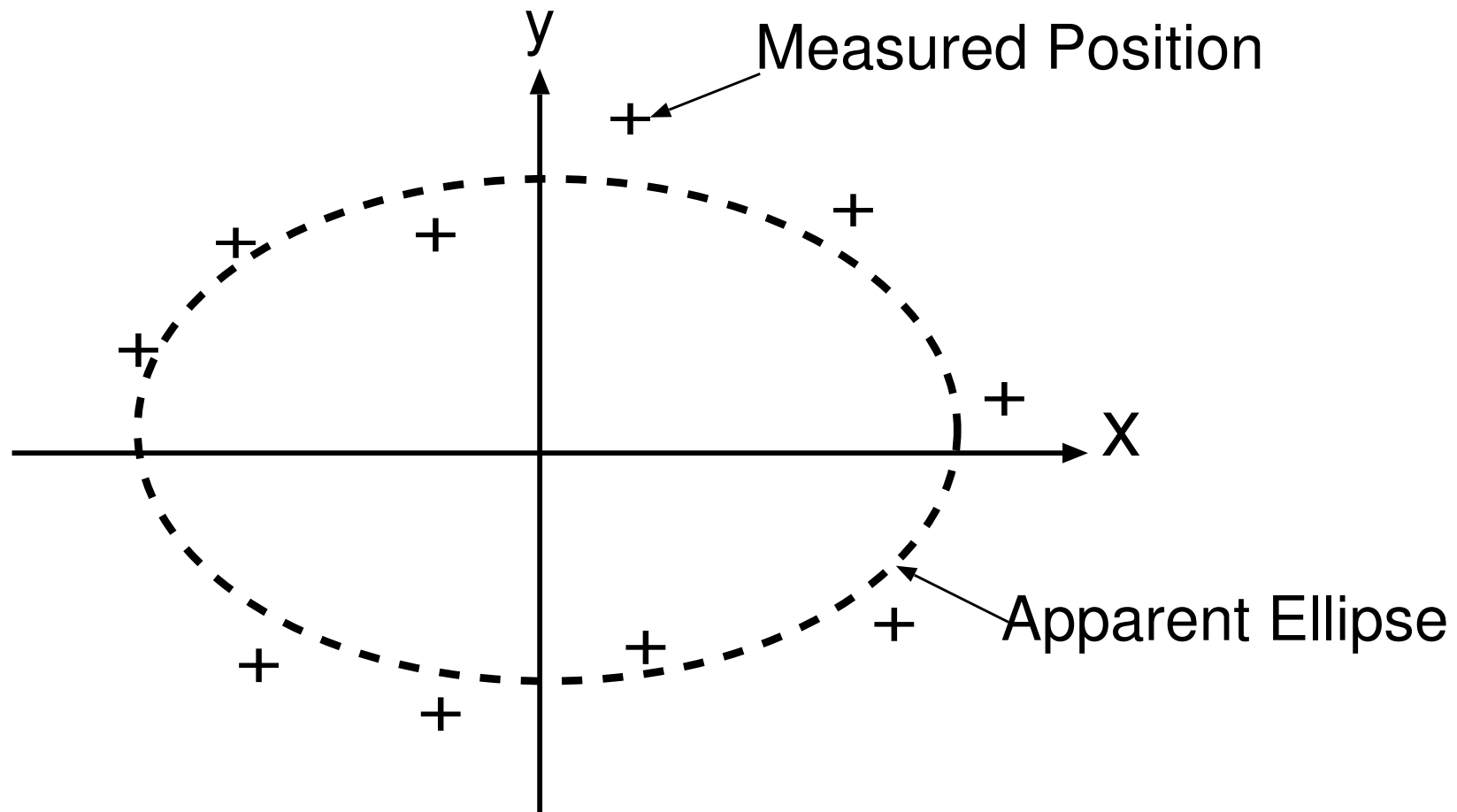
$$\xi = \frac{(C^2 + D^2) \sqrt{1 - e_K^2}}{ab}$$

3. 観測データへの拡張

公式を発見!

しかし、実際は誤差を含むデータ解析 …

結局、最小2乗法等の数値計算 !?



