

The Origin of Planetary Impactors in the Inner Solar System

Robert G. Strom¹, Renu Malhotra¹, Takashi Ito², Fumi Yoshida², and David Kring¹

ABSTRACT

The impact crater record of the terrestrial planets and the Moon is owed to two populations of impactors that are distinct in their size distributions. We show that the ‘old’ population, responsible for an intense period of bombardment that ended 3.8 Gigayears ago, is virtually identical in size distribution to the present main belt asteroids; the second population, responsible for craters younger than 3.8 Gy, matches closely the size distribution of the near earth asteroids. These results confirm that an inner Solar System impact cataclysm occurred 3.9 Gy ago, and also provide compelling new evidence that identifies the main asteroid belt as the source of the impactors. A plausible dynamical explanation is that many asteroids were ejected from the main belt on a dynamical timescale by sweeping gravitational resonances during an epoch of orbital migration of the giant planets in early Solar System history. The impactors in the inner Solar System over the past 3.8 Gy are also derived from the asteroid belt, but by a combination of chaotic gravitational resonances and non-gravitational processes; the latter process being size-dependent, yields a size distribution quite distinct from the purely gravitational process that caused the cataclysm 3.9 Gy ago. Several important implications for the evolution of asteroids, for planetary geology, and for the origin and history of the Solar System follow from these results.

1. Introduction

The Moon and all the terrestrial planets were resurfaced during a period of intense impact cratering that occurred between the time of their accretion, ~ 4.5 Gigayears ago (Ga), and the time of formation of the Orientale multi-ring basin on the Moon, the last great basin-forming impact event, ~ 3.85 Ga. The lunar cratering record and the radiometrically dated Apollo samples have shown that the intense bombardment of the Moon ended at ~ 3.85 Ga; the impact flux since

¹Lunar and Planetary Laboratory, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA.

²National Astronomical Observatory, Osawa, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan.

Submitted for publication to Science, April 12, 2005.

Correspondence should be addressed to Renu Malhotra, email: renu@lpl.arizona.edu

that time to the present has been at least an order of magnitude smaller. The 3.85 Ga epoch might represent the final end of an era of steadily declining large impacts (the tail end of the accretion of the planets). However, it has been argued that only a sudden injection of impacting objects into the terrestrial planet zone accounts for the abrupt end of the intense bombardment; thus, this event has been named the Late Heavy Bombardment (LHB), or sometimes the Lunar Cataclysm, to distinguish it from the prior final accretion of the planets at 4.5 Ga. Specifically, the lunar cataclysm hypothesis (1,2) postulates that the intense bombardment of the Moon lasted only a very short period of time, 20-200 My (2-5). Recent results on the impact ages of lunar meteorites (which represent a much broader region of the lunar surface than the Apollo samples) support this hypothesis (6-8). Furthermore, the impact-reset ages of meteoritic samples of asteroids (9-10) and the shock-metamorphosing at 3.92 Ga of the only known sample of the heavily cratered highlands of Mars, meteorite Alan Hills 84001 (11) indicate that the LHB affected the entire inner Solar System, not just the Moon.

Identifying the sources of planetary impactors has proven elusive. Dynamical models invoking both geocentric and heliocentric debris and both asteroidal and cometary reservoirs have been proposed (12), but recent chemical analyses of Apollo impact melts point to a dominantly asteroid reservoir for the lunar cataclysm (10). In this paper, we provide compelling new evidence that the source of the LHB impactors was the main asteroid belt, that the dynamical mechanism that caused the LHB was unique in the history of the Solar System and distinct from the processes producing the flux of objects that currently hit planetary surfaces. A potentially unifying theory that explains many features of the outer Solar System as well as the LHB event, is to be found in the recent recognition that the giant planets underwent an epoch of orbital migration early in their history (13-18). We point out several important implications for the evolution of small body reservoirs in the solar system, as well as for planetary geology and for the origin and history of the Solar System.

2. The Terrestrial Planet Cratering Record

It is often implied that the crater size distribution has been the same throughout Solar System history, and that it is found on all rocky planet surfaces regardless of age (e.g., *ref. 17*). However, examining the oldest surfaces on the Moon, Mercury, and Mars, one finds a cratering record that is distinct in its size distribution from the crater record on the younger areas on those planets and on Venus.

Figure 1 shows the crater size distributions (20) of various surface units on the Moon, Mars and Mercury, based on published data in (21-22) supplemented by new crater counts. The uppermost curves represent the most heavily cratered surface units, and the lower curves are for progressively less densely cratered surfaces. In the progression from the uppermost curves to the lowermost curves, we can recognize a qualitative change in the shapes of the curves. We discuss these in more detail below.

Heavily Cratered Surfaces

Of the terrestrial planets, only the Moon, Mercury and Mars have heavily cratered surfaces. The heavily cratered highlands all have complex size distributions, as seen in Fig. 1. For the Moon, the curve slopes downward to the left (with a differential power law of index $p = -2.2$) at diameters less than about 50 km, a nearly flat ($p = -3$) portion between 50 and 100 km, and sloping downward to the right ($p \approx -4$) at diameters between about 100 km to 300 km. The curve may slope upward at diameters greater than about 400 km, but the statistics are too poor at these large diameters to be sure. The curves for Mercury and Mars are steeper than the lunar curve at diameters less than about 40 km. This is due to the obliteration of a fraction of the craters by intercrater plains formation. Intercrater plains are common on Mercury and Mars, but are very scarce on the Moon. Therefore, the lunar highlands curve best represents the shape of what we shall call the Population 1 crater size distribution.

In addition to the highlands, the crater curves for Martian old plains east of the Tharsis region, old plains within the Helles basin and plains within and surrounding the Caloris basin on Mercury also have the same shape as the lunar highland curve over the same diameter range, but with a lower crater density (23). The similar shape to the lunar highlands curve strongly indicates that Mars’ and Mercury’s highlands have been affected by intercrater plains formation, but not the Moon. The lower crater densities imply that these older plains probably formed near the tail end of the LHB, about 3.8 billion years ago.

Young Lightly Cratered Plains

The lowest crater curves in Fig. 1 are flat and distinctly different than the heavily cratered surfaces described above. These include the lightly cratered, hence younger, plains on Mars and the Moon, as well as Class 1 craters on the Moon. (Class 1 craters are relatively fresh craters with non-degraded morphologies, sharp rims, and well-defined ejecta blankets; all post-Mare craters are Class 1 craters.)

The Northern plains on Mars have a crater size distribution that is a horizontal line on the R plot, from about 100 km down to at least 2 km diameter. This size distribution is characteristic of what we shall call the Population 2 craters.³ There is also evidence for Population 2 on the Moon. The Class I craters, which are distributed all over the Moon, have a flat distribution on the R plot, similar to the young plains on Mars. The post-mare crater curve has a saw-tooth shape characteristic of poor statistics; however, within the large error bars the distribution is consistent with Population 2 but inconsistent with the lunar highlands curve.

Figure 2 shows the crater size distribution on Venus compared to the Northern Plains of Mars. Notice that the crater density on Venus is about an order of magnitude less than on Mars. Only

³At diameters less than about 1 to 1.5 km the curve steepens sharply to a $p \approx -4$ distribution. This part of the crater size distribution is dominated by secondary impacts and does not represent the crater production size distribution (24).

young craters are present because of multiple global resurfacing events (25). Furthermore, the Venus crater curve at smaller diameters is severely affected by atmospheric screening due to Venus’ thick 90 bar atmosphere (26); this explains the sharp downturn at diameters less than about 25 km. At larger diameters it is a horizontal line on the R plot, similar to Population 2 on the Moon and Mars shown in Figure 1.

Part of the Venus crater population consists of clusters of craters (multiples) that result from fragmentation of the impacting object in the dense atmosphere. These comprise 16% of all Venus craters. The size distribution of these multiples is also shown in Fig. 2, where the diameter is derived from the sum of the crater areas in the cluster. Multiples are probably due to stronger projectiles that could resist atmospheric disintegration better than most other impacting objects, but still weak enough that they broke up in the atmosphere. The turnover of the curve for multiple craters does not occur until diameters less than 9 km; at larger diameters the curve is flat. This, together with the much lower crater density, strongly suggests that the impacting population on Venus was the same as Population 2 on the Moon and Mars. It is also evidence that the turnover of the crater curve is indeed due to atmospheric screening.

Figure 3 summarizes the two characteristic shapes of the crater curves in the inner Solar System, those of the heavily cratered highlands and old cratered plains, and those of the younger lightly cratered plains. (The Venus curve is a composite of the production population for all craters greater than 9 km, including multiples in the range of 9–25 km diameter.) We conclude that the terrestrial planets have been impacted by two populations of objects that are distinguishable by their size distributions. Population 1 is responsible for the LHB, and Population 2 is responsible for the post-LHB period and up to the present time.

3. Projectile Size Distributions

A number of studies on the physics of impact cratering on solid bodies have derived projectile-crater scaling laws. We used the Pi scaling law (27) to derive the projectile size distribution for Population 1 and Population 2 impactors. We used the lunar highland crater curves as representative of Population 1, and the Martian young plains as representative of Population 2, as these provide the best crater statistics. (We did not use the data for diameters greater than 500 km, because statistics there is very poor.) We assumed projectile parameters appropriate for asteroidal impacts: density of 3 g cm^{-3} (similar to basaltic rock), an average impact angle of 45° and average impact velocities of 17 km s^{-1} and 7 km s^{-1} on the Moon and on Mars, respectively. The resulting projectile size distributions are shown in Fig. 4.

Also shown in Fig. 4 are recent determinations of the size distributions of the Main Belt asteroids (MBAs) and Near Earth Asteroids (NEAs). (The vertical positions of these curves are arbitrary, and were selected for clarity of comparison with the projectile size distributions.) The MBA size distributions come from three sources: the Subaru main belt survey (28), the Spacewatch

survey (29), and the Sloan Digital Sky Survey (30). The NEA size distribution is from the bias-corrected LINEAR survey (31). (Detailed descriptions of the techniques used in deriving the size distributions from the observational counts are given in the references cited.)

The comparison of the Population 1 and Population 2 projectile size distributions with the main asteroid belt and near earth asteroid populations leads to several significant conclusions.

First, the size distribution of the current MBAs is virtually identical to the Population 1 projectile size distribution. This was also pointed out in reference (32). It strongly indicates that the objects responsible for the LHB originated from Main Belt asteroids. (Unless comets or Kuiper belt objects have the same size distribution, these objects could not have been significant contributors to the LHB.) This conclusion is consistent with the orbital constraints imposed by a comparison of Population 1 crater curves of the Moon, Mars and Mercury (21).

Second, the close match between the current MBA size distribution and that of the LHB projectiles implies that the main asteroid belt has remained unchanged in its size distribution over the past 3.8 Gy. There are two possible interpretations: either collisional processes produced a steady-state size distribution in the main asteroid belt at least as early as 3.8 Ga, or the collision frequency in the main asteroid belt was drastically reduced around 3.8 Ga so that little or no further evolution of its size distribution has occurred since that time.

Third, the LHB mechanism responsible for ejecting asteroids from the main asteroid belt and into terrestrial planet-crossing orbits had to be unique to the early Solar System (the first 700 My of Solar System history), because there is no evidence for any subsequent event of similar magnitude in the inner planets' cratering history since then.

Fourth, that mechanism had to be one that ejected asteroids from the main belt in a size-independent manner, preserving the MBA size distribution in the inner planet impactor population. This precludes size-dependent non-gravitational transport processes, such as the *Yarkovsky effect* recently prominent in studies of the origin of NEAs (discussed below), and instead implicates a dynamical process, such as sweeping gravitational resonances, that was largely insensitive to asteroid mass. We discuss this mechanism in more detail in the next section.

Fifth, with regard to Population 2, we see from Fig. 4 that the size distribution of projectiles responsible for the post-LHB crater records (3.8 Ga to the present) is the same as that of the NEAs and quite different from that of the LHB projectiles. The fit between Population 2 and NEAs is remarkably good. This result is contrary to the findings in (33).

A plausible reason that the MBAs and the NEAs have such a different size distribution, even though the latter population is most probably derived from the former, is the Yarkovsky effect which causes secular changes in orbital energy of an asteroid due to the asymmetric way a spinning asteroid absorbs and reradiates solar energy (34). Over a few tens of millions of years the effect is large enough to transport a significant number of sub-20 km size asteroids into strong Jovian resonances (35); the latter then deliver them into terrestrial planet-crossing orbits. The magnitude

of the effect depends on the size of the asteroid: for diameters greater than about 10 m, the smaller the asteroid the larger the effect. This explains why the NEAs (Population 2 projectiles) have relatively more small objects compared to MBAs.

4. Dynamical Mechanism for the Late Heavy Bombardment

That the Population I projectiles have the same size distribution as the MBAs implicates an asteroid transport mechanism which has the following two properties: (a) it preserves the main belt size distribution, and (b) it must be a one-time event that occurred early in Solar System history. The former constraint, rules out physical transport mechanisms that have any significant dependence on the asteroid size, and instead indicates a dynamical (gravitational) transport mechanism that excites asteroid orbits directly into terrestrial planet crossing orbits, independent of asteroid size. The second constraint suggests a non-repeating circumstance in the Solar System. A plausible mechanism that satisfies these constraints is associated with the orbital migration of the outer planets (Jupiter–Neptune), which is thought to have occurred on a timescale of 10^7 – 10^8 years in the early history of the Solar System (*15,16*).

A rearrangement of the orbits of the outer planets would have had significant effects on the inner Solar System. The outer asteroid belt would have been severely depleted due to orbital instabilities that ensue as strong Jovian mean motion resonances sweep across this zone (*17*); indeed, this is possibly the only viable explanation for the absence of asteroids in a range of semimajor axes where dynamical stability arguments would otherwise argue for a large population of asteroids in long-term stable orbits. Levison et al. (*18*) suggested that the orbital migration of the outer planets would have caused the Moon and the other terrestrial planets to be intensely bombarded for a period of 10–100 Myr. Such bombardment would have to be considered cataclysmic on a geologic time scale. If giant planet migration is the correct explanation for the LHB, then it must be shown to be consistent both with the timing of the LHB, and with the provenance of the LHB impactors.

The timing of the LHB at 3.8–3.9 Ga provides a strong constraint on the timing of the planet migration process and on the timescale for the formation of Uranus and Neptune. This is because the migration of the giant planets begins only when Neptune and Uranus accrete a significant fraction of their mass, large enough to cause the large-scale mobilization of outer solar system residual planetesimals. The fraction may be on the order of 30% of their present mass, although detailed studies have yet to be done. Thus, one major inference from linking the LHB to the migration of the planets is that Uranus and Neptune accreted approximately 600 Myr after the formation of the other major planets. This timescale constraint has significant implications for theories of Uranus–Neptune formation that have long been plagued with difficulties (*36,37*).

Regarding the provenance of the LHB impactors, we note that the giant planet migration process is due to the large-scale scattering of residual outer Solar System planetesimals (which are ice-rich bodies), but it also leads to a large-scale perturbation of inner solar system planetesimals

(rocky asteroids) due to the sweeping by Jovian mean motion and secular resonances. Thus, in this model, the bombardment of the inner solar system would be due to a combination of icy outer solar system planetesimals and rocky asteroids; uncertainties in the model parameters allow room for different relative abundances of these impactor populations. Our results strongly constrain this model, as we show that the MBAs were the dominant impactors in the inner solar system during the LHB era.

One of the strongest resonances for the transport of MBAs to the terrestrial planets at the present epoch is the secular ν_6 resonance which is associated with the mean apsidal precession rate of Saturn. The ν_6 resonance, located at the inner edge of the main asteroid belt, at 2.1 AU, excites asteroid eccentricities to nearly 1 on a timescale of 10^6 Myr (38), and is thought to be a major supply route for sun-grazing asteroids as well as NEAs originating in the main asteroid belt (39). The location and dynamics of this resonance is determined primarily by the secular interaction of Jupiter and Saturn. Therefore, it is interesting to consider how the location of this resonance would have shifted during the orbital migration of the giant planets. Classical secular perturbation theory for two planets (40) can be used to determine the past locations of this resonance provided one knows the initial (pre-migration) orbital eccentricities and semimajor axes of Jupiter and Saturn. Numerical simulations suggest that planetary orbital eccentricities do not vary significantly during migration (16), so we can reasonably adopt the present values of the planetary eccentricities. An estimate of 0.45 AU inward migration of Jupiter’s semimajor axis has been obtained from the orbital distribution of the Hilda asteroids (41). The initial (pre-migration) semimajor axis of Saturn is, however, not very well constrained. For plausible values in the range of ± 2 AU for the net migration of Saturn, we calculate that the sweeping of the ν_6 could range from just a very small zone near its present location (at the inner edge of the main belt) to almost across the entire main belt. Thus the LHB impactors could, in principle, have originated from either a narrow region near the inner edge or indeed the entire asteroid belt. Because a strong radial compositional gradient exists in the main asteroid belt (42), it is possible that chemical analyses of LHB craters could identify more precisely within the main asteroid belt the provenance of the impactors, and thereby constrain the migration history of Saturn. This may also be possible using the MBA size distribution alone, if there were a radial variation of size distribution of the MBAs.

5. Dating Planetary Surfaces by the Cratering Record

There are several important implications for dating planetary surfaces on an absolute time scale using the cratering record. The LHB was a catastrophic event that occurred about 3.9 billion years ago. Therefore, it is not possible to use the cratering record to date surfaces older than 3.9 billion years, as that record has been obliterated by the cataclysmic event. The heavily cratered highlands of the Moon, Mars and Mercury are 3.9 billion years old. Surfaces that show the characteristic Population 1 size distribution but at a lower density than the heavily cratered highlands are probably closer to 3.8 billion years (the end of the LHB). Such surfaces include the

old plains on Mars and possibly the post-Caloris basin surface on Mercury (Fig. 1).

The younger post-LHB surfaces that show the Population 2 size distribution have been impacted primarily by NEAs (Fig. 4). Therefore, the ages of these surfaces can be derived from the crater production rate of NEAs. Because we do not know the comet crater production rate with any certainty, the ages derived from the NEA impacts will be an upper limit.⁴ The exception is Venus, because its crater population is unlikely to include comet impacts, as cometary impactors are likely to have been almost entirely screened out by the thick Venusian atmosphere (43).

Finally, it is important to note that dating surfaces on outer planet satellites using the inner planet cratering record is not valid. Attempts have been made to date outer planet surfaces on an absolute time scale by assuming that the crater population found in the inner Solar System is the same throughout the entire Solar System and has the same origin. But this assumption is false, in light of our results. Indeed, additional evidence to support this conclusion is to be found in the cratering record of the Jovian satellites: Callisto has a crater size distribution distinctly different than both Population 1 and Population 2 craters on the inner planets (44). The differences cannot be accounted for by differences in the impact velocities or target and projectile properties (21). Whatever caused the Callisto crater record did not significantly affect the inner Solar System. The inner planet impactors originated primarily from the asteroid belt, and these would likely be a relatively minor component of the impactor populations for the outer planet satellites.

6. Conclusions

We have demonstrated that the cratering record of the inner planets and the Moon has been caused by two distinct impactor populations that are distinguishable by their size distributions. We have further shown that the old, Late Heavy Bombardment population has a size distribution very similar to that of the current main belt asteroids, whereas the younger, post-LHB population is very similar in size distribution to the present Near Earth Asteroids. Taken together with cosmochemical evidence, these results imply that the origin of the LHB impactors was the dynamical ejection, over a relatively short time interval ~ 100 Myr, of asteroids from the main asteroid belt approximately 600 Myr after the formation of the inner planets; the craters on the inner planets since that time are due to the NEAs whose different size distribution is owed to a combination of non-gravitational effects (the Yarkovsky effect) and Jovian resonances that preferentially deliver smaller asteroids (diameter $\lesssim 20$ km) from the main asteroid belt to planet-crossing orbits. The results also imply that the main asteroid has had its the presently-observed size distribution for at least 3.8 Gy.

The cataclysmic Late Heavy Bombardment event was unique in the history of the Solar System, and quite plausibly the result of asteroids ejected from the main belt by the inward sweeping of

⁴The cometary contribution is likely low, judging by the good match between the NEA and the Population 2 projectile size distributions.

gravitational resonances caused by the orbital migration of the giant planets. The timing of the LHB at about 3.9 Gy ago implies that Uranus and Neptune did not reach critical masses to gravitationally scatter and clear their associated planetesimal debris (and thereby trigger the giant planet migration process) until ~ 600 My after the formation of the other planets. This result resolves a long-standing question on the formation timescale of Uranus and Neptune.

Our results are of major import for planetary geology and the dating of solid planetary surfaces in the inner Solar System. The absolute ages of surfaces older than about 3.9 Gy cannot be determined from the cratering record because that record has been destroyed by the cataclysmic bombardment. Surfaces younger than about 3.8 billion years (the end of the LHB) can be dated by the NEA impact flux at the Moon, Mars, Venus and Mercury. We also note that the lunar and terrestrial planet cratering record provides a poor, and probably misleading, guide for the dating of solid body surfaces in the outer Solar System, such as the satellites of the giant planets.

We acknowledge research support from NASA, NAOJ and JSPS.

REFERENCES

1. Turner, G., P.H. Cadogan, C.J. Yonge, Proc. Fourth Lunar Sci. Conf., 1889–1914, 1973.
2. Tera, F., D.A. Papanastassiou, G.J. Wasserburg, Earth Planet. Sci. Lett., 22, 1–21, 1974.
3. Ryder, G., EOS, Trans. Am. Geophys. Union, 71(10), 313–323, 1990.
4. Dalrymple, G.B., G. Ryder, J. Geophys. Res., 98, 13085–13095, 1993.
5. Dalrymple, G.B., G. Ryder, J. Geophys. Res., 101, 26069–26084, 1996.
6. Cohen, B.A., T.D. Swindle, D.A. Kring, Science, 290, 1754–1756, 2000.
7. Cohen, B.A., T.D. Swindle, D.A. Kring, Meteoritics Planet. Sci., in press, 2005.
8. Daubar, I.J., D.A. Kring, T.D. Swindle, A.J.T. Jull, Meteoritics Planet. Sci., 37, 1797–1813, 2002.
9. Bogard, D.D., Impact ages of meteorites: a synthesis, Meteoritics, 30, 244–268, 1995.
10. Kring, D.A., Cohen, B.A., J. Geophys. Res., 107(E2), pp. 4-1,4–6, 2002.
11. Turner, G., Knott, S.F., Ash, R.D., Gilmour, J.D., *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 61, 3835–3850, 1997.
12. Hartmann, W.K., Ryder, G., Dones, L., Grinspoon, D., in *Origin of the Earth and Moon*, eds. R.M. Canup and K. Righter, Tucson: University of Arizona Press., 493–512, 2000.

13. Malhotra, R., *Nature*, 365, 819–821, 1993.
14. Malhotra, R., *AJ*, 110, 420–429, 1995.
15. Fernandez, J.A., Ip, W.H., *Icarus*, 58:109–120, 1984.
16. Hahn, J.M., R. Malhotra, *AJ*, 117, 3041–3053, 1999.
17. Liou, J., R. Malhotra, *Science* 275, 374–377, 1997.
18. Levison, H.F., L. Dones, C.R. Chapman, S.A. Stern, M.J. Duncan, K. Zahnle, *Icarus*, 151, 286–306, 2001.
19. Ivanov, B.A., G. Neukum, W.F. Bottke Jr., W.K. Hartmann, in *Asteroids III*, University of Arizona Press, 2002.
20. Throughout this paper we display the crater and projectile size distributions using the “Relative” plot method (see NASA Technical Memorandum 79730, 1978) which was devised to better show the size distribution of craters and crater number densities for determining relative ages. The R plot provides a more sensitive and discriminating comparison tool than Cumulative Distribution plots which tend to smear out important details of the crater size distribution curves, and can lead to erroneous interpretations. For an R plot, the size distribution is normalized to a power law differential size distribution function, $dN(D) \sim D^p dD$, where D is diameter and $p = -3$, because most crater size distributions are observed to be within ± 1 of a $p = -3$ power law distribution. The discretized equation for R is: $R = D^3 N / A(b_2 - b_1)$, where D is the geometric mean diameter of the size bin ($\sqrt{b_1 b_2}$), N is the number of craters in the size bin, A is the area over which the counts were made, b_1 and b_2 are the lower and upper limit of the size bin, respectively. The size bins are usually defined in $\sqrt{2}$ increments because there are many more small craters than large craters. In an R plot, $\log R$ is plotted on the y-axis and $\log(D)$ is plotted on the x-axis. A $p = -3$ distribution plots as a horizontal straight line; a $p = -2$ distribution slopes down to the left at an angle of 45° , and a $p = -4$ distribution slopes down to the right at 45° . The vertical position of the line is a measure of crater density; the higher the vertical position, the higher the crater density.
21. Strom, R.G., G. Neukum, in *Mercury* (eds. F. Vilas, C.R. Chapman, M.S. Matthews), University of Arizona Press, 1988.
22. Strom, R.G., S.K. Croft, N.G. Barlow, The Martian impact cratering record, in *Mars*, eds. H.H. Kieffer et al., University of Arizona Press, 1992.
23. This also demonstrates that the shape of the lunar highlands curve has not been affected by crater saturation because they show the same size distribution as the highlands but the crater densities are well below saturation density, confirming a theoretical result that a surface impacted by a population with the same size distribution as the one observed for the

- highlands would maintain the same shape at saturation (Woronow, A., J. Geophys. Res., 82, 2447-2451, 1977).
24. McEwen, A.S., B.S. Preblich, E.P. Turtle, N.A. Artemieva, M.P. Golombek, M. Hurst, R.L. Kirk, D.M. Burr, P.R. Christensen, Icarus, in press, 2005.
 25. Strom, R.G., G.G. Schaber, D.D. Dawson, J. Geophys. Res., 99(E5), 10,899–10,926, 1994.
 26. Zahnle, K.J., J. Geophys. Res., 97(E6), 10, 243–10,255, 1992.
 27. Schmidt, R.M., Housen, K.R., Int. J. Impact Engng. 5, 543–560, 1987; Melosh, H.J., Impact Cratering: A Geologic Process, Oxford Univ. Press, 1989.
 28. Yoshida, F., T. Nakamura, J. Watanabe, D. Kinoshita, N. Yamamota, T. Fuse, PASJ, 55, 701-715, 2003; Yoshida, F., et al., Adv. Sp. Res., submitted, 2005.
 29. Jedicke, R., T.S. Metcalfe, Icarus, 131, 245-260, 1998.
 30. Ivezić, Z., et al. (the SDSS collaboration), AJ, 122, 2749-2784, 2001.
 31. Stuart, J.S., R.P. Binzel, Icarus, 170, 295-311, 2004.
 32. Neukum, G., B.A. Ivanov, W.K. Hartmann, Space Science Reviews, 96, No. 1-4, 55–86, 2001.
 33. Werner, S.C., A.W. Harris, G. Neukum, B.A. Ivanov, Icarus, 156, 287-290, 2002.
 34. Morbidelli, A., Vokrouhlický, D., Icarus, 163, 120–134, 2003.
 35. P. Farinella, D. Vokrouhlický, Science, 283, 1507–1510, 1999.
 36. Lissauer, J.J., ARA&A, 31, 129-174, 1993.
 37. Goldreich, P., Lithwick, Y., Sari, R., ARA&A, 42, 549-601, 2004.
 38. Farinella, P., Froeschle, Ch., Froeschle, C., Gonczi, R., Hahn, G., Morbidelli, A., Valsecchi, G.B., Nature, 371, 315–317, 1994.
 39. Morbidelli, A., Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 73, 39-50 (1999).
 40. Murray, C.D., Dermott, S.F., *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, 1999.
 41. Franklin, F.A., Lewis, N.K., Soper, P.R., Holman, M.J., AJ, 128, 1391-1406, 2004.
 42. Gradie, J.C., Chapman, C.R., Tedesco, E.F., in *Asteroids II*, eds. Binzel et al., University of Arizona Press, 316–335, 1989.
 43. Shoemaker, E.M., Wolfe, R.F., Shoemaker, C.S., LPSC, v. 22, p. 1253, 1991.
 44. Strom, R.G., A. Woronow, M. Gurnis, J. Geophys. Res., 86, 8659, 1981.

Figure Captions

Figure 1. The crater size distributions on the Moon, Mars and Mercury, shown as R plots (20). The blue curves are for the Moon (highlands, post-mare, and Class I craters), red are for Mars (highlands, old plains and younger plains craters), and green are for Mercury (highlands and post-Caloris craters).

Figure 2. Size distributions of all Venus craters and, separately, multiple craters, compared to the Mars Northern Plains. The downturn in the Venus curves is due to atmospheric screening of projectiles.

Figure 3. These crater curves summarize the inner Solar System cratering record, with two distinctly different size distributions. The red curves are Population 1 craters that represent the period of Late Heavy Bombardment. The lower density blue curves (Population 2) represent the post-LHB era on the Moon, Mars and Venus.

Figure 4. The size distributions of the projectiles (derived from the crater size distributions) compared with those of the Main Belt Asteroids (MBAs) and Near Earth Asteroids (NEAs). The red circles are for the lunar highlands (Population 1), and the red squares are for the Martian young plains (Population 2). The other colors and point styles are for the asteroids derived by various authors. The MBA size distribution is virtually identical with Population 1 projectiles responsible for the LHB crater record. The NEA size distribution is the same as Population 2 projectiles responsible for the post-LHB crater record.

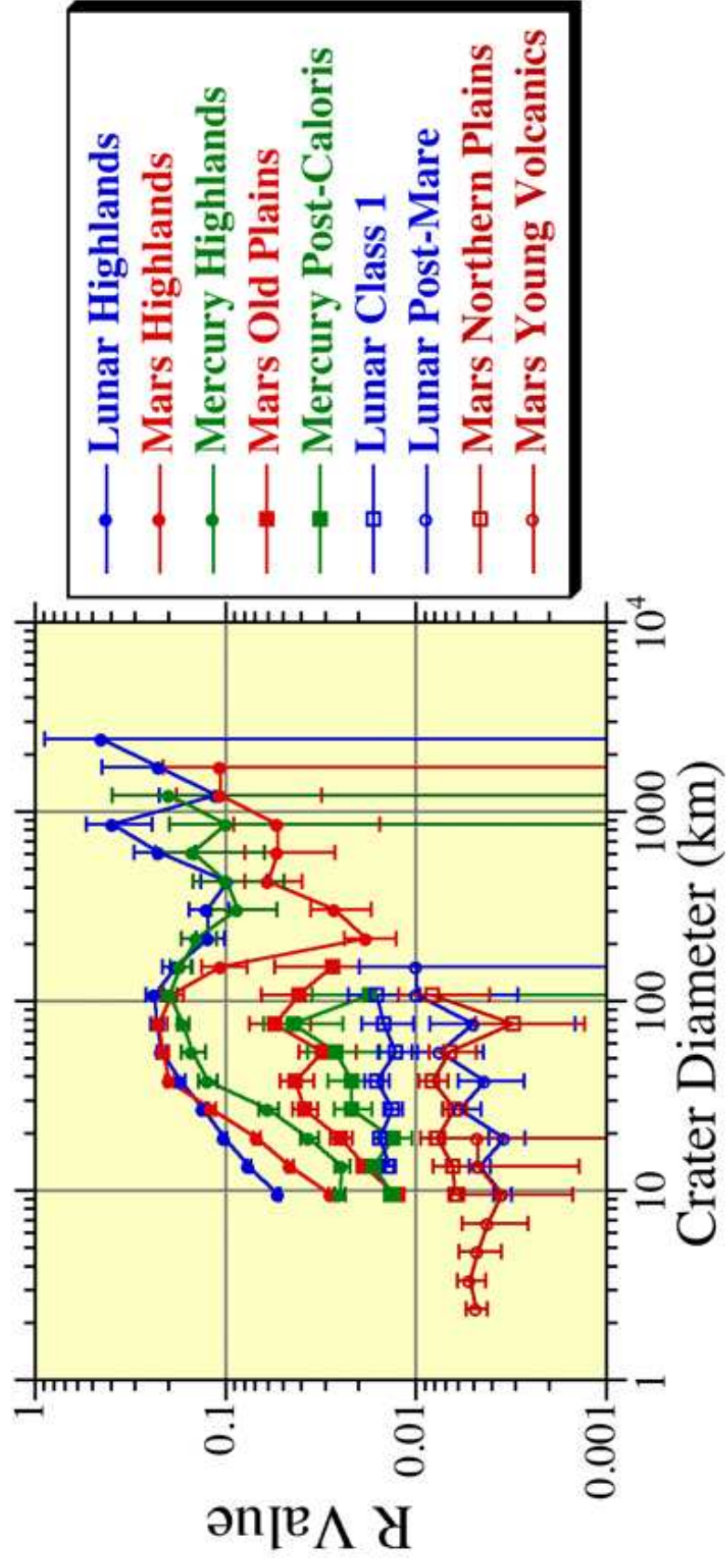


Figure 1

Strom, Malhotra, Ito, Yoshida & Kring, 2005.

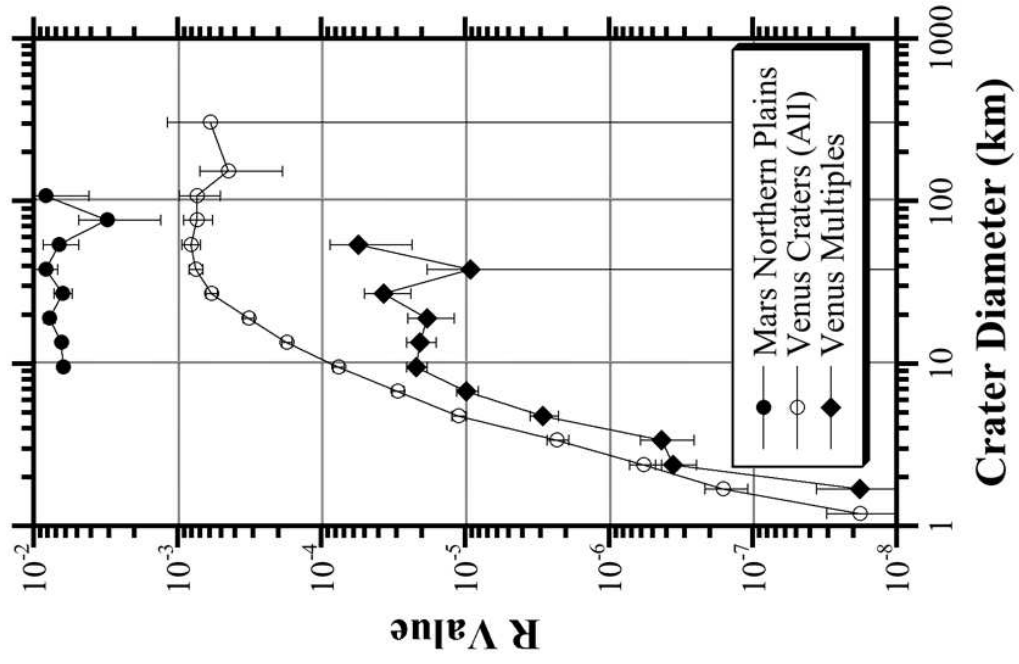


Figure 2

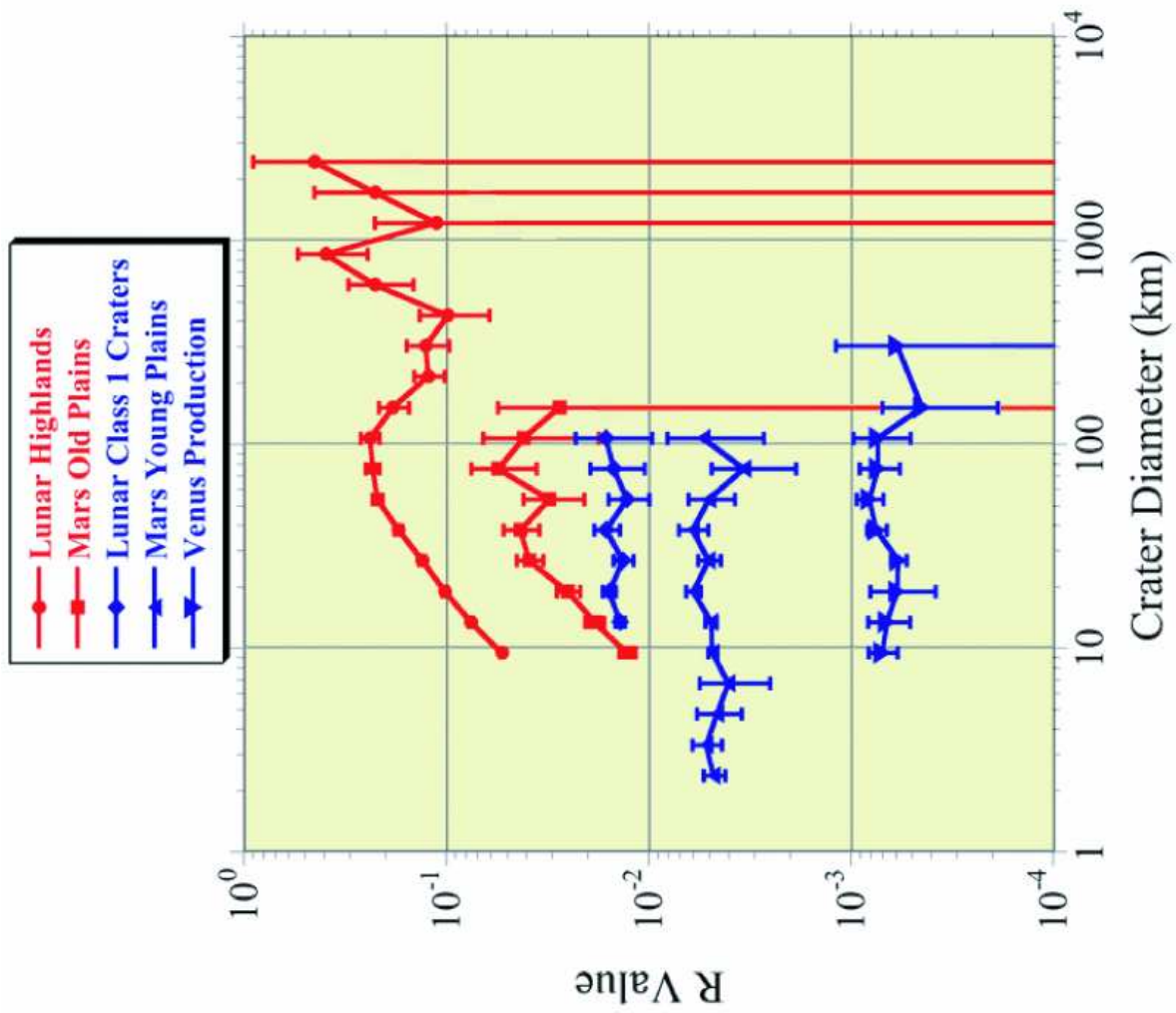


Figure 3

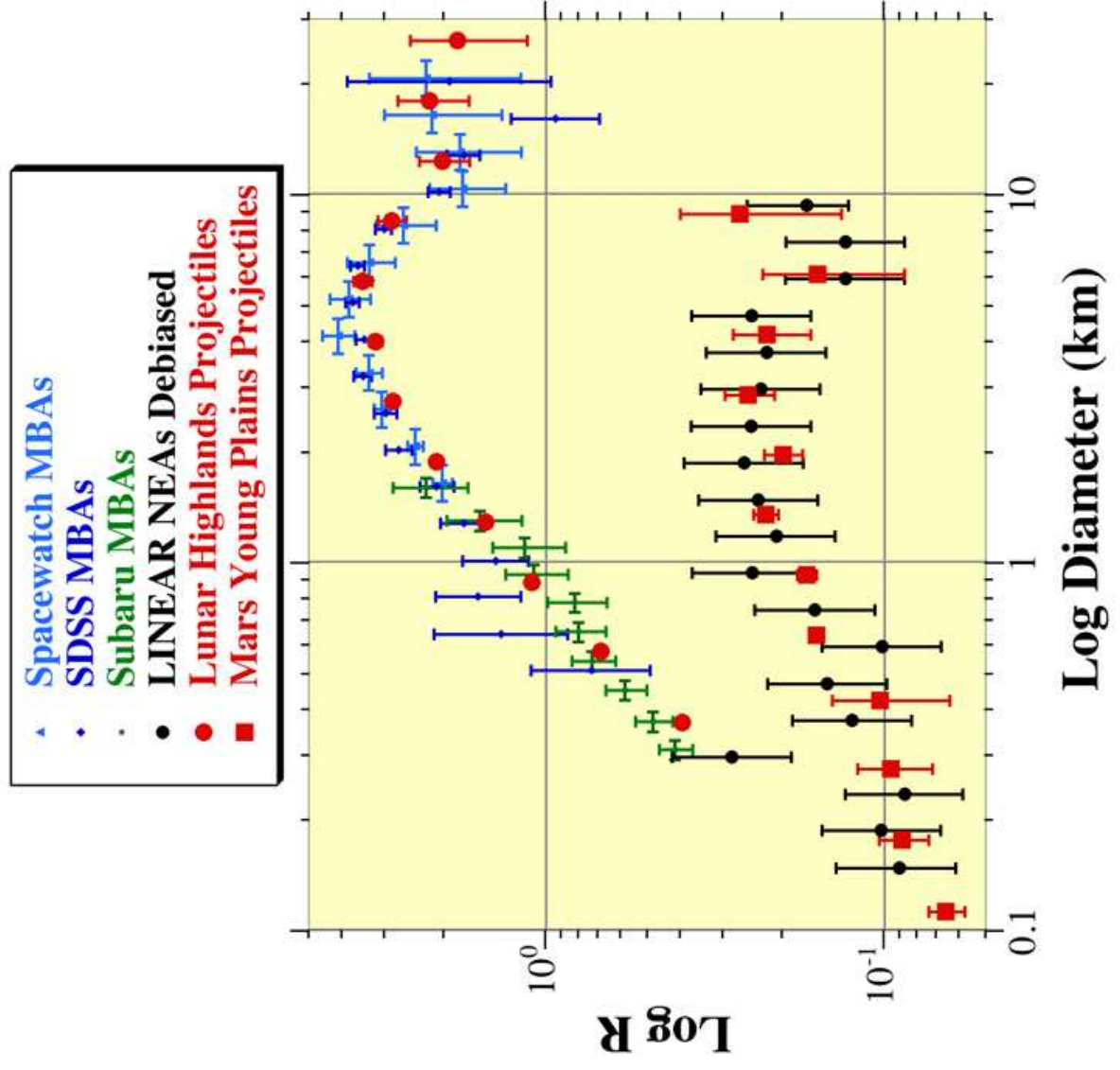


Figure 4

若い小惑星族の光度曲線

Lightcurves of a new-born asteroid family

伊藤孝士^{1,2}・吉田二美³・Budi Dermawan^{4,5}

(Takashi Ito, Fumi Yoshida, Budi Dermawan)

