

3 体問題の振動解

柴山允瑠(京大・理)

2006 年 3 月 1 - 4 日

1 振動解について

3 体問題を考える:

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{x}_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3, k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

ここで,

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$$

で, $\mathbf{x}_k$ は質点の位置, $m_k (\geq 0)$ は質点の質量である.

定義 1. (1) の解は

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} r_{ij} &= \infty \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} r_{ij} &< \infty \end{aligned}$$

を満たすとき, 振動解であるという.

これまで知られている振動解の例を挙げる. ^{*1}

例 1. *Sitnikov* は $m_1 = m_2, m_3 = 0$ の場合に振動解の存在を示した ([6]). これは, $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ が $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2 = (x_1, y_1, 0)$ を満たしながら *Kepler* 運動をし, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, z_3)$ は z 軸上を上下に運動するような軌道である.

例 2. *Alekseev* は $m_1 = m_2$ で $m_3 > 0$ が十分小さい場合に関して存在を示した ([1]). これは, $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ が $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{x}_2 = (-x_1, -y_1, z_1)$ を満たしながら運動をし, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, z_3)$ は z 軸上を上下に運動するような軌道である.

例 3. *Xia* は円制限 3 体問題 ($m_3 = 0$) において振動解の存在を示した ([9]).

例 4. *Xia* は平面 3 体問題の無限遠における *KAM* 構造のアーノルド拡散の存在を証明したとき, その副産物として振動解を得ている ([10]). この場合, m_3 を 0 から摂動したときに得られるので m_3 は十分小さい.

以上の解は m_3 が十分小さいか, あるいは 0 で, 遠くに飛び出す質点は m_3 で入れ替わらない.

^{*1} 勘違いしていることがあるかもしれないので, 間違いがありましたらご指摘ください.

例 5. *Saari* と *Xia* は直線 3 体問題において振動解の存在を示した ([7]). 質量に関する条件はあるが、かなりゆるい。これは真ん中にある質点以外の 2 質点は同じ質点の方だけ飛び出させたり、交互に飛び出させたり、あるいはその 2 質点をランダムな順序で飛び出させたりすることができる。

例 6. 谷川は $m_1 = m_2 = m_3$ で平面の場合に、 m_2 と m_3 が接近してほぼ *Kepler* 運動をしているところに m_1 入り込んでくると、 m_2 が飛び出し m_1 と m_3 が接近してほぼ *Kepler* 運動をする。それから、 m_2 が帰ってくると同様に m_1 あるいは m_2, m_3 が飛び出すと、飛び出す質点が入れ替わるような振動解の数値解を得た ([8]). 飛び出す順序は多様にある。また、この角運動量は 0 である。

2 主定理

2 種類の振動解の存在について述べる。

定理 1. 平面 3 体問題を考える。ほとんどの質量比と任意の数列 $a_l \in \{1, 2, 3\}$ に対して、角運動量 $\omega = \sum_{k=1}^3 m_k \mathbf{x}_k \times \dot{\mathbf{x}}_k$ が 0 である振動解で、質点が $m_{a_1}, m_{a_2}, m_{a_3}, m_{a_4}, \dots$ の順で飛び出すようなものが存在する。3 体衝突から離れている間は直線 3 体の軌道に近い。

定理 2. 等質量の平面 3 体問題を考える。任意の数列 $a_l \in \{1, 2, 3\}$ に対して、角運動量 $\omega = \sum_{k=1}^3 m_k \mathbf{x}_k \times \dot{\mathbf{x}}_k$ がかなり小さいが 0 でない振動解で、質点が $m_{a_1}, m_{a_2}, m_{a_3}, m_{a_4}, \dots$ の順で飛び出すようなものが存在する。3 体衝突から離れている間は直線 3 体あるいは二等辺 3 体の軌道に近い。3 体衝突に近い間に 360 度回転する。

