

4次元シンプレクティックマップでの低次元共鳴島構造

Analytical Expression for Low-Dimensional Resonance Islands in a 4-dimensional Symplectic Map[1]

京都大学 情報学研究科 数理工学専攻 後藤 振一郎 (GOTO Shin-itiro)

概要 (abstract)

We study a 4-dimensional nearly integrable symplectic map using a singular perturbation method. Resonance island structures in the 4-dimensional map is obtained. The validity of this perturbative result is confirmed numerically.[1]

1 はじめに

カオス的大自由度ハミルトン系の研究は、力学系の一つの重要なクラスとしての興味の対象となるだけでなく、沢山の応用がある。例えば、化学反応系、プラズマ系、太陽系、などが挙げられる。この種の多自由度系は重要であるにも関わらず、ハミルトニアンから生成されるハミルトンフローの相空間大域的な様子を知るのはその高次元性により非常に困難である。低自由度系においては、相空間内のフローは可視化されるので、その類推を高次元系にも適用しがちだが、その憶測に保証は無い。

相空間大域的なハミルトンカオスの起源は共鳴構造の重なりである [2]。このため、ハミルトンカオスの基礎的問題の一つとして、共鳴島構造の何らかの意味での評価が挙げられる。高次元相空間における共鳴島の大きさや配置を確定するため、この研究では特異摂動法を用いる。「良い」特異摂動法を用いることさえできれば、摂動法の処方箋に従い、幾何学的情報に頼らずに研究を実行できる。それゆえ、高次元系でも近似ではあるが、有効な「共鳴島構造の関数形」を得ることが期待できる。

この論文では、高次元の近可積分ハミルトン力学系の相空間内の共鳴島構造がどのように出現するかを具体的に調べることを目標にする。その際、「くりこみ法」と呼ばれる特異摂動法を用いる。この方法には幾つかの流派が存在するが [3, 4, 5, 6, 7]、その全ての流派において単純なスモールパラメーターの冪の形で解を求める正則摂動解に含まれる発散項や永年項を系統的に処理する。また考察対象とする弱非線形問題の詳細に依らずに摂動計算が実行できる。この論文で取り扱うくりこみ法は、微分方程式系のみならず [7, 8]、カオス的離散力学系にも適用できる形で拡張される [9]。この拡張されたくりこみ法を用いて、この論文では 4 次元シンプレクティックマップ系を解析する。具体的には、Froeschlé map [10] と呼ばれるマップの特に近可積分領域を取り扱う。なお、論文 [1] においては standard map の解析も取り上げているので参照されたい。また、特異摂動法として知られる「多重スケール法」を離散系へ拡張することにより、standard map の共鳴島の関数形を摂動論的に決定する研究が論文 [11] に示されていることもここに挙げておく。

2 The Froeschlé map の低次元共鳴島の摂動論的記述

ここで研究するマップは Froeschlé map と呼ばれる 4 次元マップ $(x_1^n, x_2^n, y_1^n, y_2^n) \mapsto (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, y_1^{n+1}, y_2^{n+1})$, でシンプレクティック性 $(\sum_{j=1}^2 dx_j^{n+1} \wedge dy_j^{n+1} = \sum_{j=1}^2 dx_j^n \wedge dy_j^n)$, を有し, 以下のように定義する [10],

$$\begin{aligned} y_1^{n+1} &= y_1^n + \frac{\varepsilon A_1}{2\pi} \sin(2\pi x_1^n) + \frac{\varepsilon C}{2\pi} \sin(2\pi(x_1^n + x_2^n)), \quad (\text{mod } 1) \\ y_2^{n+1} &= y_2^n + \frac{\varepsilon A_2}{2\pi} \sin(2\pi x_2^n) + \frac{\varepsilon C}{2\pi} \sin(2\pi(x_1^n + x_2^n)), \quad (\text{mod } 1) \\ x_1^{n+1} &= x_1^n + y_1^{n+1}, \quad (\text{mod } 1) \\ x_2^{n+1} &= x_2^n + y_2^{n+1}. \quad (\text{mod } 1) \end{aligned}$$

ここで, $n \in \mathbb{Z}$ は離散時間を表し, x_1^n, x_2^n, y_1^n 及び y_2^n は $[0, 1)$ で定義された正準変数である. A_1, A_2 及び C はパラメーターで ε ($0 < |\varepsilon| \ll 1$) が摂動パラメーターである. Froeschlé map は 4 次元マップの一例として Arnold 拡散 [2] の数値的研究に用いられてきた [12]. y_1^n 及び y_2^n 変数を消去して以下の形に方程式を変形することが出来る,

$$Lx_j^n = \frac{\varepsilon A_j}{2\pi} \sin(2\pi x_j^n) + \frac{\varepsilon C}{2\pi} \sin(2\pi(x_1^n + x_2^n)), \quad (\text{mod } 1) \quad (j = 1, 2)$$