太陽系の歴史は衝突の歴史である。特に小惑星はお互い頻繁に衝突して破片を撒き散らし、その一部は月や惑星と衝突してクレーターを作り、現在に至るまでその痕跡を留めている。小惑星帯に於ける小惑星同士の衝突破壊によって形成した破片の集団は族と呼ばれる。小惑星の族は現実の太陽系を実験室にした衝突実験の生々しい結果とも言える貴重な存在であり、その光度曲線の観測は衝突によって生成された破片の自転速度や形状、内部構造に関する重要な情報を与えてくれるはずである。本稿では私達の研究プロジェクトである若い小惑星族の光度曲線観測の結果を紹介しつつ、族を構成する小惑星の観測から太陽系史に関するどのような情報が導き出されるのかを考えてみたい。

1. 小惑星の族

紀元前の昔からその存在が知られている惑星とは異なり、小惑星の発見は新しい。小惑星番号1のCeresが発見されたのは十九世紀の最初の日、つまり1801年1月1日である。それから二百年余り経った2004年9月現在、軌道要素が求められた小惑星は25万個を越えており、その数は更に増え続けている。カイパーベルト天体や彗星などと比べても圧倒的に大きな絶対数が発見されている小惑星は、それ故に統計的な研究の対象として絶好のものである。

小惑星の力学的分類には固有軌道要素という概念がよく用いられる。小惑星の瞬時の軌道半長径・離心率・軌道傾斜角（いわゆる接触軌道要素）から公転周期起源の短周期変動と木星などからの強制振動の寄与を取り除いた量がそれぞれ固有軌道半長径（記号 a で表されることが多い）、固有離心率（同じく記号 e ）、固有軌道傾斜角（同じく記号 i ）と呼ばれ、長い時間スケールでの小惑星の運動状態を表す際にしばしば用いられる。小惑星の固有軌道要素を丁寧に見て行くと、幾つかの小惑星達はとても良く似た固有軌道要素を有していることがわかる。例えば小惑星番号1824のHaworthは $a = 2.8846$ 天文単位, $e = 0.04844$, $i = 2.1020$ 度, 小惑星番号2224のTucsonは $a = 2.8810$ 天文単位, $e = 0.04807$, $i = 2.0290$ 度, 小惑星番号4927のO'Connellは $a = 2.8883$ 天文単位, $e = 0.04801$, $i = 2.0823$ 度, という具合に、各々の固有軌道要素の値が極めて近い。この例のように似通った固有軌道要素を持っている小惑星の一群は族 (family) と呼ばれる。族を構成する小惑星は同一の母天体の衝突破壊によって形成されたと考えられており、反射スペクトルによる分類型 (taxonomy) も近いのが普通である。上の三小惑星はどれもみなS型小惑星であり、コロニス族 (Koronis family) という大きな小惑星の族に属している。小惑星族という概念は東京大学の平山清次による1918年の論文にその起源を求めることができる [1]。このために小惑星の族は平山族 (Hirayama family) と呼称されることもある。平山清次が1918年の論文で示した族は三個だけであったが、本稿執筆時の時点で確認されている族の数は60を越えており、相当な数の小惑星が衝突破壊起源の族に属していることが判明しつつある [2]。

¹大学共同利用機関法人自然科学研究機構国立天文台天文学データ解析計算センター

²Lunar & Planetary Laboratory, The University of Arizona

³大学共同利用機関法人自然科学研究機構国立天文台ハワイ観測所

⁴東京大学大学院理学系研究科天文学専攻博士課程

⁵Department of Astronomy, Bandung Institute of Technology

平山清次による提唱から80年以上経った現在、小惑星の族に関してはそれなりの知識が蓄積されつつある。例えば、族を形成した衝突発生時に飛び散った破片の速度は現在の固有軌道要素の分布から大体100m/sのオーダーであったろうと推定されている。特定の族に属する多くの小惑星は似たような反射スペクトル型を持つが、これは共通母天体の衝突破壊によって族構成員の小惑星が生成したという事実を支持するものである。また、族を構成する小惑星のサイズ分布曲線は族を構成しない小惑星のサイズ分布に比べて急な傾きを持っているらしいということも推測されている。このように昨今の観測技術の発達と共に小惑星の族についても少しずつ知見が得られつつはあるものの、実のところ族については分かっていることよりも分かっていないことの方が多いと言って良い。例えばそもそも族の年齢、つまり衝突破壊によって大量の破片が発生した時期については、多くの小惑星族について数億年から数十億年と古いものであるという大雑把な見積りが成されているに過ぎない。衝突破壊現象の物理過程を直接反映する情報である破片のサイズ頻度分布については、前述したように族を構成する小惑星のそれは一般の小惑星に比べて急な勾配を持つようであるが、それは直径が10–15km程度の中型以上の小惑星について言えることであり、より数が多い直径数km以下の小さい小惑星のサイズ分布がどうなっているのかについては確かな情報はまだほとんど無い。そもそも現在観測される族構成員のサイズ分布は族の形成事象発生後に長い時間にわたる衝突進化を経たものであり、衝突直後の破片のサイズ分布を知るための情報とはなり得ない。これは小惑星の反射スペクトル型についても言えることであり、衝突発生から長いこと宇宙空間を漂い続けた小惑星の表面が衝突破壊直後の情報、つまり母天体の内部物質を反映したスペクトルを保持し続けているという保証はどこにも無い。

こうした曖昧な情報あるいは情報の欠如に加え、更に話を面倒にする物理過程が最近人々の耳目を集めている。ヤルコフスキー効果 (Yarkovsky effect) と呼ばれるものがそれである [3]。ヤルコフスキー効果は太陽からの輻射エネルギーを小惑星が吸収・再放出する際の非等方向性が引き起こす力学的効果 (小惑星からの運動量の放出) であり、小惑星の軌道半長径の拡大または縮小、また自転速度の増大や減少を長い時間スケールでじわじわと持たらす。小惑星の形状、自転周期、自転軸の傾き、自転の方向、軌道要素、それに小惑星を構成する物質の熱伝導率などに依存してヤルコフスキー効果の大きさはかなり異なるが、直径が約20 kmより小さい小惑星にとっては非常に有効かつ重要であり、小惑星に関する観測事実のうち純粋なニュートン力学だけでは説明のつかない幾つかの事項がヤルコフスキー効果を用いると説明できることが知られている。例えば隕石の宇宙線照射年代が力学的な予想に比べてずっと長いことや、近地球小惑星が休むことなく地球付近に供給され続けているという事実である [4, 5]。

ヤルコフスキー効果が小惑星族の研究にとって厄介な理由は、衝突イベントによって形成された小惑星破片の固有軌道半長径がヤルコフスキー効果によってどんどん拡散してしまう可能性が高いからである。前述したように族の構成員がその族に属しているかどうかは小惑星の固有軌道要素により判断される。木星の近くに位置する小惑星帯には様々な力学的共鳴領域が複雑に交錯しており、小惑星が共鳴領域に近付いた場合の運動は複雑である。けれども共鳴領域から遠い場所にある小惑星の軌道運動は比較的安定であり、特に固有軌道半長径の値は何億年にも渡って不変に保たれるであろうと考えられて来た。族構成員の現在の固有軌道要素から衝突発生直後の破片の射出速度を推定できるのはこうした仮定に従った場合である。けれどもヤルコフスキー効果を考えると、共鳴があろうとなかろうと小さな小惑星の固有軌道半長径は数億年の時間スケールでどんどん拡散する。この効果を考えずに現在の固有軌道要素から衝突発生時の破片の射出速度を推定すると、現実以上に大きな射出速度が算出されてしまう心配がある。またそもそも、非常に古い時代の衝突現象により形成された族はヤルコフスキー効果により完全に拡散し切ってしまう、現在は族として認識不可能な状況に陥っているかもしれない。かつて小惑星帯にはもっと多

くの小惑星族が存在していたかもしれないが、ヤルコフスキー効果がそうした痕跡を消し去ってしまった可能性を否定することは出来ないのである。

ヤルコフスキー効果は小惑星の自転状態にも影響を与える。ヤルコフスキー効果が取り得る形態のひとつに YORP 効果 (Yarkovsky–O’Keefe–Radzievskii–Paddack) と呼ばれるものがあり、 10^7 年から 10^8 年の時間スケールで直径 10–20km より小さな小惑星の自転速度を速めたり遅めたりする [6]。従って現在私達が観測できる小惑星の自転状態は軌道要素の分布と同様に衝突現象直後のものではなく、その後の長い時間にわたる進化を経てしまったものということになる。本稿の冒頭では小惑星の族が太陽系に於ける衝突現象の天然実験室であるなど書いたが、実のところその実験室から得られる情報は不確定性を多く含み、しかもヤルコフスキー効果によって汚染されており、新鮮なものとは言いがたいのである。この原因はひとえに小惑星の族の年齢が数億年から数十億年と古いためであるから、もっと新しい時代に作られた小惑星族がひとつでも見付かれれば、そこから族の形成に関する多くの情報を抽出できる可能性がある。そして 2002 年 6 月、まさにこの目的に最適な小惑星の一群が確認された。カリン族と呼ばれる数十個の小惑星達である。

2. 生まれたてのカリン族

複数の小惑星が族を構成しているかどうかを見極めるには、前述したように各々の固有軌道要素の値がどれくらい近い (あるいは遠い) を見て判断する。この作業のための専用数値算法も幾つか考案されている。こうした算法を最新の小惑星固有軌道要素データベースに適用した結果、新たに確認されたのがカリン族である [7]。カリン族は 39 個の小惑星からなる小規模なクラスターであり (最新の見積もりではこの総数は 70 個にまで増えている [8])、固有軌道要素空間で見ると冒頭にも例として挙げたコロニス族の内部に位置している。これよりカリン族はコロニス族内の族 (subfamily) とも呼ぶことが出来る。カリン族生成時の衝突破壊イベントにより発生したと思われるダスト・バンドの存在なども既に報告されている [9]。

カリン族の構成小惑星のうち最大のもは直径 20km 弱の 832 Karin (反射スペクトルは S 型, 1916 年に発見) であり、その他の構成員は直径約 2km から約 6km と小さい。832 Karin の固有軌道要素は $a = 2.864$ 天文単位, $e = 0.04390$, $i = 2.1131$ 度であり、取り立てて特徴のないメインベルト小惑星のひとつのように見える。けれどもこの 832 Karin を含めた 39 個の小惑星の固有軌道要素を (a, e) 平面および (a, i) 平面に描いてみると、単一母天体の衝突破壊によると推定される等方的な破片の放出によって形成された小惑星族の姿がくっきりと浮かび上がる (文献 [7] の Figure 1)。各構成員の固有軌道要素の散らばり具合から、衝突時の破片の放出速度は 15m/s 程度だったろうと推定されている。これは他の族に関する推定値である数 100m/s に比べるとだいぶ小さい。構成員の大きさから推測される母天体の直径は約 25km である。最大構成員 832 Karin の直径が 20km 弱であるから、この小惑星ひとつで母天体の半分ほどの質量を占めていることになる。但し後述するように今後の観測やデータ解析によりカリン族構成員の数が増えて行く可能性は高い。そうなれば推定される母天体のサイズは次第に大きくなって行くことであろう。

カリン族に関して最も特筆すべき事柄はその形成年代が非常に新しいことである。カリン族の現在の軌道要素から数値積分を用いて各構成員の軌道進化を過去に遡ると、約 580 万年前の時点で多くの構成員の昇交点経度と近日点黄経がほぼ一点に収束する。これはこの時に小惑星帯で衝突破壊イベントが発生し、ある特定の一点から多くの破片が飛び出して現在のカリン族を形成したという事実の強力な証左である。580 万年というカリン族の年齢は今まで推定されていた多くの族に比べると飛び抜けて若い。私達はまさに小惑星の衝突破壊直後の極く新鮮な状態を目の当

たりしているのである。

このような新しい族を前にして私達が観測すべき事は沢山ある。前述したような破片のサイズ分布や表面の反射スペクトルが典型的なものである。私達としてはカリン族が提供してくれるすべての情報を隈なく取り込むために手段を選ばずに観測を遂行する予定であるが、まず手始めに目を付けたのがカリン族構成員の光度曲線 (lightcurve) 観測である。ひとことで言えば、光度曲線は対象天体の自転運動と形状に関する情報を与えてくれる。光度曲線に関する理想的なデータが揃っていれば、対象天体の自転速度に関する情報は勿論のこと、自転軸の傾きや対象天体の形状・表面地形に関する情報が得られる可能性がある。光度曲線の観測から対象天体の非主軸回転、いわゆる揺動 (自由章動) が検出できれば天体の内部構造に関する情報が得られるかもしれない。揺動の検出は特にカリン族小惑星に関しては有望である。連続的な励起源が存在しなければ天体の揺動は一般に時刻の経過とともに急速に減衰するが、衝突破壊のような激しい事象を経験したばかりのカリン族構成員の中にはまだ揺動しているものがあるかもしれないからである。また多くの構成員の自転速度の分布が判明すれば、衝突時の破片への自転エネルギー・角運動量分配に関する何らかの情報が得られる可能性もある。自転速度の分布はまた、長い時間スケールでの破片の軌道進化を数値的に見積もる際に必須な物理量でもある [10, 11]。前述したように小惑星の軌道進化はヤルコフスキー効果から甚大な影響を受ける。ヤルコフスキー効果がどのくらい (あるいはどのように) 有効であるかは小惑星の自転状態や形状に大きく依存しているので、自転運動に関して光度曲線観測から得られる情報は小惑星破片の長期力学進化計算のための基礎的な初期条件となるのである。

このように、カリン族が生まれたてのほやほやであるという事実は幾つもの重要で新しい情報を私達に与えてくれる。次節からはカリン族に関する私達の観測結果の一部を紹介して行くが、その前に謝辞を兼ね、私達がカリン族にここまでハマるようになった経緯をここに短く記しておこう。本稿の著者は三名だけであるが私達の観測計画にはこの何倍もの数の人間が日本の内外から関与しており、それらの人々の協力・支援がなければこの観測計画を実施することはまったく不可能だからである。

カリン族に関して 2002 年 6 月に発表された論文 [7] を見た国立天文台の中村士助教授は、ハレー彗星や小惑星 Toutatis に見られる天体の非主軸回転がカリン族構成員に於いても発見される可能性を考えた [12]。これが本観測計画の端緒である。中村氏は東京大学の Budi Dermawan や国立天文台の佐藤英男・福島英雄両氏および学生達に呼びかけ、国立天文台三鷹にある口径 50cm の光学望遠鏡を用いてカリン族小惑星の観測を開始した。2002 年 11 月上旬のことである。アマチュア天文家である宮坂正大氏も自らの 25cm 望遠鏡を用いてこの観測計画に参加した。後に彼らの観測は東京大学の本曾観測所 1m シュミット望遠鏡でも行われ、福岡教育大学のグループも当地の 40cm 望遠鏡グループを用いて私達の観測に参加している。

吉田二美は当時、台湾の國立中央大學にポスドクとして勤務していた。折しも 2002 年の夏には台湾最大の望遠鏡である 1m 望遠鏡が台湾中央部の山中にある鹿林天文台に完成し、稼働を開始したばかりであった。中村士氏が吉田のかつての指導教官だったこともあり、連絡を受けた吉田は同僚の高橋茂や Wing-Huen Ip 教授らと共に鹿林天文台の 1m 望遠鏡を利用してカリン族小惑星の観測を開始した。これ以降は吉田がカリン族小惑星観測計画の中心となる。吉田は国内外を問わずこの目的に使えるような望遠鏡があれば直ちに観測所に手紙を書き、あるいは直接現場に飛び、カリン族の観測に望遠鏡時間を提供してくれるようにロビー活動を展開した。例えば台湾國立中央大學の Wen-Ping Chen 教授は永らくウズベキスタンの天文学者と共同研究をしており、吉田が Chen 教授に依頼することでウズベキスタン科学アカデミーが運営する Maidanak 天文台の 1.5m 望遠鏡をカリン族の観測のために利用できることになった。Maidanak での私達の相棒は

Mansur A. Ibrahimov である。更に吉田は米国アリゾナ大学月惑星学科の大御所 Tom Gehrels と Renu Malhotra に支援を仰ぎ、当地にある Kitt Peak 観測所の 2.3m 望遠鏡 (通称 Bok) と Vatican 天文台の 1.8m 望遠鏡 (通称 VATT) を利用する資格を取得した。このふたつは現在私達のメイン望遠鏡となっている。吉田はまた伊藤孝士を経由して Matthew Holman (ハーバード大学) をもこの観測計画に誘い入れ、チリにある口径 6.5m の Magellan 望遠鏡に於いてもカリン族小惑星の観測を行っている。カリン族光度曲線の観測には何年もの時間が掛かるので、こうした共同研究の輪はどんなに広がっても広がりすぎということはない。私達は現在も、共同研究に加わってくれる観測者を日本の内外で探し続けている。

上記のように吉田二美は各地の観測所を渡り歩いて多くのデータを取得し、それを解析して小惑星の光度を測定する。Budi Dermawan はそうした測定結果を元にして実際の光度曲線を描き、小惑星の自転周期を決定する役目を果たしている。私達の観測計画はまだ緒に付いてばかりであるが、次節以降では現在までに得られた予備的結果のうち代表的なものを幾つか紹介して行きたい。

3. カリン族の光度曲線

2004 年 6 月末までに私達は 10ヶ所の観測所で 70 夜以上の観測を行い、15 個のカリン族小惑星を観測を実施してそのうち 8 個について光度曲線 (自転周期) を決定した。70 夜の観測で 8 個の光度曲線と言うと効率があり良くないように聞こえるかもしれないが、一晩の観測で一個の小惑星に使える観測時間はせいぜい 5–6 時間である。後述するようにカリン族構成員の自転周期は数時間から 20 時間以上と長いものもあるので、一個の小惑星の自転周期を決定するだけでも数晩以上の観測が必要となる。また、台湾や日本の夜空の環境は観測者にとって決して良いものではなく、70 夜すべてが満足に観測に使えているわけでは決してない。そうした条件のもとで私達が得て来たカリン族小惑星 8 個の光度曲線を図 1 に示した。図 1 の横軸は時刻を光度曲線の位相に直したものであり、一位相 (一周期) の時間的長さはもちろん小惑星によって異なる。

光度曲線および自転周期決定のためのデータ処理過程を詳しく書くと長くなり過ぎるので、ここでは概略だけを記しておく。私達の観測は基本的に R バンドフィルタ (中心波長 6338.14Å) を用いた撮像である。太陽光の反射で輝く小惑星は R バンドフィルタの波長帯で最も明るく見えるからである。小惑星を撮像する際には同時に較正用の標準星も撮像しておく。観測が終了したら、光天文学の分野では標準的な天文データ解析ソフトウェアである IRAF の APPHOT と呼ばれるパッケージを用いて各小惑星の正確な等級を測定する。ここまでは素直に進められる作業だが、ここからが大変である。私達の観測は同一の小惑星に関しても異なる望遠鏡、異なる観測装置、異なる期日に行われる。そうした観測から得られたデータはそれぞれに異なる特質を持っており、それらを組み合わせて正確な光度曲線を得る作業は単純なものではない。しかも前記したようにカリン族構成員には私達の予想よりも長い自転周期を持つものが多く、一晩の観測だけで自転周期を決定できるものはほとんど無いことが判明した。こういう場合にはまず、数晩の観測データを組み合わせて自転周期の第零近似を推定し、それを基本周期として数次のフーリエ級数を作る。次には最小二乗法を用いてこの級数を光度曲線データにフィットさせ、平均等級すなわち光度曲線の零点を求める。異なる観測所で得た光度曲線データについても同様な作業を行う。然る後に各々の光度曲線の零点を基準にして複数の光度曲線を繋ぎ合わせ (または重ね合わせ)、そこで改めて周波数解析を行い、より精度の高い自転周期を確定する。後日になり新たな観測データが加えられた場合には上記の手順を繰り返し、再び周波数解析を行って自転周期の値を得る。また小惑星の光度は小惑星と観測者 (地球) と太陽の位置関係によっても変わるので、得られた光度を衝

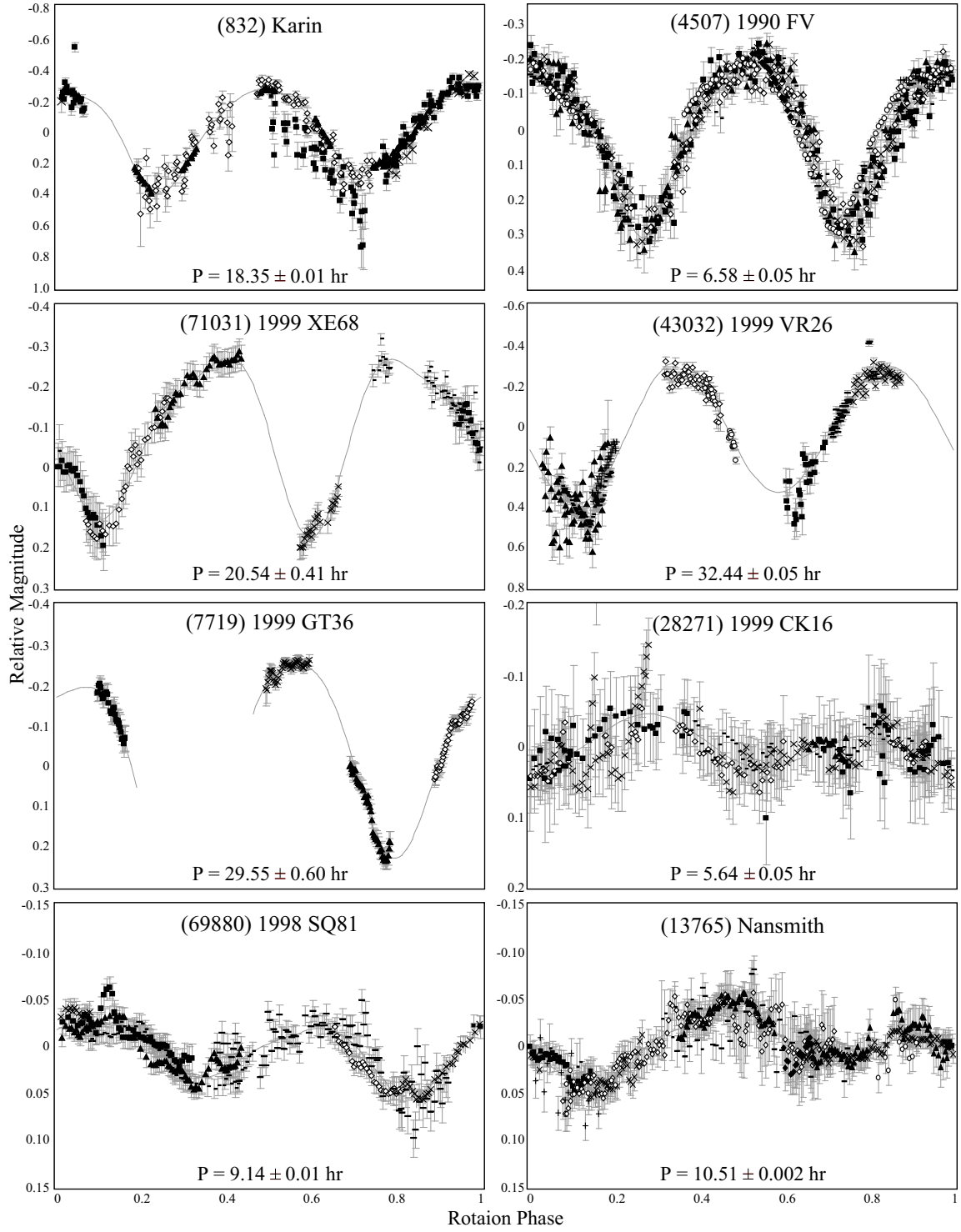


図 1. カリン族小惑星 8 個の光度曲線。横軸は光度曲線の位相，縦軸は相対光度。異なるシンボルは異なる観測からのデータを示す。P はこのデータから決定した自転周期の値。データ点群の上に描画された曲線は最も良くフィットしたフーリエ級数。

の位置 (太陽と地球と小惑星がこの順番で一直線に並んだ状態であり、小惑星がもっとも明るく見える) での値に補正しておくことも必要である。

このようにして得られた光度曲線達を眺めてみると、自転周期が精度良く決定されているものと誤差が大きいものが入り混じっていることが見て取れる。1990 FVなどは全周期に関して万遍なく観測が行われているが、1999 XE68, 1999 VR26, 1997 GT36などはデータが細切れであり、更に長い期間の観測が必要であることは明白である。1999 CK16に関しては個々の光度データの誤差がまだ大きい。これは私達がこの暗い小惑星を台湾の鹿林天文台 1m 望遠鏡でしか観測していないからである。今後はより大きな望遠鏡を用いた精度の高い観測が必要となろう。

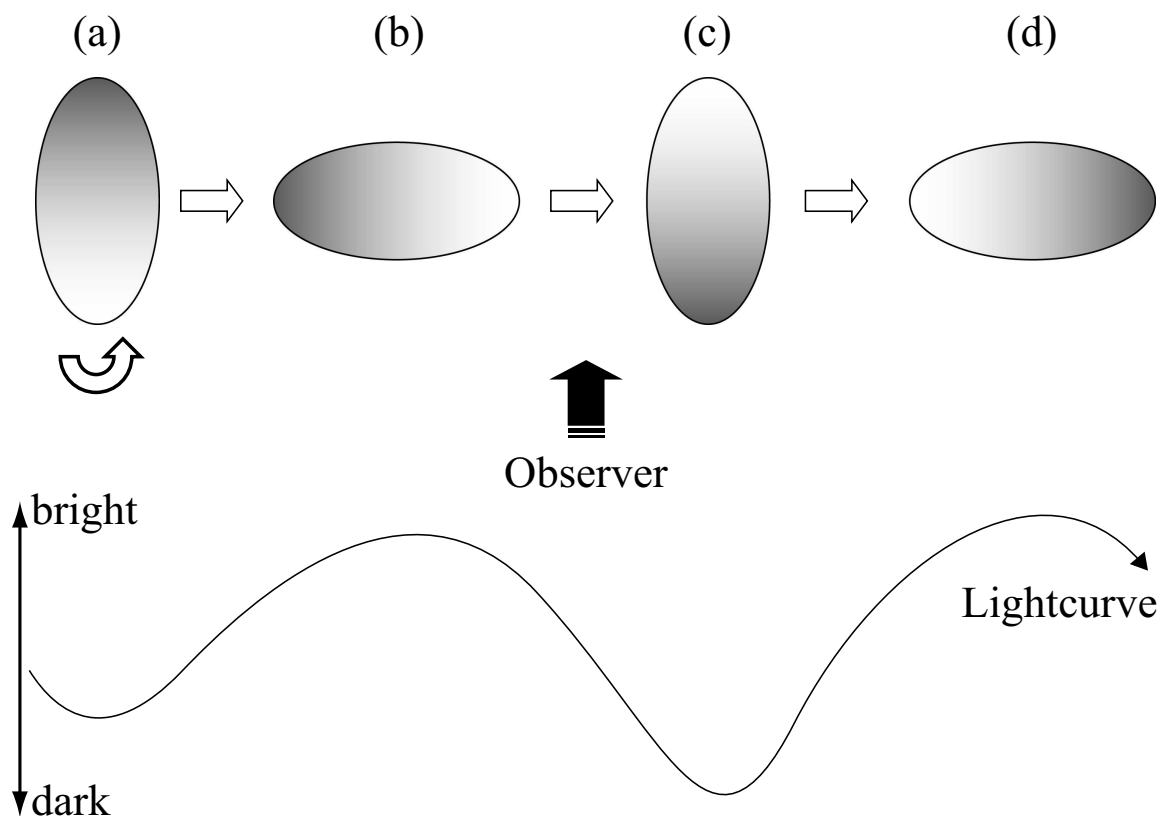


図 2. 光度曲線が二山で一周期となる理由を説明する模式図。観測者は“Observer”の方向から小惑星を見ており、小惑星は時間の経過と共に $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ と自転する。

カリン族構成員ほどの大きさ (直径数 km から 20km) の小惑星は球よりも楕円体、あるいは更に不規則な形状を取ることが多いと予想される。衝突破壊によって形成した小惑星の破片が球形になるには衝突破壊後に一旦溶解して再び固化する過程を経ることになるが、この過程はかなり大型の小惑星でなければ発生しないと考えられるからである。従って私達はカリン族構成員の形状が球ではなく細長い楕円体であると想定し、それ故にその光度曲線は二山で一周期を構成すると仮定してデータ解析を行った。この理由の簡略な説明を図 2 に示している。小惑星の光度は観測者から見た小惑星の断面積に大きく依存し、細長い小惑星がその短辺方向を観測者 (図 2 の “Observer”) に見せた時が光度曲線の一度目の谷 (図 2(a)), 長辺方向を観測者に見せた時が一度目の山 (図 2(b)), 初期状態から 180 度回転して再び短辺方向を観測者に見せた時が二度目の谷 (図 2(c)), 更に 90 度回って初期状態から 270 度回転した状態が二度目の山 (図 2(d)), という具合である。私達が得たす

すべての光度曲線はこの仮定に従うとしているので、すべて二山二谷を持つものになっている。もしも小惑星がかなり球形に近く、しかもその裏と表の反射率に大きな違いがあるような場合には、明るい→暗いの一山一谷で一周期となろう。例えば図1にある1990 FVの光度曲線は位相 = 0.5を中心としてかなり左右対称的な形をしている。もしかするとこれは上で述べたような理由(小惑星が球形に近く、光度曲線の変化は表面の反射率の反映)によっており、図1の1990 FVの光度曲線は一周期分ではなく二周期分なのかもしれない。これを区別するにはこの光度曲線が位相 = 0.5を中心にして本当に対称なのか非対称なのかを判別できるための精度の高い観測データが必要となる。

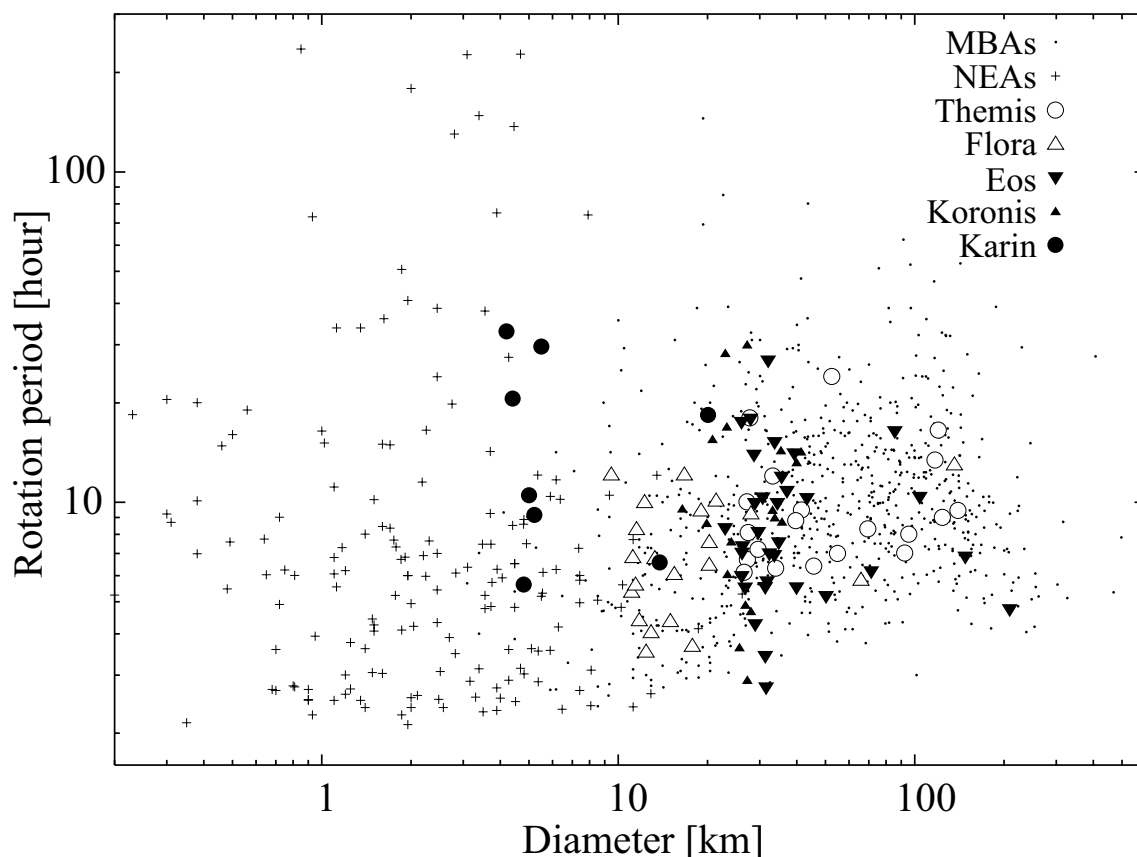


図 3. 小惑星の直径 (km) と自転周期 (hour).