注意 1. 定理 1 において「ほとんどの質量比」というのは、質量比 $\{(m_1, m_2, m_3) | m_1 + m_2 + m_3 = 3\}$ 全体の集合は 2 次元空間を成すが、その中からある 1 次元部分曲線くらい*2を取り除いたところにある質量比だったら OK であることを意味する。等質量自体が OK かどうかはまだ分からない。

注意 2. 空間 3 体問題において、重心は常に原点とし $\omega = 0$ とすると、3 質点はある平面上を運動することが証明できる [5, §6]。従って、定理 1 において、「平面」というのは本質的な仮定ではない。

注意 3. $\omega \neq 0$ の場合は、一度 3 質点が十分近づくと、その後 1 つの質点は大きな速度をもち、他の質点から離れていき、帰ってこない ([2, p275-283], [3, §2])。よって、この場合の振動解は 3 体衝突に近づきすぎたはいいけない。従って、 $\omega \neq 0$ の場合の振動解は 3 体衝突から常にある程度は離れている。

注意 4. 定理 1 の解が谷川氏の数値解と一致しているかどうかは分かっていない。

以下の節では、定理の証明を述べる。

3 定理 1 の証明

定理 1 の証明を行う。*3

*2 この除外される集合は explicit にはわからない

*3 いくらかあやしい点もあるので (とくに追跡性あたり)、ご指摘やアドバイスをお願いします。

3.1 Symplectic reduction

$\omega = 0$ とする. また簡単のため等質量 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ として話を進める. 等質量でなくとも同様の議論ができる.

$\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^2 (k = 1, 2, 3)$ とする. 重心は原点に固定する:

$$\mathcal{X} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T^*\mathbb{R}^6 \left| \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{y}_k = \mathbf{0} \right. \right\}$$

位置は

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \mapsto (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2), \sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)) \right)$$

で変換し, 運動量も同様の変換をすると, 正準変換 (Jacobi 変換) $\mathcal{X} \rightarrow T^*\mathbb{R}^4$ が得られる. さらに, $\omega = 0$ に制限し, 回転対称性によって同一視すると (相空間を $SO(2)$ で割ると), $T^*(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ 上の Hamilton 系になる (symplectic reduction).

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T^*(\mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\}) \mid \omega = 0\} / SO(2) \cong T^*(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$$

この商空間における座標は, 位置は Hopf 写像

$$(q_1, q_2, q_3) = (\|\mathbf{z}_1\|^2 - \|\mathbf{z}_2\|^2, 2\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2, 2\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2)$$

を用いて, 運動量はこれから自然に導かれる座標 $\mathbf{p}$ を用いる.

すると, Hamiltonian は

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - U(\mathbf{q}), \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$$

となる. ここで,

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 2\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{p}\|^2$$

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{q}\| + q_1}} + \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{q}\| - \frac{1}{2}q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}q_2}} + \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{q}\| - \frac{1}{2}q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}q_2}}$$

である.

3.2 衝突多様体

今の相空間において $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ となることは, 質点は 3 体衝突に近づくことに対応する. (近)3 体衝突の様子を詳しく調べるため, McGehee 座標を導入する:

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{q}\| \\ \mathbf{s} &= r^{-1}\mathbf{q} \\ \mathbf{z} &= r^{\frac{3}{4}}\mathbf{p} \\ d\tau &= r^{-\frac{3}{4}}dt \end{aligned} \tag{2}$$

最後の式は時間 t を新しい時間 τ に変換している。 t では有限時間で 3 体衝突に至っていたのが、 τ では無限の時間かかるようになる。

すると、方程式は

$$\begin{aligned} r' &= 4rv \\ \mathbf{s}' &= 4\mathbf{z} - 4v\mathbf{s} \\ \mathbf{z}' &= \nabla U(\mathbf{s}) + 3v\mathbf{z} - 2\|\mathbf{z}\|^2\mathbf{s} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、 $v = \mathbf{s} \cdot \mathbf{z}$ である。