ここで $Lx_j^n := x_j^{n+1} - 2x_j^n + x_j^{n-1}$, ($j = 1, 2$). 正則摂動解, つまり ε の冪で順次解を近似して行く近似解, $x_j^n = x_j^{(0)n} + \varepsilon x_j^{(1)n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ($j = 1, 2$) は次のような方程式系を解くことにより順次求まる.

$$\begin{aligned} Lx_j^{(0)n} &= 0, \quad (\text{mod } 1) \quad (j = 1, 2) \\ Lx_j^{(1)n} &= \frac{A_j}{2\pi} \sin(2\pi x_j^{(0)n}) + \frac{C}{2\pi} \sin(2\pi(x_1^{(0)n} + x_2^{(0)n})). \quad (\text{mod } 1) \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

無摂動系の解, $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ での解 $x_j^{(0)n}$, ($j = 1, 2$), は $x_j^{(0)} = a_j + nP_j$, である. ここで a_j と P_j は $[0, 1)$ に値をとる積分定数である. P_1 と P_2 の値は無摂動系での運動量座標値を表す: $y_1^{(0)n} = P_1, y_2^{(0)n} = P_2$. 正則摂動解は P_1 と P_2 の値によって $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ の近似では 5 つの場合に分類される.

$$\begin{aligned} x_j^n &= a_j + nP_j + \varepsilon \left(\frac{A_j}{4\pi} \frac{\sin(2\pi(a_j + nP_j))}{\cos(2\pi P_j) - 1} + \frac{C}{4\pi} \frac{\sin(2\pi(a_1 + nP_1) + 2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi(P_1 + P_2)) - 1} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{mod } 1) \quad (P_1 \neq 0, P_2 \neq 0, P_1 + P_2 \neq 0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_j^n &= a_j + nP_j + \varepsilon \left(\frac{A_j}{4\pi} \frac{\sin(2\pi(a_j + nP_j))}{\cos(2\pi P_j) - 1} + \frac{C}{4\pi} n^2 \sin(2\pi(a_1 + a_2)) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{mod } 1) \quad (P_1 \neq 0, P_2 \neq 0, P_1 + P_2 = 0) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_j^n &= a_j + \varepsilon \left(\frac{A_j}{4\pi} n^2 \sin(2\pi a_j) + \frac{C}{4\pi} n^2 \sin(2\pi(a_1 + a_2)) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{mod } 1) \quad (P_1 = 0, P_2 = 0) \end{aligned} \quad (3)$$

また, $P_1 = 0, P_2 \neq 0$ の解は

$$\begin{aligned} x_1^n &= a_1 + \varepsilon \left(\frac{A_1}{4\pi} n^2 \sin(2\pi a_1) + \frac{C}{4\pi} \frac{\sin(2\pi a_1 + 2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{mod } 1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_2^n &= a_2 + nP_2 + \varepsilon \left(\frac{A_2}{4\pi} \frac{\sin(2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{4\pi} \frac{\sin(2\pi a_1 + 2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{mod } 1) \end{aligned} \quad (5)$$

と計算される. $P_1 \neq 0, P_2 = 0$ での解は式 (4) 及び (5) において変数や積分定数の添字 1 と 2 を入れ換えることによって得られる. この論文では数値的に比較が容易な低次元共鳴島, すなわち低次元マップで記述される

共鳴島, に注目するものとする. 式 (1) から, この場合, $P_1 = P_2 = 0$, においてはこの摂動展開の次数の範囲では永年項が生じていないので共鳴島が生じない事が予想される. 次に 式 (2) 及び (3) の場合は 4 次元マップで記述される共鳴島構造が存在する事が予想される. 今回の研究では具体的には $P_1 = 0, P_2 \neq 0$ の場合に関して考察を行う. この場合は 2 次元共鳴島構造が存在する事が永年項の出現の仕方から予想できる. 永年項は式 (4) において ($\propto \varepsilon n^2$) の形で生じているが, 式 (5) においては生じていない. 式 (4) の永年項を消去するために, 次のようにくりこみ変数を定義する.

