

Picard-Chebyshev 法の軌道力学への応用と そのベクトル化・並列化

荒木田 英禎

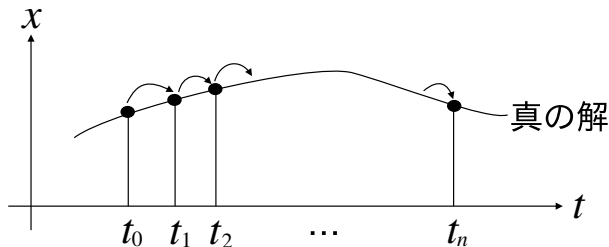
国立天文台

Picard-Chebyshev 法とは？

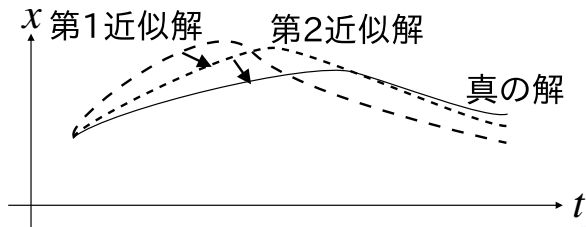
- Fukushima, AJ, 113, 1909, 1997
- Fukushima, AJ, 113, 2325, 1997
 - 摂動調和振動子問題
- 従来の数値積分
 - Step-by-step 方式: $t_0 \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2, \dots, t_{n-1} \rightarrow t_n$
 - 時間間隔 dt で数値テーブルを順番に求めていく
 - Runge-Kutta 法, 線形多段法, 外挿法, Symplectic 法等
- Picard-Chebyshev 法
 - 数値的摂動論: 近似解が分かっている
 - 惑星運動の近似解はケプラー運動
 - 近似解を補正して, 真の解に近い関数形を求める
 - 修正子的な方法

Picard-Chebyshev 法のイメージ

従来の方法



Picard-Chebyshev



Picard-Chebyshev 法の考え方 1

- 常微分方程式,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x_0 = x(t_0)$$

を,

- Picard 反復法,

$$x^n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^{n-1}(t'), t') dt'$$

を用いて修正し, 真の解に近づける

Picard-Chebyshev 法の考え方 2

- 一般に $f(x, t)$ の積分は解析的に求められない
 - 例えば 3 体問題等
- 積分部分を求積可能な関数で展開したい
 - 最も Naive な方法は Taylor 展開
- Chebyshev 多項式を用いる：

$$T_j(x) = \cos(j \arccos x),$$

$$T_{j+1} = 2xT_j - T_{j-1}(x),$$

$$T_0 = 1$$

Picard-Chebyshev 法の考え方 3

- $f(x, t)$ を Chebyshev 多項式 で近似

$$\underbrace{f(x, t)}_{\text{積分不可}} \Rightarrow \underbrace{F_0 T_0(t) + F_1 T_1(t) + F_2 T_2(t) + \cdots + F_N T_N(t)}_{\text{積分可}}$$

- Chebyshev 多項式は三角関数-like なので簡単に積分可能
- したがって求めたい解 $x(t)$ は

$$x(t) = X_0 T_0(t) + X_1 T_1(t) + X_2 T_2(t) + \cdots + X_N T_N(t)$$

Picard-Chebyshev 法は

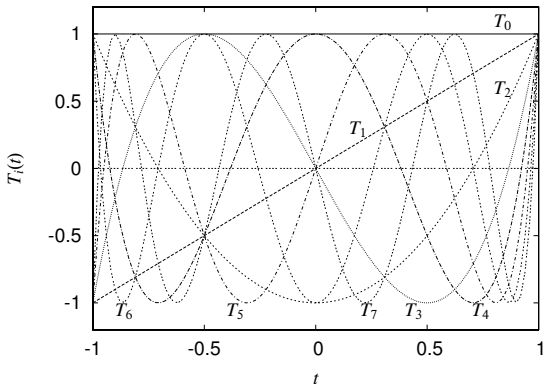
$x(t)$ の Chebyshev 係数 X_i

を求める

Chebyshev 多項式を使う理由

- 最も理想的な近似式と言われている Mini-Max 近似式に非常に近い性質を持つ
 - Mini-Max 近似式の代替近似式
 - Mini-Max 近似式は解析的に求める事が不可能 (らしい)
- 三角関数のような周期的な特徴
 - ある次数で近似を打ち切っても、誤差部分も Chebyshev 多項式の周期的な形で表されるので、ある区間 $[a, b]$ の間に誤差がまんべんなく分散
 - 従来の積分法のように誤差が単調増加しない

Chebyshev 多項式



区間 $[a, b] \rightarrow [-1, 1]$ への変換:

$$\tau = \frac{2t - (a + b)}{H}, \quad H = b - a$$

計算方法 1

- n 回目の反復での多項式の項数を $N^{(n)}$ とし,

$$f^{(n)}(x^{(n)}(t), t) = \sum_{j=0}^{N^{(n)}-1} F_j T_j(\tau), \quad x^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{N^{(n)}} X_j T_j(\tau)$$