任意回数の観測で最小2乗法を使う場合に、
拡張できた！初等関数のみ！

HA, Akasaka, Kudoh
AJ, 133, 1243 (2007)

ポイント：

χ^2 はパラメタの2次形式

… 誰でも解ける！

拡張した解

$$x_e = -\frac{a}{nC_4} \sum_j \frac{F_j G_{j+1} - G_j F_{j+1}}{E_j F_{j+1} - F_j E_{j+1}}$$

$$y_e = \frac{b}{nC_4} \sum_j \frac{G_j E_{j+1} - E_j G_{j+1}}{E_j F_{j+1} - F_j E_{j+1}}$$

j は, N データ点から4点を選ぶ組合せ.

$$e_K, \cos i, a_K, \cos 2\omega$$

は同じ形のまま.

模擬データでのテスト

$$a_K = 1$$

観測位置の誤差 = 0.001

観測回数 = 12回

$i = 0$ の場合, ω は定義されない

$a_k - e_k - i - \omega$	Δa	Δe	Δi	$\Delta \omega$
1 - 0.1 - 0 - 0	0.00113	0.00271	3.27	50.9
1 - 0.1 - 0 - 30	0.00106	0.00258	3.16	24.7
1 - 0.1 - 0 - 60	*	*	*	*
1 - 0.1 - 30 - 0	0.000866	0.00305	0.116	1.34
1 - 0.1 - 30 - 30	0.00110	0.00296	0.154	1.30
1 - 0.1 - 30 - 60	0.00110	0.00343	0.122	1.04
1 - 0.1 - 60 - 0	0.00112	0.00450	0.0574	2.08
1 - 0.1 - 60 - 30	0.00193	0.00544	0.0951	2.20
1 - 0.1 - 60 - 60	0.00141	0.00501	0.0605	1.90

$a_k - e_k - i - \omega$	Δa	Δe	Δi	$\Delta \omega$
1 – 0.3 – 0 – 0	0.00180	0.00497	4.29	47.5
1 – 0.3 – 0 – 30	0.00166	0.00516	4.29	27.8
1 – 0.3 – 0 – 60	0.00193	0.00555	4.52	28.4
1 – 0.3 – 30 – 0	0.000933	0.00518	0.224	0.943
1 – 0.3 – 30 – 30	0.00175	0.00542	0.317	0.719
1 – 0.3 – 30 – 60	0.00142	0.00597	0.164	0.449
1 – 0.3 – 60 – 0	0.00157	0.00884	0.122	1.17
1 – 0.3 – 60 – 30	0.00238	0.00856	0.150	0.832
1 – 0.3 – 60 – 60	0.00227	0.00797	0.0888	0.715

$a_k - e_k - i - \omega$	Δa	Δe	Δi	$\Delta \omega$
1 – 0.6 – 0 – 0	0.0105	0.0137	9.16	54.6
1 – 0.6 – 0 – 30	0.00977	0.0147	9.24	34.8
1 – 0.6 – 0 – 60	0.0131	0.0150	9.48	33.3
1 – 0.6 – 30 – 0	0.00240	0.0168	1.67	2.37
1 – 0.6 – 30 – 30	0.00374	0.0172	1.32	2.48
1 – 0.6 – 30 – 60	0.00953	0.0150	0.623	2.54
1 – 0.6 – 60 – 0	0.00400	0.0279	0.919	1.68
1 – 0.6 – 60 – 30	0.00614	0.0287	0.765	0.966
1 – 0.6 – 60 – 60	0.0117	0.0191	0.256	0.586

4. Open Orbit への拡張

さらに、**双曲線・放物線軌道**にも一般化した!

HA, CMDA, 97, 151 (2007)

拡張の際の問題点 …

(不変量の計算で役立った)

「短軸・長軸で楕円の面積を4等分する」

… Open orbit では使えない.