本稿にデータを示すことはしていないが、現時点での周期解析に於いては二個のカリン族構成員 (1990 FV と 1998 SQ81) の光度曲線に多重の周期性 (図1に示した自転周期よりも更に長い周期の存在) が見え隠れしている。「見え隠れ」とは誠に玉虫色な表現だが、データの精度や期間、解析に要した時間を考えると決定的なことはまだ言えないことから来る歯痒い言い回しである。玉虫色ではあるがしかし、原理的にはこの多重周期性はこれらの小惑星が非主軸回転 (揺動) を行っている可能性を示唆するものである。このことを確認するため必要なのはひとえに長期かつ高精度の観測データである。地球に於けるチャンドラー揺動のように年がら年中観測可能な現象とは異なり、限られた期間にしか観測できない小惑星の非主軸回転の観測には大きな忍耐が必要なのである。

なお非主軸回転を“確実に”検出するためにはどの程度の観測が必要なのかという問いに答えるのはなかなか難しい。観測データが多く蓄積されればされるほど良い、という自明な回答になり

がちだからである。私達がやるべき最初のことは、現時点での手持ちのデータを詳細に周期解析して非主軸回転を持つ可能性のあるカリン族構成員の一覧を作り、論文の形で公表することであろう。そうすることで同業者の興味を惹き付ければ共同観測者を募りやすくなるので、そのような小惑星についてより多くの観測機会・観測人数を動員して集中的な観測を実行することが可能になるものと予想している。また、周期解析の方法も私達が現在主に使っているフーリエ分解だけでは不十分かもしれない。小惑星の光度曲線自体は周期的であるが、観測によるデータの取得間隔が不規則なため、入力データの連続性が前提になっているフーリエ分解だけでは非主軸回転を確実に検出することは難しい可能性がある。今後はMEM (最大エントロピー法) など様々な方法を用い、それらから得られる結果を比較して非主軸回転の存在あるいは非存在についてより詳しく議論して行くことになるだろう。

小惑星の光度曲線観測は原理的にその目的と手段が明快であるが故に、古くから観測が行われて来た。世界各地にある小惑星の観測結果データベースを見ると既に1000個以上の小惑星に関する自転周期のデータが蓄積されている。図3にはその結果の一例として、メインベルト小惑星 (main belt asteroids; MBAs) と近地球小惑星 (near-Earth asteroids; NEAs), および主要な族 (Themis, Flora, Eos, Koronis) を構成する小惑星の直径と自転周期の関係を示した。もちろん私達が観測したカリン族の結果も含まれている。ここで示された小惑星の直径は小惑星の等級と反射率 (アルベド) から推定されるものであるが、アルベドの真の値を知ることは容易ではない。この図のデータに於いて使われているアルベドは反射スペクトル型の情報などを元に仮定されたものであり、それ故に小惑星の直径の推定には不確定性が含まれていることは勿論である。メインベルト小惑星については804個分のデータが示されているが、そのほとんどが直径10km以上の大きな小惑星である。直径が10kmより小さいような小惑星の光度曲線を正確に決定するにはそれなりに大口径の望遠鏡を用いて観測を行う必要があるが、小惑星の光度曲線観測のように長い時間のかかる観測に大口径望遠鏡の観測時間が割り当てられることは稀にしかない。そのために小さな小惑星の自転周期はまだほとんど知られていないのである。一方で近地球小惑星はその名の通り地球に近付いてくれるので、かなり小さな小惑星に関しても観測が可能になる。図3に示されている近地球小惑星のデータ個数は180個であるが、近地球小惑星に関しては世界各地で活発なサーベイ観測が行われているので、観測データの量は今後どんどん増えて行くであろう。なお図3の描画範囲からは外れているが、近地球小惑星の中には高速回転体 (fast rotators) と呼ばれる一群の小惑星があり、直径が1km以下かつ自転周期が2時間以下という特殊な天体が数十個発見されている。同時に近地球小惑星には100時間を越える長い自転周期を持つものもある。つまり小惑星のサイズが小さくなるほど自転速度のばらつきは大きくなる傾向を示すのである。近地球小惑星の発祥の地がメインベルトであるとすれば、現在は観測できていないようなメインベルトの微小な小惑星もこの傾向を示すのではないかという予想もある。

さて私達の議論の対象は近地球小惑星や一般のメインベルト小惑星ではなく、族を構成する小惑星であることを思い出さなくてはならない。けれども図3を見るまでもなく族を構成する小惑星に関する自転周期データは実に乏しく、統計的に有意な議論が出来る段階に到達しているとは言えない。図3に示した主要な小惑星の自転周期データの頻度分布を描いてみたのが図4である。小惑星族に関するデータ数はコロニス族 (Koronis) が18個、テミス族 (Themis) が20個、イオス族 (Eos) が33個、そしてカリン族が8個である。前述したようにメインベルト小惑星 (MBAs) と近地球小惑星 (NEAs) についてはそれぞれ804個と180個のデータがある。まだ私達が一年半観測しただけのカリン族のデータ数が少ないとは当然としても、平山清次の時代から知られて来たコロニス族やテミス族、イオス族などの超メジャーな小惑星族に関してこの程度の数しか光度曲線観測のデータが蓄積されていない、あるいはアルベドが不明なためにサイズ (直径) に関する

データが無いという事実は驚くべきことかもしれない。軌道要素から推定される族の全構成員数はそれぞれの族で数百個に上るにも関わらず、である(2004年現在でテミス族とイオス族には500個以上、コロニス族には300個以上の構成員が確認されている)。ということで残念ながら現時点では、図4のように族を構成する小惑星の自転速度に関する頻度分布図を描いても何らかの統計的議論を行うことは容易でないと言えよう。言葉を変えれば、こういう状況であるが故に小惑星族の光度曲線観測には大きな意義があるとも言える。カリン族だけではなく、上述したような古くて大きな小惑星族に関しても将来はもっと積極的な光度曲線観測が望まれることを指摘しておきたい。族構成員のうちサイズの小さなもの(例えば直径10km程度以下)の光度曲線データを蓄積して行けば、図4にあるような自転周期の頻度分布に関する統計的議論もより実りあるものになるものであろう。ちなみに直径10kmの小惑星はメインベルトの外側領域にあったとしても14等級程度の明るさを持ち、メインベルトの内側領域にあれば更に明るく見える。このくらい明るい小惑星であれば、ハイ・アマチュア天文家が保有する望遠鏡や各地に教育普及目的で設置されている望遠鏡でも何とか観測が可能となる。そのような望遠鏡を用いた光度曲線観測が活発になり、この分野の発展に欠かせないデータがどんどん蓄積されて行くことにも期待したい。

さて以下には、上に記した事柄と矛盾するようなことを書いてしまおう。コロニス族やテミス族など既知の小惑星族構成員の光度曲線観測、特にサイズの小さなものに関する観測が重要になると書いたばかりであるが、そうした観測は実は大きな困難を抱えると予想される。これは何も小さな小惑星の観測が難しいということの意味するのではなく、古い族に属する小さな小惑星の光度曲線を観測したとして、一体それが何を意味するのかという問題である。前述したように小さな小惑星の自転運動はYORP効果の強力な影響下にある。YORP効果の典型的な時間スケールは 10^7 年から 10^8 年であるとしたが、コロニスやテミスなど古い族の年齢は少なくとも 10^8 年から 10^9 年のオーダーであろうと見積もられている。これだけの時間を経た後では、直径10kmより小さな小惑星の光度曲線がそれらの自転運動状態に関する衝突破壊イベント直後の新鮮な情報を保持しているとは考え難い。従って、こうした光度曲線データを将来得たとしてもその解釈が難しくなることは明らかである。既知の小惑星に関するこうした状況を考えるにつけ、カリン族が小惑星の研究者にとっていかに幸運かつ祝福された存在であり、その光度曲線観測がいかに重要な意味を持つかが読者にも理解されるのではないかと思う。

ところで光度曲線観測から得られる情報は小惑星の自転周期のみではない。十分に長い期間の観測があれば、小惑星の自転軸の方向や形状についても何がしかの推測を行うことが出来る。メインベルト小惑星と地球との会合周期は一年数ヶ月である。その機会毎に衝の状態が発生して地球から小惑星を観測し易くなるが、重要なことは衝のたびごとに私達が小惑星を異なる角度から見ることになるという事実である。小惑星が細長いものだと仮定すると、光度曲線の振幅は私達はその小惑星をどの方向から見るかに依存して変わる。細長い小惑星はその最短軸の周りに自転していることが多いから、それを赤道方向から見たとすると私達から見える小惑星の断面積は自転の位相によって大きく変化するであろう。図2と同様な状況である。この大きな断面積の変化はそのまま大きな光度曲線振幅となって観測される。一方で小惑星をちょうど極の方向から見た場合には、形状がどうであろうと自転による小惑星の断面積は変わらないから、観測される光度曲線の振幅は小さいものになろう。このような観測方向への光度曲線振幅の依存性を逆に利用して、複数の光度曲線の振幅の違いから小惑星の自転軸の方向を推定することが可能である。理論的には、こうした観測機会が三回以上あると小惑星の自転軸の方向を決定出来ることが知られている¹。私達の観測では1999 CK16に関して二度の衝に於ける観測を行っており、あと一度衝での観測機

¹ここでは小惑星の自転軸の方向が慣性系に対して不変であるという仮定を置くので、小惑星の非主軸回転などにより自転軸がふらふら動いている場合にはもっと多くの観測機会が必要となる。

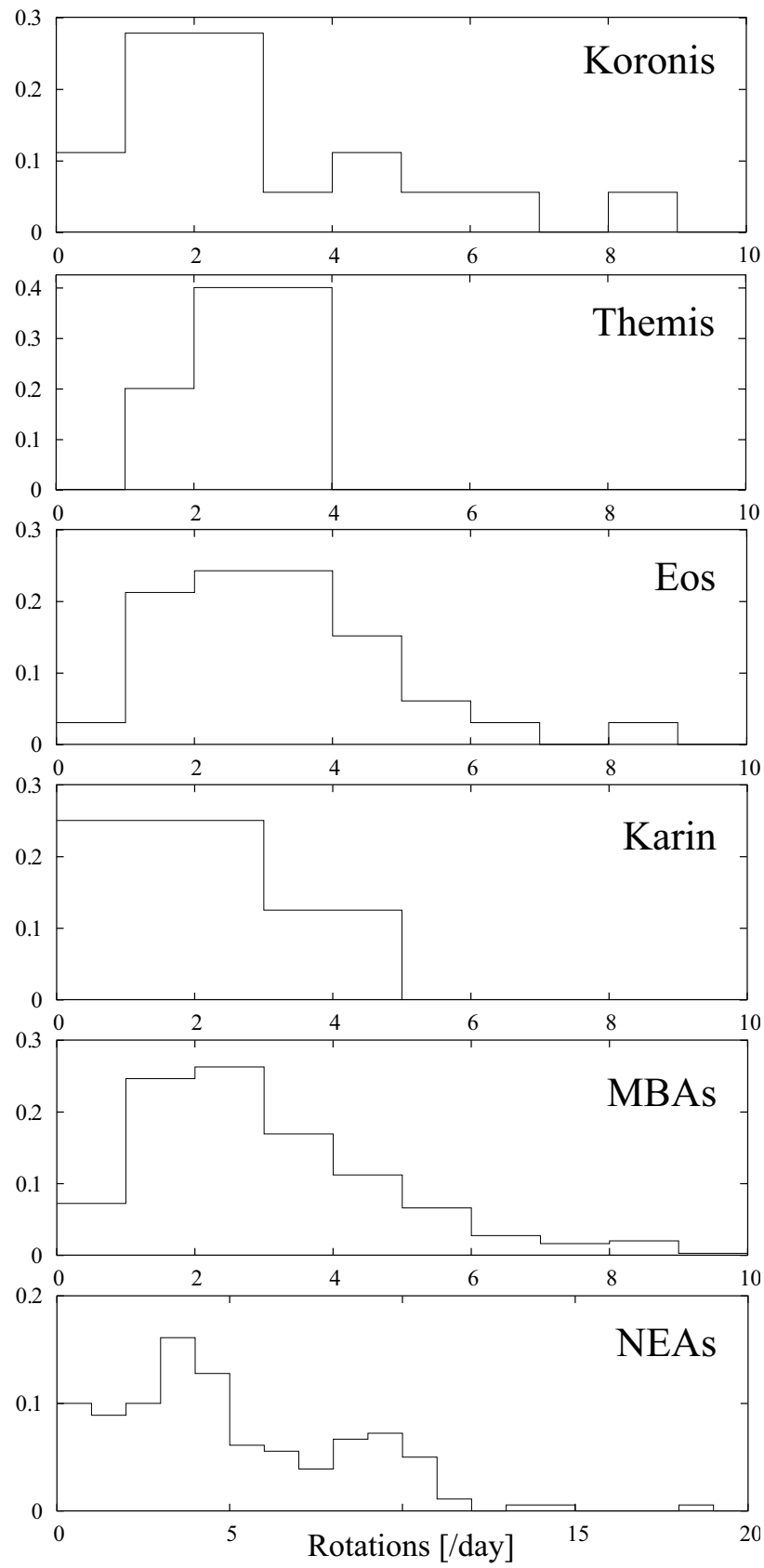


図 4. 小惑星の自転周期の相対頻度分布. 横軸の単位は24時間での自転回数.

会があればこの小惑星の自転軸の方向を確定できる可能性がある²。また最大構成員の832 Karinに関する私達の観測は一度の衝だけであるが、私達の観測以前に文献[13]により光度曲線の観測が行われている。従って私達が832 Karinをあと一度だけ衝に於いて観測すれば、文献[13]のデータと合わせることで自転軸の方向が確定できるものと期待される。

自転軸が決定されないうちは小惑星の形状について確かなことは言えない。しかし話を思い切り単純化して私達が小惑星を赤道方向から見ていると仮定すると、以下のようにして小惑星の形状を極めて大雑把に推測することができる。小惑星の形状を三軸不等楕円体と仮定し、その軸長を長い順に a, b, c とする。小惑星は最短軸 c の周りで自転していることが多いだろう。小惑星の光度は大まかに言って地球に向いた小惑星の断面積に比例する。小惑星の短軸 b が観測者の方向を向いた時(正確ではないが図2の(b)や(d)のような状態)の断面積は πac 、小惑星の最長軸 a が観測者の方向を向いた時(図2の(a)や(c)のような状態)の断面積は πbc である。この断面積の比がそのまま小惑星の光度曲線振幅の大きさになると考えれば、観測データとの比較から小惑星の軸長の比 a/b を推定することが出来る。例として832 Karinにこの方法を適用してみると $a/b \sim 1.91$ となったので、扁平な形をした小惑星を思い描くことが出来る。極めて大雑把な推定ではあるが、観測データが少ない段階で小惑星の形状に関して言えることはこれくらいである。しかし近年では光度曲線データから小惑星の形状を精度良く決定するアルゴリズムも長足の進歩を遂げているので[14]、小惑星の形状決定に関する光度曲線観測の寄与は今後存外に大きくなって行くかもしれない。

4. カラーとサイズ分布

新しい小惑星の族を眼前にして私達が知りたい情報は自転周期に関するものだけではない。小惑星の表面状態の情報を示す反射スペクトルや、衝突破壊現象に関する重要な情報を持たらせてくれるはずの破片のサイズ頻度分布など、多くの情報が太陽系研究に関して大きな意義を持っている。小惑星表面の反射スペクトルに関する観測について、私達はカリン族の最大構成員である832 Karinに関する試験的な観測を行っている[15]。また、破片のサイズ分布については吉田二美の研究グループがハワイにある国立天文台のすばる望遠鏡を用いて行って来たサーベイ観測の手法がそのまま適用できると考えている。本節ではこうした観測について簡単に記してみたい。

私達の光度曲線観測がRバンドと呼ばれるフィルタを用いたものであることは前述した。これは一般に小惑星がRバンド(6338.14Å)の波長帯で最も明るく見えるからであるが、光学観測に使われるフィルタはこの他にも様々なものがある。波長4359.32ÅのBバンド、5394.84ÅのVバンド、8104.87ÅのIバンドなどが代表である。単一波長帯では似たような光度を持つ天体でも、それらを異なる波長のフィルタで撮像し、その結果をB-V, V-Rなどという具合に引き算してみると大きな違いが現れることがある。複数のフィルタを用いた観測は多色測光観測(カラー観測)と呼ばれる。カラーの違いは小惑星の表面状態の違いを表しており、こうした情報を元にしてS型やC型といった小惑星の反射スペクトル型が定められる。私達は米国アリゾナ州にあるパチカン天文台(VATT)にて832 Karinの光度曲線観測を行いながら、同時にカラー観測をも実行した。

小惑星のカラー観測は通常は小惑星の反射スペクトル型を決定するために行われるが[13]、カリン族小惑星のカラー観測にはまた別の意義がある。小惑星の表面は長年にわたり宇宙線や太陽風に晒されており、表面の反射スペクトルはそうした風化作用(宇宙風化)により相当な変化を経

²小惑星を異なる角度から見るというだけでなく特に衝が必要とされるわけではない。各観測の間隔が大きく開いていて、私達が小惑星を見る方向が十分に異なっていれば良い。けれども観測のやり易さという点では衝の位置が圧倒的に有利なので、私達は次の衝を待ってからこうした小惑星を再観測する予定である。

ていると考えられる。しかし小惑星同士が激しく衝突して内部の新鮮な構造が露出すれば、その時点で表面のカラーはリセットされ、その小惑星が本来持つべきカラーの情報が姿を現すであろう。衝突破壊イベントによってカリン族の破片が発生した時期は580万年前とかなり正確に判明している。もしもカラー観測によりカリン族構成員の表面に新鮮な部分を見出すことが出来たとしたら、それは「正確に580万年間宇宙線や太陽風に晒され続けた小惑星の表面」のデータを与えるものとなる。このような観測を他の小惑星（衝突時期がそれなりに推定されているもの）に対しても繰り返すことにより、小惑星の表面のカラーの時間変化と年代の関係についての情報が得られる可能性がある。それは太陽系小天体の研究に新しい時間軸を与えてくれるものとなるだろう。

私達が得た832 KarinのV-R, B-V, V-Iのカラー観測データと図1の光度曲線位相との関係が図5(a)である。私達のカラー観測は832 Karinの自転周期の八割以上をカバーし、この小惑星の表面全域をほぼ見渡していることになる。この中でも注目すべきは位相約0.2に於けるV-Iの突出であろう。V-Rの値が全位相にわたってほぼ0.08から0.09の前後で安定し、B-Vの値もさほど急激な変化は見せていないのに比べると、V-Iの変化はととても大きい。これは即ち832 Karinの表面状態が特定の部位に於いて何らかの急激な変化を持つことを示唆している。カリン族の起源が衝突破壊イベントであったことを考えると、このV-Iの急激な変化は832 Karin表面の新鮮さの違いを表している可能性がある。衝突前の母天体が持っていた古い表面と、衝突破壊によって現れた母天体の新鮮な内部との差異である。この差異をより顕在化させるために、B, V, R, I各バンドに於ける光度を元に計算した相対反射率の波長依存性を示したのが図5(b)である。横軸はB, V, R, Iの各バンドが持つ波長になるので、これはある種の分光観測結果とも言うことが出来る。図5(b)には図5(a)で特異な振る舞いを見せた光度曲線位相0.2付近の相対反射率とそれ以外の位相での平均的な相対反射率の二種類のデータが示されているが、注目すべきはこの二本の線の平均的傾きが明確に異なることである。位相0.2付近での相対反射率の傾きはそれ以外の部分を平均した相対反射率の傾きに比べて急であり、長波長領域に於ける相対反射率が短波長領域に於けるそれに比べて随分と高い。要するに「赤い」のである。832 KarinのようなS型小惑星の相対反射率の波長依存性にはこのような急な傾きがしばしば見られ、宇宙風化作用 (space weathering) が原因するものと考えられている [16, 17]。即ち832 Karinの光度曲線位相0.2付近の表面は他の部分と比べて風化が進んでいる、つまり衝突以前の母天体の歴史を残した古いものであるという予測が立つ。位相0.2以外の部分についてはこうした赤いスペクトルが見られないことから、カリン族形成時の衝突破壊イベント発生に露出した母天体の内部が反映されているのであろうと推測される。

この推測を更に強固なものとする観測が東京大学の佐々木貴教・佐々木晶や国立天文台の渡部潤一らによって行われている [18]。彼らは私達とほぼ同時期にすばる望遠鏡を用いて832 Karinの近赤外分光観測を用い、832 Karin表面に於ける近赤外スペクトルの非一様性を確認した。彼らの観測データが示すところによると、光度曲線の位相 ~ 0.5 付近での832 Karinの近赤外スペクトルが代表的な普通コンドライトのそれにかなり近いのに対し、位相 ~ 0.3 付近でのそれは他のS型小惑星にもよく見られる近赤外スペクトルに近い。832 KarinのようなS型小惑星はメインベルトの内側領域に普遍的に見られる小惑星であり、長い期間にわたる宇宙線や太陽風からの照射によって宇宙風化していると考えられる。一方で普通コンドライトのスペクトルは隕石の内部物質の情報を反映しており、宇宙風化が及んでいない状態を表すものであろう。こうした結果は、可視光領域に於ける私達のカラー観測が示唆した832 Karin表面の風化状態の違いが近赤外スペクトル領域に於いても発生していることを示すものである。私達の観測と佐々木らの観測では宇宙風化の見られる位相がそれぞれ0.2, 0.3とやや食い違っているが、これは832 Karinの自転周期決定に

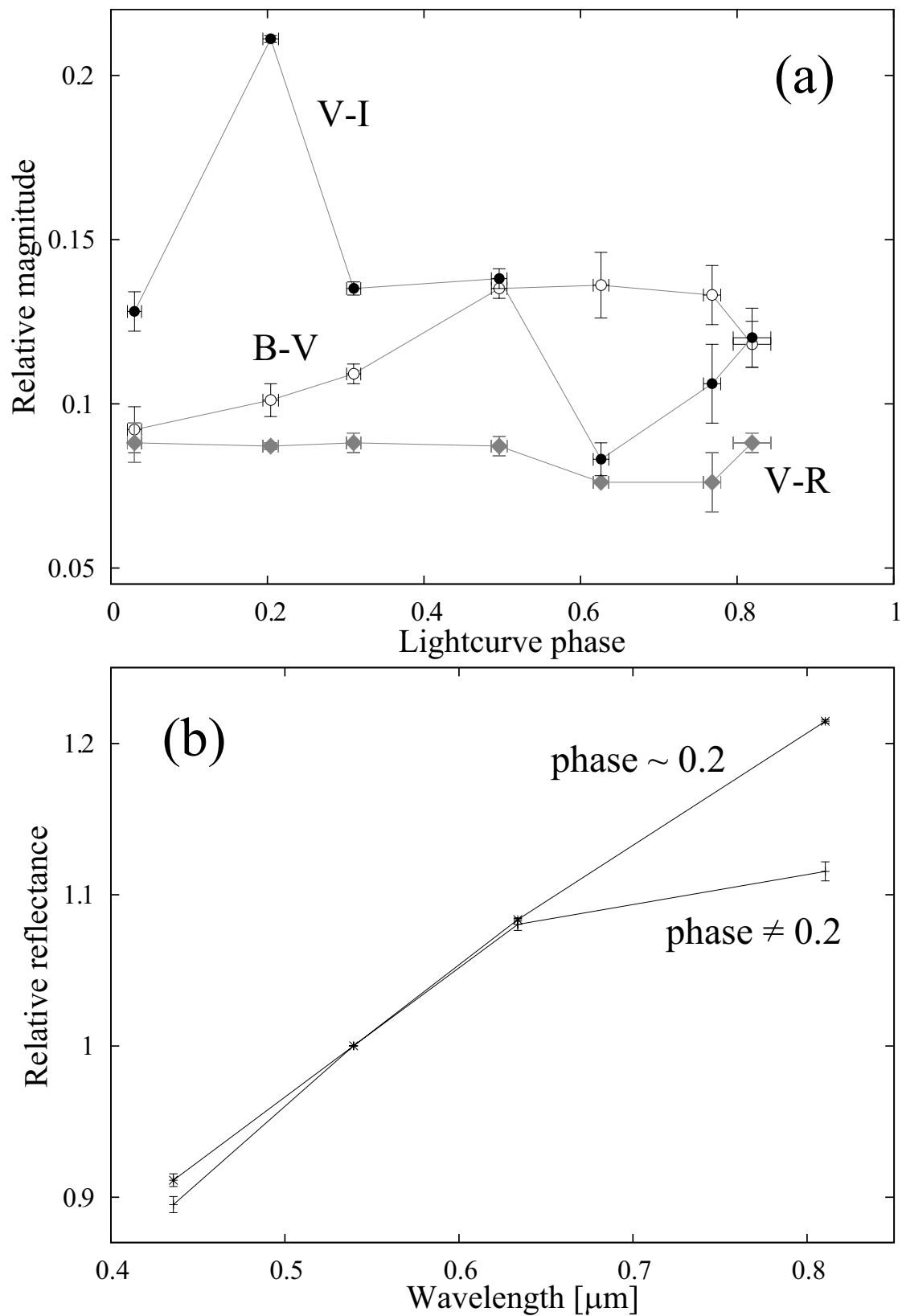


図 5. (a) 832 Karin のカラー観測結果。横軸は光度曲線の位相。(b) 図(a) のデータから計算した相対反射率の波長依存性。データ点は波長の短い方から B, V, R, I バンドに対応しており、V バンド ($5394.84\text{\AA}=0.539484\mu\text{m}$) の値で規格化されている。

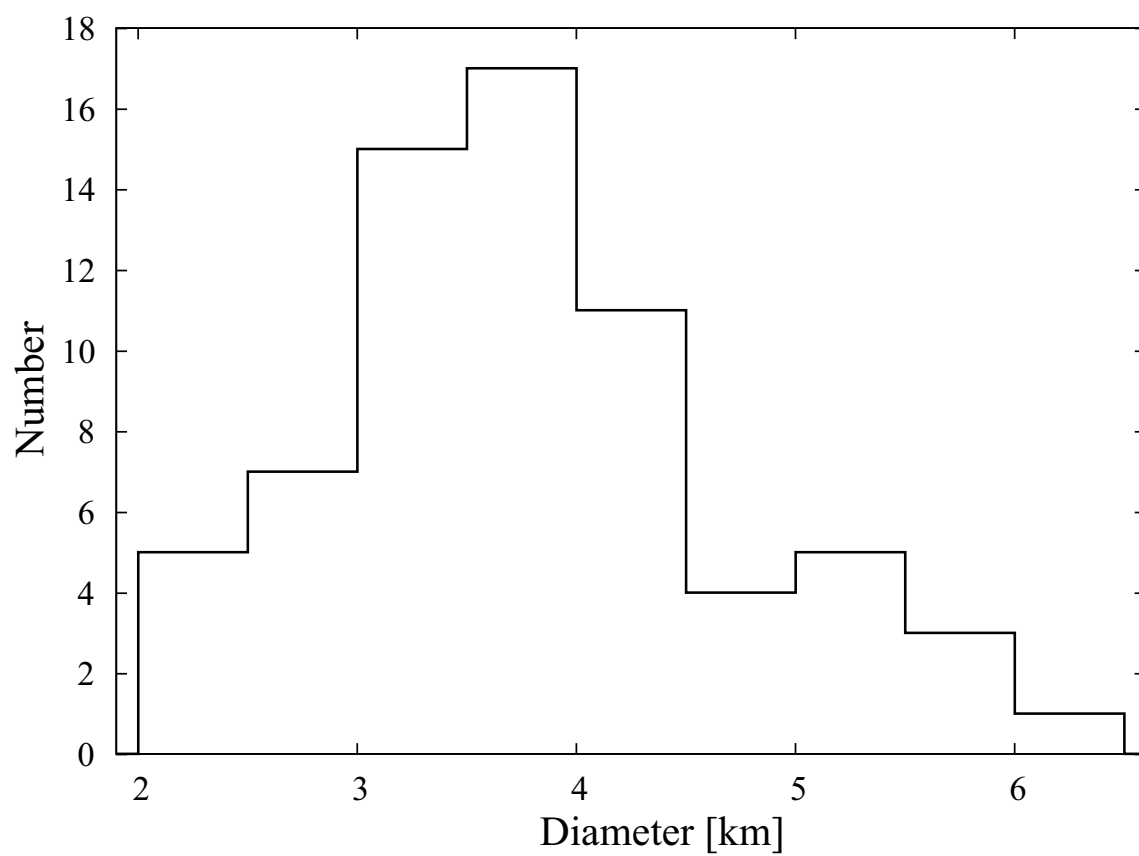


図 6. カリン族小惑星の直径頻度分布 (直径約 20 km の 832 Karin は除く). 反射率 (アルベド) は全構成員について 0.16 を仮定している.

まだ不確定性が含まれていることと、そもそも佐々木らの観測では光度曲線の位相0.2付近のデータが取得されなかったことに起因していると予想される。いずれにせよ太陽系小天体の表面状態変遷という観点でこの結果は誠に興味深い。このような光度曲線観測とカラー観測・分光観測を組み合わせる手法は今後の小惑星研究に於いてますます重要な意義を持って行くことであろう。

カリン族小惑星のサイズ頻度分布については光度曲線以上にまだ何もわかっていない状態であると言える。現在確認されている構成員（約70個）の直径は832 Karinを除くと約2 kmから6.5 kmの範囲内にあるが[8]、サイズ頻度分布を図6のように描いてみると直径の小さな領域（例えば直径3.5 km未満）では観測データの不足と思われる頻度の減少が見られる。メインベルト小惑星の一般的なサイズ頻度分布の見識から言って、直径2 kmの小惑星の数が直径3.5 kmの小惑星の数よりも少ないということは考え難いからである。このことは、メインベルトには未知のカリン族構成員がまだ数多く埋もれている可能性を示す。カリン族の破片はその自転運動がYORP効果に汚染されていないだけでなく、サイズ分布も衝突進化の影響をほとんど受けていないと予想されるので、小惑星の衝突破壊直後の破片のサイズ分布を知るにはもってこいの観測対象である。小惑星の衝突破壊に関する数値実験結果と現在の小惑星族のサイズ分布との比較から、族を作った母天体はがっちりとした一枚岩のものではなく、最初から亀裂や隙間が多く入った（pre-shatteredな）ものであったろうという予想がなされている[19, 20]。一枚岩の母天体の衝突破壊では最大破片とそれ以外の破片の大きさがあまりに違い過ぎたりするのである。カリン族構成員のサイズ分布の観測データを蓄積してそのような数値実験の結果と比較することで、私達は小惑星の衝突破壊メカニズムや衝突前の母天体の本当の姿により近付くことが出来るかもしれない。けれどもサイズの小さな小惑星を発見し、しかもそれがカリン族構成員であることを確認する道程は単純ではない。吉田二美らはすばる望遠鏡を用いたメインベルトの微小な小惑星のサーベイ観測を行い、直径1km以下という微小な小惑星のサイズ頻度分布を導いた[21, 22]。すばる望遠鏡の主焦点カメラは口径8mクラスの望遠鏡としては破格に広い0.25平方度という視野を持つ。このカメラを用いれば、メインベルトの内側領域にある小惑星なら直径0.2–0.3kmの程度のものまで見落とさずに発見できる可能性がある。カリン族構成員、とりわけ数が多いと思われる微小な構成員を新たに発見してサイズ頻度分布の統計を有意なものにして行くには、こうした広い視野を持つ高性能望遠鏡でのサーベイを繰り返して小さな小惑星を多く発見し、その軌道要素を決定し、カリン族が同定された時に使われたのと同様な方法でそうした小惑星がカリン族の一員かどうかを確認する、という手順を経ることになる。もちろん原理的に不可能なことではないので私達はこちらにも挑戦して行きたいが、すばる望遠鏡の極めて高い競争率を考えると現時点では光度曲線観測に集中しておくのが賢い選択であるようにも思われる。

5. 次なる観測対象へ

本稿末尾にある参考文献リストを見ると、読者はそこにある文献のほとんどがここ1–2年以内に出版されたものであり、更には“in press”や“submitted”の論文さえも幾つかあることに気が付くだろう。その事実はこの分野がまだ若く、急速な発展を遂げつつあることを示すものである。私達はそうした流れを主導するような心意気を持ちつつ、今後もカリン族小惑星の光度曲線観測を続けて行く予定である。現在までに確認されているカリン族小惑星の総数は70個程度だが、今後の研究によってその数は更に増えて行くであろう。私達の現在の光度曲線観測はおよそ10小惑星/年というペースだから、カリン族構成員のすべての光度曲線データを得るには少なくともあと6–7年、もしかすると10年以上の時間が必要になるかもしれない。実に気の長い研究計画である。

そうこうしている昨今、カリン族と同様にとても若い小惑星族が他にも確認されつつある。カリン族よりもやや内側に位置し、カリン族と同様にS型のスペクトルを持つイアニーニ族 (Iannini family, 約500万年前の衝突破壊で形成されたと予想されている) や、カリン族よりやや外側に位置し、C型の反射スペクトル型を持つベリタス族 (Veritas family, 約830万年前の衝突破壊で形成されたと予想されている) である [9]。イアニーニ族小惑星はまだ18個が確認されただけだが、ベリタス族に至っては既に259個もの構成員が確認されており、これらの光度曲線をつぶさに観測して統計的な議論が出来れば小惑星の衝突破壊研究にとっては文字通り画期的なデータが得られることになろう。私達はカリン族と並行してこれらの若い小惑星族の光度曲線観測も行ってゆく予定であり、そのための望遠鏡資源の確保や共同研究者の獲得に日夜忙しく立ち回っている。

最近では世の中の望遠鏡の口径がどんどん大きくなっており、そうした大型望遠鏡を使って一夜にして画期的(?)な新発見を行うというタイプの研究が人気を博しているように見える。小惑星の光度曲線観測はこれと全く対極にあり、中小の望遠鏡を長い時間利用してひたすら単純な観測を続け、その積み重ねとして惑星科学研究に欠かせない基礎データをきっちり算出することを目的としている。研究業界全般の風潮が“Publish, or perish.”である現在の世情では前者のような発見的研究がより歓迎されるのかもしれない。けれども長い目で見た学術分野の発展には、後者のような泥臭くて地道で愚直と言えるほど基礎的で、しかも非常に長い時間の掛かる研究を欠くことは決して出来ない。カリン族の光度曲線観測に臨むたびに私達はそのような思いを強くし、自分達は将来の学術の基礎を担うデータを産出するのだという矜持を持って望遠鏡に向かっている。

謝辞: 本稿の執筆に際しては東京工業大学理工学研究科地球惑星科学専攻の田中秀和さんから多数の助言を頂いた。この場を借りて深く御礼を申し上げたい。

参考文献

- [1] Hirayama, S., 1918: *Astron. J.* 31, 185.
- [2] Ivezić, Ž. et al., 2002: *Astron. J.* 124, 2943.
- [3] Rubincam, D. P., 1995: *J. Geophys. Res.* 100, 1585.
- [4] Bottke, W. F. et al, 2002: in *Asteroids III*, 395, Univ. Arizona Press.
- [5] La Spina, A. et al., 2004: *Nature* 428, 400.
- [6] Rubincam, D. P., 2000: *Icarus* 148, 2.
- [7] Nesvorný, D. et al., 2002: *Nature* 417, 720.
- [8] Nesvorný, D. and Bottke, W. F., 2004: *Icarus* 170, 324.
- [9] Nesvorný, D. et al., 2003: *Astrophys. J.* 591, 486.
- [10] Bottke, W. F. et al., 2001: *Science* 294, 1693.
- [11] Ito, T. and Malhotra, R., 2004: *Icarus*, submitted.
- [12] 中村士, 木下宙, 2003: 第24回太陽系科学シンポジウム集録, 77.
- [13] Binzel, R. P., 1987: *Icarus* 72, 135.

- [14] Kaasalainen, M. et al., 2002: in Asteroids III, 139, Univ. Arizona Press.
- [15] Yoshida, F. et al., 2004: Publ. Astron. Soc. Japan, in press.
- [16] Sasaki, S. et al., 2001: Nature 410, 555.
- [17] Clark, B. E. et al., 2002: in Asteroids III, 585, Univ. Arizona Press.
- [18] Sasaki, T. et al., 2004: Astrophys. J. Lett., submitted.
- [19] Michel, P. et al., 2003: Nature 421, 608.
- [20] Michel, P. et al., 2004: Icarus 168, 420.
- [21] Yoshida, F. et al., 2001: Publ. Astron. Soc. Japan 53, L13.
- [22] Yoshida, F. et al., 2003: Publ. Astron. Soc. Japan 55, 701.

Dynamical evolution of asteroid fragments originating near the ν_6 resonance

Takashi Ito and Renu Malhotra

Lunar & Planetary Laboratory, The University of Arizona, Tucson, AZ 85721-0092, USA

Correspondence author's e-mail: tito@LPL.arizona.edu

Number of pages: 34

Number of tables: 1

Number of figures: 11

Proposed running head: Dynamical evolution of asteroid fragments

Editorial correspondence to:

Takashi Ito Lunar & Planetary Laboratory
The University of Arizona
Tucson, AZ 85721-0092
TEL: (520) 621-2883
FAX: (520) 621-4933
E-mail: tito@LPL.arizona.edu

Abstract

We performed numerical integrations of test particles in the vicinity of the ν_6 resonance in the main asteroid belt. The purpose of our integrations is to explore the dynamical evolution of asteroid fragments from a hypothetical asteroid disruption event near the ν_6 resonance. Compared with previous studies, we simulate an order of magnitude larger number of particles, and we include the effects of eight planets from Mercury to Neptune. We follow the particles for up to 100 million years and up to 100 AU heliocentric distance. Our main results are: (i) collisional probability of asteroid fragments on the planets is generally low (4–5% for Venus and Earth, and less than 1% for Mercury and Mars) whereas the collision probability for the Sun is large (50–70% or higher), and (ii) decay timescale of the particle population is typically 10–20 million years, but can be much longer, depending on the location of disruption. We find that the effects of ν_6 , close encounters with planets, and the Kozai mechanism all play important roles in the orbital history of asteroid fragments that enter the terrestrial planetary region. The particles that survive 100 million years or longer typically owe their long dynamical lifetime to the Kozai mechanism, and tend to have higher inclinations. Our results also suggest that 10–15% of asteroid fragments reach heliocentric distance > 100 AU, and may survive in the Oort cloud.

Keywords: Asteroids, Dynamics; Resonances, Terrestrial planets

1. Introduction

Our solar system planets have evolved through a large number of collisions. The impact history of the Earth and of the other terrestrial planets is still partially evident in the numerous craters on their surfaces. Although there are several hypotheses on the source of the projectiles that created the impact craters on the terrestrial planets, the main belt asteroids have been considered the most plausible one. The main belt asteroids are also regarded as a primary source of most meteorites and majority of the near-Earth asteroids (NEAs) or the near-Earth objects (NEOs). Pioneering works by Wetherill (1979), Wisdom (1983) and Wetherill (1985) showed the orbital resonances with Jupiter in the main asteroid belt can force asteroids to cross the orbits of the terrestrial planets. Later, Wetherill (1985, 1987, 1988) developed analytical approximations for the resonant effect of the ν_6 and the 3:1 resonances along with an Öpik–Arnold Monte Carlo orbital evolution model. His research indicated that the NEAs are supplied by disruption or collisional events that occur in the vicinity of some resonances in the main asteroid belt. Resonant dynamics pushes asteroid fragments into terrestrial planetary orbits on timescale of million years or more.

Our understanding of the mechanisms that transport objects from the main belt to the Earth has progressed rapidly in recent years due to important advances in three areas: analytical modeling of resonant dynamics, effective numerical algorithms, and availability of fast and inexpensive computer hardware. Some analytical theories indicate that many secular and mean motion resonances can be responsible for transporting asteroids to Mars-crossing and Earth-crossing orbits (Froeschlé and Morbidelli, 1994; Morbidelli and Nesvorný, 1999). The timescale of such resonant dynamics is relatively short, and the orbits of the asteroids in resonances quickly become sun-grazing or Jupiter-crossing (Farinella et al., 1994; Levison and Duncan, 1994; Froeschlé et al., 1995).

Along this line, Gladman et al. (1997) performed numerical simulations of hundreds of test particles placed in orbital resonances in the main asteroid belt. They showed that the typical dynamical lifetime of objects that could become NEAs is only a few million years, while the majority of them are removed from the inner solar system by being transferred to Jupiter-crossing orbits or by colliding with the Sun. This work was extended by Morbidelli and Gladman (1998) who performed numerical integrations of about 2000 particles originally placed in the ν_6 , 3:1, and 5:2 resonances in the main belt. They examined the orbital evolution of the asteroids, and compared the results with the observational data of meteorites that hit the Earth. In the same year, Zappalà et al. (1998) evaluated the number of impactors produced in different size ranges by disruption events that might have created some existing asteroid families. Their estimate shows that an impact flux could last 2–30 million years in the form of asteroid showers, which could be responsible for the lunar cataclysm. More recently, Bottke et al. (2002a) created a model NEO population that was fit to known NEOs. They performed numerical integrations of thousands of test particles initially placed in several possible source regions of NEOs (most of them are in the main asteroid belt). Their numerical result was used to construct time-dependent probability distributions in orbital element space.

These recent studies have greatly overcome the shortcomings of the older studies which used Öpik–Arnold type geometrical and kinematic models. However, even with the modern numerical

orbit integration techniques, computer resource limitations still make it necessary to make simplifying assumptions, to use simplified dynamical models, and to limit simulations to a relatively small number of particles. For example, the total number of particles that the recent studies have used is a few hundreds to a few thousands; this is insufficient for a statistical discussion of the collision probability of asteroids on planets. An example of a simplification of the dynamical models is that most studies have not included Mercury, considering only the seven planets from Venus to Neptune. Also, no study thus far has included the orbital mechanics of the Earth–Moon system when estimating the collisional probability of NEAs on the Earth or on the Moon. These issues might seem negligible in the conventional context of the orbital distribution of NEAs. However, as we move closer towards the goal of accurately calculating the collisional frequency and collision probability of asteroids on the terrestrial planets with a large number of particles, and eventually comparing the dynamical model results with the geological crater record, we should like to assess the significance of the effects that have been neglected in previous studies.

In this paper, we study in detail the orbital motion of more than 14,000 asteroid fragments that come from the vicinity of the ν_6 secular resonance after a hypothetical disruption event in the main belt. Our purpose here is to examine their orbital evolution and to estimate the collision probability on the terrestrial planets. We describe our dynamical model and numerical method in Section 2. Section 3 is devoted to our numerical results in detail: decay rate, production rate of near-Earth objects, collision sequence on the terrestrial planets, and some other dynamical characteristics of the asteroid fragments. Based on the numerical results so far obtained, we discuss some implications on the real dynamical evolution of asteroid fragments in our solar system in Section 4. Our conclusions are summarized in Section 5.

2. Dynamical model and initial conditions

To trace the orbital evolution of asteroid fragments created by a disruption event, we start with test particles near the ν_6 resonance and numerically integrate their orbital evolution under the gravitational effect of eight major planets, Mercury to Neptune. The major planets are assumed to have their present masses and orbital elements. All celestial bodies are treated as point masses dynamically, although planetary and solar physical radii matter when we calculate collisions between test particles and large bodies. No consideration is given to post-Newtonian gravity, tidal forces, gas drag, solar equatorial bulge, and non-gravitational or dissipative effects such as the Yarkovsky effect.

To emulate a disruption event that is supposed to have created a swarm of asteroid fragments, we make two assumptions. First, we assume an isotropic disruption; i.e. the initial velocity vector of asteroid fragments with respect to the initial position of the parent body is isotropically distributed in three-dimensional space, generated by random numbers (we discuss more about the validity of this assumption in Section 4). Second, we consider an equal-velocity disruption; all fragments have the same initial ejection velocity, v_0 . We chose $v_0 = 0.1$ or 0.2 km/s, and we also tested $v_0 = 0.8$ km/s for comparison. For the currently existing asteroid families, estimates of the initial ejection velocity of asteroid fragments are in the range of $v_0 = 0.1$ – 0.2 km/s

(Zappalà et al., 1996; Cellino et al., 1999). Our assumption of $v_0 = 0.1\text{--}0.2$ km/s is based on this estimate. We discuss this assumption in Section 4.

We selected seven initial disruption locations to sample a range of locations in the vicinity of the ν_6 resonance in orbital element space (semimajor axis a , eccentricity e , inclination I), and we adopted a physically reasonable relationship of $e = 2I$. The detailed initial conditions of the disruption location of the test particles in our numerical integrations are shown in Fig. 1 and the upper part of Table 1. The initial values of the angle variables for disruption center, such as mean anomaly l , longitudes of ascending node Ω , and argument of perihelion ω , are randomly selected from 0 to 2π .

Fig. 1

For each of the seven initial disruption locations, we placed 1000–3000 test particles (14033 particles in total), and numerically integrated their orbital evolution for up to 100 million years. When a test particle goes within the present physical radius of the Sun or that of planets, we regard the particle collides with a big body, and remove it from the computation. Also, when the heliocentric distance of a test particle gets larger than a certain value (hereafter we call it “elimination distance”), the particle’s integration is stopped because it is we think too far. In most of previous researches, this elimination distance was set to 10 AU. We set the elimination distance to a larger value, 100 AU, which we think is better justified than 10 AU (see the discussion in section 3.1).