エネルギー関係式は

$$h = r^{-\frac{1}{2}}(2\|\mathbf{z}\|^2 - U(\mathbf{s}))$$

となる。(2) は正準変換ではないので、方程式 (3) は Hamilton 系ではなく、 h は単に不変量である。

簡単な計算から Sundman 不等式が導かれる：

$$v' \geq \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}h \quad (4)$$

不変集合 M と M_0 をとる：

$$\begin{aligned} M &= \{(r, \mathbf{s}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid h = -1\} \\ M_0 &= \{(0, \mathbf{s}, \mathbf{z}) \in M \mid 2\|\mathbf{z}\|^2 - U(\mathbf{s}) = 0\} \end{aligned}$$

M はエネルギーを -1 に固定したもので、5 次元多様体である。^{*4}

M_0 は 3 体衝突を表しており、今これは衝突多様体と呼ばれる不変な 4 次元部分多様体となっている。 M_0 上の力学系については、Moeckel らによって調べられている ([3])。 (4) より M_0 上では、 $v' \geq 0$ である。

M_0 上には 10 個の不動点 $C_k, C_k^* (k = 1, 2, 3), E_{\pm}, E_{\pm}^*$ がある：

$$\begin{aligned} C_k &= \left(0, \mathbf{c}_k, \sqrt{\frac{U(\mathbf{c}_k)}{2}}\mathbf{c}_k\right), \quad C_k^* = \left(0, \mathbf{c}_k, -\sqrt{\frac{U(\mathbf{c}_k)}{2}}\mathbf{c}_k\right) \\ E_{\pm} &= \left(0, \mathbf{e}_{\pm}, \sqrt{\frac{U(\mathbf{e}_{\pm})}{2}}\mathbf{e}_{\pm}\right), \quad E_{\pm}^* = \left(0, \mathbf{e}_{\pm}, -\sqrt{\frac{U(\mathbf{e}_{\pm})}{2}}\mathbf{e}_{\pm}\right) \end{aligned}$$

$\mathbf{c}_k$ は 3 質点が同一直線上にあり、 m_k が他の 2 質点の midpoint に位置するような配置に対応する：

$$\mathbf{c}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{c}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \mathbf{c}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$\mathbf{e}_{\pm}$ は正三角形の配置に対応しており、三角形の向きによって $\pm$ を区別する：

$$\mathbf{e}_{\pm} = (0, 0, \pm 1)$$

これらの不動点はすべて双曲的で、 M_0 のなかでこれらの正の固有値は、 C_k が 1 つ、 $E_{\pm}$ が 2 つ、 C_k^* が 3 つ、 $E_{\pm}^*$ が 2 つとなっている。

定義 2. P, Q を不動点とする。 M_0 において P から Q へのヘテロクリニック軌道が存在するとき、 $P \rightarrow Q$ と書く。

^{*4} エネルギーが正の場合は Sundman 不等式より、振動解は起こりえない。また、エネルギーが負の任意の解は、スケールと時間を変えるとエネルギーが -1 の解が得られるので、このような設定でも一般性を失わない。

$P \rightarrow Q$ であれば, 3 体問題の time reversibility より双対的に $Q^* \rightarrow P^*$ がいえる. 次のようなヘテロクリニック軌道の存在が知られている.

命題 1 (Moeckel [3]). すべての質量比と任意の $k, l = 1, 2, 3$ に対して, $C_k^* \rightarrow C_l$ が成り立つ. また, ほとんどの質量比に対してその交わりは M_0 のなかで横断的である. ^{*5}

3.3 直線 3 体問題

衝突多様体の不動点から, 衝突多様体を抜け出して, また衝突多様体の別の不動点に向かうヘテロクリニック軌道について考える. それは 3 質点が常に直線上にある軌道として実現する.