$$a_1^n := a_1 + \varepsilon \frac{A_1}{4\pi} n^2 \sin(2\pi a_1). \quad (6)$$

くりこみ変数 a_1^n は 定義 (6) により, 無摂動系の解に付随する積分定数と永年項より構成されている. ここでのくりこみ変数の定義の仕方は微分方程式の場合と全く同様である [7]. くりこみ変数 a_1^n が永年項による発散を吸収してくれるものと期待し, かつ, n と ε の低次項は正則摂動解に一致するような, a_1^n が満たすべき方程式を「くりこみマップ」と呼ぶことにする. ここで, そのくりこみマップを以下のように構成する. (i) くりこみ変数の定義 (6) の両辺に左から L 演算子を作用させる, (ii) 次に $a_1 = a_1^n + \mathcal{O}(\varepsilon^1)$ の関係を使って a_1^n に関して閉じたマップを構成する, すなわち,

$$La_1^n = L\left(a_1 + \varepsilon \frac{A_1}{4\pi} n^2 \sin(2\pi a_1)\right) = \varepsilon \frac{A_1}{2\pi} \sin(2\pi a_1) = \varepsilon \frac{A_1}{2\pi} \sin(2\pi a_1^n) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

以上のようにして, $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ の範囲で a_1^n が従うべきマップ, くりこみマップが構成された. この近似の範囲でくりこみマップは結局,

$$La_1^n = \varepsilon \frac{A_1}{2\pi} \sin(2\pi a_1^n), \quad (7)$$

である. くりこみマップ (7) は standard map となっている事に注意されたい. また standard map のくりこみマップは本質的に standard map である [1, 11].

式 (4)-(6) より, くりこみ変数 a_1^n と (x_1^n, x_2^n) の間の関係を得る:

$$x_1^n = a_1^n + \varepsilon \frac{C}{4\pi} \frac{\sin(2\pi a_1^n + 2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{mod } 1) \quad (8)$$

$$x_2^n = a_2 + nP_2 + \varepsilon \left(\frac{A_2}{4\pi} \frac{\sin(2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} + \frac{C}{4\pi} \frac{\sin(2\pi a_1^n + 2\pi(a_2 + nP_2))}{\cos(2\pi P_2) - 1} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{mod } 1) \quad (9)$$

他の変数 y_1^n 及び y_2^n はそれぞれ $y_1^n = x_1^n - x_1^{n-1}$ と $y_2^n = x_2^n - x_2^{n-1}$ により得られる. くりこみマップ (7) の不安定多様体が (x_1, x_2, y_1, y_2) 空間で不安定多様体になる. 図 1 に示すように, Froeschlé map の iteration とくりこみマップの iteration を比較した結果, 我々のくりこみ法による低次元共鳴島の解析的予言は少なくとも定性的には正しいと言えよう. 我々は Froeschlé map の近似的低次元共鳴島構造を予言することができた. 他の P_1, P_2 の値の場合も同様であろう. なお, この手法の有効範囲に関する議論は論文 [1] にあるので参照されたい.

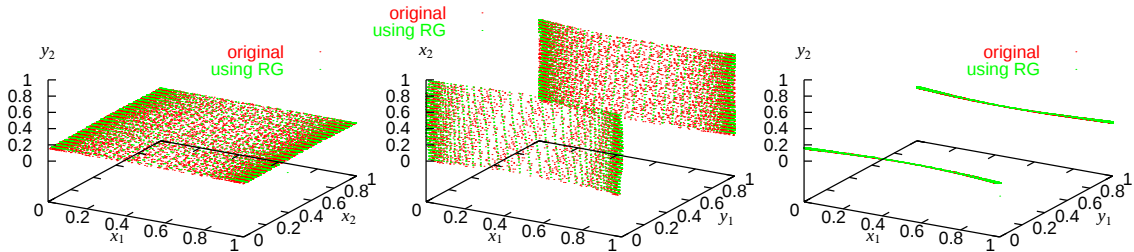


Fig.1. The phase portrait near the resonance island characterized by $P_1 = 0, P_2 \neq 0$. The parameter values are $P_2 = 0.16(\neq 0), \varepsilon A_1 = 0.02, \varepsilon A_2 = 0.025, \varepsilon C = 0.01$. Red points in the Figs. were obtained with the original Froeschlé map, and green ones were obtained with the renormalization map.