For the numerical integration scheme, we used the regularized MVS method (the source code called SWIFT_RMVS3) devised by Levison and Duncan (1994) based on the popular algorithm of Wisdom–Holman symplectic map (Wisdom and Holman, 1991). We have modified some routines of the SWIFT_RMVS3 code for our specific needs. To check the accuracy of our numerical integrations, in several cases we also used independent numerical schemes such as the Bulirsch-Stoer extrapolation method (Bulirsch and Stoer, 1966; Press et al., 1992) or the fourth-order time-symmetric Hermite integrator (Makino and Aarseth, 1992; Kokubo et al., 1998). The statistical results obtained by the regularized MVS overall agree with that by the extrapolation method or the Hermite scheme when we choose the stepsize of 4–8 days for SWIFT_RMVS3.

3. Numerical results

In this section we describe our numerical results regarding (i) removal rate, collisional probability, decay timescale of test particle population, and survivors, (ii) time sequence of collisions of particles, (iii) typical orbital evolution of some particles that hit planets, and (iv) the dynamics of survivors.

3.1 Collision probability, decay timescale

The lower part of Table 1 summarizes the collision probability of test particles on the planets and on the Sun for each of the simulations. As mentioned previously, the orbital integration for a test particle is stopped if it collides with the Sun or planets, or if its heliocentric distance exceeds 100 AU. For the initial conditions (1)(2)(3), approximately 70% of the particles collided with the Sun. The case (4) which is relatively far from the ν_6 resonance yields no collision on any planet, and only a small fraction of particles collide with the Sun.

Table 1

About 10%–15% of the particles were removed by going too far away than 100 AU. According to our test integrations, this probability is slightly enhanced (+2% to +3%) when we used a smaller elimination distance, such as 10 AU that many other previous studies have used. Our test integration also indicates that when we use a larger elimination distance than 100 AU such as 1000 AU or 5000 AU, this probability is not significantly changed. If the orbit of a test particle is hyperbolic at a distance of $O(1000\text{AU})$, the particle is not likely to come back to the inner region again. And, even when the orbit of a test particle remains elliptic at the point of heliocentric distance of $O(1000\text{AU})$, the orbit of the particle is likely subsequently circularized by galactic tidal force. Then it is possible that the particle does not return to the inner planetary region for a very long time, a process that is part of the formation mechanism of the Oort cloud (cf. Duncan et al. 1987). Thus we consider our choice of 100 AU for the elimination distance to be dynamically better justified than the 10 AU of previous studies. It also allows us to obtain rough estimates of asteroid collision rates with the outer planets.

We included Mercury in our integrations in order to calculate the collision probability of test particles on the surface of this planet. No previous study has included Mercury, mainly because the incorporation of Mercury increases the computer time greatly, and also because the gravity of Mercury is considered so small that it might be safely ignored. To check the difference in collision probability with and without Mercury, we ran a set of numerical integrations starting from the same initial conditions as the case (2) without Mercury. The results of this run show that the collision probability of test particles on Venus in this run is about 4.5%, slightly less than the 5.06% when we included Mercury (Table 1, case (2)). The fraction of the solar colliders increased from 71.6% to 73.0% when we excluded Mercury. Collision probabilities for other planets are not very different with and without Mercury. This result suggests that Mercury has a small but possibly measurable effect on the collision probability on Venus, deflecting a fraction of sun-grazing objects that would otherwise collide with the Sun.

Figure 2 shows the decay rate of all the test particle populations for each of our initial conditions (1)–(7). The decay rate depends strongly on the location of disruption event, as well as on the initial ejection velocity, v_0 . The decay rates for the initial conditions with $v_0 = 0.2$ km/s (1)(2)(3) look very similar, whereas that for the case (5) with $v_0 = 0.8$ km/s shows a much longer decay timescale, although a, e, I of the disruption center of the case (5) is same as those of the case (2). Generally, the smaller v_0 is, the stronger the dependence of the decay timescale on the initial disruption center. The decay timescales of the condition (6) and (7) are very different in spite of the fact that their v_0 is the same ($v_0 = 0.1$ km/s): (7) which is closer to the resonance center shows a shorter decay timescale, whereas (6) exhibits much longer decay timescale because the disruption center of (6) is further from the ν_6 resonance center. In particular, the very beginning part of the decay curve, up to ~ 5 Myr for the case (6) in Fig. 2 has a relatively shallow slope. This slow start owes to the slow diffusion of particles from the disruption center (6) to the ν_6 resonance center where their eccentricities and inclinations are quickly pumped up. We did not plot the decay curve for the initial condition (4) on Fig. 2 because only four particles were removed from this set over the entire 100 million year integration.

Fig. 2

3.2 Collision sequence

As in Table 1, several per cent of the asteroid fragments eventually hit the planets, mostly the terrestrial planets. Figures 3 and 4 show the histogram of the particles that collided with planets and the Sun, and the particles that went beyond 100 AU from the Sun for each of the datasets (1)–(7) except (4). Though both of Figs. 3 and 4 may look like typical examples of small number statistics, some systematic trends are notable: the peak of collision flux on planets comes first to Mars, then to the Earth, Venus, and finally to Mercury. The peak of the collisions to the Sun, as well as the peak of the particles that go too far away from the Sun, comes even earlier than the peak of the collisions to Mars. As we mention in the next section, the eccentricity and inclination of the particles that are close to the ν_6 resonance center are pumped up very quickly by the ν_6 itself and by the Kozai oscillation, in less than a few to ten Myr for the initial condition (1)(2)(3). Many of the particles whose eccentricities get very high directly hit the Sun, or encounter with Jupiter and get scattered outward, eventually eliminated from the system. This causes the rapid production/decay rate of the solar colliders and “too-far” particles. On the other hand, close encounters with the terrestrial planets reduce the semimajor axes of many particles, making them migrate toward the terrestrial planetary zone with a longer timescale. These particles are the candidates for planetary collisions.

Even when the asteroid fragments are widely scattered due to a large initial ejection velocity, such as the case (5) with $v_0 = 0.8$ km/s, the production and decay timescale of the solar colliders and the “too-far” particles is not so different from when the value of v_0 is smaller as in (1)(2)(3). This is because the initial orbital distribution of the fragments that belong to (5) overlaps the ν_6 resonance (Fig. 1), and some particles are very close to the resonance center from the beginning, which could lead to the rapid production rate of solar colliders and too-far particles. At the same time, the highly dispersed distribution of the particles of (5) provides a long tail in the flux of planetary colliders, as we see in the panels in the left columns of Fig. 4.

When the initial distribution of asteroid fragments is not so widely scattered (i.e. when their initial ejection velocity is small) but the location of the disruption event is away from the resonance center such as case (6), it takes much longer for particles to approach the resonance center. Hence the production and decay timescale of solar colliders, too-far particles, and planetary colliders get much longer (the middle panels of Fig. 4), compared with the cases of other initial conditions whose centers are closer to the ν_6 center. In contrast, when the initial ejection velocity of asteroid fragments is small and the location of disruption event is near the resonance center such as (7), the removal efficiency of asteroid fragments from the system is very high, and the decay timescale is very short as we see in the right panels of Fig. 4.

The results in Table 1 show that the integrated collision frequency for Venus over 100 million years is about 1.5 times larger than that for the Earth for all the initial conditions. Also, the collision probability for Mercury is about 1.2 to 3 times larger than that for Mars, except the case (6). Since our result shown in Table 1 is typical of small number statistics, the collision probability for each planet contains non-negligible uncertainties. For example, we got 11 collisions (0.56%) on Mercury and 18 collisions (0.91%) on Mars from the 1975 particles in case (6). But these numbers include the possible error of $11 \pm \sqrt{11} \sim 11 \pm 3.3$ and $18 \pm \sqrt{18} \sim 18 \pm 4.2$. Hence the conclusion that Mars has more collisions than Mercury in the case (6) might not hold

Fig. 3

Fig. 4

so obviously. This small number statistics problem underscores the need for the simulations using many more particles.

To take a closer look at the collision probability on planets, we took the case (2) as an example and recorded the number of particles that encountered with the Hill spheres of each terrestrial planet. Beginning with 2962 particles in the case (2), 55,202 encounters were detected at Mercury’s Hill sphere. Also, 1,925,347 encounters with Venus’ Hill sphere, 2,628,708 encounters with Earth’s Hill sphere, and 871,638 encounters with Mars’ Hill sphere were recorded during the 100 million year integration. These numbers of close encounters are large enough for us to statistically discuss the encounter probability. We calculated the root mean square of the encounter velocity $\langle v_e \rangle$ of all the encounters at the surface of planetary Hill spheres, time-averaged over 100 million years. The time-averaged value of v_e , $\langle v_e \rangle$ are 34.7 km/s for Mercury, 25.8 km/s for Venus, 22.0 km/s for Earth, and 14.8 km/s for Mars. Since $\langle v_e \rangle$ around each planetary Hill sphere is roughly equal to the Kepler velocity of test particles at encounter points, $\langle v_e \rangle$ is the largest around Mercury’s Hill sphere and the smallest around Mars’ Hill sphere. We note that these values are larger than the escape velocity of each planet. Thus gravitational focusing is not significant, and the particle-in-a-box approximation gives relatively accurate estimates of collision probability. The proportions the $\langle v_e \rangle$ values for Mercury, Venus, Earth, and Mars averaged over 100 million years and normalized by the value of the Earth is about 1.58 : 1.17 : 1 : 0.674. The ratio of planetary surface area between these four planets normalized by the value of the Earth is about 0.146 : 0.900 : 1 : 0.283. Simply multiplying these ratios gives us an approximate estimate of the relative collision probabilities of test particles on each planet, assuming the particle-in-a-box approximation. The resulting proportion 0.231 : 1.05 : 1 : 0.191 is in reasonably good agreement with the collision probabilities in Table 1. This roughly explains why the collision frequency for Venus is slightly larger than that for the Earth and why that for Mercury is somewhat larger than that for Mars. The largest deviation from the particle-in-a-box approximation is seen for the collision probability of Venus to that of Earth; the particle-in-a-box approximation yields a ratio of 1.05 whereas the numerical simulations yield a ratio of 1.18–1.65 (Table 1).

Although the rough estimates that we described might be safely used for the qualitative explanation of the dynamical behavior of the asteroid fragments, it is also clear that we need many more particles to get much better statistics of direct planetary collisions, especially when we include the lunar orbit around the Earth. In particular, for the comparison between dynamical simulations and geological crater record, reliable collisional statistics produced from the direct integration of lunar orbit is necessary. Thus, for a future study we are preparing the direct integration of test particles including lunar orbital motion in our numerical models.

As for the collision probabilities of test particles with the outer planets, they are generally low, which is also true in our numerical integrations. The strong gravitational field of large jovian planets, especially that of Jupiter and Saturn, mainly works for scattering particles, rather than letting them collide with the large planets. Because of this scattering effect, 10–15% of the fragments end up as “too-far” particles at the distance of 100 AU. In the actual solar system, some of those particles could be a potential source of the Oort cloud objects.

3.3 Typical orbital evolution of planetary colliders

Orbital evolution of near-Earth asteroids starting from resonance zones in the main belt is generally complicated and often chaotic (Gladman et al., 1997). In addition to the strong resonances such as ν_6 and other mean motion resonances, numerous number of weak resonances are effective to diffuse the orbits of asteroids until they get into the strong resonances (Morbidelli and Nesvorný, 1999). Here we describe a few dynamical characteristics of the particles that evolve toward the terrestrial planets in our numerical integrations. As the first stage, ν_6 itself is effective, and pumps up the eccentricity of nearby particles quite effectively. The timescale of the enhancement of eccentricities depends on the particle's distance from the resonance center, but typically less than one to a few million years under the initial conditions (1)(2)(3). Some of the particles collide with the Sun because of this quick enhancement of eccentricity, even before they experience many close encounters with planets. Once the eccentricity of particles around the resonance is enhanced to planetary-crossing values, close encounters between particles and planets occur, which change the semimajor axes of particles. When the semimajor axis of a particle is reduced, perihelia and aphelia of the particle go deeper inside the terrestrial planetary orbits. This can allow the collisions between planets and the particles. Since the planetary encounters get frequent first with Mars, then with Earth and the inner planets, the peak of planetary collisions comes to Mars first, then to the inner planets in order as seen in Figs. 3 and 4.

Figure 5 shows the typical orbital evolution of three planetary colliders starting from the initial condition (2). The panels (1[a–d]) in Fig. 5 are for a particle that hit the Earth, and the panels (2[a–d]) and (3[a–d]) are for two particles that collided with Venus. During the first one million years, the eccentricities of all three particles are pumped up rapidly due to the ν_6 resonance. Their orbits begin crossing the orbit of Mars within a million years followed by close encounters with the Earth, as shown by many abrupt changes in semimajor axis in the panel (1b) in Fig. 5. For the particle shown in the panels (1[a–d]) in Fig. 5, the combination of the eccentricity pump-up by the ν_6 resonance and the close encounters with Mars brought its perihelion near the Earth's orbit, and eventually caused the particle to hit the Earth. For the particles in the panels (2[a–d]) and (3[a–d]) in Fig. 5, planetary close encounters conveyed their perihelion distance near the orbit of Mercury with the timescale of a few million years, having the particles collide with Venus. The inclination of any particle does not show a significant change during their lifetimes (the panels [1–3]c).

The main outline of this three-stage mechanism, i.e. enhancement of eccentricity by $\nu_6 \rightarrow$ close encounters with planets \rightarrow planetary collisions, has been obtained by Monte Carlo simulations already in the 1980's, and verified in numerical integrations in the 1990's (Wetherill, 1985; Farinella et al., 1994; Gladman et al., 1997; Morbidelli and Gladman, 1998). Our detailed numerical integrations can identify one more interesting dynamical feature here. In the orbital evolution of these particles, we can see the strong evidence of the Kozai mechanism (Kozai, 1962; Kinoshita and Nakai, 1991; Michel and Thomas, 1996). The Kozai mechanism (sometimes called the Kozai behavior, the Kozai oscillation, the Kozai state, the Kozai cycle, and the Kozai resonance), drives the eccentricity and the inclination of asteroids very high, such as $e \sim 1$ and $I \sim 90^\circ$ under certain conditions. In our integrations, certain number of particles exhibit the

Fig. 5

Fig. 6

Kozai behavior in a relatively short timescale such as a few to 10 million years when started from the initial locations (1)(2)(3). The Kozai behavior here is a production mechanism of some sun-grazers and solar colliders. The panels of (1[a–d]) and (2[a–d]) in Fig. 6 show typical Kozai behaviors seen in two of the particles started from the initial condition (2). These two particles experienced several planetary close encounters which changed their semimajor axis (1b and 2b) and eccentricity (1a and 2a) to the values that satisfy the condition of the Kozai mechanism in the later half of their dynamical lifetime. For these two particles, what we see is the circulation-type Kozai behavior; their arguments of perihelion circulate as in the panels (1c) and (2c), but they spend more time around $\omega = 0$ and $\omega = 180^\circ$ than at other values. The eccentricity of the two particles eventually reached near 1 with high inclinations, which led them to the collision to the Sun.

Interestingly, some particles survive the entire integration period (100 million years) even though they exhibit the Kozai behavior. The panels (3[a–d]) in Fig. 6 are the typical examples of the orbital elements of such a particle. This particle behaves quite differently from other particles shown in the panels (1[a–d]) and (2[a–d]) in Fig. 6. The argument of perihelion comes back and forth between circulation and libration, ending up with the libration around $\omega = 270^\circ$. This variation is again caused by the change of semimajor axis due to the close encounters with planets. The eccentricity and inclination of the particle was enhanced by this mechanism, but not enough for the particle to collide with the Sun. When this particle exhibits a typical libration-type Kozai behavior after time $t > 20$ Myr, the argument of perihelion always stays around $\omega = 270^\circ$ or 90° , keeping its inclination large ($I \sim 30\text{--}60^\circ$). This possibly reduces the interaction with planets, providing a kind of protection mechanism for the particle from close encounters with planets. This protection mechanism is essentially the same as what Michel and Thomas (1996) demonstrated in the dynamical motion of some actual near-Earth asteroids.

As a possible projectile onto the Earth–Moon system, here we define an Earth-crossing object (hereafter we call ECO) as a particle whose perihelion distance q is smaller than the aphelion distance Q of the Earth, and whose aphelion distance is larger than the perihelion distance of the Earth (i.e. $q < Q_{\text{Earth}}$ and $Q > q_{\text{Earth}}$). This definition is approximately same as that of the combination of two NEA groups, Atens and Apollos; i.e. the ECOs compose a subset of NEAs. Examples of the time-dependent probability distribution of the orbital elements of the ECOs thus defined are shown in Figs. 7 and 8 for the initial conditions (3) and (6). In Fig. 7 for the initial condition (3), we can see the rapid enhancement of eccentricity in a few million years, as well as the gradual reduction of perihelion distance with the timescale of about 10 million years mainly because of the close encounters with planets, as described before. The Kozai behavior is clear in the panel of the argument of perihelion (bottom left). The density of particles are higher at around $\omega = 0$ and $\omega = 180^\circ$ in the first several million years, which demonstrates the existence of the circulation-type Kozai behavior. Figures 8 for the initial condition (6) shows qualitatively the same dynamical character (rapid enhancement of eccentricity, gradual reduction of perihelion distance, and the circulation-type Kozai behavior). But their timescale is much longer than in Figs. 7, because the initial location of the disruption event is away from the resonance center, and also because the particles of the initial condition (6) are concentrated in a smaller region than those of the initial condition (2) due to the smaller initial ejection velocity, $v_0 = 0.1$ km/s. The panel for the argument of perihelion in Figs. 8 (bottom left)

shows the libration-type Kozai behavior at around $\omega = 270^\circ$ in the later half of the integration period, which indicates that some particles survived over the whole integration period with this libration-type Kozai behavior, as exhibited in Fig. 6 (3c). Longitudes of ascending node of test particles are distributed uniformly in any integrations (bottom right panels).

Fig. 7

Fig. 8

3.4 Survivors

After 100 million year integrations, we still have many survivors (see the bottom of Table 1) that have not collided with planets or the Sun, or reached large heliocentric distances. Figure 9 shows the final orbital elements (semimajor axis, eccentricity and inclination) of the survivors starting from each of the initial conditions. These orbital elements are time-averaged over the final 5×10^5 years in order to obtain the values that are similar to their proper orbital elements. Most of the survivors have semimajor axes smaller than 2.5 AU. The particles that went well beyond the ν_6 resonance center from the initial locations were perturbed by other resonances, such as 3:1 or 2:1, and relatively quickly eliminated from the system by hitting the Sun or other planets, or ejected out of the system. The particles that are diffused to smaller semimajor axis have a long tail of survivors.

Almost all particles started from (4) have remained near their original positions where there is no strong resonance. Also, a large fraction of particles started from (5) and (6) are still confined in relatively limited areas in the orbital element space. In this sense, we may think that the particles started from (4)(5)(6) can form asteroid families, at least on timescales of 100 million years. However, long-term perturbations caused by numerous small resonances may diffuse this family-like structure, especially their proper eccentricities and inclinations, over longer periods such as 10^9 years. Initial conditions other than (4)(5)(6) do not yield a distinct asteroid family 100 million years after the disruption events, such as seen in Fig. 9 (1)(2)(3)(7). So, it would be difficult to find clear evidence of a very old disruption event, looking at the current orbital elements of family asteroids. In other words we cannot rule out the possible existence of many asteroid families in the distant past, because it is likely that they would be dispersed on 10^9 year timescale if they had been formed in the vicinity of a strong resonance area such as ν_6 . This anticipation is supported by a recent estimate that more than 90% of the current asteroids may belong to families (Ivezić et al., 2002).

One feature that draws our attention in Fig. 9 is that many particles survive with high eccentricity and high inclination. For a closer look at this feature, we plot in Fig. 10 the inclination distribution of our near-Earth survivors from the cases (1)(2)(3) and (5) (the definition of the near-Earth survivors is the same as that of the ECOs in the section 3.3), other (non-near-Earth) survivors from the cases (1)(2)(3) and (5), currently known 1,413 ECOs out of 2,335 NEAs (Atens, Apollos, and Amors), and 234,230 main belt asteroids (MBAs) with the semimajor axis $2\text{AU} < a < 4\text{AU}$. We accumulated all the survivors for the cases (1)(2)(3) in Fig. 10 (b) and (e) because these three cases are not statistically very different in terms of the orbital elements of survivors.

Comparing the panel (a) for the currently known ECOs with (b) and (c) for our survivors, it is obvious that the inclination of the near-Earth survivors in our numerical integrations tends to be higher than the currently known ECOs (or NEAs). Also, comparing the panel (d) for the known MBAs with (e) for our survivors, we can see that non-near-Earth survivors that belong to the cases (1)(2)(3) also have higher-inclination distribution than the current MBAs. As we saw in the previous section, many of the long-term survivors exhibit the Kozai behavior that enhances their inclination to a great deal, which serves as a protection mechanism for the particles by reducing the frequency of close encounters with planets. This result suggests that the remnants

of old disruption events (more than 100 million years ago or older) are preferentially to be found amongst the high inclination ECOs or NEAs, or even among the high-inclination MBAs.

The inclination distribution of the non-near-Earth survivors from the case (5) tends to be in smaller inclination region (Fig. 10 (f)). This is because a large part of the main belt survivors for the case (5) still keep relatively smaller eccentricities and inclinations even after the 100 million year integration, as we saw in the panels (5) of Fig. 9. However, longer-term planetary perturbation and numerous weak resonances can push these survivors toward ν_6 that scatters them, eventually making their inclination distribution similar to that of the cases (1)(2)(3) as in Fig. 10 (e).

Fig. 9

Fig. 10

4. Discussion

In this section we discuss a few issues that might be significant in future development of this line of research: initial ejection velocity of asteroid fragments after the disruption event, the effect of the velocity dependence on fragment size, and the influence of the Yarkovsky thermal force.

The typical initial ejection velocity of asteroid fragments that we used in our numerical integrations, $v_0 = 0.1$ km/s or 0.2 km/s, is as large as the maximum estimation of what hydro- and N -body numerical simulations predict. Benz and Asphaug (1999) showed that the ejection velocities of order 0.1 km/s can be obtained for basaltic targets provided the impactor size is at least about half the parent body size when the impact velocity is 3 – 5 km/s which is the typical relative velocity in the current asteroid belt. Michel et al. (2001; see also Michel et al. 2002) numerically simulated a catastrophic disruption using an SPH and an N -body code in order to create an asteroid family with a small mass ratio between the largest fragments and the parent body, such as the Koronis family. Using the collision velocity of 3.25 km/s in their numerical experiment, the mean ejection speed of the particles greater than their numerical resolution (fragment diameter $D > 1$ – 4 km) is 0.128 km/s with a root mean square of 0.088 km/s. If the random velocity of main belt asteroids was as large as the present one at the time of the disruption, the impact velocity between asteroids can be up to ~ 5 km/s. In this sense the results of the numerical simulations such as Benz and Asphaug (1999) or Michel et al. (2001, 2002) are in favor of our assumption on v_0 .

The results of some laboratory experiments have reported lower values of v_0 , such as 0.001 – 0.01 km/s for the largest fragments (Fujiwara et al., 1989; Nakamura and Fujiwara, 1991; Martelli et al., 1994). However, the diameter range of the fragments that are produced from these laboratory experiments (such as $D < 10$ cm in Nakamura and Fujiwara (1991)) are much smaller than that of the actual asteroid fragments, as is the nature of laboratory experiments. In this size range, the high material strength might be able to keep the ejection velocity of fragments lower even if the collision velocity is high. Also, the result of the hydro-code simulation by Benz and Asphaug (1999) indicates that a high-mass and low-velocity projectile will lead to a higher fragment velocity than a high-velocity and a small-mass projectile because of the efficient momentum transfer of larger projectiles. Hence we believe that the value of v_0 that we use is no less reliable than a conjecture, if no more than a reasonable prediction.

Another thing that we have to be concerned is the assumption of equal-velocity disruption, i.e. every particle has the same v_0 . In general, smaller fragments have higher ejection velocity than larger fragments, even when the equi-partition of kinetic energy is not fully realized. If we express the dependence of mean ejection velocity on fragment size by an index β as $v_0 \propto D^{-\beta}$, the SPH simulation by Michel et al. (2003) yields $\beta \sim 0.5$ for an impact on a pre-shattered target, and a smaller β for a monolithic target (Patrick Michel, private communication, 2003). Nakamura and Fujiwara (1991)'s laboratory experiments gives a similar value of β for basaltic targets. In addition, these experiments indicate that the distribution of v_0 of particular size fragments can have a significant scatter, such as 1–2 orders of magnitude, especially when the fragment size is small.

The dependence of v_0 on fragment size and its possible scatter can significantly extend the initial distribution of the asteroid fragments in orbital element space. For example, suppose the v_0 of a $D = 20$ km fragment is 0.2 km/s. Then, the fragments with $D = 0.1$ km have $v_0 \sim 2.8$ km/s when we assume the index value of $\beta = 0.5$. Since there are many more smaller fragments than larger fragments, v_0 of this large value enormously extends the distribution of particles on (e, a) or (I, a) plane. In Fig. 11 we plot an example of the initial distribution of test particles using the size-velocity dependence $v_0 \propto D^{-0.5}$, centered on the same location as that of the initial condition (2). We assumed that the maximum fragment has the diameter of about 16 km with the initial ejection velocity $v_0 = 0.2$ km/s. The smallest fragment would be $D = 0.4$ km with $v_0 = 1.26$ km/s. There are 6155 particles plotted in Fig. 11, as well as the particles that belong to the initial condition (2). While this extension of the orbital distribution of asteroid fragments might be another justification to use somewhat large initial ejection velocity for our numerical integration such as $v_0 = 0.8$ km/s, it can greatly delay the arrival of the asteroid fragments to the terrestrial planetary region, especially that of smaller fragments. Accordingly, the decay time of the asteroid flux can be very long, much longer than what our numerical integrations yield.

Fig. 11

The choice of the initial ejection velocity is also influenced by the Yarkovsky effect. The Yarkovsky effect can deliver asteroids with $D < 20$ km from their parent bodies to resonance zones, which transport them to the terrestrial planetary orbits (Bottke et al., 2002b). This ability of the Yarkovsky effect can make asteroid families disperse over a long-time period, drifting the proper semimajor axes of the family asteroids inward and outward (Bottke et al., 2001). The estimates of the initial ejection velocity of currently existing asteroids (Zappalà et al., 1996; Cellino et al., 1999) are based on the assumption that the proper semimajor axis of the family asteroids are constant against long-term planetary perturbations (e.g., Milani et al. 1992). If the Yarkovsky effect can significantly spread the proper semimajor axes of family asteroids, the estimated value of v_0 using the current distribution of their proper semimajor axis might be too large.

Even if the small asteroid fragments are scattered very widely such as in Fig. 11 due to the velocity dependence on size, the capability of Yarkovsky effect to transport the asteroid fragments to resonance zones can effectively work, especially on smaller fragments. Hence, once a large number of fragments are produced around resonance zones, sooner or later they are likely to encounter with resonances and eventually be conveyed to the terrestrial planetary orbits. Thus both the wide spread of the asteroid distribution and the Yarkovsky effect can

work for a slow decay of the asteroid flux originated by a large disruption event not so close to a strong resonance zone in the main asteroid belt.

Our numerical model is still premature, not including the effects discussed in this section such as the Yarkovsky effect. Moreover, the number of particles that we have used is not enough to make a confident statistical statement in terms of the direct collision probability on the terrestrial planets, particularly for the Moon. The future direction of our research will be (i) to increase the number of test particles, (ii) to include the Moon in our numerical model, (iii) to take account of the size dependence of the initial velocities of asteroid fragments, and (iv) to incorporate the Yarkovsky effect in the integration scheme. Eventually we hope to obtain certain simulated crater records for the planets that can be compared directly with the observations of planetary surface.

5. Conclusions

We have explored the dynamical evolution of test particles with initial conditions near the ν_6 resonance in order to simulate the orbital evolution of fragments from a hypothetical asteroid break-up event. Compared with previous studies, our simulations follow an order of magnitude larger number of particles, and relax in many ways the simplifying assumptions of previous models. We calculated directly the collision probabilities on the Sun and each planet, and the dynamical lifetimes of asteroid fragments. We examined how these quantities depend upon the initial conditions (on both the distance of the break-up event from the ν_6 resonance and the velocity dispersion of the fragments). Our conclusions are summarized as follows (a–g):

(a) Decay timescale as function of initial conditions: The decay rate of the particle population starting from the vicinity of the ν_6 resonance depends on its location and the initial ejection velocity. If particles start from relatively closer locations to the resonance center with the initial ejection velocity $v_0 = 0.1$ or 0.2 km/s (such as the cases (1)(2)(3) or (7)), the half decay timescale is very short, less than ten million years. This result is consistent with the previous calculation by Gladman et al. (1997). When the initial location of particles are far from the resonance center (such as the case (6)), or when the ejection velocity v_0 is very large (such as the case (5)), the decay timescale becomes much longer, 50–60 million years or more.

(b) Implications for NEAs: In our numerical integrations, the orbital evolution of ECOs produced by a disruption in the main asteroid belt sometimes shows a very long tail such as in Fig. 8 for the case (6). The decay timescale of ECOs can be about 50 million years or more, depending on the initial location of disruption event. This timescale is much longer than what has previously estimated for NEAs or NEOs (cf. Gladman et al. 1997; Bottke et al. 2002a). Since the ECOs compose a subset of NEAs, this fact suggests that some fraction of the current observed NEAs could be a remnant of disruption events more than 50 million years ago or older. Also, since major part of the ECOs (or NEAs) in our numerical integrations have survived in high-inclination range through the Kozai behavior in our integrations. We cannot deny the possibility that some of the NEAs with high inclination are leftovers of old disruption events in the main asteroid belt.

(c) Implications for dispersion of ancient asteroid families: Our integrations first showed that after 100 million years integrations, some of the survived particles still form asteroid “families” (such as (4)(5)(6) in Fig. 9), but other particles do not show such family-like dynamical structure because of the long-term perturbations. It is possible that the family-like structures shown for (4)(5)(6) might disappear on billion year timescale. This implies that there could have been many asteroid families in the distant past that have already disappeared by now. Some of them could have formed with a larger initial ejection velocity than what we estimate from the currently existing asteroid families.

(d) Collision peak sequence: Our integrations showed the detailed collision peak sequence of asteroid fragments for terrestrial planets and the Sun. The peak of collision flux comes first to Mars, then to the Earth, Venus, and finally to Mercury. The timescale depends on the initial location of disruption and ejection velocity. The peak of the collisions to the Sun, as well as the peak of the particles that go too far away from the Sun, comes even earlier than the peak of the collisions to Mars. This is because many of the particles have their eccentricity enhanced very quickly due to the strong ν_6 resonance or the Kozai mechanism, which produces a lot of sun-grazing objects as well as Jupiter-encountering particles.

(e) Collision probabilities on Sun and on each planet: The relative collision probabilities on planets and on the Sun in our numerical integration are somewhat similar to the result by Gladman et al. (1997), especially in the cases close to the resonance center (such as (1)(2)(3)(7)): more than 70% of the particles hit the Sun, and more than 10% went too far from the Sun. The biggest difference between our and Gladman et al. (1997)’s result is that we observed more collisions on Venus than on the Earth (see Table 1) whereas Gladman et al. (1997)’s result indicates smaller collision probability on Venus. We believe that Venus could have slightly larger collision probability than the Earth due to the reason that we described in 3.2 (see also the point (f) below). The difference might also be ascribed to the fact that Gladman et al. (1997) used much fewer particles (~ 150) for their integrations, resulting in the small number statistics.

(f) Effect of Mercury: We included Mercury in our numerical integrations, which no previous studies did. According to our test integration without Mercury for comparison, the collision probability of test particles on Venus is about 4.5% without Mercury, slightly less than the 5.06% when we included Mercury (Table 1, case (2)). The fraction of the solar colliders increased from 71.6% to 73.0% when we excluded Mercury. This result suggests that Mercury has a small but possibly measurable effect on the collision probability of test particles on Venus, deflecting a part of sun-grazing objects that would otherwise collide with the Sun.

(g) Implications for the Oort cloud objects: In our numerical integrations, about 10%–15% of the particles were “removed” because their heliocentric distance exceeded 100 AU. This probability is slightly enhanced (+2% to +3%) when we used a smaller elimination distance such as 10 AU that many other previous studies have used. Our test integration also indicates that when we use a larger elimination distance than 100 AU such as 1000 AU or 5000 AU, this probability is not significantly changed. The particles that reached a distance of $O(1000\text{AU})$ probably do not return to the planetary region for a very long time largely because their orbits are likely circularized by galactic tidal force. This mechanism might have contributed to the addition of asteroid fragments to the Oort cloud. Since there could be many disruption events

near the resonance zones in the main asteroid belt, a significant number of asteroids might have migrated to the Oort cloud region through this mechanism, depending on the magnitude and the total number of such disruption events.

Acknowledgments

The authors have greatly benefited from stimulating discussions with and encouragement from David Kring and Robert Strom. Fumi Yoshida provided us some useful information on the observational fact of current asteroids. RM acknowledges research support from NASA grant NAG5-11661. Part of the numerical calculation was performed at Astronomical Data Analysis Computer Center, National Astronomical Observatory of Japan, Tokyo.

References

- Benz, W., Asphaug, E., 1999. Catastrophic disruptions revisited. *Icarus* 142, 5–20.
- Bottke, W.F., Vokrouhlický, D., Brož, M., Nesvorný, D., Morbidelli, A., 2001. Dynamical spreading of asteroid families by the Yarkovsky effect. *Science* 294, 1693–1696.
- Bottke, W.F., Morbidelli, A., Jedicke, R., Petit, J.-M., Levison, H.F., Michel, P., Metcalfe, T.S., 2002a. Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. *Icarus* 156, 399–433.
- Bottke, W.F., Vokrouhlický, D., Rubincam, D.P., Brož, M., 2002b. The Effect of Yarkovsky Thermal Forces on the Dynamical Evolution of Asteroids and Meteoroids. In: Bottke, W.F., Cellino, A., Paolicchi, P., Binzel, R.P. (Eds.), *Asteroid III*, Univ. Arizona Press, Tucson, pp. 395–408.
- Bulirsch, R., Stoer, J., 1966. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. *Num. Math.* 8, 1–13.
- Cellino, A., Michel, P., Tanga, P., Zappalà, V., 1999. The velocity and implications for the physics of catastrophic collisions. *Icarus* 141, 79–95.
- Duncan, M., Quinn, T., Tremaine, S., 1987. The formation and extent of the solar system comet cloud. *Astron. J.* 94, 1330–1338.
- Farinella, P., Froeschlé, CH., Froeschlé, C., Gonczi, R., Hahn, G., Morbidelli, A., Valsecchi, G.B., 1994. Asteroid falling onto the Sun. *nature*, 371, 315.
- Froeschlé, CH., Morbidelli, A. (1994) The secular resonances in the solar system. In: Milani, A., Di Martino, M., Cellino, A. (Eds.), *Proceeding of the 160th IAU Symposium, Asteroids, Comets, Meteors 1993*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 189–204.
- Froeschlé, CH., Hahn, G., Gonczi, R., Morbidelli, A., Farinella, P., 1995. Secular resonance and the dynamics of Mars-crossing and near-Earth asteroids. *Icarus* 117, 45–61.

- Fujiwara, A., Cerroni, P., Davis, D.R., Di Martino, M., Holsapple, K., Housen, K., Ryan, E.V., 1989. Experiments and scaling laws for catastrophic collisions. In: Binzel, R.P., Gehrels, T., Matthews, M. (Eds.), *Asteroid II*, Univ. Arizona Press, Tucson, pp. 240–265.
- Gladman, B., Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappalà, V., Michel, P., Cellino, A., Froeschlé, C., Levison, H.F., Bailey, M., Duncan, M., 1997. Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances. *Science* 277, 197–201.
- Ivezić, Ž., Lupton, R.H., Juric, M., Tabachnik, S., Quinn, T., Gunn, J.E., Knapp, G.R., Rockosi, C.M., Brinkmann, J., 2002. Color confirmation of asteroid families. *Astron. J.* 124, 2943–2948.
- Kinoshita, H., Nakai, H., 1991. Secular perturbations of fictitious satellites of Uranus. *Celes. Mech. Dyn. Astron.* 52, 293–303.
- Kokubo, E., Yoshinaga, K., Makino, J., 1998. On a time-symmetric Hermite integrator for planetary N -body simulation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 297, 1067–1072.
- Kozai, Y., 1962. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* 67, 591–598.
- Levison, H.F., Duncan, M.J., 1994. The long-term dynamical behavior of short-period comets. *Icarus* 108, 18–36.
- Makino, J., Aarseth, S.J., 1992. On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems. *Publ. Astron. Soc. Japan* 44, 141–151.
- Martelli, G., Ryan, E.V., Nakamura, A.M., Giblin, I., 1994. Catastrophic disruption experiments: recent results. *Planet. Space Sci.* 42, 1013–1026.
- Michel, P., Thomas, F., 1996. The Kozai resonance for near-Earth asteroids with semimajor axis smaller than 2 AU. *Astron. Astrophys.* 307, 310–318.
- Michel, P., Benz, W., Tanga, P., Richardson, D.C., 2001. Collisions and gravitational reaccumulation: Forming asteroid families and satellites. *Science* 294, 1696–1700.
- Michel, P., Benz, W., Tanga, P., Richardson, D.C., 2002. Formation of asteroid families by catastrophic disruption: simulations with fragmentation and gravitational reaccumulation. *Icarus* 160, 10–23.
- Michel, P., Benz, W., Richardson, D.C., 2003. Disruption of fragmented parent bodies as the origin of asteroid families. *nature* 421, 608–611.
- Milani, A., Knežević, Z., 1992. Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus* 98, 211–232.
- Morbidelli, A., Gladman, B., 1998. Orbital and temporal distribution of meteorites originating in the asteroid belt. *Meteor. Planet. Sci.* 33, 999–1016.

- Morbidelli, A., Henrard, J., 1991. Secular resonances in the asteroid belts: theoretical perturbation approach and the problem of their location. *Celes. Mech. Dyn. Astron.* 51, 131–167.
- Morbidelli, A., Nesvorný, D., 1999. Numerous weak resonances drive asteroids toward terrestrial planets orbits. *Icarus* 139, 295–308.
- Nakamura, A., Fujiwara, A., 1991. Velocity distribution of fragments formed in a simulated collisional disruption. *Icarus* 92, 132–146.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. *Numerical Recipes in Fortran* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Wetherill, G.W., 1979. Steady state populations of Apollo-Amor objects. *Icarus* 37, 96–112.
- Wetherill, G.W., 1985. Asteroidal source of ordinary chondrites. *Meteoritics* 20, 1–22.
- Wetherill, G.W., 1987. Dynamical relations between asteroids, meteorites and Apollo–Amor objects. *R. Soc. London Philos. Trans.* 323, 323–337.
- Wetherill, G.W., 1988. Where do the Apollo objects come from?. *Icarus* 76, 1–18.
- Wisdom, J., 1983. Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap. *Icarus* 56, 51–74.
- Wisdom, J., Holman, M., 1991. Symplectic maps for the N -body problem. *Astron. J.* 102, 1528–1538.
- Zappalà, V., Cellino, A., Dell’oro, A., Migliorini, F., Paolicchi, P., 1996. Reconstructing the original ejection velocity fields of asteroid families. *Icarus* 124, 156–180.
- Zappalà, V., Cellino, A., Gladman, B., Manley, S., Migliorini, F., 1998. Asteroid showers on Earth after family breakup events. *Icarus* 134, 176–179.