(McGehee 座標ではなく) 元の 3 体問題の設定に戻って考える. $\alpha \geq \frac{5}{2}$ をパラメータとして, 直線上に質点を

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha \\ x_1 &< x_2 < x_3 = \alpha \\ x_2 - x_1 &< x_3 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ U(x_1, x_2, x_3) &= 1 \end{aligned}$$

を満たすように配置する.

この配置から初速度 0 で自由落下する運動を考えるとそのエネルギーは $h = -1$ であるから M 上の軌道が得られる.

$\alpha = \frac{5}{2}$ のとき, 初期配置は central configuration であり, 初期速度は 0 であるから, central configuration のまま縮小していき 3 体衝突する. $N(\alpha)$ を x_3 が x_2 に衝突するまでに x_1 が x_2 と (3 体衝突も含めて) 衝突する回数とする.

命題 2. $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $N(\alpha) \rightarrow \infty$ である.

また, N の不連続点, すなわち

$$N(\alpha) < N(\alpha_0), \quad (\alpha < \alpha_0)$$

となる α_0 に対しては 3 体衝突を起こす.

直感的に認められる結果であると思われるが, 厳密な証明は [5] で行われている議論と同様にしてできる.

この命題より, 各自然数 n に対して, 3 体衝突するまでの間に m_1 と m_2 が n 回衝突するような軌道 γ_n が取れる. また, これは初期速度 0 であるから, 負の時間経過に関しても同様な振る舞いをする. 従って, この軌道は C_2 から C_2^* へのヘテロクリニック軌道である. 同様に, C_1 から C_1^* , C_3 から C_3^* へのヘテロクリニック軌道 γ_n が存在する.

命題 3. ヘテロクリニック軌道 γ_n は直線 3 体問題において横断的である.

証明. 初期値の位置が m_3 が少し大きい方にずれたとき, その解が 3 体衝突する (C_2^* の安定多様体に入る) ためには, m_3 は小さな負の速度をもたなければならない. 一方, 負の時間において 3 体衝突する (C_2 の不安定

^{*5} 4 次元多様体 M_0 のなかで C_k^* の不安定多様体と C_l の安定多様体はともに 3 次元なので, 横断的に交わらないことは滅多にない. また, ほとんど成り立つことが期待できるような十分条件も [3] にある. 後の議論でも質量に関する仮定はこれだけである.

多様体に入る) ためには, m_3 は小さな正の速度をもたなければならない. これは, 相空間のその点において $St(C_k^*)$ と $Un(C_k)$ が横断的に交わっていることを意味する. $\square$

3.4 追跡性

以上の議論からヘテロクリニック軌道によって, 不動点間のグラフができる. 振動解を得るにはその中の connecting orbit をつなげてできる道を追いかけていく軌道の存在を求める. このような追跡性の議論にはサイクルの何らかの意味での双曲性が必要である. 今議論しているのは flow であるから完全な意味で双曲性が成り立つことはあり得ない.^{*6} しかし, ここでは $C_k^* \rightarrow C_l$ は衝突多様体に, $C_k \rightarrow C_k^*$ は直線 3 体問題に制限すると双曲的であることが示されていた. このような場合, 追跡性をもつことがいえる. 厳密には Moeckel, Easton, Conley らの Window theory を用いる ([4]).^{*7}

さて, 振動解の存在を述べる. 任意の数列 a_l に対して,

$$C_{b_1} \rightarrow C_{b_1}^* \rightarrow C_{b_2} \rightarrow C_{b_2}^* \rightarrow C_{b_3} \rightarrow \dots$$

というヘテロクリニック軌道の系列を考える. b_l は a_l でないもののどちらかをとり (そのうちのどれにするかで解の多様性は広がる), $C_{b_l} \rightarrow C_{b_l}^*$ の部分は m_{a_l} が飛び出すヘテロクリニック軌道を取り, l が増えるに従って, 飛び出した間に起こる 2 体衝突の回数が増えるようにしておく. 追跡性からこの系列を追跡していく軌道の存在が示され, それが求めたかった振動解である.