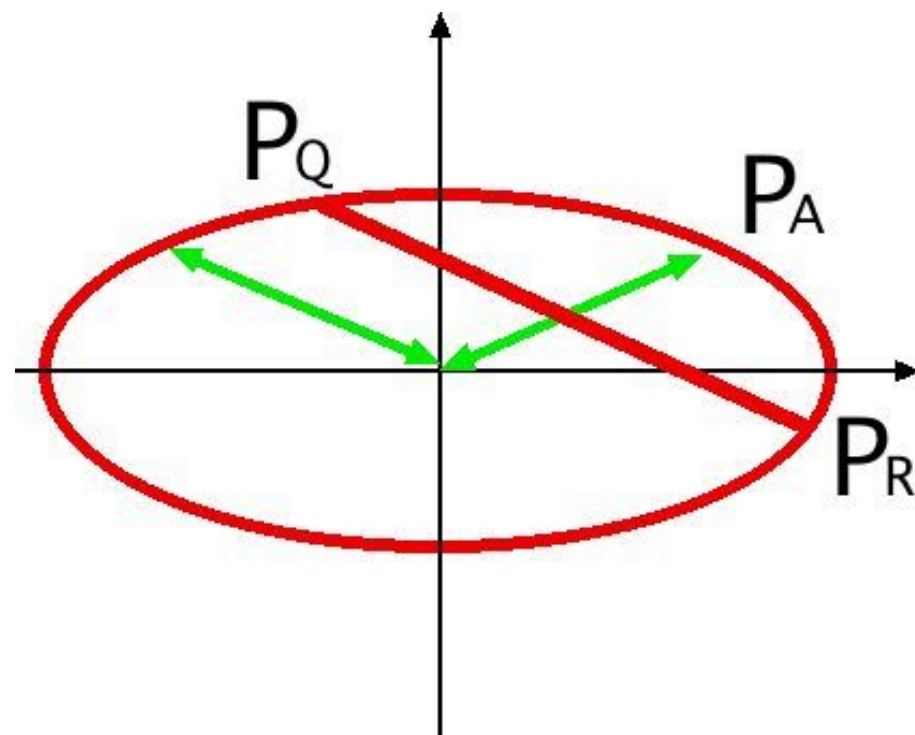
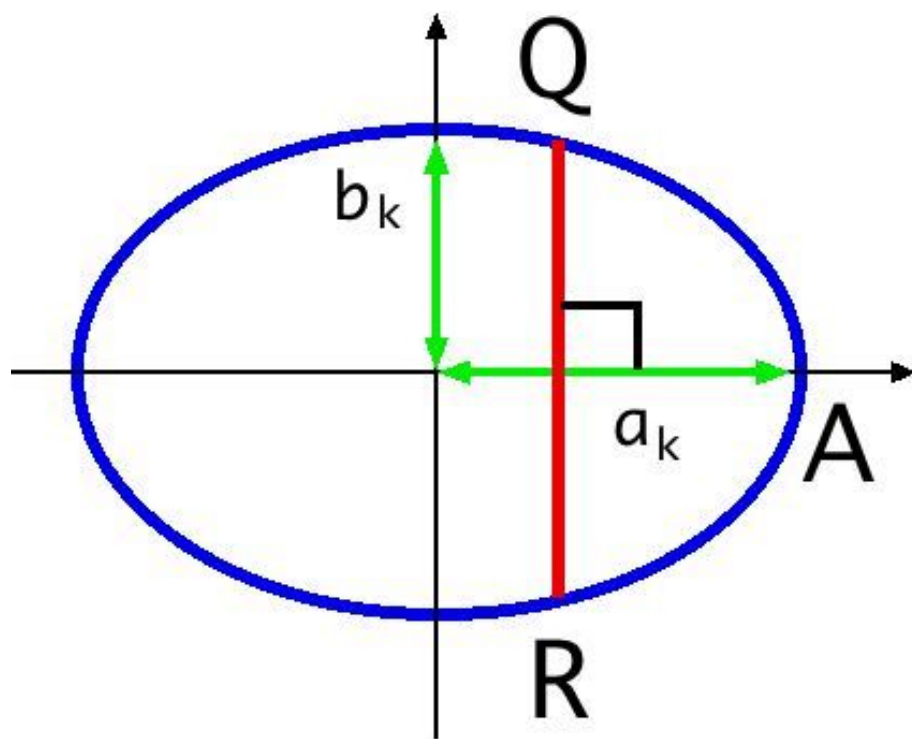
解決策 (その1)