Case	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
a (AU)	2.05	2.05	2.05	2.3	2.05	2.15	2.08
e	0.05	0.10	0.20	0.25	0.10	0.10	0.15
I (deg)	1.43	2.87	5.73	24.0	2.87	2.87	4.30
ω (deg)	330.1	181.3	206.5	310.5	311.3	81.3	35.9
Ω (deg)	149.8	103.7	192.7	37.3	114.7	121.0	103.7
l (deg)	55.5	102.6	56.0	155.4	97.9	205.4	66.5
v_0 (km/s)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.8	0.1	0.1
N	1973	2962	1978	1000	2173	1975	1972
Sun (%)	66.3	71.6	70.0	0.40	45.7	51.9	74.7
Mercury (%)	0.71	0.68	1.11	0	1.06	0.56	0.91
Venus (%)	6.18	5.06	5.16	0	3.41	3.19	5.17
Earth (%)	4.21	3.17	3.49	0	2.90	2.38	3.14
Mars (%)	0.51	0.64	0.76	0	0.92	0.91	0.30
Jupiter (%)	1.01	0.57	0.30	0	0.46	0.10	0.61
Saturn (%)	0.05	0.03	0.05	0	0	0	0.05
Uranus (%)	0	0	0	0	0	0	0
Neptune (%)	0	0	0	0	0	0	0
> 100AU (%)	14.2	13.0	11.8	0	9.62	11.3	12.8
survivors (%)	5.47	4.02	6.22	99.6	34.7	28.5	0.96

Table 1: Osculating orbital elements of the locations of each disruption center in our numerical integrations, ejection velocity v_0 , the number of test particles N , and the collision probability (%) of test particles that hit the planets and the Sun or went beyond 100 AU over 100 million years, as well as the probability of survivors.

Figure captions

Figure 1. Initial osculating orbital elements of the asteroid fragments in our numerical integrations. (a) Eccentricity e and semimajor axis a . (b) Inclination I and semimajor axis a . Approximate location of the secular resonance ν_6 is shown by dashed lines in each panel (cf. Morbidelli and Henrard, 1991).

Figure 2. Relative fraction of active (survived) test particles started from each of the initial conditions (1)(2)(3)(5)(6)(7).

Figure 3. The number of particles that collided with the terrestrial planets and the Sun, and that went beyond 100 AU over 100 million years starting from the initial conditions (1; left panels), (2; middle panels) and (3; right panels).

Figure 4. Same as Fig. 3, but for the initial conditions (5; left panels), (6; middle panels), and (7; right panels).

Figure 5. Examples of the typical evolution of the orbital elements (osculating eccentricity, semimajor axis, inclination, perihelion distance) of three particles from the case (2). The first particle in the panels (1[a–d]) hit the Earth, and the other two particles in (2[a–d]) and (3[a–d]) hit Venus.

Figure 6. More examples of the typical evolution of the orbital elements (osculating eccentricity, semimajor axis, inclination, argument of perihelion) of three particles from the case (2). The first two particle in the panels (1[a–d]) and (2[a–d]) collided with the Sun, and the third particle in (3[a–d]) survived over the 100 million year integration.

Figure 7. Time-dependent orbital distribution of ECOs of the initial condition (3) over 50 million years. (Top left) Semimajor axis. (Top right) Eccentricity. (Middle left) Perihelion distance. (Middle right) Inclination. (Bottom left) Argument of perihelion. (Bottom right) Longitude of ascending node. The maximum probability density (= average number of ECOs) is different from panel to panel.

Figure 8. Same as Fig. 7, but for the particles that belong to the initial condition (6) over 100 million years.

Figure 9. Final semimajor axis, eccentricity, and inclination of the particles that survived 100 million years for each initial condition. All elements are averaged over final 5×10^5 years.

Figure 10. Distribution of the inclination of the survivors of the cases (1)(2)(3) and (5), currently known ECOs, and main belt asteroids. (a) 1,413 ECOs out of 2,335 NEAs (Atens, Apollos, and Amors), (b) near-Earth survivors from our (1)+(2)+(3), (c) near-Earth survivors from our (5), (d) 234,230 MBAs with semimajor axis $2\text{AU} < a < 4\text{AU}$, (e) other (non-near-Earth) survivors from our (1)+(2)+(3), and (f) other survivors from our (5).

Figure 11. An example of the initial distribution of 6155 test particles using the size-velocity dependence $v_0 \propto D^{-0.5}$. (a) Osculating eccentricity and semimajor axis. (b) Osculating inclination and semimajor axis. The initial distribution of the particles of the initial condition (2) is

also plotted as a reference, concentrated around the point of $a = 2.05\text{AU}$, $e = 0.1$, and $I = 2.87$ degree.

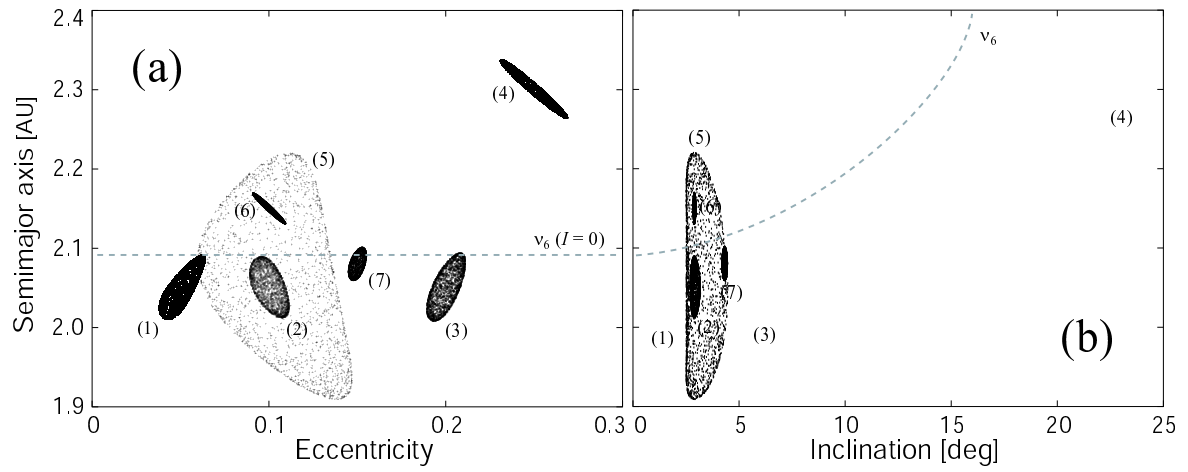


Figure 1: Ito and Malhotra

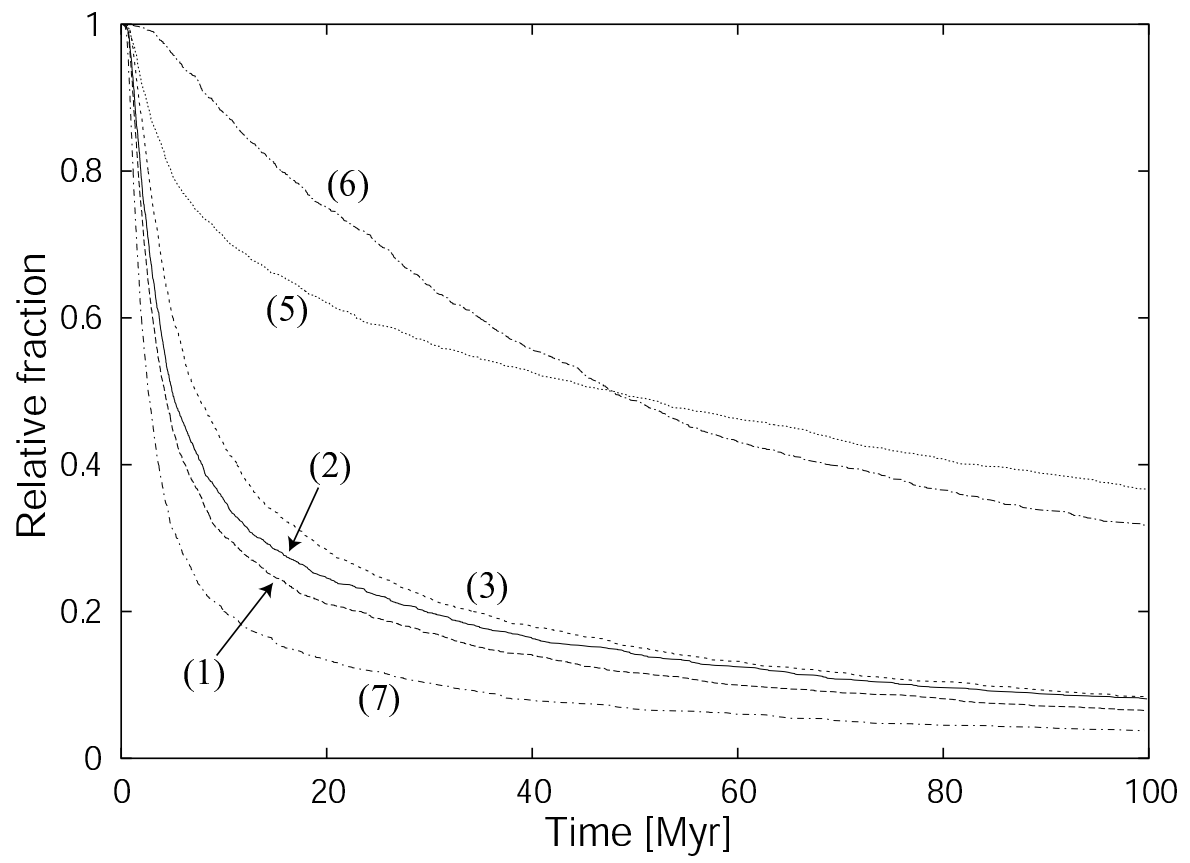


Figure 2: Ito and Malhotra

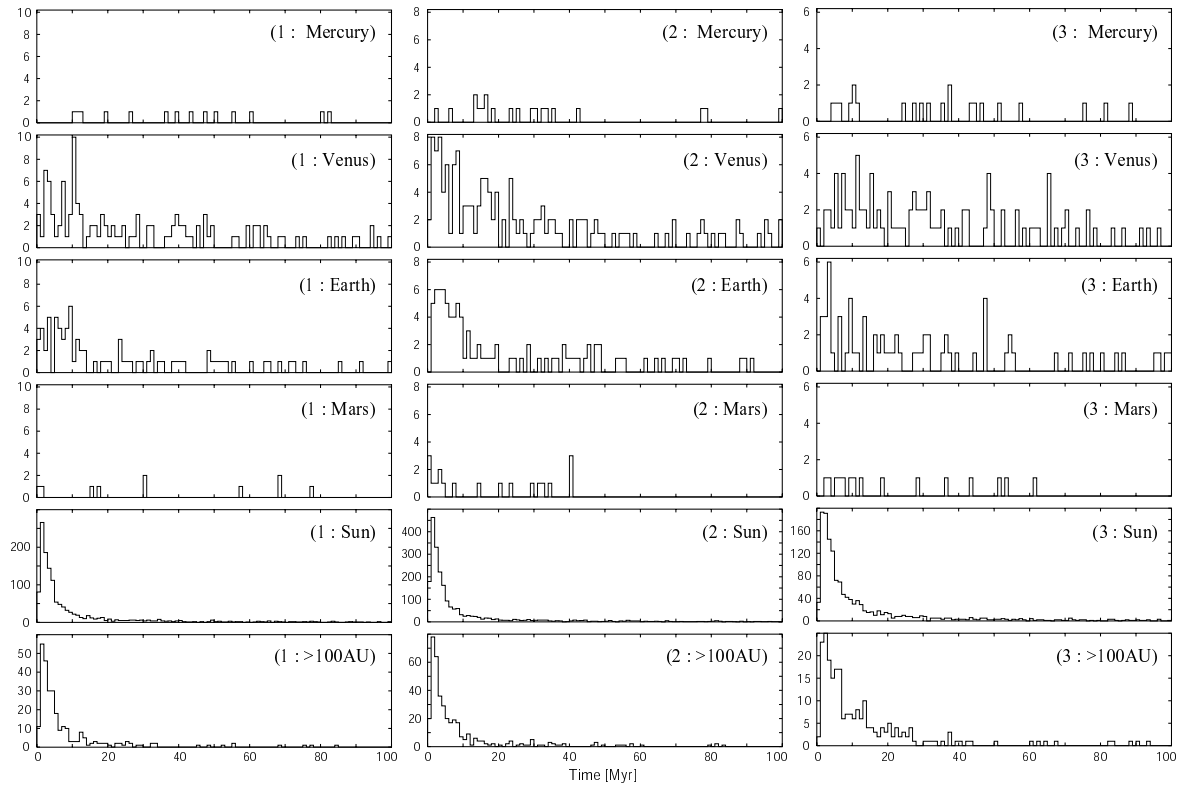


Figure 3: Ito and Malhotra

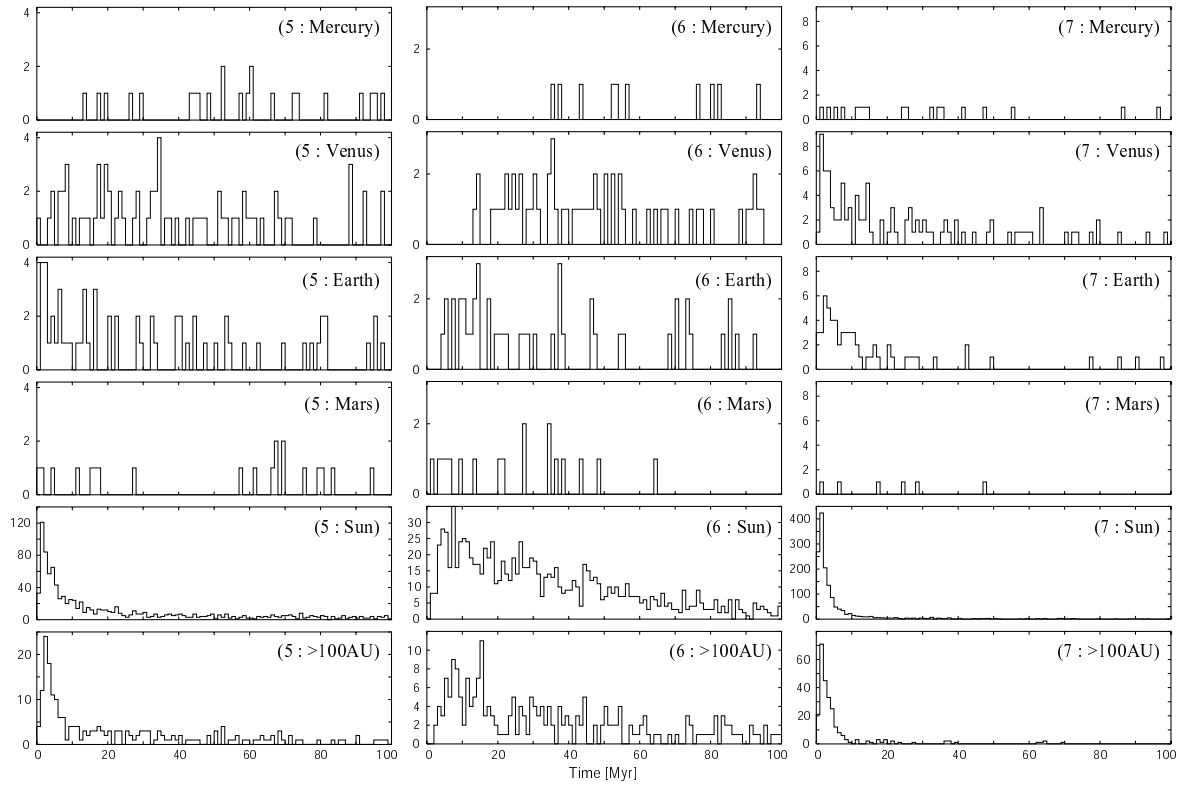


Figure 4: Ito and Malhotra

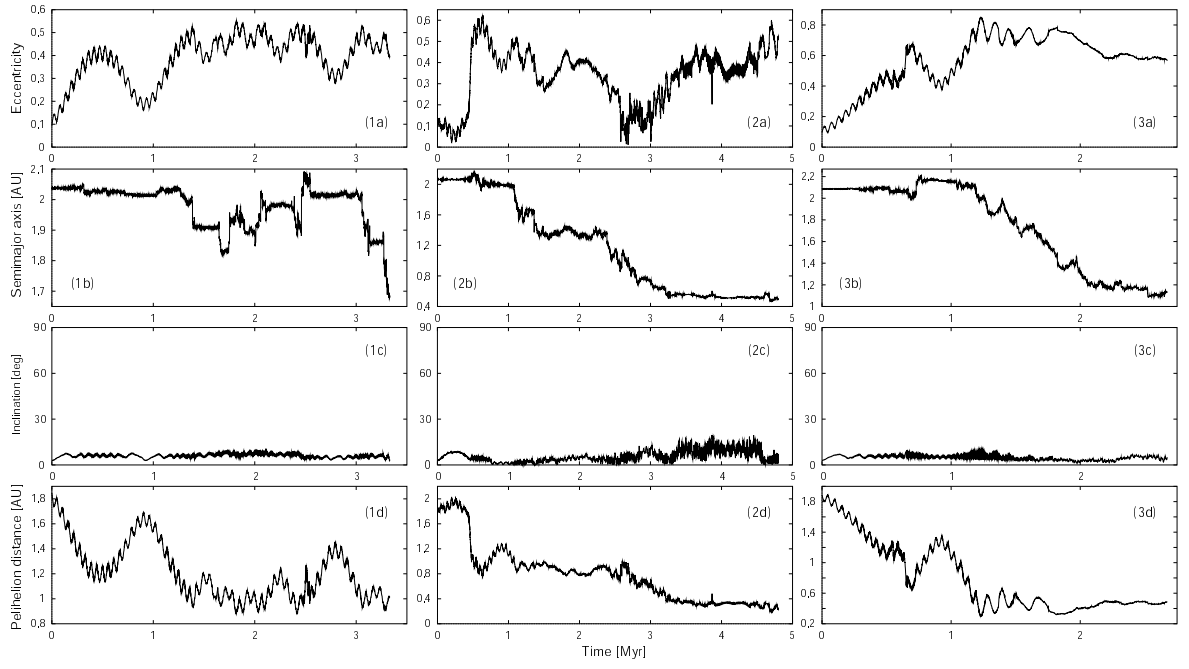


Figure 5: Ito and Malhotra

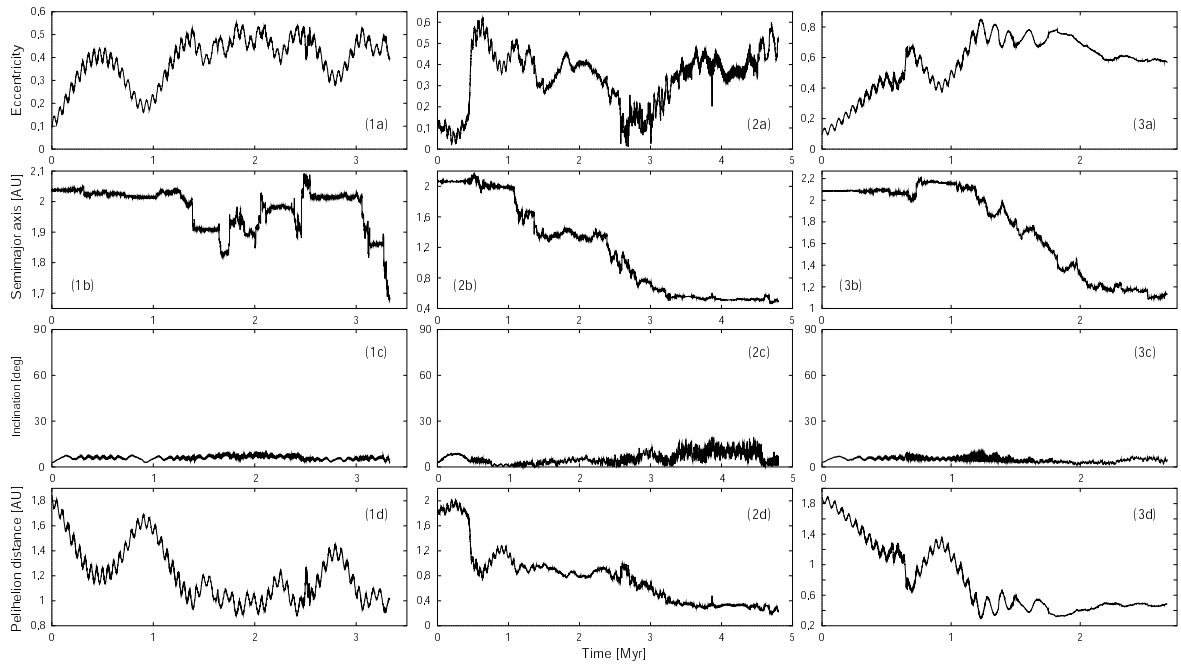


Figure 6: Ito and Malhotra

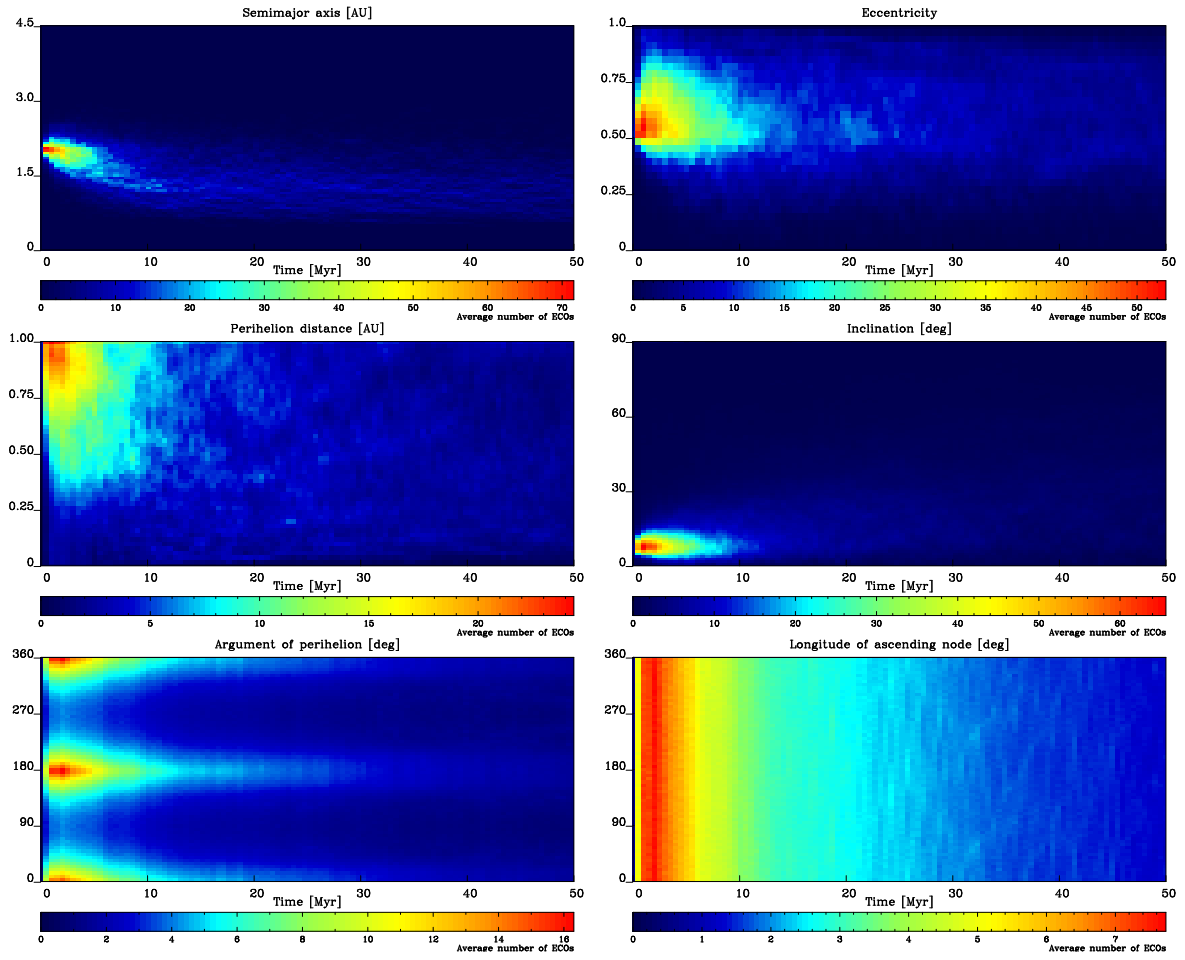


Figure 7: Ito and Malhotra

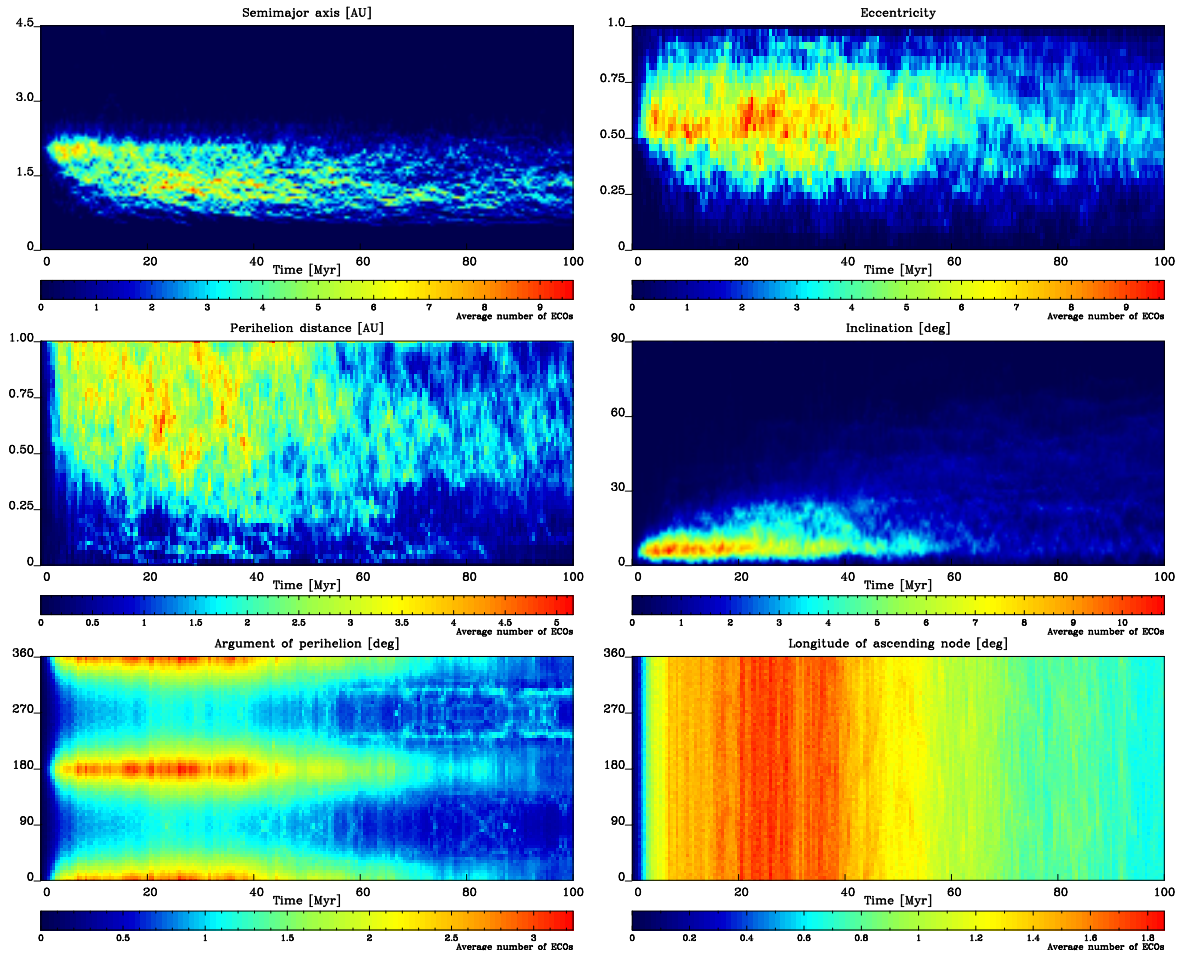


Figure 8: Ito and Malhotra

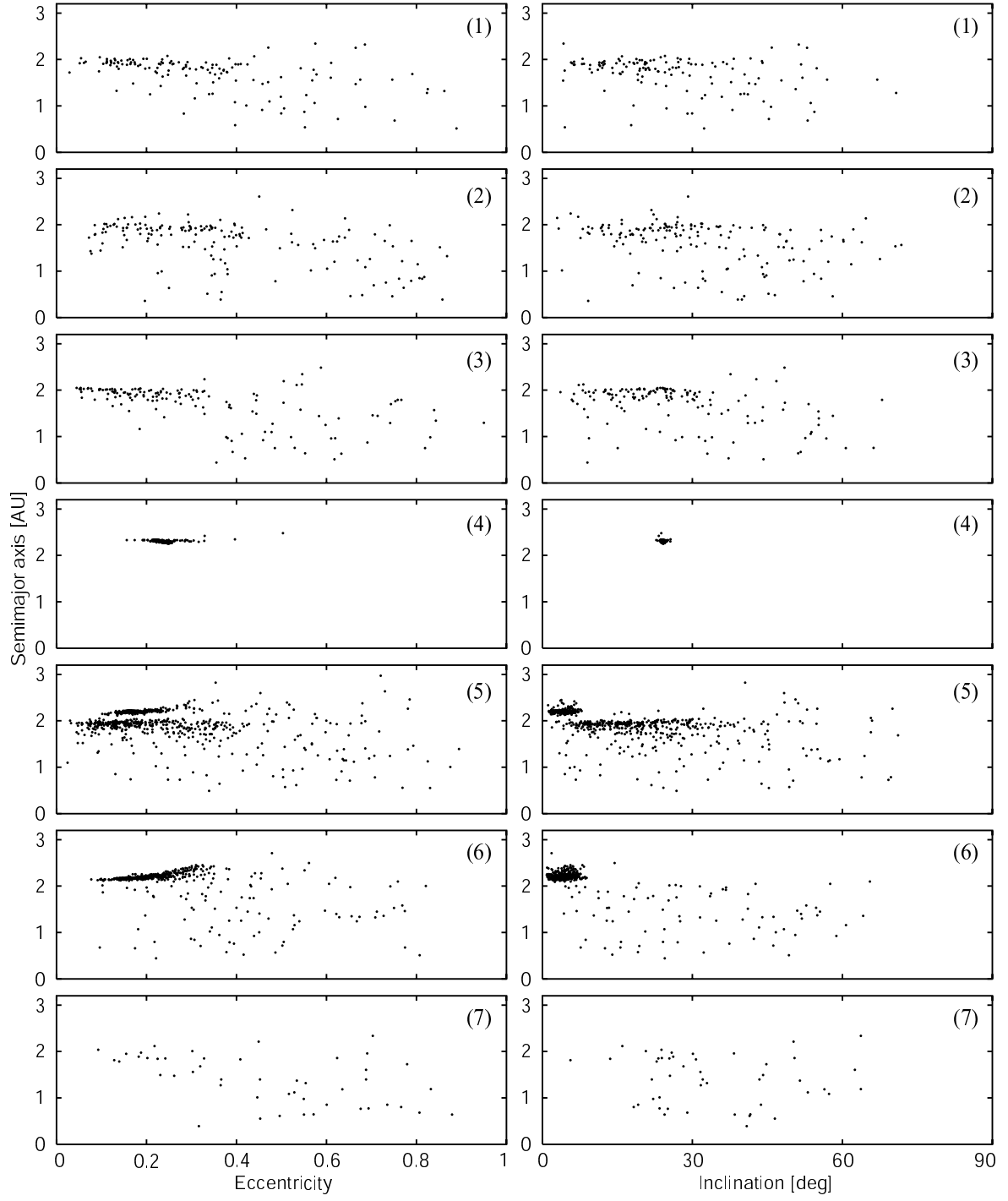


Figure 9: Ito and Malhotra

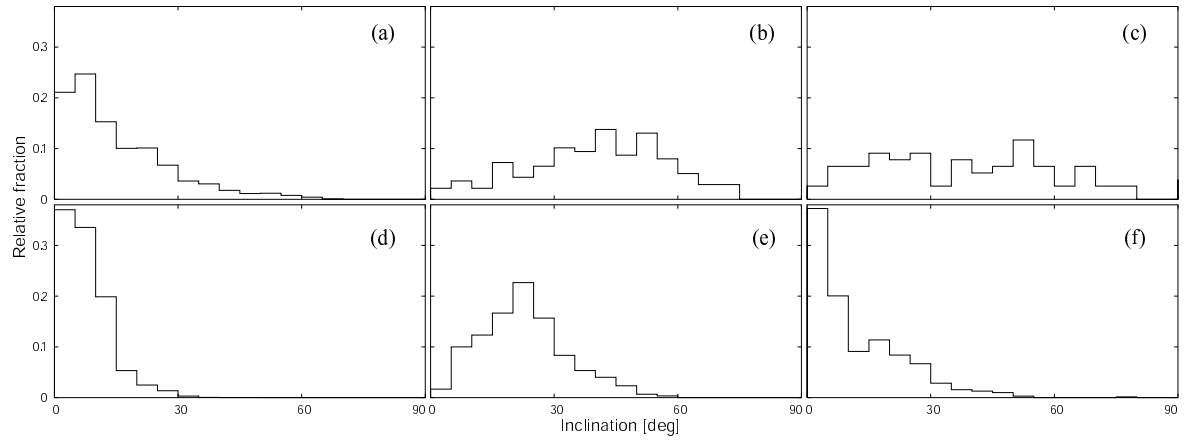


Figure 10: Ito and Malhotra

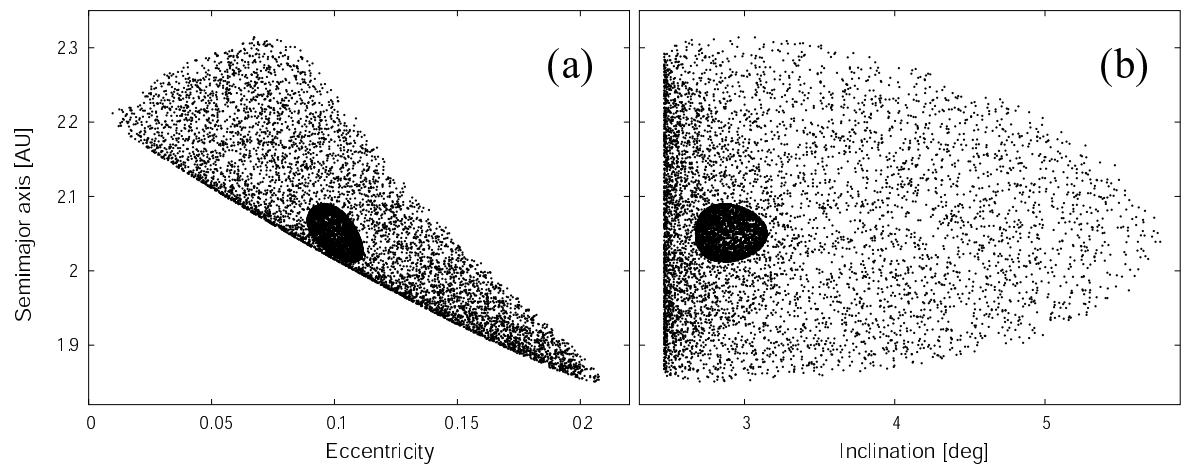


Figure 11: Ito and Malhotra

GPS 擬似距離データによる電子基準点位置の解析

河合雅司 (富山商船高等専門学校)

On the Positions of GPS Stations Determined by Point Positioning Using GPS Pseudo Ranges

Kawai Masashi (Toyama National College of Maritime Technology)

Abstract

There are periodic fluctuations of about 12-hour period in post-fit range residuals in orbital analysis of geosynchronous satellites. It is considered that the cause of the periodic fluctuations is movement of the satellite tracking station. The verification on the cause was tried using GPS pseudo ranges observed every 30 seconds in 2003 at Toyama, Wakkanai and Yonakuni GPS stations. These GPS stations are operated by Geographical Survey Institute (GSI).

As results of spectrum analysis and average processing of these stations coordinates determined by point positioning, it was revealed that they move several meters with about 12-hour period. It is considered that the cause of GPS stations' movements is the Earth's plates which move horizontally periodically with flows in the mantle due to tidal generating forces, such as ocean currents and tidal currents.

Keywords: GPS, GPS stations, Earth's plates

キーワード: GPS, 電子基準点, プレート運動

1. 緒言

静止衛星の軌道解析において、軌道決定後の観測距離と計算距離の残差に、振幅約 1m、周期約 12 時間の周期変動が存在し、現在の軌道解析理論でこの周期変動を説明することはできない。もし衛星観測局の位置が 12 時間周期で数メートル程度変動していると仮定すれば、これを説明することが可能である。そこで、国土地理院の富山、稚内及び与那国の電子基準点で 2003 年に観測された 1 年間分の擬似距離データを用いて電子基準点の位置を求め、この位置をフーリエ解析したところ、電子基準点位置が約 12 時間周期で変動していることが確認できた。又、この位置を 12 時間周期の位相毎に平均したところ、GPS 擬似距離データから求めた電子基準点位置が数メートルのオーダーで周期的に変動している様子を確認することが出来た。これらの結果及びその考察について以下に報告する。

2. 電子基準点位置の計算

本研究では、国土地理院の電子基準点で観測さ

れた GPS 衛星擬似距離データを用いて、電子基準点の位置を求めた。ここでは、擬似距離データ、GPS 衛星位置、電波伝搬補正、測位計算等について述べる。

(1) 観測データ

国土地理院の電子基準点富山・稚内・与那国で 2003 年 1 月 1 日 ~ 12 月 31 日までの 1 年間に観測された 30 秒毎の GPS 擬似距離データ (L1 波 C/A コード) を用いて電子基準点の位置を求めた。各電子基準点の地球固定座標系における位置を Table 1 に示す。

(2) GPS 衛星の位置

ITRF97 系地球固定座標における GPS 衛星の位置及び GPS 衛星原子時計の時刻補正值については、IGS 暦を使用し多項式補間により求めた。IGS 暦のダウンロードサイトは、次の通りである。
http://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods_cb.html

IGS 暦の補間において、衛星位置については 17 次、原子時計補正值については、3 次の多項式補間を用いた。

(3) 電波伝搬補正

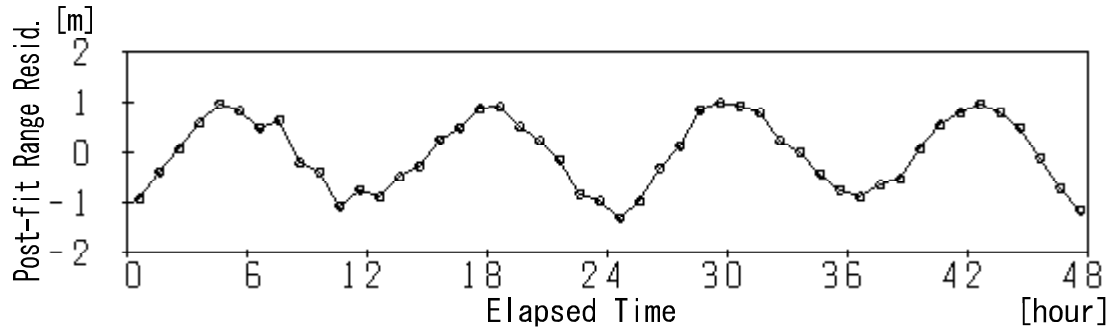


Fig. 1: An example of 12-hour period fluctuations in post-fit range residuals in orbital analysis of geosynchronous satellites.