- 項数 $N^{(n)}$ の決定は後述
- 離散的な Chebyshev 多項式の直交性:

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ N^{(n)}/2 & i = j \neq 0 \\ N^{(n)} & i = j = 0 \end{cases}$$

計算方法 2

- $T_{N^{(n)}}(\tau)$ のゼロ点:

$$\tau_k^{(n)} = \frac{a+b}{2} - \frac{H}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N^{(n)}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N^{(n)},$$

- ゼロ点に対応する x の値 $x_k^{(n)}$

$$x_k^{(n)} \equiv x^{(n-1)}(\tau_k^{(n)}) = \sum_{j=0}^{N^{(n-1)}} c_{jk}^{(n)} X_j^{(n-1)}$$

where

$$c_{jk}^{(n)} = \cos\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2N^{(n)}}\right)$$

計算方法 3

- $x_k^{(n)}, \tau_k^{(n)} \rightarrow f^{(n)}:$

$$f_k^{(n)} = f(x_k^{(n)}, \tau_k^{(n)})$$

- Chebyshev 多項式の直交性から

$$F_0^{(n)} = \frac{1}{N^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} f_k,$$

$$F_j^{(n)} = \frac{2}{N^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} c_{jk}^{(n)} f_k,$$

$$j = 1, 2, \dots, N^{(n)} - 1$$

計算方法 4

- $F_j \rightarrow X^{(n)}$: 積分公式 (Rivlin 1974) より,

$$X_{N^{(n)}}^{(n)} = \frac{HF^n}{4N^{(n)}}, \quad X_{N^{(n)}-1}^n = \frac{HF^n}{4(N^{(n)}-1)}$$

$$X_j^{(n)} = \frac{H(F_{j-1}^{(n)} - F_{j+1}^{(n)})}{4j}, \quad j = 2, \dots, N^{(n)} - 2$$

$$X_1^{(n)} = \frac{H}{2} \left(F_0^{(n)} - \frac{F_2^{(n)}}{2} \right)$$

$$X_0^n = x_0 - \sum_{j=1}^{N^{(n)}} Y_j^{(n)} T_j(t'_0)$$

計算方法 5

若干の修正

- $X_j^{(n)}$ の計算: $F_{j-1}^{(n)} - F_{j+1}^{(n)} \rightarrow$ 丸め誤差の可能性あり
- $X_j^{(n)}$ は以下で計算:

$$X_j^{(n)} = \frac{H}{jN^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} s_{jk}^{(n)} g_k^{(n)}, \quad j = 1, \dots, N^{(n)}$$
$$s_{jk}^{(n)} = \sin\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2N^{(n)}}\right), \quad g_k^{(n)} = f_k^{(n)} s_{1k}^{(n)}$$

計算方法 6

$N^{(n)}$ (n 次反復の際の Chebyshev 多項式の項数) の決定

- 数値実験からの経験則によれば (現在, 理論的推定式はない),

$$N_{\text{opt}} \sim CH(-\log_{10} \delta)$$

where H : 積分期間, δ : 必要精度

- C : 離心率と共に単調増加, 円軌道 $C \sim 1$
- n 回目の反復での $N^{(n)}$:

$$N^{(n)} = \min\left(\frac{nH}{\pi}, N_{\text{opt}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$N_{\text{opt}} = \min M, \quad \sum_{i=M+1}^N \leq \delta$$

計算方法 7

- 計算収束の判定条件:

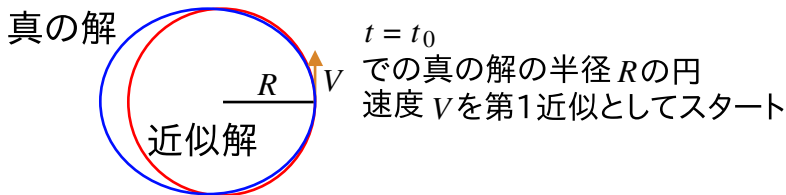
$$\begin{aligned}\|\Delta x^{(n)}\| &\equiv \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \\ &= \sum_{j=0}^{N^{(n-1)}} |X_j^{(n)} - X_j^{(n-1)}| + \sum_{j=N^{(n-1)+1}}^{N^{(n)}} |X_j^n|\end{aligned}$$

が要求精度に達したら計算終了

- 第2項目の和: $n-1 \rightarrow n$ で $X_j^{(n)}$ の計算で増加した次数分の加算
- 三角関数をストアして効率的に計算する
 - 計算時間, 丸め誤差軽減のため

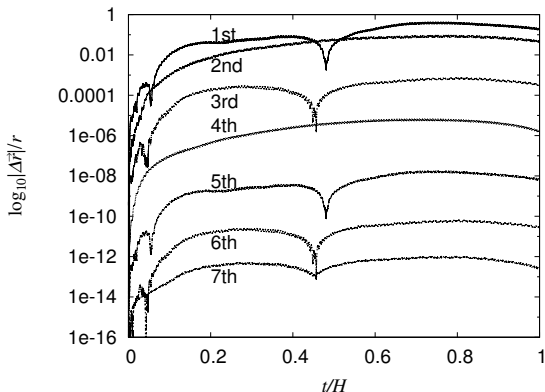
Picard-Chebyshev 法の Kepler 問題への応用

- まずは無摂動 Kepler 問題 (2 体問題)
- Fukusima 1997 では摂動調和振動子問題のみ
- Kepler 問題の第 1 近似は？ → 円軌道