4 定理 2 の証明

定理 2 の証明を行う.^{*8}

4.1 $E_\pm^* \rightarrow E_\pm$

これまで議論してきた衝突多様体 M_0 のなかで, $E_\pm^* \rightarrow E_\pm$ が起こることは次元の関係から期待できない. これまで $\omega = 0$ としてきたが, ここでは角運動量の制限をなくして考える. 角運動量を制限しないまま衝突多様体 M_+ を構成する.

命題 4 (Moeckel [4]). M_+ には $E_\pm^* \rightarrow E_\pm$ があり, その交わりは M_+ のなかで横断的である.

この軌道は正三角形の配置のまま運動する周期解の角運動量を 0 に近づけていった極限として得られる. それは, M_0 には属しない. なぜなら, McGehee 座標において角運動量は $\omega = r^{1/2} \mathbf{s} \times \mathbf{z}$ と表されるが, $\omega \rightarrow 0$ としたとき $\mathbf{s} \times \mathbf{z} \rightarrow 0$ とはならず, $r \rightarrow 0$ となるからである.^{*9}

このことから分かるように, これは直感的には 3 体が近づいていて, 360 度回転するような軌道である.

^{*6} 安定多様体と不安定多様体の intersection が一つの軌道になり, そこで少なくとも 1 次元は使ってしまうので, どうしても戻ってくるまでに次元が落ちる.

^{*7} ある領域 W とその部分集合 Δ をとって, Δ を一点に潰したときの W のホモロジーを考え, その代数的な変化を見たりするようだ.

^{*8} こちらはよりあやしいです. 追跡性の部分と, 無限にサイクルを繰り返すと角運動量が 0 になってしまわないか (0 になると $E_\pm^* \rightarrow E_\pm$ から離れてしまう) という心配がある.

^{*9} この $\mathbf{s}$ と $\mathbf{z}$ は前のものと少し違う. 前は角運動量を 0 と固定した後に blow up したが, ここの $\mathbf{s}$ と $\mathbf{z}$ は角運動量を固定せずに blow up して得られた座標である.

4.2 二等辺 3 体問題

等質量とすると二等辺 3 体問題に制限することができる. 二等辺 3 体問題においても前と同様に 3 体衝突から 3 体衝突へのヘテロクリニック軌道 β_n で飛び出していない 2 質点が $2n$ 回衝突するものが存在する. それは, 衝突多様体の構造から $E_{\pm}$ から $E_{\pm}^*$ への軌道であり, 二等辺 3 体問題に制限したところでの横断性も同様にして分かる.

4.3 追跡性

前と同様に追跡性から振動解の存在がいえる. 結果として得られた解の角運動量は 0 ではないがかなり小さい.

参考文献

- [1] M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems, I, II, III, *Math. USSR-Sb.* **5** (1968), 73-128; **6** (1968), 505-560; **7** (1969), 1-43.
- [2] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence, 1927.
- [3] R. Moeckel, Orbits near triple collision in the three-body problem, *Indiana University Mathematics Journal* **32**(1983), 221-240.
- [4] R. Moeckel, Chaotic dynamics near triple collision, *Arch. Rational Mec.* 107(1989), 37-69
- [5] C. L. Siegel and J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [6] K. Sitnikov, The existence of oscillatory motions in the three-body problem, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **133**(1960), 303-306.
- [7] D. G. Saari and Z. Xia, The existence of oscillatory and super hyperbolic motions in newtonian systems, *Journal of Differential Equations* **82**(1989), 342-355.
- [8] K. Tanikawa, Oscillatory orbits in the planar three-body problem with equal masses, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **70**(1998), 167-180.
- [9] Z. Xia, Melnikov method and transversal homoclinic points in the restricted three-body problem, *Journal of Differential Equations* **96**(1992), 170-184.
- [10] Z. Xia, Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem, *J. Dynamics and Diff. Equations* **5** (1993), 219-240.