Table 1 Earth-centered, Earth-fixed coordinates of GPS stations operated by GSI (ITRF97)

Station	Station No.	Station Code	Latitude	Longitude	Height above ellipsoid
Toyama	950249	5437715501	36 ° 38' 3.62"N	137 ° 11' 42.70"E	75.30m
Wakkanai	940001	6841068001	45 ° 24' 10.78"N	141 ° 45' 1.56"E	74.62m
Yonaguni	950499	3622574501	24 ° 27' 15.03"N	122 ° 56' 34.22"E	47.34m

対流圏電波伝搬遅延については、NASA の軌道解析プログラム GEODYN で使用されているモデルを用いて補正した。対流圏補正モデルには様々なモデルが存在するが、本研究に関してはどのモデルを用いても得られる結果は同じである。

電離層電波伝搬遅延については、L1 波 C/A コード及び L2 波 P コードによる擬似距離データを用いて次式により補正した。

$$\Delta\rho_{IL1} = \frac{r_{CAL1} - r_{PL2} - (C_{P1P2} - C_{P1C1})}{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - 1} \quad (1)$$

$L_1 = 1.57542\text{GHz}$, $L_2 = 1.2276\text{GHz}$

$\Delta\rho_{IL1}$: r_{CAL1} に対する電離層補正值

r_{CAL1} : L1波C/Aコードの擬似距離

r_{PL2} : L2波Pコードの擬似距離

L_1, L_2 : L1波及びL2波の周波数

C_{P1P2} : ディファレンシャルコードバイアス($P1-P2$)

C_{P1C1} : ディファレンシャルコードバイアス($P1-C1$)

上式におけるディファレンシャルコードバイアスは、欧州軌道決定センターの次のサイトからダウンロードした。

<http://www.cx.unibe.ch/aiub/ionosphere.html>

(4) 測位計算

L1 波 C/A コード擬似距離を用いて、単独測位により、電子基準点位置を求める。測位計算には C/A コードを送信した時刻 t_r での ITRF97 系地球固定座標における GPS 衛星位置が必要である。

分かっているのは、コードを受信した時刻 t_r であり、まず IGS 暦より時刻 t_r での地球固定座標における衛星位置と速度を求め、これを慣性座標系 (J2000.0 平均赤道面座標系) に変換した後、次式を用いて繰り返し計算により時刻 t_r における衛星位置を求める。ただし、次式において X_J, Y_J, Z_J の初期値は、 $X_J(t_r), Y_J(t_r), Z_J(t_r)$ とする。

$$t = \frac{\sqrt{(X_J - X_0)^2 + (Y_J - Y_0)^2 + (Z_J - Z_0)^2}}{V_c} + D \quad (2)$$

$X_J(t_r) = X_J(t_r) - V_{XJ}(t_r) \cdot t$

$Y_J(t_r) = Y_J(t_r) - V_{YJ}(t_r) \cdot t$

$Z_J(t_r) = Z_J(t_r) - V_{ZJ}(t_r) \cdot t$

X_0, Y_0, Z_0 : J2000.0平均赤道面座標系における

時刻 t_r での受信点位置

X_J, Y_J, Z_J : J2000.0平均赤道面座標系における

時刻 t_r での衛星位置

V_c : 電波伝搬速度(光速)

D: 電波伝搬遅延(電離層遅延+対流圏遅延)

上式により求めた J2000.0 平均赤道面座標系における衛星位置を地球固定座標系に変換し、観測擬似距離に電波伝搬補正、衛星原子時計の補正を行い最小自乗法により 30 秒毎の電子基準点位置を計算する。本研究では、電離層電波伝搬補正における受信機のインターフレクエンシーバイアスによる誤差は定誤差として受信機時計の同期誤差に含めて処理されている。

更に、このようにして求めた地球固定座標系における電子基準点位置を、表 1 に示す電子基準点位置を原点とする地表面座標系に変換する。本研究で使用された地表面座標系は、原点における測地学的接平面の法線を Z 軸(上方が正)、接平面内において北へ Y 軸(北方が正)、東へ X 軸(東方が正)をとった 3 次元直交座標系である。

L1 波 C/A コード GPS 衛星擬似距離より求めた 30 秒毎 1 年間分の地表面座標系における電子基準点位置の X, Y 座標値をフーリエ解析した結果を Fig.2 ~ Fig.7 に示す。

これらの図から、電子基準点位置が約 12 時間周期(地球自転周期の半分)で変動していることが分かる。又、約 12 時間周期の変動の他に、約 24 時間周期及び約 8 時間周期の変動も存在していることが分かる。

3 . 解析結果

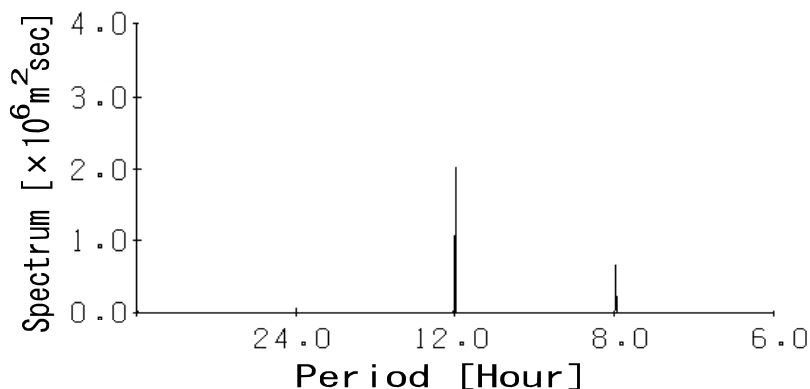


Fig.2 The Spectrum of x-coordinates of Toyama station in 2003

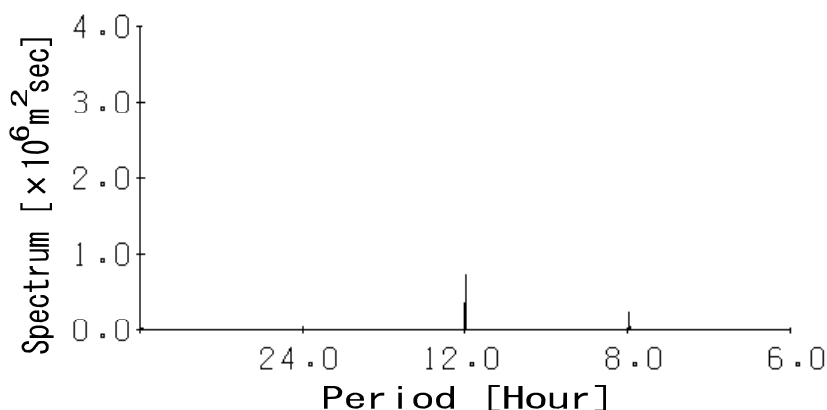


Fig.3 The Spectrum of y-coordinates of Toyama station in 2003

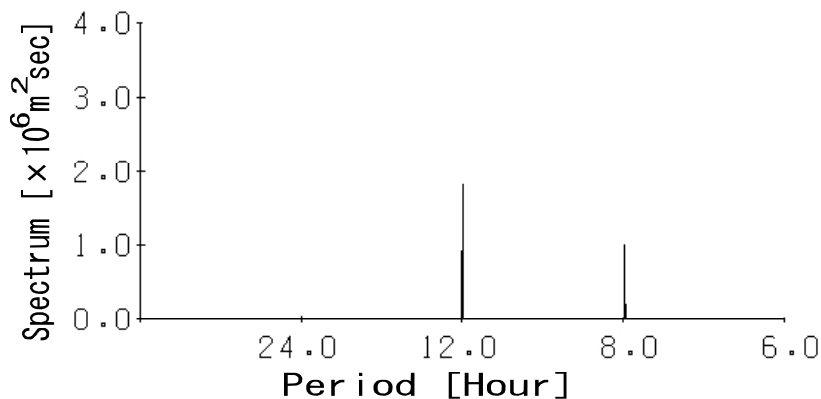


Fig.4 The Spectrum of x-coordinates of Wakkanai station in 2003

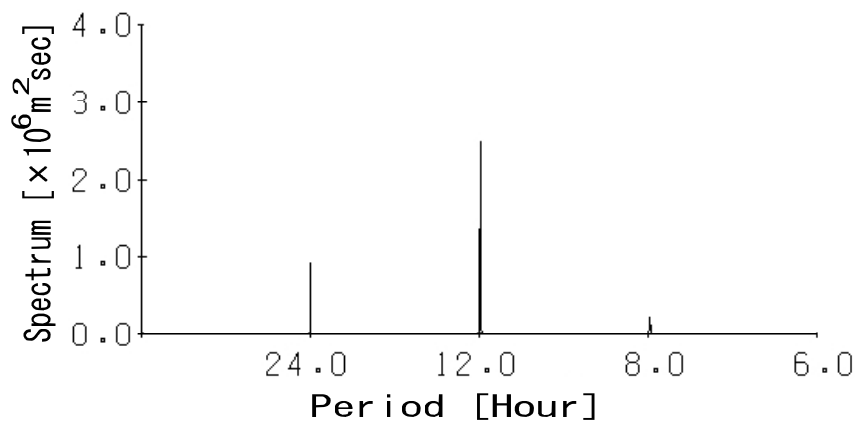


Fig.5 The Spectrum of y-coordinates of Wakkanai station in 2003

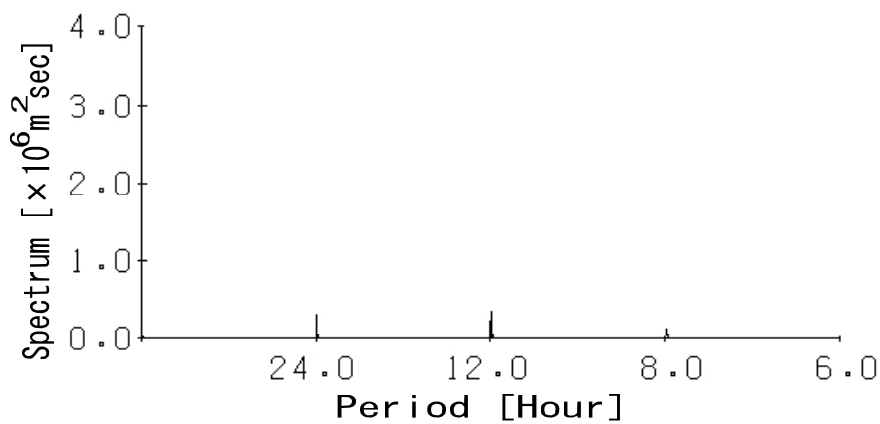


Fig.6 The Spectrum of x-coordinates of Yonaguni station in 2003

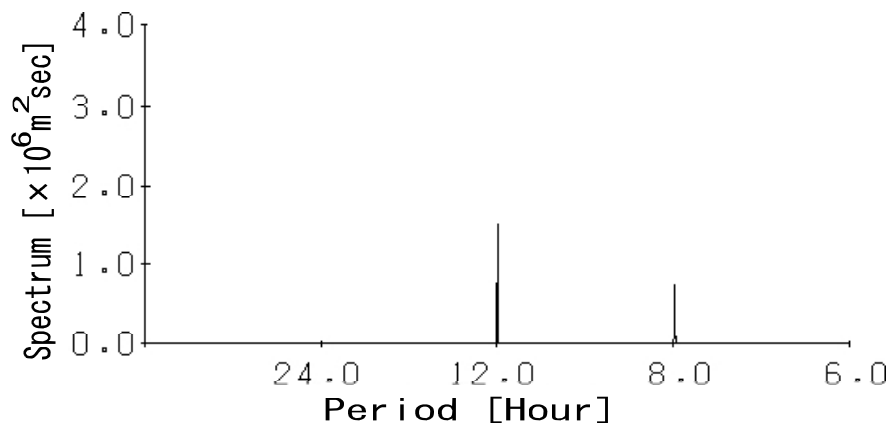


Fig.7 The Spectrum of y-coordinates of Yonaguni station in 2003

次に地表面座標系における 30 秒毎の電子基準点位置に、次式に示す位相番号を付ける。

$$n = \text{int}\left[\frac{t - \text{int}(t/T) \cdot T}{T/12}\right] \quad (3)$$

n : 位相番号

t : 2003年 1月 1日 0時(GPS時)から

位置決定時刻までの経過時間

T : 位置変動周期 ($T=11.97$ 時間)

この位相番号毎に電子基準点位置を平均した結

果を Fig.8 ~ Fig.10 に示す。これらの図における座標原点は、Table 1 に示された電子基準点位置である。

これらの図から、GPS 疑似距離データを用いて単独測位により求めた電子基準点位置が、約 12 時間周期で 5m 程度変動していることが分かる。又、電子基準点位置は様な速度で変動するのではなく、海洋における潮流のようにある時はほとんど動かず、ある時は大きく動いて周期的に変動している様子が確認できる。

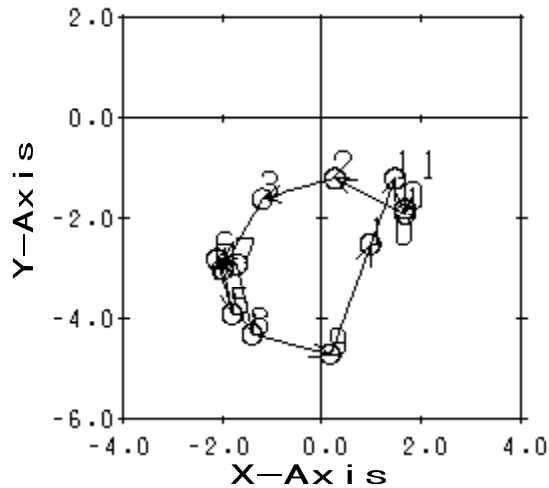


Fig.8 The positions of Toyama station averaged every phase number over year 2003.

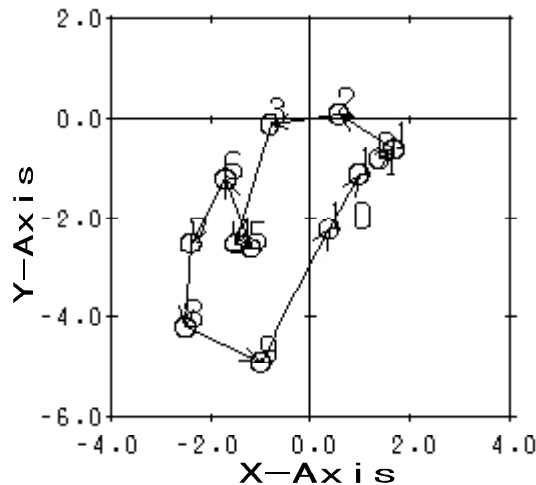


Fig.9 The positions of Wakkanai station averaged every phase number over year 2003.

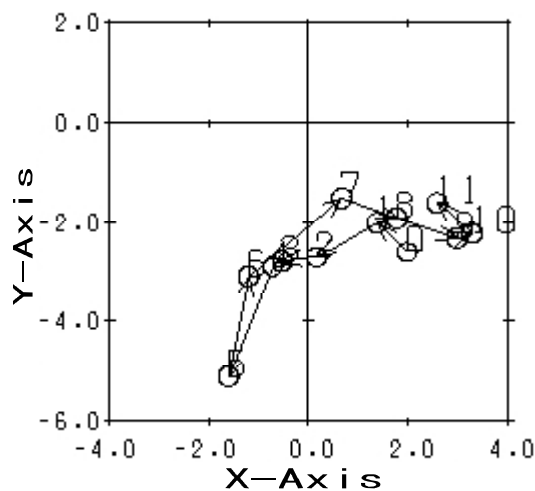


Fig.10 The positions of Yonaguni station averaged every phase number over year 2003.

4. 結言

静止衛星の軌道解析において、衛星観測局から静止衛星までの軌道決定後の観測距離と計算距離の残差(O-C)に約 12 時間周期の変動が生じる。これについて調べるために、国土地理院の電子基準点で観測された GPS 衛星擬似距離データを用いて求めた電子基準点位置を解析したところ次のことが分かった。

- (1) 電子基準点位置が約 12 時間周期(地球自転周期の 1/2)で変動しており、変動の幅は 5m 程度である。
- (2) 電子基準点は、約 12 時間周期で加速度運動している。(大きく動く時とほとんど動かない時がある)
- (3) 電子基準点位置の変動には、約 24 時間周期、約 8 時間周期の変動も存在している。

電子基準点位置の変動の理由であるが、月や太陽の潮汐力によって地球のマントル内部に海洋における海流や潮流のような流れが存在しており、この上に浮いているプレートが、マントル内部の流動と共に約 12 時間周期で 5m 程度動いていると考えることができる。

本研究では、1 年間分のデータを用いて解析したが、数年間分のより長期間のデータを用いて更に詳しく電子基準点位置の解析を行うこと及び、約 24 時間周期、約 8 時間周期の位置変動について調べることは今後の課題である。

参考文献

- Kawai Masashi(2003):A Study on Positions of GPS Stations Determined by Point Positioning Using GPS Pseudo Ranges, Proceedings of 2003 International Symposium on GPS/GNSS, 509-514.
- Masashi KAWAI(1992):A Study on the Orbita l Analysis of Geosynchronous Satellites-., The Journal of Japan Institute of Navigation, Vol.101,7-14.
- Benjamin W. Remondi(1989):Extending the National Geodetic Survey Standard GPS Orbit Formats, NOAA Technical Report NOS 133 NGS 46, NOAA.
- William F. Eddy, Despina E. Pavlis, John J. McCarthy, et al.(1989):GEODYN -Systems Description, Vol.1, NASA Goddard Space Flight Center.
- The Geodetic Society of Japan(1989):新訂版 GPS -人工衛星による精密測位システム-, Japan Association of Surveyors.

1次元自己重力リングモデルの熱力学

Thermodynamics of the self-gravitating ring model

立川崇之 (Takayuki Tatekawa)^{1,2}, Freddy Bouchet¹, Thierry Dauxois¹, Stefano Ruffo^{1,3}

1. *Laboratoire de Physique, UMR-CNRS 5672, ENS Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cédex 07, France*

2. *Department of Physics, Waseda University, 3-4-1 Okubo, Shinjuku, Tokyo, 169-8555, Japan*

3. *Dipartimento di Energetica, "S. Stecco" and CSDC, Università di Firenze, and INFN, via S. Marta, 3, 50139 Firenze, Italy*

(Dated: April 18, 2005)

我々は、Newton 重力によって互いに相互作用を及ぼす粒子が一次元リングに拘束されている、自己重力リング (SGR) モデルの熱力学的性質を、ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布のもとで解析し、相転移等に関するダイアグラムを示す。ソフトニングパラメーターの導入により、短距離での相互作用の発散が防がれる場合には、エントロピーの最大が存在するので、純粋な Newton 重力の性質を解析する事は出来ないが、平均場による近似で熱力学的性質を解析する事が出来る。本モデルは重力系のモデルであるので、アンサンブルの違いにより相転移を起こす臨界エネルギーが変わり、ミクロカノニカル分布による解析では広いエネルギースケールにわたって負の比熱が現れる。また、『三重臨界点』において相転移が二次から一次へと変化するが、このエネルギーはアンサンブルの取り方により異なる。ここで取り扱った SGR モデルは空間一次元において、自己重力モデルを単純化したモデルとして、Newton 重力に特有の特異な性質を示す。SGR モデルの熱平衡状態における安定な分布関数を導出するため、我々は二次元の乱流解析で用いられた方法を参考にし、新たな逐次近似法を導出した。この方法はエントロピーを徐々に増大させて平衡状態に分布関数を収束させるもので、従来のものに比べて高速で、相転移点付近でも十分に使えるものである。この方法で得た平衡状態は、GRAPE-5 を用いた大規模シミュレーションとの比較でもよく一致し、系の安定な平衡状態を表す分布関数を求める際に非常に有用な方法である事も確かめられた。

I. INTRODUCTION

宇宙には球状星団、銀河、銀河団や分子雲のように、自己重力が自身の振る舞いに大きな寄与を及ぼしている天体が存在する [1]。今までに様々な理論的なアプローチが、自己重力系の特異な統計的性質の解析のために提案されてきた。だが系の困難な点として、自己重力系ではポテンシャルが近距離で発散する事、および蒸発現象が見られる事が挙げられる。たとえ系を断熱壁で覆って蒸発を防いだとしても、重力熱不安定として知られている現象を引き起こす [2–4]。ポテンシャルに対して短距離でのソフトニングを導入すると、熱不安定を回避でき、自己重力系は平衡状態に到達する事が出来る。しかし、この状況でも負の比熱は存在する。さらに、粒子が自由粒子のように振る舞う高エネルギー状態から、クラスターを形成する低エネルギー状態の間で、一次相転移を起こす。

三次元自己重力系の計算を直接行くと、相互作用の計算が膨大なものとなる [5]。このため、Newton 重力を計算する事に特化した計算機 GRAPE が開発されている [6]。しかし、粒子数 N に対して相互作用の計算量は $O(N^2)$ となり、遠方からの粒子の相互作用をまとめて計算する Tree 法等の方法を用いても、せいぜい $O(N \log N)$ 程度までしか計算量を減らす事が出来ない。そこで対称性を課したり、空間次元を下げたりして相互作用の計算を軽減する事を考える。自己重力系に対称性を課した簡単なモデルとして、一次元自己重力シート系の解析がなされており [7]、興味深い振る舞いを示す事が報告されているが [8, 9]、系の比熱は常に正であり相転移を起こさない。

我々はかつて、相互作用は空間三次元のものと同じ Newton 重力で与えられ、粒子はリングに拘束されているという、一次元モデルを提案した [10]。短距離ではソフトニングを導入しているため、粒子の衝突時に相互作用は発散せず、シミュレーションで時間発展を追う事も困難ではない。このモデルは一次元自己重力リング (SGR) モデルと名付けられている。100 体の粒子を用いた過去の解析では、ソフトニングが十分に小さければ負の比熱や相転移といった、三次元重力ポテンシャルの特異な性質を SGR モデルでも示す事が分かった。また、ソフトニングを非常に大きく取った極限では、長距離力の簡単なモデルとして盛んに研究されている、Hamiltonian Mean-Field (HMF) モデル [11] に近づく。HMF モデルでは系は二次相転移を起こし、負の比熱は現れない。

我々はまず、SGR モデルの熱力学的平衡状態を、カノニカル分布とミクロカノニカル分布の両方で導出した。我々が解析したソフトニングパラメーターの範囲では、モデルは常に熱平衡状態を持つ。しかしソフトニングが十分に小さければ、ミクロカノニカル分布で SGR モデルは負の比熱を示し、一次相転移を起こす。一方でカノニカル分布のもとでは負の比熱が現れないので、SGR モデルでは、アンサンブルによる相転移の違いが現れる [12, 13]。このような性質は自己重力系で知られている現象であるので、SGR モデルは現実の三次元重力モデルの性質をよく示す簡単なモデルとして有用であると考えられる。

本集録ではまず II 章で SGR モデルの性質と過去の数値計算の結果を手短に示す [10]。次に III 章では、統計力学の基本問題ではあるが、Boltzmann-Gibbs エントロピーを最大にする分布関数を、ミクロカノニカル分布のもとで導出する。IV 章で我々が開発した平衡分布を導出する新たな逐次近似の手法を解説する。この手法は二次元乱流の極大エントロピーを導出する方法 [14] を手がかりとして、開発した方法である。新たな逐次近似の手法を導出した事により、我々は相転移点付近の系の振る舞いを詳細に解析する事が可能となった。この手法は、今後の応用が幅広く期待できる。V

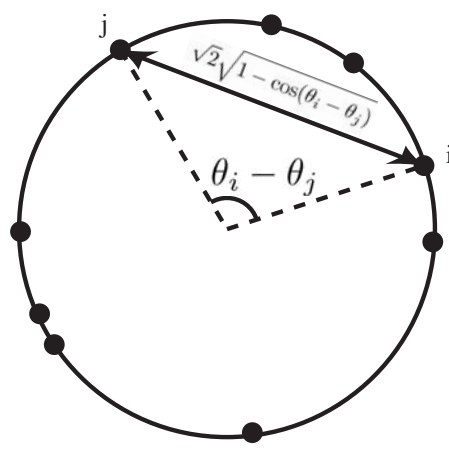


FIG. 1: 半径を 1 とした一次元自己重力リング．粒子はリングに固定されており，その位置は角度によって識別される． θ_i と θ_j に存在する粒子対は，三次元重力と同じ逆二乗則で力を及ぼしあう．この際の距離は，粒子対がなす弦の長さであり，弧の長さではない．

章では新たな逐次近似の方法を用いて導出した，SGR モデルの熱力学的性質を説明する．VI 章では GRAPE-5 を用いたシミュレーションと，平衡状態の比較を行う．最後に VII 章において，今後の展望を述べる．Appendix A では，新たな逐次近似の方法を導出する際に用いた数学の諸定理について簡単に解説する．Appendix B では，我々が示した逐次近似の手法を他のモデルに応用した例を示す．

本集録は，2005 年 3 月 9-12 日にぐんま天文台で開催された，ぐんま天体力学 N 体力学研究会（第 37 回天体力学 N 体力学研究会）での発表内容に関する事をまとめたもので，我々の論文 [15] の内容を加筆修正したものである．

II. 一次元自己重力リングモデル

ここでまず，一次元自己重力リング (SGR) モデルについて手短かに説明を行う [10]．一次元リングモデルはリングに拘束された粒子が，三次元 Newton ポテンシャルによって互いに相互作用を及ぼすモデルである (図 1)．

SGR モデルのハミルトニアンは以下のように与えられる．

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

$$V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}}, \quad (2)$$

ε はソフトニングパラメーターで，近距離でのポテンシャルの発散を防ぐ． ε を大きく取った極限では，ポテンシャルが

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\frac{1 - \cos(\theta_i - \theta_j)}{2\varepsilon} - 1 \right] + O(\varepsilon^{-2}), \quad (3)$$

となり，HMF モデル [11] のポテンシャルに近づく．HMF モデルは二次相転移を示し，二相に分かれる事がよく知られている．二相の一方は粒子が一個のクラスターを形成する低エネルギー相である．もう一方は，運動エネルギーが大きく粒子は一様に分布し，自由粒子の様に振る舞う高エネルギー相である．

ところで，本研究で用いているようなモデルの熱力学的性質を示すグラフとして，温度曲線と呼ばれるグラフがある．これは一粒子あたりの運動エネルギーを二倍したもの $T \equiv \beta^{-1} = 2 \langle K \rangle / N$ を温度として，一粒子あたりの全エネルギー $U \equiv H/N$ との関係を示したものである．SGR モデルのポテンシャルが HMF モデルのものに近づく $\varepsilon = 10$ の条件のもとでは，シミュレーションから温度曲線は図 2(a) のように与えられる．一様分布の相 $U > U_c(\varepsilon)$ では，曲線はほぼ線形関係になり，一方でクラスターを形成する相 $U < U_c(\varepsilon)$ では折れ曲がる．この場合には，温度はエネルギー増加により上昇し，負の比熱は現れない．だが一方でソフトニングを小さく取ると，三次元重力のように，負の比熱の相が現れる．図 2(b) では，過去の論文 [10] で行ったシミュレーションのうち，二つの異なる値の ε に対して曲線を描いた． ε が小さい場合には，SGR モデルでは相は三つに分類される．

- 低エネルギーでクラスターを形成する相 $U < U_{top}(\varepsilon)$ ． U_{top} は比熱が 0 ($\partial T / \partial U = 0$) になるエネルギーである．
- 中間状態の相 $U_{top}(\varepsilon) < U < U_c(\varepsilon)$ ．この相で負の比熱が現れる．

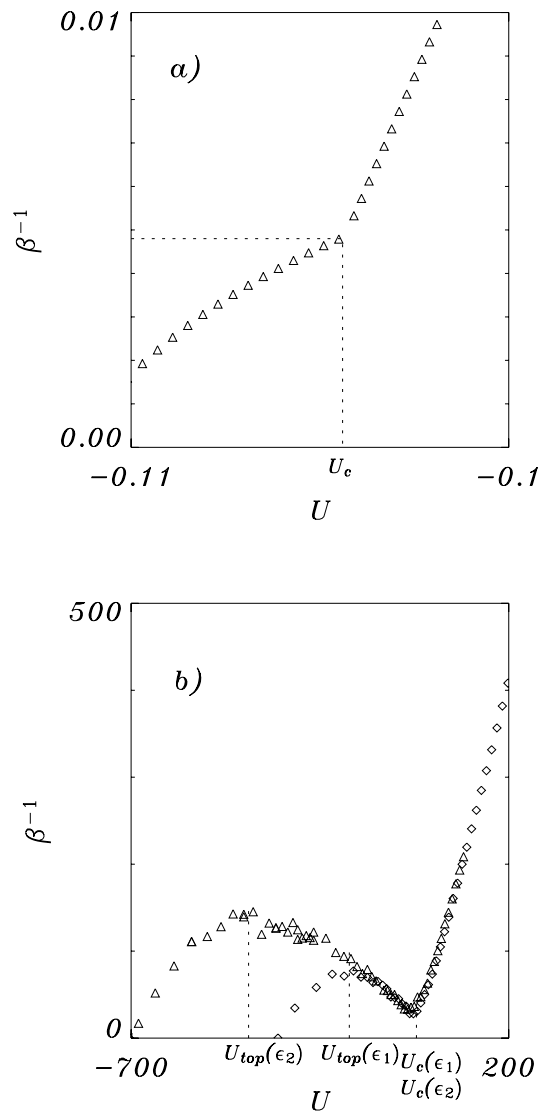


FIG. 2: 数値計算によって得られた SGR モデルの温度曲線．いずれも粒子数は $N = 100$ である．(a) は $\epsilon = 10$ とした場合で， U_c で系は二次相転移を起こす．この時は負の比熱は現れない．(b) は $\epsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\epsilon_2 = 2.5 \times 10^{-7}$ の場合．相転移はミクロカノニカル分布で一次相転移となる．二つのエネルギー $U_c(\epsilon_1)$ と $U_c(\epsilon_2)$ は非常に近い値となり，相転移エネルギーは ϵ にあまり依存しないようである．一方， $U_{top}(\epsilon_1)$ は明らかに $U_{top}(\epsilon_2)$ より小さく， ϵ を小さくすると減少する．負の比熱は $U_{top} < U < U_c$ で現れ，ソフトニングを小さくするとエネルギースケールが広がる．

- 高エネルギーのガス状の相 $U_c(\epsilon) < U$ ．

低エネルギーの相は，粒子同士の距離がゼロになった時の発散を回避するために導入した， ϵ の存在によって現れる，ある意味人為的な相である．一方，高エネルギーの相では粒子はポテンシャルの影響をほとんど受けず，自由粒子のように振る舞う．中間状態の相が重力の特徴をよく示していると考えられ， ϵ を小さくする事により中間状態の相のエネルギースケールが広がる．

後で我々は，SGR モデルの熱力学的性質を解析し， ϵ を変化させた時の相転移の変移を詳細に調査する予定である．

本研究では空間一次元モデルである SGR モデルへの応用を考えて、一次元系での式を記述するが、空間三次元のモデルでも議論の流れは同じである。以下、空間一次元でかつ周期 2π で閉じているモデルの場合を想定して、式を導出していく。

長さを固定して粒子数を $N \rightarrow \infty$ とする平均場の極限 [16] で、一点分布関数 $f(p, \theta)$ を考える事が出来る。 $f(p, \theta) dp d\theta$ は相空間の領域 $[\theta, \theta + d\theta][p, p + dp]$ に存在する粒子の密度を表す。 f を用いると、ポテンシャルエネルギーは

$$E_P[f] = \frac{1}{2} \int d\theta \, d\phi \, dp \, dp' \, f(p, \theta) V_\varepsilon(\theta - \phi) f(p', \phi) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\phi \, d\theta \, \rho(\theta) \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi), \quad (5)$$

と記述する事が出来る。 $\rho(\theta)$ は質量密度を表し、

$$\rho(\theta) = \int dp \, f(p, \theta), \quad (6)$$

と記述される。運動エネルギーは

$$E_K[f] = \frac{1}{2} \int d\theta \, dp \, p^2 f(p, \theta), \quad (7)$$

となり、全エネルギーは

$$E[f] = E_K[f] + E_P[f]. \quad (8)$$

である。

Boltzmann-Gibbs エントロピー

$$S[f] = - \int d\theta \, dp \, f \log f, \quad (9)$$

が最大になる場合の、ミクロカノニカル分布での平衡分布を、全エネルギー、全運動量、全質量保存の拘束条件のもとで求める。固定する物理量は全エネルギー $E[f] = U$ 、全質量

$$M[f] = \int \rho \, d\theta = 1, \quad (10)$$

および全運動量

$$p[f] = \int p f(p, \theta) d\theta \, dp = 0, \quad (11)$$

である。ここでは全運動量は 0 とした [29]。

エントロピー最大の条件を得るため、Lagrange の未定乗数法を用いる。

$$F[f] \equiv S[f] - \beta E[f] - \alpha \int f \, dp \, d\theta - \gamma p[f]. \quad (12)$$

α, β, γ は Lagrange の未定乗数である。分布関数に関して変分をとり、0 になる分布関数を得る。

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f} = -\log f - 1 - \beta \left(\frac{p^2}{2} + W(\theta) \right) - \alpha - \gamma p = 0. \quad (13)$$

ここで導入した $W(\theta)$ は次のように定義した。

$$W(\theta) \equiv \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi. \quad (14)$$

運動量 $p[f] = 0$ であるから、未定乗数 γ は消える。式 (13) から、規格化された分布関数は次のように書かれる。

$$f(p, \theta) = A \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2} + W(\theta) \right) \right]. \quad (15)$$

$A = \exp(-1 - \alpha)$ は規格化定数である．質量密度は以下のように書かれる．

$$\rho(\theta) = \tilde{A} e^{-\beta W(\theta)} . \quad (16)$$

ここで $\tilde{A} = A\sqrt{2\pi/\beta}$ である．

(14) と (16) を組み合わせる事により，我々は閉じた式を得る事が出来る．

$$W(\theta) = \tilde{A} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\beta W(\phi)} V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi . \quad (17)$$

あるいは

$$\rho(\theta) = \tilde{A} \exp \left[-\beta \tilde{A} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi \right] , \quad (18)$$

である．

平衡状態の分布関数を記述するには，積分方程式 (17) または (18) をそれぞれ $W(\theta)$ ， $\rho(\theta)$ について解く必要がある．次章ではこれらの積分方程式の数値解法について考える．静的な質量分布 ρ と関数 W が ε の値に対して得られれば，一点分布関数が (15) により得られる．ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーはそれぞれ (5) と (7) から求められ，温度曲線は $U = E_K + E_P$ と $T \equiv \beta^{-1} = 2E_K$ の関係として得られる．温度の逆数 β については，以下の式でも説明される．

$$\beta = \left\{ 2U - \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\theta) \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\theta d\phi \right\}^{-1} . \quad (19)$$

IV. 逐次近似の方法

A. 従来から用いられている方法

(17) または (18) を解く際，三次元 Newton 重力の場合には，Poisson 方程式と連立させる事により，球対称モデルのように対称性を課したモデルでは微分方程式に置き換えて解く事が容易になった [1]．また，HMF モデルでは右辺の積分がうまく整理できて，容易に解く事が可能であった [11]．

しかし一般のポテンシャルの場合には，直接これらの方程式を解かなければならない．そこで，逐次近似の方法 を用いる．ここでは質量密度に着目し，(18) を解く事を考えよう．

従来からよく用いられている逐次近似の方法では，(18) を用いて次のような手順で解いていた [17]．

1. 密度分布 $\rho_k(\theta)$ が与えられていると仮定する．この密度分布は (16) のように \tilde{A} と β ， $W(\theta)$ を用いて記述されるべきである．また， ρ_k は質量保存 (10) を満たしているとする（ \tilde{A} の部分は，質量保存の操作から ρ_k に取り込めるので，消去する事が出来る．）
2. まず ρ_k を用いて (14) から W_k を求める．
3. 次にエネルギー保存 $U = E_K + E_P$ が満たされているので

$$\beta_k = \left\{ 2U - \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho_k(\theta) \rho_k(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\theta d\phi \right\}^{-1} . \quad (20)$$

から β_k を求める．

4. (18) を用いて

$$\rho_{k+1}(\theta) \equiv \tilde{A}_{k+1} \exp \left[-\beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} \rho_k(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi \right] . \quad (21)$$

から ρ_{k+1} を求める．ここで現れる \tilde{A}_{k+1} は，後で ρ_{k+1} を規格化する事で消去できる．

しかし，この方法で平衡解の導出を試みると，困難が生じる事がある．例えば分布関数が収束しなかったり，本来は運動エネルギーから定義されるために非負であるべき β が負の値に収束してしまう事が起きるのである．後で示すように，SGR モデルでは比熱が負になるエネルギースケールでは収束が非常によくない．

我々は IV A 節で示した逐次近似の方法を用いて、平衡状態の分布関数の導出を試みた。しかし (18) に対して逐次近似の方法を用いても、収束があまり良くない。そこで我々は Turkington and Whittaker [14] が二次元乱流での極大エントロピーを求める際に用いた方法をもとに、新たな逐次近似の方法を提案する。この方法では逐次近似の段階でエントロピーが増大しながら収束する。

エントロピー極大での分布関数を求める際に、我々が開発した方法ではエントロピーを最大にする汎関数 $S[f]$ の性質と、質量およびエネルギーに関する拘束条件を課している。エネルギーは (5) で示したように、一般に分布関数に対して非線形であるので、変分問題として取り扱うには難しい。そこで非線形であるエネルギーの拘束条件を、前段階の逐次近似のステップで得られた分布関数の周りで線形化するトリックを用いる。

まず逐次近似において k 回目の計算によって、規格化された分布関数 f_k が求まっていたとする。ここから質量密度 ρ_k および平均ポテンシャル W_k が求められる。

$$\rho_k(\theta) = \int dp f_k(p, \theta) \quad (22)$$

$$W_k(\theta) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \rho_k(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi). \quad (23)$$

次のステップでの分布関数 f_{k+1} は、不等式の拘束条件が付加された、以下の変分問題を解く事により導出される。

$$\max \left\{ S[f] \mid M[f] = 1, E[f] = E[f_k] + \int \frac{\delta E}{\delta f} \Big|_{f_k} (f - f_k) dp d\theta \leq U \right\}, \quad (24)$$

ここでエネルギーの変分は以下ようになる。

$$\frac{\delta E}{\delta f} \Big|_{f_k} = \frac{p^2}{2} + W_k(\theta). \quad (25)$$

この変分問題は、線形化された拘束条件のもとで厳密に凹である汎関数の極大点を求めることに対応するので、唯一解を持つ。

逐次近似でエントロピーを収束させる事を考える。以下、エントロピーの収束性について示していこう。まず、Lagrange の未定乗数法を、不等式の拘束条件が課された変分問題に一般化する事を考える。

$$\frac{\delta S}{\delta f} \Big|_{f_{k+1}} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \frac{\delta E}{\delta f} \Big|_{f_k}. \quad (26)$$

ここで、エネルギーに対する拘束条件は以下のようにする。

$$\beta_{k+1} \left[E[f^k] + \int \frac{\delta E}{\delta f} \Big|_{f_k} (f_{k+1} - f_k) dp d\theta - U \right] = 0, \quad (27)$$

温度は正であるため、 $\beta_{k+1} \geq 0$ を課す。 α_{k+1} は質量保存による規格化から与える。もし $\beta_{k+1} = 0$ であればエネルギー拘束条件は外れ、 $\beta_{k+1} > 0$ ならば線形化されたエネルギー拘束条件が課される。

ここで用いた定理は Kuhn-Tucker の定理 [18] というものである。Kuhn-Tucker の定理およびその周辺の数学の詳細は Appendix A で述べる。

さて、エントロピーの収束性を示そう。まず、エネルギー汎関数 $E[f]$ が厳密に凹関数である事を示す。運動エネルギーの部分は (7) より f に対して線形である。よって、 $E[f]$ の二階変分は

$$\delta^2 E = \int d\phi d\theta \delta\rho(\theta) \delta\rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) \quad (28)$$

$$= \sum_k V_{\varepsilon,k} |\delta\rho_k|^2, \quad (29)$$

という様に、ポテンシャルエネルギーの項だけで記述できる。二行目の等号は、質量密度の変分とポテンシャルのフーリエ変換から得られる。

$$\delta\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \exp(ik\varphi) \delta\rho(\varphi), \quad (30)$$

$$V_{\varepsilon,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \exp(ik\varphi) V_\varepsilon(\varphi). \quad (31)$$

V_ε は ϕ に対して偶関数であるので、 $V_{\varepsilon,k}$ が実数になる。また、 $V_\varepsilon \leq 0$ で、 V_ε が $0 \leq \phi \leq \pi$ で常に増加する関数であるので、任意の k に対して $V_{\varepsilon,k}$ が負である事が簡単に示される。従って (29) よりエネルギー汎関数の二回変分が負で、エネルギー汎関数が厳密に凹である事が示される。

一方、エントロピーも厳密に凹関数である。エントロピーに関して、次の事がいえる。

$$S[f + \delta f] \leq S[f] + \int d\theta dp \left. \frac{\delta S}{\delta f} \right|_f \delta f - \frac{1}{2} \int d\theta dp \frac{(\delta f)^2}{f}. \quad (32)$$