焦点で長軸と直交する線が「短軸」代わり

その直交線と楕円の交点のひとつを Q と記す

その点を視楕円に射影したものを P_Q として,
 $P_A = P_L$ と P_Q で不変量を構成して計算

これは、双曲線・放物線でも OK



結果（双曲線の場合）

天球面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

天体の位置

$$\begin{aligned} P_j &= (x_j, y_j) \\ &= (-a \cosh u_j, b \sinh u_j) \end{aligned}$$

射影後の面積速度一定から

$$x_c = a \frac{E_1 F_2 - E_2 F_1}{D_1 E_2 - D_2 E_1}$$
$$y_c = b \frac{F_1 D_2 - F_2 D_1}{D_1 E_2 - D_2 E_1}$$

$$e_K = \sqrt{\frac{x_c^2}{a^2} - \frac{y_c^2}{b^2}}$$

$$P_A = \frac{1 - e_K}{e_K}(x_c, y_c)$$

$$P_Q = \left(-\frac{ay_cs_h}{b}, \frac{bx_cs_h}{a} \right)$$

ただし,

$$s_h = \frac{\sqrt{e_K^2 - 1}}{e_K}$$

$$\cos i = \frac{1}{2} \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 4} \right)$$

$$a_K = \frac{1}{e_K^2 - 1} \sqrt{\frac{(e_K + 1)^2 |\mathbf{P}_A|^2 + |\mathbf{P}_Q|^2}{1 + \cos^2 i}}$$

$$\cos 2\omega = \frac{(e_K + 1)^2 |\mathbf{P}_A|^2 - |\mathbf{P}_Q|^2}{a_K^2 (e_K^2 - 1)^2 \sin^2 i}$$

ただし,

$$\xi = \frac{(e_K + 1)^2 |P_A|^2 + |P_Q|^2}{(e_K + 1) |P_A \times Q_Q|}$$

結果（放物線の場合）

天球面上の放物線

$$y^2 + 4qx = 0$$

天体の位置

$$\begin{aligned} P_j &= (x_j, y_j) \\ &= \left(-\frac{1}{2}qu_j^2, \sqrt{2}qu_j\right) \end{aligned}$$

射影後の面積速度一定から

$$x_c = -\frac{H_1 I_2 - H_2 I_1}{G_1 H_2 - G_2 H_1}$$
$$y_c = -\sqrt{q} \frac{G_1 I_2 - G_2 I_1}{G_1 H_2 - G_2 H_1}$$

$$P_A = \left(-\frac{y_c^2 + 4qx_c}{4q}, 0 \right)$$

$$P_Q = \left(-\frac{y_c s_p}{2q}, s_p \right)$$

ただし,

$$s_p = \sqrt{-(y_c^2 + 4qx_c)}.$$

$$\cos i = \frac{1}{2}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 4})$$

$$q_K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4|P_A|^2 + |P_Q|^2}{1 + \cos^2 i}}$$

$$\cos 2\omega = \frac{4|P_A|^2 - |P_Q|^2}{4q_K^2 \sin^2 i}$$

ただし,

$$\xi = \frac{4|P_A|^2 + |P_Q|^2}{2|P_A \times Q_Q|}$$

解決策 (その2)

楕円から，双曲線・放物線に変換する

楕円から双曲線

$$u \longrightarrow \sqrt{-1}u$$

$$a \longrightarrow -a$$

$$b \longrightarrow -\sqrt{-1}b$$

つまり,

$$\cos u \rightarrow \cosh u$$

$$\sin u \rightarrow \sqrt{-1} \sinh u$$

楕円から放物線

$$e \rightarrow 1$$

$$q = \lim_{e \rightarrow 1} a(1 - e)$$

$$x' = x - a$$

つまり,

$$a \rightarrow \infty$$

$$b^2 = a(1 + e) \times a(1 - e) \rightarrow 2aq$$

当然，両方の結果は一致した

5. まとめ

- 厳密解
- 観測データへの拡張
- Open orbit への拡張

今後の課題 … 共通重心の運動 etc.