3 結語

この論文において、我々は 4 次元シンプレクティックマップにおいて共鳴島構造を記述するマップを特異摂動法の一つである「くりこみ法」で簡約し、その有効性も数値的に確認した。この研究では、低次元共鳴島構造がどのように出現するかを Froeschlé map 系の近可積分パラメーター領域で示した。我々のここでの手法は、Froeschlé map より広いクラスのシンプレクティックマップに適用できるので、高自由度近可積分ハミルトン系の振舞を解明する手法の一つとして有用であろう。

謝辞

著者、後藤振一郎は日本学術振興会・特別研究員制度の支援を受けて研究を行ないました。なお、著者がお世話になっている京都大学情報学研究科数理工学専攻力学系理論分野のメンバーの方々には有益なコメントや暖かい励ましを頂きました。著者は研究の機会及び支援を与えて頂いた関係各位に感謝します。

参考文献

- [1] S. Goto,
“Analytical Expression for Low-Dimensional Resonance Islands in a 4-dimensional Symplectic Map”,
Prog. Theor. Phys. **115**, (2006), 251–258.
- [2] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman,
“*Regular and Chaotic Dynamics*”, Springer, (1991).
- [3] L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono,
“Renormalization Group Theory for Global Asymptotic Analysis”,
Phys. Rev. Lett. **73** (1994), 1311–1315.
L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono,
“Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory”,
Phys. Rev. E **54** (1996), 376–394.
- [4] Y. Oono,
“RENORMALIZATION AND ASYMPTOTICS”,
Int. J. Mod. Phys. B **14** (2000), 1327–1361.
- [5] T. Kunihiro,
“A General Foundation of the Renormalization Group Method for Global Analysis”,
Prog. Theor. Phys. **94** (1995), 503–514.
T. Kunihiro,
“The Renormalization-Group Method Applied to Asymptotic Analysis of Vector Field”,
Prog. Theor. Phys. **97** (1997), 179–200.
T. Kunihiro and J. Matsukidaira,
“Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method”,
Phys. Rev. E **57** (1998), 4817–4820.
- [6] S-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro,
“Renormalization-Group Method for Reduction of Evolution Equations; Invariant manifolds and Envelopes”,
Annals of Phys. **280** (2000), 236–298.
- [7] S. Goto, Y. Masutomi and K. Nozaki,
“Lie-Group Approach to Perturbative Renormalization Group Method”,
Prog. Theor. Phys. **102** (1999), 471–497.
- [8] Y. Masutomi and K. Nozaki,
“Derivation of non-isotropic phase equations from a general reaction-diffusion problem”,
Physica D **151** (2001), 44–60.

- S. Kawaguchi,
 “Application of the Perturbative Renormalization Group Method Based on the Lie Group to Pulse Dynamics”,
Prog. Theor. Phys. **113** (2005), 687–720.
- [9] S. Goto and K. Nozaki,
 “Asymptotic Expansions of Unstable and Stable Manifolds in Time-Discrete Systems”,
Prog. Theor. Phys. **105** (2001), 99–107.
- S. Goto and K. Nozaki,
 “Regularized Renormalization Group Reduction of Symplectic Maps”,
J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001), 49–54.
- S. Goto, K. Nozaki and H. Yamada,
 “Random Wandering around Homoclinic-Like Manifolds in a Symplectic Map Chain”,
Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 637–654.
- S. I. Tzenov and R. C. Davidson,
 “Renormalization group reduction of the Hénon map and application to the transverse betatron motion in cyclic accelerators”,
New J. Phys. **5** (2003), 67.
- S. Goto and K. Nozaki,
 “Liouville operator approach to symplecticity-preserving renormalization group method”,
Physica D **194** (2004), 175–186.
- T. Maruo, S. Goto and K. Nozaki,
 “Renormalization Analysis of Resonance Structure in a 2-D Symplectic Map”,
Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 463–474.
- 後藤振一郎,
 『ハミルトン系に対するくりこみの方法と運動の簡約』,
 数理解析研究所講究録 **1282** (2002), pp121–141.
- 後藤振一郎, 野崎一洋,
 “Liouville Operator approach to Symplecticity-Preserving RG Method”,
 数理解析研究所講究録 **1386** (2004), 102–116.
- 後藤振一郎,
 『シンプレクティックマップにおける共鳴島構造の摂動論による抽出』,
 数理解析研究所講究録 **1408** (2005), 159–178.
- [10] C. Froeshlé,
 “On the Number of Isolating Integrals in Systems with Three Degrees of Freedom”,
Astrophys. Space Sci. **14** (1971), 110–117.
- [11] D. S. Broomhead and G. Rowlands,
 “On the analytical treatment of non-integrable difference equations”,
J. of Phys. A **16** (1983), 9–24.
- [12] For example,
 B. P. Wood, A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman,
 “Arnold diffusion in weakly coupled standard maps”,
Phys. Rev. A **42** (1990), 5885–5893.
- S. Honjo and K. Kaneko,
 “Structure of Resonance and Transport in Multi-dimensional Hamiltonian Dynamical Systems”,
Adv. Chem. Phys. **130**, part B (2005), 437–463.