この不等式の導出の際、我々は $x > -1$ において $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$ である事を用いた。不等式に対して $f = f_{k+1}$ および $\delta f = f_k - f_{k+1}$ を代入し、かつ条件 (26) と (27) を用いると、以下の関係式を得る。

$$S[f_{k+1}] - S[f_k] \geq \beta_{k+1} (U - E[f_k]) + \frac{1}{2} \int d\theta dp \frac{(f_{k+1} - f_k)^2}{f_k}. \quad (33)$$

ここでは α_{k+1} に比例する項は、質量保存のために消える。

今、エネルギー汎関数 $E[f]$ が凹である事を用いる。 $k > 1$ に対して、

$$E[f_k] \leq E[f_{k-1}] + \int \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_{k-1}} (f_k - f_{k-1}) dp d\theta, \quad (34)$$

である。 $\beta_{k+1} \geq 0$ と $E[f_k] \leq U$ が成り立つので、変分問題 (24) から直ちに、(33) が以下の式を示している事が分かる。

$$S[f_{k+1}] - S[f_k] \geq \frac{1}{2} \int \frac{(f_{k+1} - f_k)^2}{f_k} d\theta dp \geq 0. \quad (35)$$

従って、エントロピーは二回目以降の全逐次過程で増加する。エントロピーは上限があるので、収束する。(33) と (35) より、 $E[f_k]$ が U に下から近づいて行く事も導出される。さらに f_k が f に収束して行く事を仮定すると、未定乗数 α および $\beta \geq 0$ も収束する事を証明する事が出来る。この事は f が平衡状態について (26) を満たす事を示している。数学的には f の収束性を証明できないが、我々が解析する予定の問題の全ての場合で、分布関数は収束した。Euler 方程式での類似した場合における収束性の更なる議論は、Turkington and Whittaker の論文 [14] の Sec. IV を参照するとよいだろう。

C. 新しい逐次近似の具体的な計算法

前節で述べた新しい逐次近似を、どのようにして用いるかをこれから具体的に示す。

(26) より、我々は以下の式を得る。

$$f_{k+1} = A_{k+1} \exp \left(-\beta_{k+1} \left(\frac{p^2}{2} + W_k(\theta) \right) \right). \quad (36)$$

ここで $A_{k+1} = \exp(-\alpha_{k+1} - 1)$ および β_{k+1} はこの段階では未知量とする。(22) を用いると、

$$\rho_{k+1}(\theta) = \tilde{A}_{k+1} e^{-\beta_{k+1} W_k(\theta)}, \quad (37)$$

となる。ここで $\tilde{A}_{k+1} = A_{k+1} \sqrt{2\pi/\beta_{k+1}}$ である。この式より (23) を用いて $W_{k+1}(\theta)$ が計算でき、さらにエネルギーが計算できる。

$$E_{k+1} \equiv E[f_{k+1}] = \frac{1}{2\beta_{k+1}} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho_{k+1}(\theta) W_{k+1}(\theta) d\theta. \quad (38)$$

未定乗数 α_{k+1} および β_{k+1} は (10) と (27) から計算されなければならず、これらから \tilde{A}_{k+1} を得る。Lagrange の未定乗数を数値的に求めるため、次の Lagrangian [19] を定義する。

$$L_k[f](\beta, \alpha) = -S[f] + \beta \left[E_k + \int \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} (f - f_k) dp d\theta - U \right] + \alpha (M[f] - 1). \quad (39)$$

この Lagrangian を用いて、次の関数を定義する。

$$L_k^*(\beta, \alpha) = \inf_f \{ L_k[f](\beta, \alpha) \}. \quad (40)$$

一般に、 L_k^* が凸関数で α_{k+1} および β_{k+1} が L_k^* を最大にする唯一の解である事が示される [19] .
 $L_k[f](\beta, \alpha)$ が極大である事について、条件 (36) を用いて、我々は L_k^* を計算できる。計算の都合上、 α の代わりに \tilde{A} を用いると、我々は以下の式を得る。

$$L_k^*(\beta, \tilde{A}) = \log \tilde{A} + \frac{1}{2} \log \beta - \beta \left(U + E_k - \frac{1}{2\beta_k} \right) - \tilde{A} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{-\beta W_k(\theta)}. \quad (41)$$

凸関数 L_k^* が最大である条件は、 L_k^* の \tilde{A} および β に対する微分が 0 である事である。

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial \tilde{A}} = \frac{1}{\tilde{A}} - \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{-\beta W_k(\theta)} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial L_k^*}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta_k} - U - E_k + \tilde{A} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta W_k(\theta) e^{-\beta W_k(\theta)} = 0. \quad (43)$$

分布関数が収束した極限を考えると、(42) は質量保存、(43) はエネルギー保存に対応している。(42) から \tilde{A} が決まるので、(42) を (43) に代入して β を求める。

$$-\frac{1}{2\beta_{k+1}} - \frac{1}{2\beta_k} + U + E_k - \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta W_k(\theta) e^{-\beta_{k+1} W_k(\theta)}}{\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{-\beta_{k+1} W_k(\theta)}} = 0. \quad (44)$$

L_k^* は凸関数であるので、(44) は β_{k+1} に関して唯一解を持つ。

新たに開発した逐次近似の方法で、分布関数を求める手順は以下の通りである。

1. k 番目の逐次近似の計算が終わったところで、(44) を β_{k+1} について、Newton 法に用いて解く。
2. 次に (42) を用いて、 \tilde{A}_{k+1} を得る。
3. 最後に (37) を用いて、新たな密度分布 ρ_{k+1} を求める。これで $k+1$ 番目の逐次近似の計算が終了する。

我々の逐次近似法は、(44) に関して解の一意性は示せるが、最終的に収束する分布関数が一意でない場合がある。SGR モデルの場合に具体的に示すが、もしあるエネルギーで安定な状態と準安定状態が両立する場合、初期に与えた密度分布 ρ_0 の形によって、いずれへ収束するかが分かれる。このため、逐次近似法で得られた分布関数が一意でない事に注意する必要がある。だが逆に、この逐次近似法を注意深く用いると準安定状態を発見できるという、強力な利点が存在するという点も注目すべき事と考える。

次章で SGR モデルの解析に我々の逐次近似法を用いた具体例を示す。我々の方法が特別なモデルにしか適用できないのではないかと問題を避けるため、Appendix B において、周期的境界条件をつけた一次元シートモデルの解析結果を示す。このモデルは力学的シミュレーションでは、相転移点付近の温度の揺らぎが非常に大きく、相転移点付近での振る舞いが解析できないが、我々の手法では短時間で詳細な解析が出来ている。

V. SGR モデルの熱力学的性質

我々の開発した逐次近似法を用いて、(18) の解である安定分布の質量密度 $\rho(\theta)$ を導出する事が出来、そこからミクロカノニカル分布での熱力学量を得る事が出来る。この章の最初の節では、我々は $\rho(\theta)$ について数値解を求め、ソフトニングパラメーター ε が小さい場合の、エネルギーに対する分布の依存性を示す。次の節では、SGR モデルにおいて ε を変化させた場合に、ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布の双方で、相転移のダイアグラムについて議論する。

A. 質量密度、エントロピー、温度曲線

臨界エネルギー $U_c(\varepsilon)$ より高いエネルギーでは、安定な物質分布は一様分布である。この場合、エントロピーは (9) から計算する事が出来、

$$S = \frac{1}{2} (3 \log(2\pi) + 1 - \log \beta), \quad (45)$$

となる．また，温度の逆数は (19) から

$$\beta = (2U - 2\overline{E}_p)^{-1}, \quad (46)$$

となる．ここで，

$$\overline{E}_p = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta d\phi V_\varepsilon(\theta - \phi) \quad (47)$$

$$= -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}} \mathcal{K}\left(\frac{2}{\varepsilon+2}\right), \quad (48)$$

であり， \mathcal{K} は第一種完全楕円関数 $\mathcal{K}(x) \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta / \sqrt{1 - x \sin^2 \theta}$ である．

(46) は，温度の下限が 0 であるために， $U_{hom} = \overline{E}_p$ より低いエネルギーでは一様分布が存在し得ない事を示している．

$U < U_c(\varepsilon)$ では，安定な質量分布は数値的に求められなければならない．このエネルギースケールでは，(17) および (18) を矛盾なく満たす解を導出する際に，従来の逐次近似では正しい解が収束しない事を，我々は確認している．例えば，解が収束せずに振動したり，収束はするものの温度が負になってしまうといった問題が生ずる．その逆に，IV C 節で示した，我々が開発した逐次近似法では，分布関数が直ちに収束する．

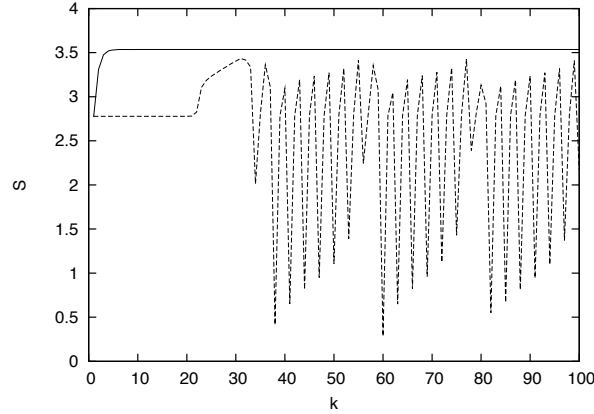


FIG. 3: 二つの逐次近似法による，逐次近似の回数とエントロピーの関係．SGR モデルのパラメーターは $\varepsilon = 10^{-5}$, $U = -1$ とした．実線は我々が開発した方法によるエントロピーの変化を示しており，単調に増加して 10 回前後で収束する事が分かる．破線は従来の逐次近似法によるもので，エントロピーは激しく振動し，100 回の近似でも安定解に収束しない．

図 3 は二つの逐次近似法によるエントロピーの変化を示している．我々の方法ではエントロピーが単調増加して 10 回前後で収束するのにに対し，従来の方法では 100 回の近似でも収束せずに振動を続ける．相転移の臨界エネルギー付近では，我々の逐次近似法でも計算の回数をより多く必要とするが，それでも数百回程度の計算で収束する事を確認している．

図 4 は SGR モデルについて，エネルギー U の関数として温度 $T = \beta^{-1}$ とエントロピーを示している．注目すべきは $U_{top} \leq U \leq U_c$ において負の比熱が存在する事である．また， $U_{low} \leq U \leq U_{high}$ ではエントロピーは凸の部分をつなぐ破線とほずれている．これはカノニカル分布とミクロカノニカル分布が与える平衡状態が同一でない事を示している．つまり，エネルギーを一定とするミクロカノニカル分布では，分布の違いによる曲線の食い違いが生じるエネルギースケールは安定であるが，温度を一定とするカノニカル分布では準安定，あるいは不安定である．質量分布は U_c より高いエネルギーでは一様になるが，これより低いエネルギーではクラスターを形成するようになる．

クラスター形成のような質量分布の局在化を示す秩序パラメーターとして，『磁化』を考える．

$$B = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i\theta} \rho(\theta). \quad (49)$$

もし質量分布が一様になれば， $B = 0$ となる．一方で質量が一点に集中すれば， $B = 1$ となる．局在化の中間状態では， $0 < B < 1$ となる．図 5 は U の関数として『磁化』をプロットしたものである． $U < U_c$ では『磁化』は減少関数となるが， $U = U_c$ で 0 にジャンプする．すなわち，SGR モデルはミクロカノニカル分布で一次相転移を起こす事を示している．一次相転移の性質は， $U = U_c$ の周りでのエントロピーを拡大する事（図 4 のパネル (b) 内に表示）でも確かめられる．この一次相転移は凹凸型のもの [13] である．カノニカル分布では，ミクロカノニカル分布でのエントロピー曲線の共通接線を引く事により相転移の様子が分かる．カノニカル分布での相転移は一次であり，相転移温度 T_{can} は

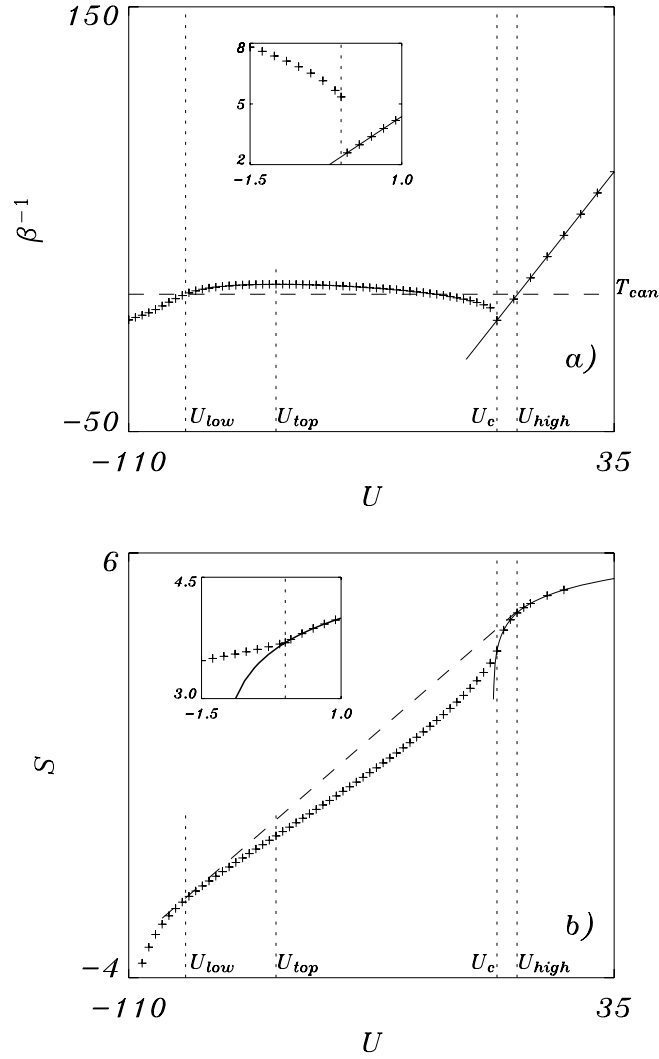


FIG. 4: 温度 (パネル (a)) とエントロピー (パネル (b)) を U の関数として見た図．ここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．四つのエネルギースケールは以下の通り． $U_{low} \simeq -93$, $U_{high} \simeq 6$ はアンサンブル間の食い違いが生じるエネルギー． $U_c \simeq 0$ はミクロカノニカル分布の相転移点． $U_{top} \simeq -66$ は負の比熱が現れる下限である． $T_{can} \simeq 15$ はカノニカル分布での相転移温度を示している．パネル (b) での破線は、 U_{low} と U_{high} でのエントロピー曲線の接線を示しており、この傾きの逆数がカノニカル分布での相転移温度を示す．(a) と (b) の実線は、一様分布での温度とエントロピーを、解析的に求めて描いたものである． U_c より低いエネルギーにも実線は伸びており、これは準安定状態を示している．(a) と (b) の内部の小さな図は、相転移点 U_c 付近の温度とエントロピーの拡大図である．温度は U_c でジャンプしており、エントロピーは U_c の前後で異なる傾きの曲線に移っている．これらは明らかに、系が一次相転移を起こしているという特徴を示している．

U_{low} と U_{high} の間でのエントロピーの傾きの逆数から与えられる． $[U_{low}, U_{high}]$ の範囲のエネルギーでは、カノニカル分布の安定状態が存在しない．

典型的な局在化した質量分布を図 6 で示す．この図は、比熱が負であるエネルギーの場合のものを示している．

一次相転移は準安定状態の存在とも関係付いている．安定な分布関数を求めた際に、分布はそのままにエネルギーを連続的に少しずつ変化させる事により、我々は準安定状態の分布関数を求める事が出来る． $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合について、相転移エネルギー U_c 付近でのエントロピーを、図 7 で示す．非一様な準安定状態は $U_c \leq U \leq U_{in}$ に存在する ($U_{in} \simeq 0.16$)．一方で、一様な準安定状態は $U_{hom} \leq U \leq U_c$ に存在する ($U_{hom} = \bar{E}_p (\varepsilon = 10^{-5}) \simeq -1.19$)．

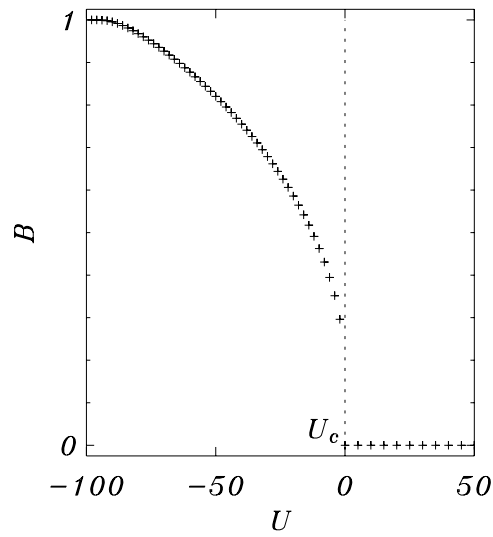


FIG. 5: $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合の『磁化』 B とエネルギー U の関係．秩序パラメーターのジャンプが見られることから， $U_c \simeq 0$ での相転移はミクロカノニカル分布で一次である事を強く示すものとなっている．

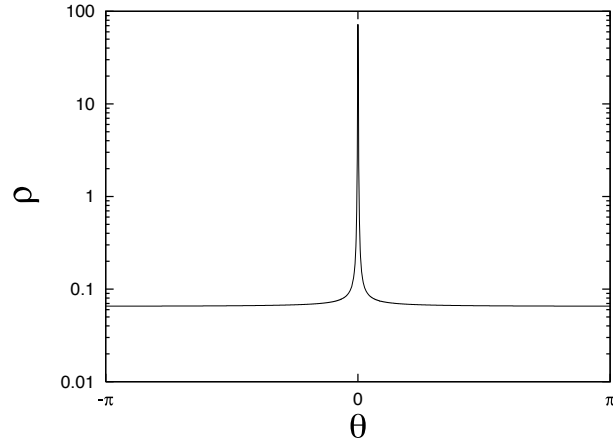


FIG. 6: $\varepsilon = 10^{-5}$, $U = -20.0$ での質量密度分布 $\rho(\theta)$. このエネルギーでは比熱は負である .

B. ソフトニングパラメーター ε への依存性

次にソフトニングパラメーターを大きくした場合の状況を考えてみよう．まずパラメーターを $\varepsilon = 10^{-2}$ とした場合を考える．ミクロカノニカル分布では，図 8 で示したように $U_{top} \simeq -0.8$ で比熱の符号の変化が起き， $U = U_c \simeq -0.3$ で相転移を起こす．しかし温度はエネルギーの関数として， $U = U_c$ で微分不可能ではあるが連続になるので，相転移は二次である．また，秩序パラメーター『磁化』の対称性の破れと相転移の次数が関連している事が，図 8 (b) から見て取れる．温度曲線は，この二次相転移が凸凹型である事を示している．ミクロカノニカル分布で二次相転移がこのタイプのものである [13] ためには，相転移点で比熱のジャンプを見る必要がある．

$\varepsilon = 10^{-5}$ から $\varepsilon = 10^{-2}$ の間で，ミクロカノニカル分布の三重臨界点が存在する．この三重臨界点では次の二つの性質が現れる．

- 温度曲線は U_c より低いエネルギー側から見て， $U = U_c$ で水平になる．
- 準安定の非一様相が存在するエネルギーの上限が U_{in} から U_c に向かって落ちる．一方で一様相は U_c より低いエネルギーで連続的に不安定相として存在する．

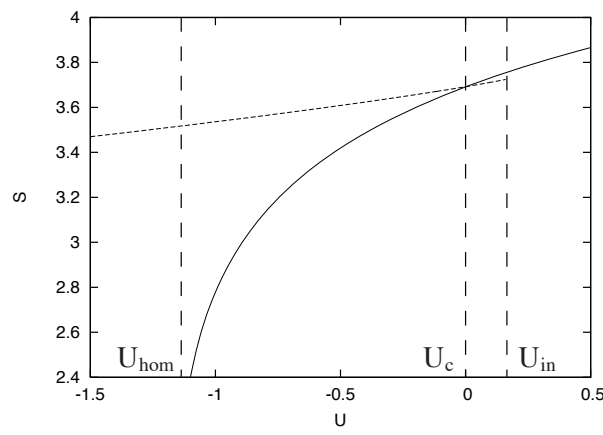


FIG. 7: 高エネルギー領域でのエネルギーとエントロピーとの関係を示す曲線は、一様解（実線）を示す．一方、低エネルギー領域は非一様解（破線）を示す．ここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．二つの曲線は $U_c \simeq 0$ で交差する．一様解の系列は低エネルギー側にも伸びており、 $U_{hom} \simeq -1.19$ まで続く．非一様解の系列は高エネルギー側にも伸びており、 $U_{in} \simeq 0.16$ で突然途切れる．

図 10 で、我々はミクロカノニカル分布における臨界エネルギー U_c 、エネルギーの境界 U_{in} および U_{hom} の ε 依存性を示す．ミクロカノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で、この点が準安定な非一様相の存在の境界で、このエネルギーの上限は臨界エネルギーに一致するようになる．これが対称性の破れを伴う三重臨界点の一般的な様相である（[13] の図 6 を参照）．

カノニカル分布での三重臨界点を調べるには、二つの曲線 U_{low} および U_{high} が合流する ε の値を見る必要がある．この値の大まかな見積りは $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ である．カノニカル分布での三重臨界点は、 U_{top} が前述の二つの曲線に合流するところでもあり、負の比熱を持つエネルギースケールが消えるところである．従って、エントロピー曲線での変曲点 U_{top} が消える事により、アンサンブルの違いはカノニカル分布での三重臨界点においてなくなる．相転移の分類を示した論文 [13] の表 1 でも確認できるように、アンサンブルの違いが消えるのは、三重臨界点に関わる時だけである．

結論として、 ε の変化による SGR モデルの相転移ダイアグラムの重要な変更は、ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布の三重臨界点の存在によるものである． $\varepsilon \leq \varepsilon_T^c$ において、アンサンブルの非等価性を示すエネルギースケールが存在する．このような状況は既に今までの論文 [22, 23] で知られている．

VI. 平衡状態への緩和

我々が導出した平衡状態は、果たして正しいものだろうか．そこでハミルトニアンが (1) で与えられる系の N 体シミュレーションを行い、得られた平衡状態の質量分布を数値的にチェックしてみる．シミュレーションの際、 $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．質量分布を示す際、比熱が負となる $U = -20$ で解析を行い、時間発展の積分法は六次のシンプレクティック法 [20] を用いた．シミュレーションは国立天文台の GRAPE-5 システム [6] を使用した．SGR モデルの相互作用は基本的には Newton 重力と同じ形をしているので、まずリング状に存在する粒子同士の重力を計算し、その後重力のリングの接線方向の成分のみを取り出す事により、GRAPE システムでも SGR モデルの時間発展を追う事が出来る．

図 12 で我々は数値計算の結果と、逐次近似の方法で得られた平衡状態の密度分布を比較する．ここで示した数値計算の結果は、 $t = 400$ のスナップショットを取り出したものである．シミュレーションは粒子数が有限であり、一つのスナップショットをそのまま取り出したため、テイル部分で揺らぎによりずれが生じているが、質量分布の中心付近はよい一致を示している．

長距離力系では一般に、平衡状態に至る緩和は非常に長い時間がかかる事が知られている [21]．従って、SGR モデルでも同様の状況が生じると考えられる．例えば、我々は粒子が初期に弧状 ($\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$) に一様に存在し、運動エネルギーがゼロである “cold start” の状況を考える事が出来る．重力系のシミュレーションでは、ビリアル比 $|2K/V|$ の時間変化をみるが、今回は初期には 0 である．ビリアル比の時間変化は図 13 に示した通りである．パラメーターは図 12 を描く時に用いたものと同じである．この図では、シミュレーションから得られたビリアル比は、逐次近似により導出された平衡状態での値から明らかにずれている．すなわち、系は平衡状態とは異なる『準安定状態』に収束しているとみられる．だが一方で、質量分布（図 12）を見てみると、こちらは短時間で平衡状態のものに近づくようである．つまり質量分布と速度分布で、緩和状態に至るタイムスケールが異なるようである．同様の状況が現れた過去のモデル [21] から、緩和には N の冪のタイムスケールがかかるだろうと想定される．

エントロピーの極大が存在する時は、緩和に時間がかかる．この状況は一次相転移を引き起こす場合、すなわち $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合での臨界エネルギー U_c の付近で起こる．図 14 は初期条件として、粒子を局在化させた時といくぶん広げた時に、温度と『磁化』という二つの統計量を求めて、系が異なる緩和状態に至る事を示している．もし系が、非一様相に

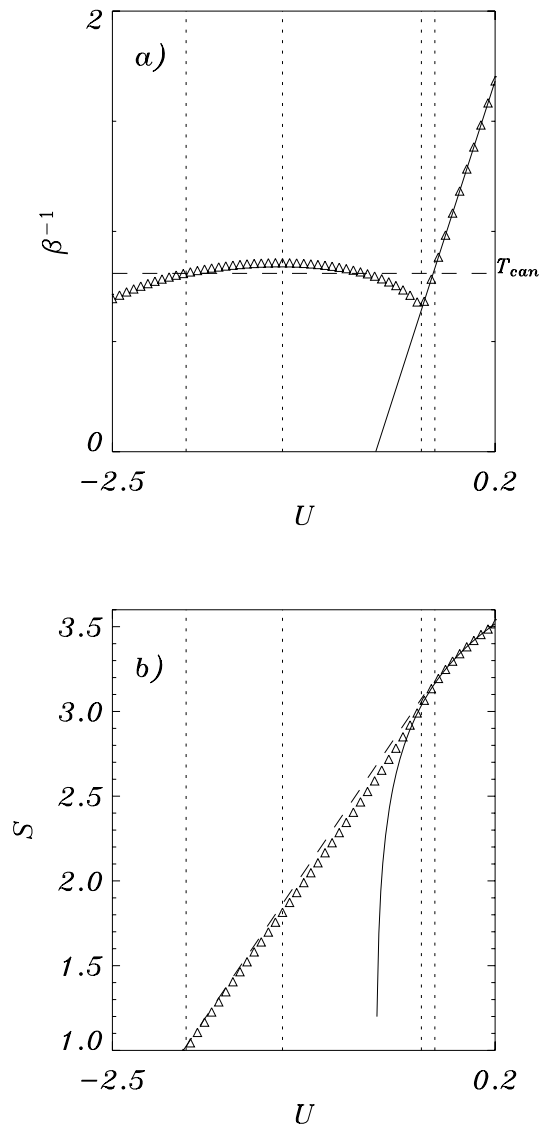


FIG. 8: (a): $\varepsilon = 10^{-2}$ での温度曲線 (白い三角). 垂直の破線は左から $U_{low} \simeq -1.98$, $U_{top} \simeq -1.3$, $U_c \simeq -0.32$, $U_{high} \simeq -0.225$ を示す. 解析的に得られる一様相の曲線は連続である. 図. 4 との大きな違いは, U_c での温度のジャンプが見られない事である. 相転移はミクロカノニカル分布で二次である. 一方で, カノニカル分布では $T_{can} \simeq 0.8$ で一次相転移を起こす. (b): $\varepsilon = 10^{-2}$ でのエネルギーとエントロピーの関係 (白い三角). エントロピー曲線は非一様相から一様相 (実線) に滑らかに接続する. エントロピー曲線の U_{low} および U_{high} における共通接線となる破線は, アンサンブルによる相転移の違いを示す.

対応する局所的なエントロピーの極大に『近い』ならば, 系は幾分速く収束する. 逆に粒子が一様に近い状況に分布している時, 逆に系は一様相に収束して行く. つまり, 臨界エネルギー付近では両相のエントロピーの値がほぼ同じであるため, 初期条件により一様分布, 非一様分布の平衡分布のいずれかに収束するかが決まる. この二相の間にはエントロピーの障壁が存在し, 長距離力系では系が準安定状態に滞在する時間は, 粒子数 N に対し $\exp(N)$ 程度で伸びて行く事が見いだされている [24, 25].

VII. まとめ

本研究では SGR モデルの熱力学的性質を, 統計的手法及び数値シミュレーションにより解析した. 新しい逐次近似の方法を開発したことにより, 平衡状態の密度分布に関する方程式を高速に解く事が可能となった. 新たな逐次近似の

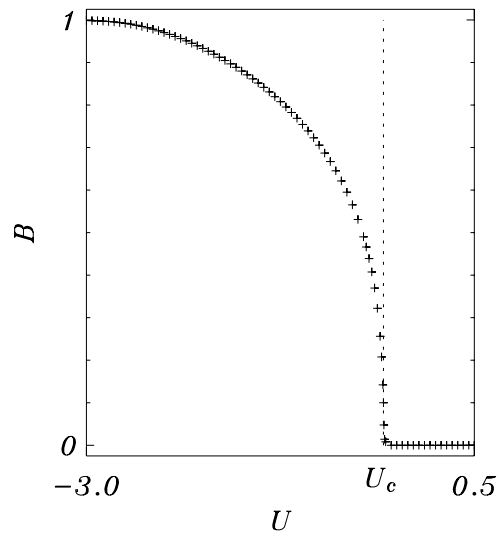


FIG. 9: $\varepsilon = 10^{-2}$ におけるエネルギー U と『磁化』 B の関係．秩序パラメーターは連続的に変化し U_c で 0 になるので，ミクロカノニカル分布での相転移が二次である事を示している．

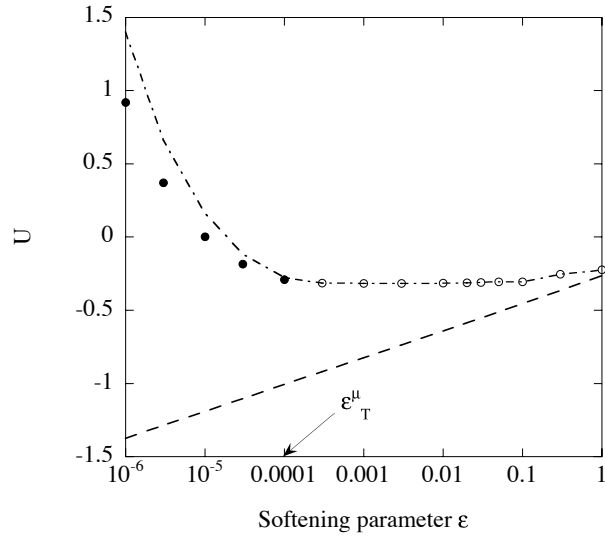


FIG. 10: 一点破線は $U_{in}(\varepsilon)$ を，破線は $U_{hom} = \overline{E}_p(\varepsilon)$ を示す．黒丸はミクロカノニカル分布の一次相転移の臨界エネルギーを，白丸は二次相転移の臨界エネルギーを示す．ミクロカノニカル分布での三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で，相転移はここで一次から二次に変化し，同時に準安定の非一様相がなくなる．

方法ではエントロピーが増加しながら収束するという特徴を示す．この逐次近似法を用いる事により，ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布での相に関するダイアグラムを描く事ができた．ソフトニングパラメーターが十分に小さい場合には，ミクロカノニカル分布では負の比熱を持つエネルギースケールが存在し，カノニカル分布では相転移が一次となる．さらにソフトニングパラメーターを小さくすると，ミクロカノニカル分布では相転移が一次となり，相転移エネルギーで温度のジャンプが見られるようになる．また，ミクロカノニカル分布とカノニカル分布での三重臨界点は一致しない [22] ．

シミュレーションにおいて，我々は平衡状態への緩和には非常に長い時間がかかる事を示した．この事は長距離力系で偏在する，準安定状態の存在を示している [12] ．準安定状態に対して，HMF モデルにおいては，Vlasov 方程式を用いたアプローチで解析がなされている [21] ．さらに一次相転移の起きる領域では，変化しにくい準安定状態が存在し，系が熱平衡状態とは異なる状態に緩和しうる事が示されている．

SGR モデルの以前の論文では，速度分布に関する解析がなされている [10] ．類似の解析は空間三次元の Newton 重力

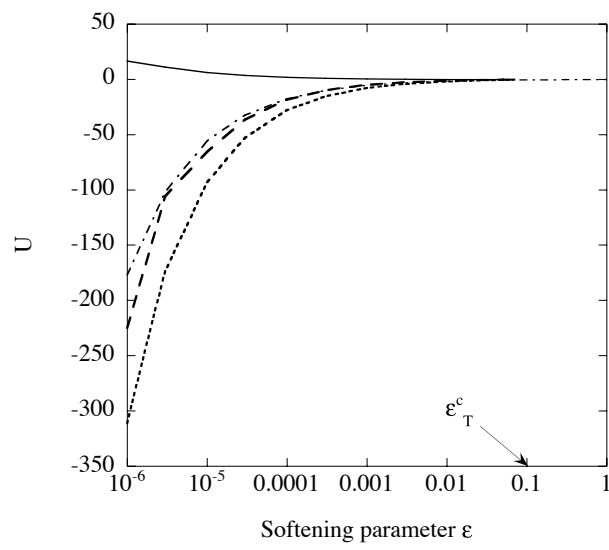


FIG. 11: U_{low} (破線), U_{high} (実線), および U_{top} (一点破線) の ε 依存性. カノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ で, ここで三つの曲線が合流する. また, このソフトニングパラメータは, ミクロカノニカル分布で負の比熱がなくなり, カノニカル分布で相転移が二次に変化するところである. この図で我々は太い破線で曲線を描いているが, これは以前の論文 [10] で見積もられた $U_{top}^{th} \simeq -1/(4\sqrt{2\varepsilon})$ である.

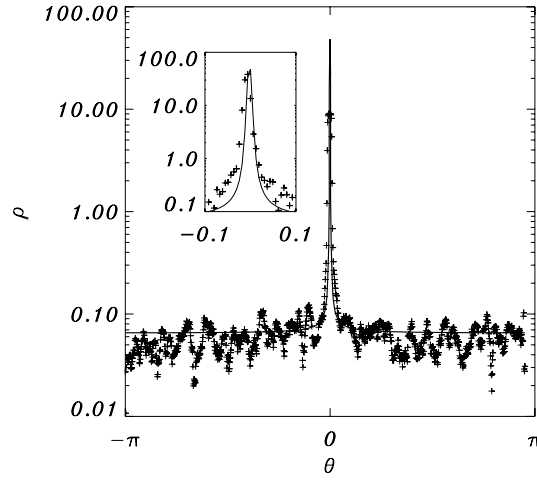


FIG. 12: 逐次近似 (実線) と $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 4000$ のシミュレーション (+マーク) による, 質量分布の比較. 図中の拡大図は密度のピークを示している.

系で最近なされた [26]. 両者ともいくつかのエネルギー領域では非ガウスの速度分布を示している. SGR モデルに関する今後の研究として, 非ガウスの速度分布の発生等のメカニズムを考察する事も興味深い. 非ガウスの速度分布の発生の解析では, いくつかの有用な解析手法が, HMF モデルの一粒子の拡散を理解するために開発されている [27, 28].

謝辞

筆者の一人である立川はリヨン高等師範学校 (ENS Lyon) に 2004 年 9 月に滞在し, 共著者との活発な議論により研究を遂行する事ができました. 本研究をまとめるにあたり, 早稲田大学の前田恵一教授, お茶の水女子大学の森川雅博教授, 曾田康秀博士, 井口修博士, ぐんま天文台の中道晶香博士との有用な議論と助言が参考になりました. 本研究は国立天文台の GRAPE システムプロジェクト (g04b06) に採択され, 数値シミュレーションは国立天文台の GRAPE-5 システムで行いました. また, 本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (若手研究 (B) 16740152) の補助のもとになされております.

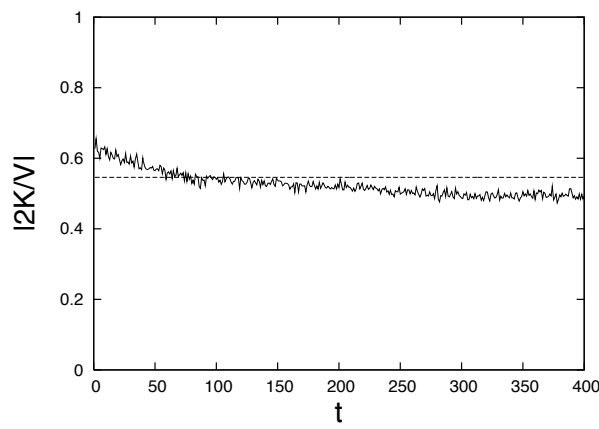


FIG. 13: $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 4000$ の SGR モデルでの、ピリアル比 $|2K/V|$ の時間変化．初期条件として、粒子は $[0, 2\pi/75]$ の範囲に、運動エネルギー 0 で分布させた．すなわち、初期のピリアル比は 0 である．時間発展によってピリアル比は振動しながら漸的に 0.49 に近づいているが、これは破線で示した平衡状態での値 0.55 と明らかにずれている．

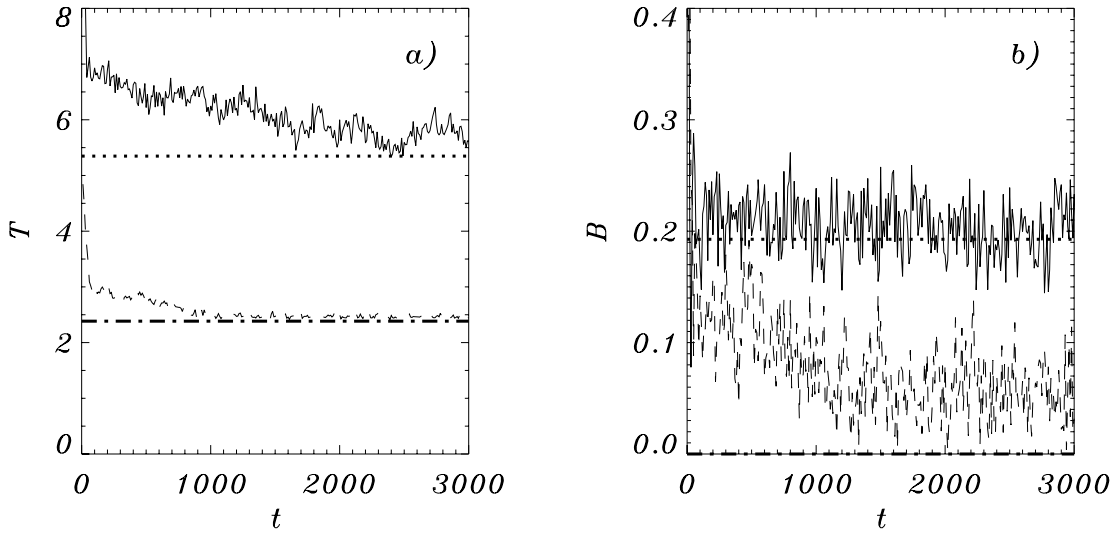


FIG. 14: $U \simeq 0$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 10^3$ での、SGR モデルの異なるエントロピー極大状況への緩和．(a) は非一様相（水平の点線）あるいは一様相（水平の一点破線）に対する温度の緩和を示す．粒子が初期に狭い領域 $\theta \in [0, \pi/50]$ （実線）に存在するか、広い領域 $\theta \in [0, \pi/5]$ （破線）に存在するかに依存する．両者とも、初期の速度分布は“water bag”である．(b) は『磁化』を示している．

これらの方々、団体に感謝したいと存じます．

-
- [1] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton (1987).
 - [2] V. A. Antonov, *Vestnik Leningrad Univ.* **7**, 135 (1962).
 - [3] D. Lynden-Bell, R. Wood, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **138**, 495 (1968).
 - [4] T. Padmanabhan, *Astrophys. J. Supp.* **71**, 651 (1989).
 - [5] D. Heggie, P. Hut, *The Gravitational Million-Body Problem*, Cambridge University Press (2003).
 - [6] A. Kawai, T. Fukushima, J. Makino, M. Taiji, *Pub. Astron. Soc. Japan* **52**, 659 (2000).
 - [7] F. Hohl, M. R. Feix, *Astrophys. J.* **147**, 1164 (1967).
 - [8] T. Tsuchiya, T. Konishi, N. Gouda, *Phys. Rev. E* **50**, 2607 (1994).
 - [9] H. Koyama, T. Konishi, *Phys. Lett. A* **279**, 226 (2001).
 - [10] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, T. Tatekawa, K. Maeda, *Phys. Rev. E* **64**, 056133 (2001).