Positional Error 1

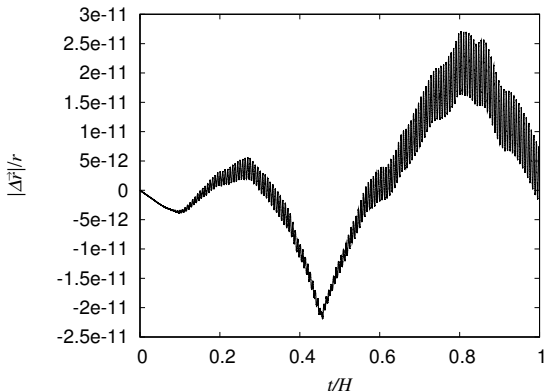
$a = 1, e = 0.1, i = 0, 100 \text{ Rev.}$



7回目の反復で収束

Positional Error 2

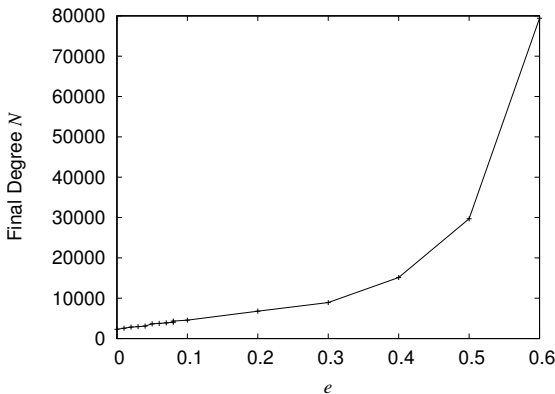
$a = 1, e = 0.1, i = 0, 100 \text{ Rev.}$



最終反復 (7 回目) の誤差のリアプロット

e - N 関係

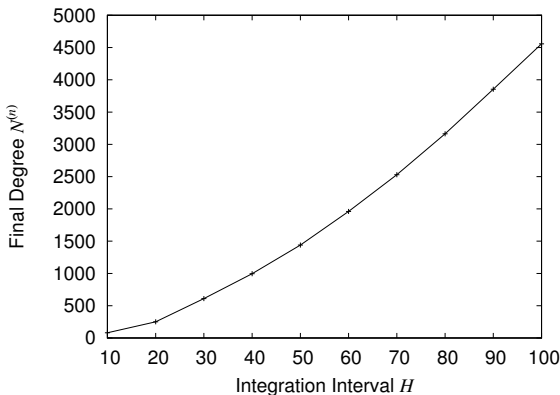
離心率と最終的な Chebychev 多項式の項数の関係



$e = 0.6$ 程度が収束限界, これ以上では解が収束せず

H - N 関係

積分期間 H と最終的な Chebychev 多項式の項数の関係

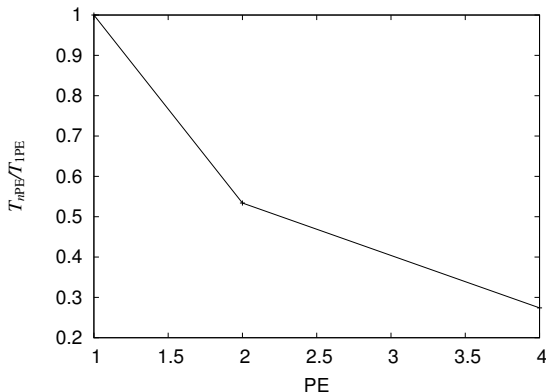


Picard-Chebyshev 法のベクトル化・並列化 1

- Picard-Chebyshev 法は長大な配列を扱う
- $F_j \rightarrow X_j$ の計算
 - 計算時間がかかる部分
 - 回帰参照がない → ベクトル化可能
 - 並列化でさらに高速化可能
- VPP 5000 @ ADAC/NAOJ
- C + MPI で並列化

Picard-Chebyshev 法のベクトル化・並列化 2

概ね用いる PE 数に反比例して計算時間が短縮



まとめと課題

まとめ

- Picard-Chebyshev 法を軌道運動へ応用
- 一応無摂動 Kepler 問題は解ける
- しかし，離心率が大きくなると収束出来ない
 - 初期値として円軌道を用いる事の限界？
 - 各反復時に用いる項数 N の決定公式が必要かも？
- ベクトル・並列計算機向きの方法である

課題

- 無摂動 Kepler 問題から摂動問題へ
 - 現在コード構築中：まずは3体問題から
- 各反復で確保する多項式数 N の決定公式の導出
 - 軌道運動，回転運動，調和振動子
- 超長期積分と分割多項式近似の考察
 - 長期間積分では区間分割が望ましいだろう