- [11] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 2361 (1995).
- [12] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens (Eds.), “*Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*”, *Lecture Notes in Physics* **602**, Springer (2002).
- [13] F. Bouchet, J. Barré, cond-mat/0303307; to be published in Journal of Statistical Physics (2005).
- [14] B. Turkington, N. Whitaker, SIAM J. Sci. Comp. **17**, 1414 (1996).
- [15] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, cond-mat/0501583; to be published in Phys. Rev. E (2005).
- [16] J. Messer, H. Spohn, J. Stat Phys. **29**, 561 (1982).
- [17] I. Ispolatov, E. G. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **87**, 210601 (2001).
- [18] 竹内啓, 岩波講座 応用数学 [対象 9] 社会科学における数理的方法, Sec 1.3, (岩波書店, 1995)
- [19] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1970).
- [20] H. Yoshida, Phys. Lett. A **150** 262 (1990).
- [21] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo, Physica A **337**, 36-66 (2004).
- [22] J. Barré, D. Mukamel, S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **87**, 030601 (2001).
- [23] M. Antoni, S. Ruffo, A. Torcini, Phys. Rev. E **66**, 025103 (2002).
- [24] M. Antoni, S. Ruffo, A. Torcini, Europhysics Letters **66**, 645-651 (2004).
- [25] P. H. Chavanis, M. Rieutord, Astron. Astrophys. **412**, 1 (2003). P. H. Chavanis, astro-ph/0404251.
- [26] O. Iguchi, Y. Sota, T. Tatekawa, A. Nakamichi, M. Morikawa, Phys. Rev. E **71**, 016102 (2005).
- [27] F. Bouchet, Phys. Rev. E **70**, 036113 (2004).
- [28] F. Bouchet, T. Dauxois, cond-mat/0407703.
- [29] 一般には他に保存量として全角運動量も含まれるが, 全角運動量も 0 としておく.

APPENDIX A: 不等式の拘束条件に対する LAGRANGE の未定乗数法

逐次近似の方法を開発する際, 我々はエネルギー拘束条件を分布関数について線形化し, 不等式の拘束条件を与えて Lagrange の未定乗数法を適用した. この未定乗数法の適用の際に, エントロピーの特徴を用いた. すなわち, エントロピーが分布関数に対して厳密に凹 (concave) となる汎関数であるという事である. 感覚的には凹と凸 (convex) が逆ではないかと思われるが, ここでは参考としたテキスト [18] に沿って凹と凸を扱って行く事にする.

III 章では, 我々は等式で拘束条件が与えられる場合の Lagrange の未定乗数法を用い, Boltzmann-Gibbs エントロピーが最大になる時の分布関数を導出した. 一方, 我々が新たな逐次近似法を開発する際は, 不等式で拘束条件が与えられる場合の Lagrange の未定乗数法を用いた. 拘束条件が不等式で与えられる場合の, 未定乗数法について考える.

x を実変数ベクトルとする. 拘束条件が

$$g_j(x) \leq c_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{A1})$$

で与えられる場合を考え, この条件のもとで関数 $f(x)$ の最大値を求める. この場合の Lagrange 形式を

$$\hat{F}(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (c_j - g_j(x)), \quad (\text{A2})$$

と表す事にする. この場合, 次の定理が成り立つ.

定理 1: 次の条件を満たす x^*, λ^* が存在するならば, $x = x^*$ は条件 (A1) のもとでの条件付き最大化問題の解を与える.

$$\hat{F}(x^*, \lambda^*) = \max_x \hat{F}(x, \lambda^*), \quad (\text{A3})$$

$$g_j(x^*) \leq c_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{A4})$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{A5})$$

$$\lambda_j^* (c_j - g_j(x^*)) = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (\text{A6})$$

条件付き最大化問題に関しては, 拘束条件の性質により以下の定理が成り立つ.

定理 2: 条件付き最大化問題の解 $x = x^*$ において, 行列

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \right\}$$

の階数が m ならば,

$$\lambda_j^* (c_j - g_j^*(x^*)) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{A7})$$

を満たす λ^* が存在する.

ところで、拘束条件が不等式の場合には、条件式の数が増える事があり得る。その場合には、条件を書き換える事により定理を成り立たせる事が出来る。

定理 3: 条件 $g_j(x_1, \dots, x_n) \leq c_j$ ($j = 1, \dots, m$) の下で $f(x_1, \dots, x_n)$ の最大値を与える解を $x = x^*$ とする。このとき

$$g_j(x_1^*, \dots, x_n^*) = c_j$$

となる j の集合を I とし、その大きさを r とする。 $r \times n$ の Jacobi 行列

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, j \in I \right\}$$

の階数が r に等しければ、 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ が存在して、全ての j について $\lambda \geq 0$ かつ $j \notin I$ ならば $\lambda_j^* = 0$ となり、かつ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_j \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0,$$

となる。

次に、関数の凹凸について述べる。関数が凹 であるとは、全ての $x_1, x_2, 0 < \alpha < 1$ に対して、

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) \quad (\text{A8})$$

となることである。(A8) の不等号の向きが逆の場合には、関数が凸 であるという。また、不等号が常に成り立つ場合には、厳密に凹(strictly concave) であるという。 n 次元ベクトルの集合 C が凸であるとは、任意の $x_1, x_2 \in C, 0 < \alpha < 1$ に対して、常に $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ となる事である。

凸集合に対しては、以下のような定理が成り立つ。

定理 4:

C を閉凸集合、 x_0 を C に属さない点とすると、 C に属する全ての x に対して、 $c \cdot x > c \cdot x_0$ となるベクトル c が存在する。

定理 5:

C を閉凸集合、 x_0 を C の境界点とすると、 C に属する全ての x に対して、 $c \cdot x > c \cdot x_0$ となるベクトル c が存在する。

定理 6:

C を凸集合、 x_0 を C に属さない点とすると、 C に属する全ての x に対して、 $c \cdot x > c \cdot x_0$ となるベクトル c が存在する。

また、凹関数については次の事がいえる。 F を凹関数とする。 x と f の定義域の内点 a を選び、0 でない実数 t を取る。これらに対して

$$g_t(x, a) = \frac{1}{t}(F(x + ta) - F(x)), \quad (\text{A9})$$

と置くと、 F が凹ならば $g_t(x, a)$ は t に対して単調非増加になる。これは図を描けば容易に理解できる。

従って、 t を正の方向から 0 に近づけた極限

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_t(x, a)$$

が存在する。これを f の x における a 方向への微係数と呼ぶ事にし、それを

$$\nabla F(x, a)$$

で表す事にする。この微係数に対し、次の定理が成り立つ。

定理 7:

凹関数 f が与えられた範囲 C の内点 $x = x^*$ で最大値をとるための必要十分条件は、全ての a に対して

$$\nabla F(x^*, a) \leq 0,$$

となる事である。

もし F が連続で一階微分可能であるならば、

$$\nabla F(x, a) = a \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$

となるので、 $x = x^*$ が最大値を与える必要十分条件は、 x^* が内点ならば、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0,$$

となる。次に、条件 $g_j(x) \leq c_j$ において g_j が凸だとすると、条件を満たす範囲は凸集合になる。 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0$ とすると、Lagrange 乗数を用いた関数

$$\tilde{F}(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_j \lambda_j^* (c_j - g_j(x)),$$

は凹関数となるから、定理 3 と定理 7 を用いて次の定理が導かれる。

定理 8:

F が凹、 g_j が凸関数のとき、 $x = x^*$ が条件 $g_j(x) \leq c_j$ ($j = 1, \dots, m$) のもとで $F(x)$ を最大とする解となる必要十分条件は、 F, g_j が連続微分可能で、かつ $x = x^*$ における g_j の Jacobi 行列の階数が r に等しいとき、

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, \lambda) &= \max_x F(x, \lambda^*), \\ g_j(x^*) &\leq c_j, \quad \lambda_j^* \geq 0, \\ \lambda_j^* (c_j - g_j(x^*)) &= 0, \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

となる λ^* が存在する事である。

実は定理 8 の証明では f, g_j の微分可能性は不要である。そこで定理を改めて整理しよう。

定理 9 (Kuhn-Tucker の定理):

F が凹関数、 g_j が凸関数、 C が凸集合のとき、条件 $g_j(x) \leq c_j$ ($j = 1, \dots, m$) のもとで、 $x \in C$ の範囲で F を最大にする解を $x = x^*$ とする。もし $g_j(x_0) < c_j$ ($j = 1, \dots, m$) となるような $x_0 \in C$ となるような x_0 が存在するならば、

$$\hat{F}(x, \lambda) = \max_x F(x, \lambda^*), \quad (A10)$$

$$g_j(x^*) \leq c_j, \quad \lambda_j^* \geq 0, \quad (A11)$$

$$\lambda_j^* (c_j - g_j(x^*)) = 0, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (A12)$$

を満たす λ^* が存在する。

本問題では

$$F \rightarrow -S, \quad (A13)$$

$$x \rightarrow f, \quad (A14)$$

$$c_j \rightarrow U, \quad (A15)$$

$$g_j \rightarrow E[f^k] + \int \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} (f_{k+1} - f_k) dp d\theta, \quad (A16)$$

$$\lambda_j \rightarrow \beta, \quad (A17)$$

として、定理を用いた。(A10)、(A11) が (24) に、(A12) が (27) に対応している。

APPENDIX B: 逐次近似法の適用例

我々が開発した逐次近似法の威力は、V 章で示した通りである。この近似法は一般的なポテンシャルに対しても利用可能である。ここでは具体例として、比熱が正になる場合のモデルを考える。

HMF モデル [11] は長距離力のモデルとして、様々な解析がなされてきた。ポテンシャルは

$$V_{HMF} = \frac{1}{2N} \sum_{i,j} (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)), \quad (B1)$$

で与えられる。この HMF モデルは、実は周期的境界条件を与えた一次元シートモデルのポテンシャルを Fourier 級数展開し、最低次の項のみを取り出したモデルでもある。 $x \in [-\pi, \pi]$ の範囲で展開すると、一次元シートモデルのポテンシャルは次のようになる。

$$|x| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k+1)x). \quad (B2)$$

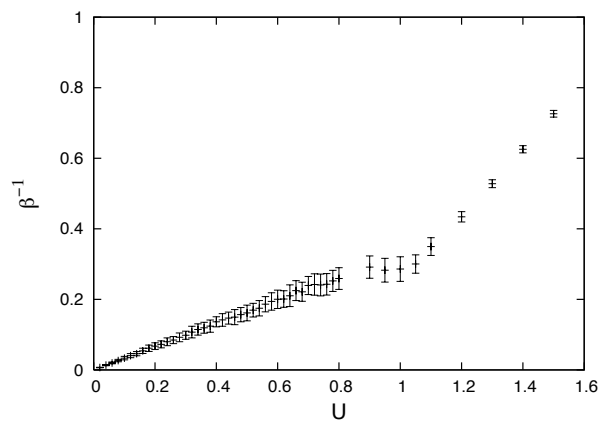


FIG. 15: シミュレーションによる，周期的境界条件付きの一次元シートモデルの温度曲線． $U \simeq 1$ 付近に相転移点があるようだが，温度の揺らぎが非常に大きく，相転移点の判別は出来ない．また，負の比熱の存在，相転移が一次か二次かということも判別ができない．

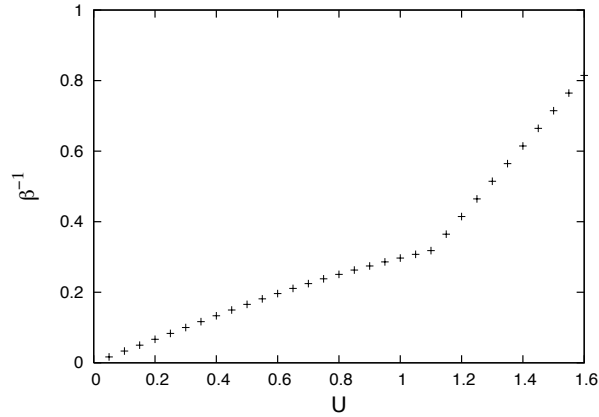


FIG. 16: 逐次近似による，周期的境界条件付きの一次元シートモデルの温度曲線． $U \simeq 1.1$ 付近に相転移点がある．温度曲線の解析から，このモデルでは正の比熱しかなく，相転移が二次である事がわかる．

一次元シートモデルの解析は広くなされており，様々な興味深い結果を示している（例えば [7–9]）．だが，これから示すモデルは周期的境界条件のために，性質が多少変わる．

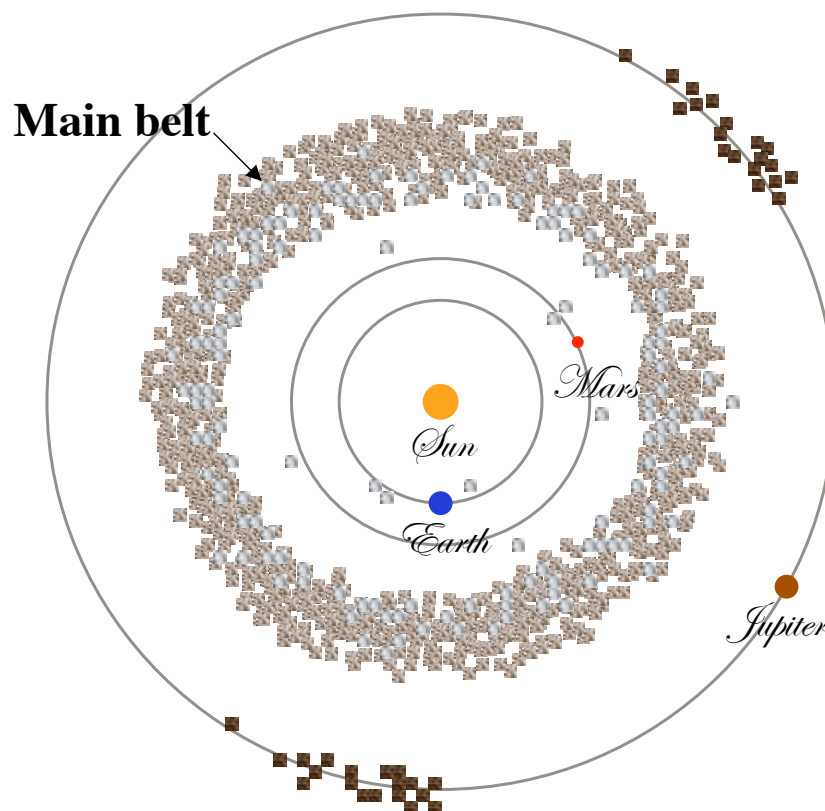
ここでは温度曲線を描く事を考える．一次元シート系は運動が解析的に記述できるが，ここでは境界条件の困難のために，数値的に運動方程式を解く．ハミルトニアンは運動量変数と座標変数が分離可能であるため，陽的な symplectic integrator が使用可能である [20]．そこで，symplectic integrator を使用してミクロカノニカル分布でのシミュレーションを行い，温度曲線を描く事を考える．ここでシートの枚数は $N = 100$ とした．

周期的境界条件を与えたため，相転移点付近のエネルギーでは揺らぎが非常に大きく，運動エネルギーのばらつきが大きい．図 15 はシミュレーションの結果から得られた温度曲線である．計算時間は Pentium4 3GHz の計算機で 10 日間ほどである．これだけの時間をかけて長時間のシミュレーションを行っても，運動エネルギーの揺らぎは大きく，相転移点と思われる付近では揺らぎが全体の 10 % 程度になってしまう．このため，相転移点を定める事や，相転移が一次か二次かを判別する事，比熱の変化を見極める事が出来ない．

一方，我々が開発した逐次近似の方法で温度曲線を描く．図 16 は逐次近似の方法で求めたもので，シミュレーションを行った計算機と同等の計算機で，30 分以下で描く事が出来た．温度の誤差は 10^{-5} 以下である．この解析から，周期的境界条件付きの一次元シートモデルでは相転移点が $U \simeq 1.1$ 付近に存在し，二次相転移を起こす事がわかった．

メインベルト微小惑星のサイズ頻度分布

Size Distribution of Small Main-Belt Asteroids as a Source of Near-Earth Asteroids



吉田二美・中村士

Fumi Yoshida (yoshdafm@cc.nao.ac.jp)

国立天文台

Abstract

It has been proved dynamically that Near-Earth Asteroids (NEAs) originate from small members of the Main-Belt Asteroids (MBAs). However, this has not been confirmed yet observationally, because of the faintness of the source objects of NEAs. So, we used one of largest telescopes: the 8.2m Subaru Telescope and a wide field CCD camera: the Suprime-Cam, then we detected a large number of the small MBAs having the same size-range with NEA population. In this paper, under the hypothesis that the physical properties of NEAs should reflect those of the source objects, we compared directly the physical properties (taxonomic type and size distribution) between the NEAs and small MBAs.

Our observations was performed in 2001 October 21 (UT) with the R- and B-bands, the limiting magnitude was ~ 24.5 mag with the both bands. About 1000 MBAs were detected with the absolute magnitude (H) range of $13.6 < H < 23.0$. We divided the detected asteroids into two groups, S- and C- type groups based on the B-R color of each asteroid.

We found that the ratio of S- to C-type in the surface density of MBAs varies from 3:2 in the inner-belt, 3:7 in the middle-belt, to 1:4 in the outer-belt. Basically the C-type asteroids dominated in the main-belt. We also found that the size distributions of the S- and C-type asteroids are similar with each other at the faint end: $D < 1$ km, their Cumulative Size Distribution (CSD) slopes (b) (i.e. $N(> D) \propto D^{-b}$) were obtained as: $b \sim 1.3$. While the size distributions of larger asteroids ($D > 1$ km) seem to be different: the b s were 1.8 for the S-type and 1.3 for the C-type, respectively. Considering the large fraction of S-type asteroids in the NEA population comparing with the MBA population (e.g. Binzel et al. 2002), the source of NEA population should be the inner-belt asteroids because of the large fraction of S-type asteroids in there. There is an inconsistency on the size distributions between the NEAs population and S-type MBAs in the inner-belt. There must be some selection mechanisms on the transportation phase from the main-belt to near Earth region (e.g. Yarkovsky effect).

Our data on small MBAs can be the base in the study on a quantitative evaluation of the dynamical evolution of NEAs.

1. Introduction

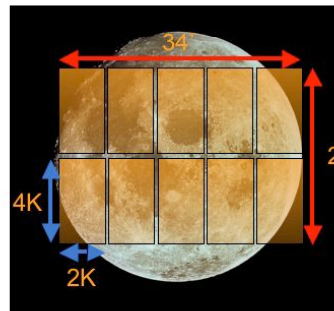
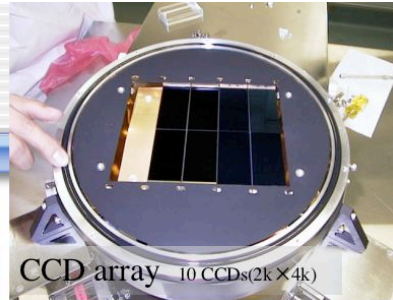
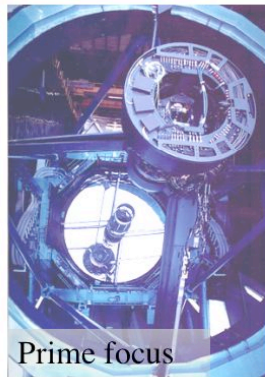
So far about 3000 NEAs have been discovered by eager surveys. The physical properties of NEAs have been revealed gradually, for examples, (1) the average size of NEAs are remarkably smaller than that of MBAs ; (2) the S-type asteroids dominate in NEA population comparing with MBA population, even after applying observational bias-correction (Binzel et al. 2002, Stuart and Binzel 2004); (3) the slope index (b) of the Cumulative Size Distribution (hereafter CSD) ($N(>D) \propto D^{-b}$) of NEAs is 1.95 at the range of $14 < H < 18.5$ (Stuart 2001) or 1.75 at the range of $15 < H < 22$ (Bottke et al. 2000)); (4) there are several very fast rotators in NEAs group. It has been predicted by several theoretical studies that the main source of NEAs seems to be small MBAs. However, it has not been confirmed observationally yet, because the small MBAs are very faint and past asteroid surveys with the small or middle class telescopes have not reached to the small MBAs population which has the same size-range with that of NEAs population. However, the 8.2 m Subaru Telescope which equipped with the wide field CCD camera: the Suprime-Cam are now available. This observation system allows us to detect a large number of small asteroids in the main-belt in a single wide field of view and examine the physical properties of the huge number of asteroids at the same time. This paper is a first one to investigate the source of NEAs by direct detection of the NEAs-sized MBAs. Since the taxonomic type determination of each asteroid is important to estimate the asteroid size, we measured the B-R color of each asteroid. Although the strict classification of asteroids into several taxonomic types is impossible by only their B-R color as you will see in Fig.5, we can divide roughly asteroids into two groups by the B-R: i.e. S- and C-types which they are main components of MBAs. If the main source of NEA population is truly the small MBA population, the physical properties (e.g. taxonomic type and size distribution) should be similar with each other under the assumption that NEAs have not been undergoing any physical or chemical evolutions during the transportation from the main-belt to near Earth region. Under this assumption, we compared the size and taxonomic distributions of NEAs with those of our detected asteroids.

2. Observations and Data Reduction

Subaru telescope + Suprime-Cam

Subaru Prime Focus Camera "Suprime-Cam"

8K×10K
mosaic CCD camera



Suprime-Cam covers a very wide field of view ($\sim 0.25 \text{ deg}^2$)

Our observation was carried out on 2001 October 21 (UT). We used the 8.2 m Subaru telescope at atop of Mauna Kea in Hawaii, which was equipped with the Suprime-Cam to the primefocus. Image reduction was performed using the standard method with IRAF. First, the average value of the overscan region of each CCD was subtracted from each CCD image data. Second, the images of each band were Dflat-fielded by dividing them by a median dome flat at each band. Next we made the composition images of each field by using three images to detect moving objects: i.e. the B-band image was

Observations

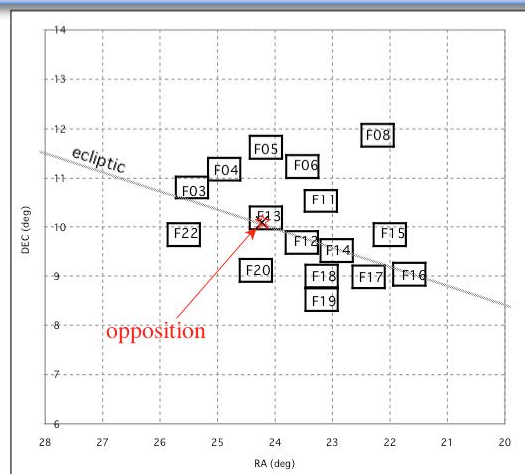
Date: 2001 October 21

Survey area : $\sim 4 \text{ deg}^2$

Near the opposition

Limiting magnitude:
 $R \sim 24.5 \text{ mag}$ for MBAs

B-, R-band for S- and C-type classification



added to the first R-band image and then the second R-band image was subtracted from it. After this procedure, moving objects appear along a line as a trio of white-white-black dots on the combined images (see Fig. 1). With careful eye-inspection for all the composite images, we found 1838 moving objects in the 16 fields (table 1). After we detected the moving objects, we measured their motion and brightness by using IRAF APPHOT package on the single image. For the measured magnitude of each moving object, a correction of the atmospheric extinction was applied by using the Landolt standard stars. And also a correction of chip-by-chip sensitivity difference was done by comparing counts of the sky background brightness of the object image to 10 ccd chips.

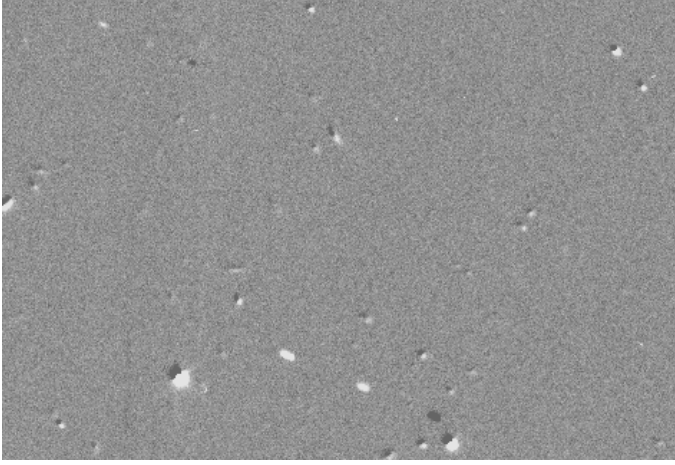


Fig. 1. Moving objects on the combined image. One can see two moving objects in this image (one object is at the upper left and another one is at the bottom of middle). The stars slightly shifted on the combined images because of the error of the telescope pointing. This image is a part of one CCD image, its field of view is 1.5×1 square arcminutes.

Table 1 Observational log and the detection number of moving objects

Field	No.	Filter	UT-start	Airmass	C C D I D										total
					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
F03	1	R	13:00:21.1	1.386	9	11	8	9	12	20	13	15	14	15	126
F03	2	B	13:20:32.8	1.511											
F03	3	R	13:41:17.0	1.679											
F04	1	R	12:56:24.1	1.375	9	7	10	21	16	13	9	15	13	9	122
F04	2	B	13:16:36.2	1.496											
F04	3	R	13:37:24.6	1.660											
F05	1	R	12:04:54.3	1.177	9	23	9	10	5	13	14	12	10	13	118
F05	2	B	12:24:49.1	1.244											
F05	3	R	12:44:41.9	1.327											
F06	1	R	11:56:47.0	1.163	11	17	14	15	8	17	12	16	10	12	132
F06	2	B	12:17:00.3	1.226											
F06	3	R	12:37:01.4	1.306											
F08	1	R	08:47:17.0	1.045	10	5	7	10	11	14	11	13	8	8	97
F08	2	B	09:07:32.5	1.026											
F08	3	R	09:27:20.1	1.014											
F11	1	R	11:13:37.0	1.075	13	10	8	13	9	8	9	8	9	14	101
F11	2	B	11:33:39.9	1.112											
F11	3	R	11:52:50.2	1.158											
F12	1	R	12:00:53.4	1.181	12	19	18	8	16	12	12	11	12	7	127
F12	2	B	12:20:51.2	1.248											
F12	3	R	12:40:54.0	1.333											
F13	1	R	12:08:51.3	1.196	16	13	19	13	13	11	11	12	13	12	133
F13	2	B	12:28:49.9	1.267											
F13	3	R	12:48:34.2	1.356											
F14	1	R	11:01:43.6	1.062	9	12	13	16	7	7	11	15	11	14	115
F14	2	B	11:22:01.9	1.095											
F14	3	R	11:41:25.9	1.136											
					total										
					158	186	186	201	166	215	175	206	171	174	1838

In order to estimate the detectable limiting magnitude of MBAs at the each observing field, we used artificial objects which mimic the image of the actual inner-belt MBAs. At first, we made 80 artificial object trails with offset by magnitude difference of 0.2 mag by using the IRAF MKOBJECTS package and then put them on the combined image which we used to detect moving objects. We detected the artificial objects by eye-inspection, then we counted the number of objects detected at each magnitude. We defined the 90 %-detection-magnitude of the lowest detection efficiency as a limiting magnitude in this survey. The MBAs move with the rate of 1.17, 1.04, and 0.92 arcsec during the exposure (2 minutes) at $a=2.6$ AU, 3.0 AU, and 3.5 AU, respectively. The mean seeing size on our observing night was ~ 0.8 arcsec. Trailing loss effect was explored by the different length of the artificial trails.

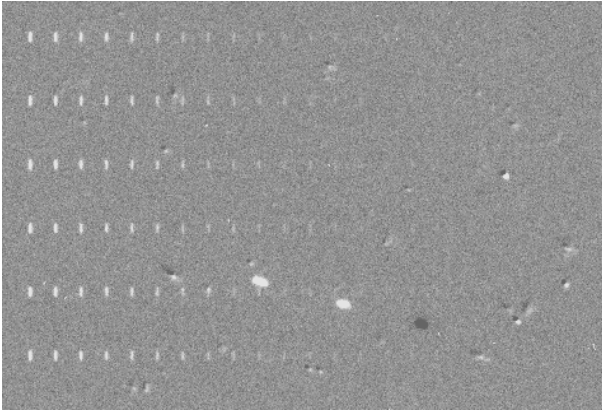


Fig. 2. Artificial trails on the combined image.

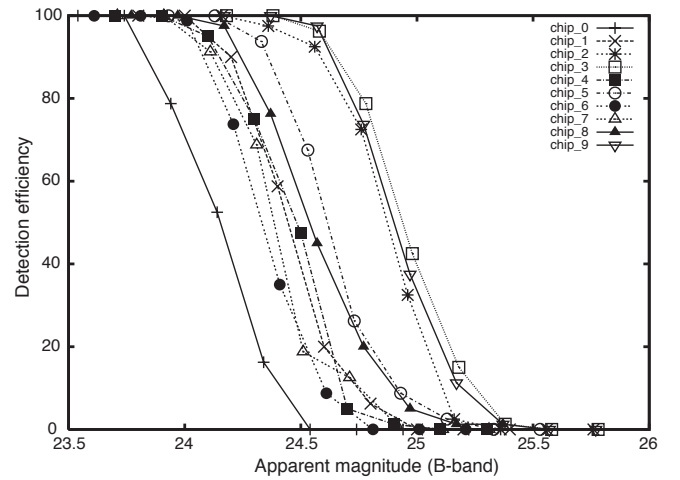


Fig. 3. Detection efficiency of the artificial trails

Table 2 Limiting magnitude for MBAs in our survey

Region of main-belt	Apparent magnitude		Absolute* magnitude	Diameter (km)*	
	R-band	B-band		S-type	C-type
Inner ($2.0 \leq a(\text{AU}) < 2.6$)	23.90	23.85	21.25	0.16	0.32
Middle ($2.6 \leq a(\text{AU}) < 3.0$)	24.05	24.08	20.61	0.21	0.43
Outer ($3.0 \leq a(\text{AU}) < 3.5$)	24.21	24.25	19.95	0.29	0.58

*We calculated the absolute magnitude H at V -band by using the mean $V-R$ value of the known S -type and C -type asteroids.

**We converted from the absolute magnitude to the diameter by using the mean $V-R$ value and the mean albedo each S - and C -type group, respectively. See text for more detail in subsection 3.3.

3. Identification of MBAs

3.1. Estimation of Semi-major axis and Inclination for Each Moving Object

The apparent velocities of 1734 objects among 1838 detected objects were measured.

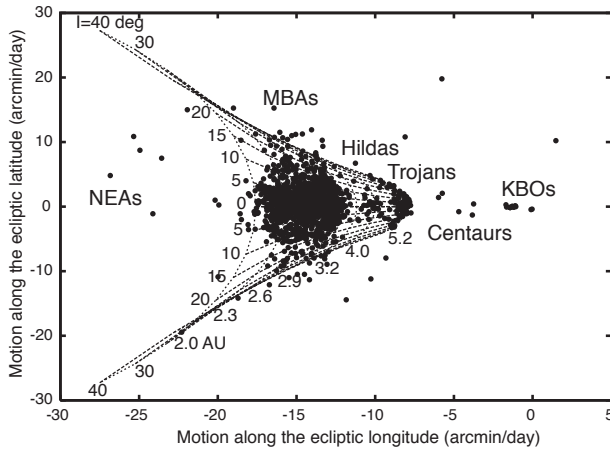


Fig. 4. Apparent motions of moving objects. One can see the moving objects divided into several groups of the various populations.

Lines in Fig. 4 show the motion of the moving object whose the orbital eccentricity (e) are zero at various semi-major axis (a) and inclination (I) at opposition. We chose 1001 objects within $a = 2.0$ - 3.5 AU and $I = \pm 40$ degrees as MBAs. When we detect asteroids near oppositions, we can calculate approximately the a and I of each asteroid from its apparent motion assuming its $e = 0$ by using the Bowell's equations. The a and I obtained by the equations include the errors of ~ 0.1

$$a = \frac{1}{2\gamma} \left(\gamma - 2k\lambda \pm \sqrt{|\kappa|} \right), \quad (1)$$

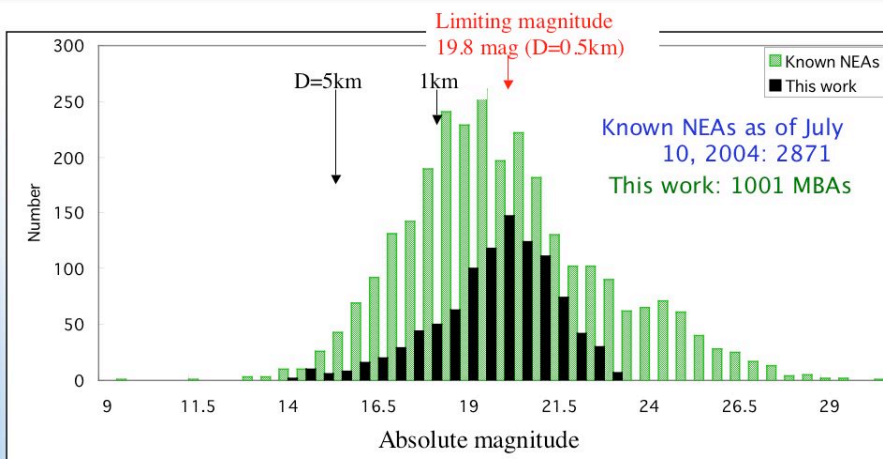
$$\tan I = \frac{|\beta|}{\lambda + \frac{k}{a-1}}, \quad (2)$$

$$\gamma = \lambda^2 + \beta^2, \quad (3)$$

$$\kappa = \gamma^2 - 4k\lambda\gamma - 4k^2\beta^2. \quad (4)$$

AU and $1 \sim 5$ degrees, respectively, because the e is actually not zero ($0.1 \sim 0.2$) for real asteroids (Bowell et al. 1990; Nakamura & Yoshida, 2002; Yoshida et al. 2003). The error on the a would bring an uncertainty of $\sim 20\%$ to asteroid diameter.

Absolute magnitude distribution



$$H = V - 5 \log \{ a \times (a - 1) \}$$

← The absolute magnitude distribution of detected asteroids by Subaru.

3.2. Estimation of Taxonomic Type

The S- and C-type asteroids seem to be classified by their B-R and/or V-I colors based on the known MBAs data (PDS Asteroid DataArchive, <http://www.psi.edu/pds/archive/ecas.html>, <http://www.psi.edu/pds/archive/tax.html>). As we mentioned in the introduction, since this survey is related to the origin of NEAs, it is important to distinguish between the S- and C-type asteroids in order to investigate the source region of the S-type asteroids among the NEAs population. Moreover, the diameter of the C-type asteroid with a certain brightness

is two times larger than that of the S-type one with the same brightness, because of the difference of their albedos. Thus, for estimating accurate asteroid size, the S- and C-type asteroids must be divided.

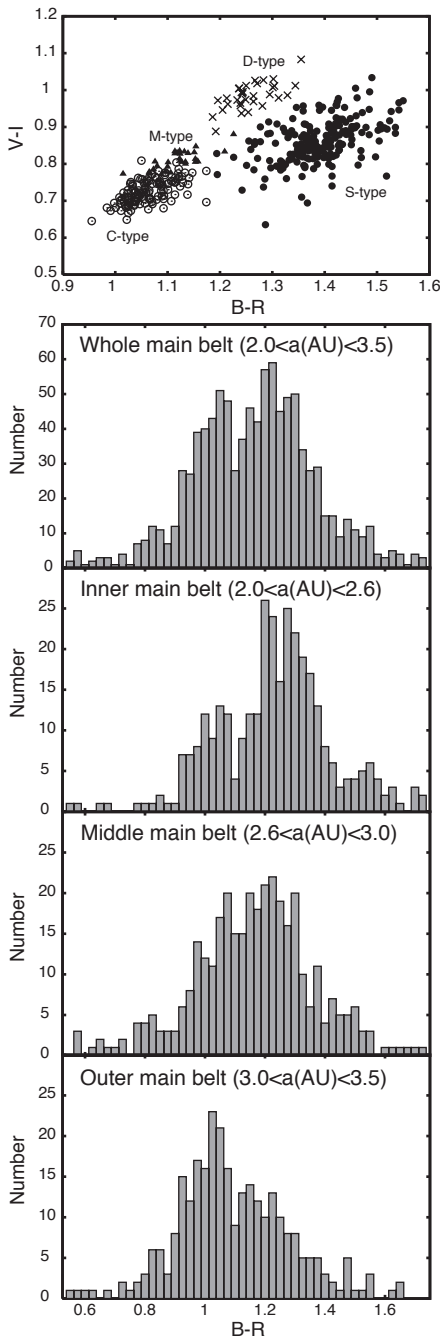


Fig. 5. Colors of know asteroids (the top panel) and the B-R color of asteroids detected in this survey (the last four panels). In the top panel, one can see that the S, C, D, and M-types are splitted on the B-R vs. V-I diagram. The last four panels show the histograms of the B-R colors of our asteroids for different main-belt regions.

3.3. Estimation of Asteroid Size

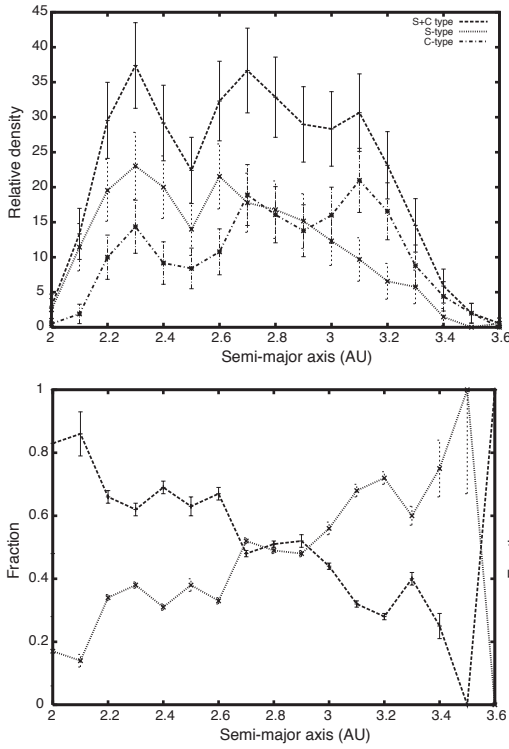
The asteroid diameter (D) is calculated based on its albedo (p) and its H by the following equation.

$$\log D = 3.1295 - 0.5 \log p - 0.2 H \quad (5)$$

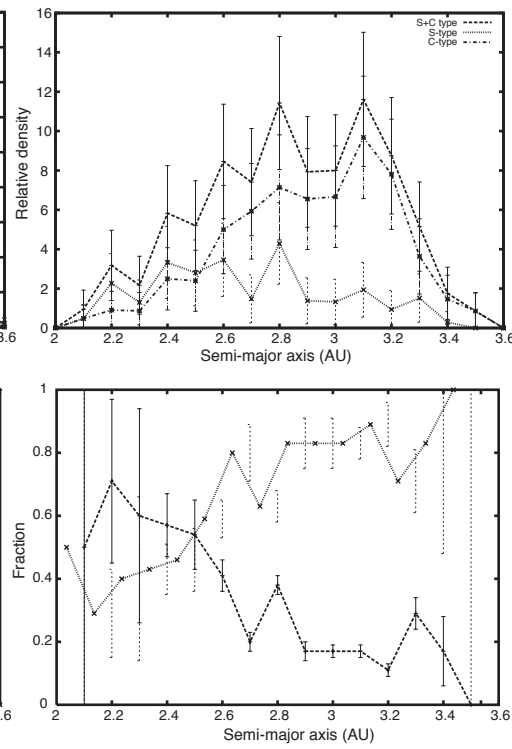
We used the mean albedos obtained from the asteroids database "Small Bodies Node" (PDS Asteroid Data Archive, IRAS-A-FPA-3-RDR-IMPS-V4.0, <http://www.psi.edu/pds/archive/albedo.html>) for each S- and C-type group, namely, $p = 0.21$ for S-type asteroids and $p = 0.06$ for C-type asteroids, respectively. After we calculated the diameter of 1001 MBAs, it turned out that more than 80 % MBAs which we detected in this survey are smaller than 1 km in diameter.

4. Heliocentric Distribution of S- and C-type MBAs

(a)



(c)



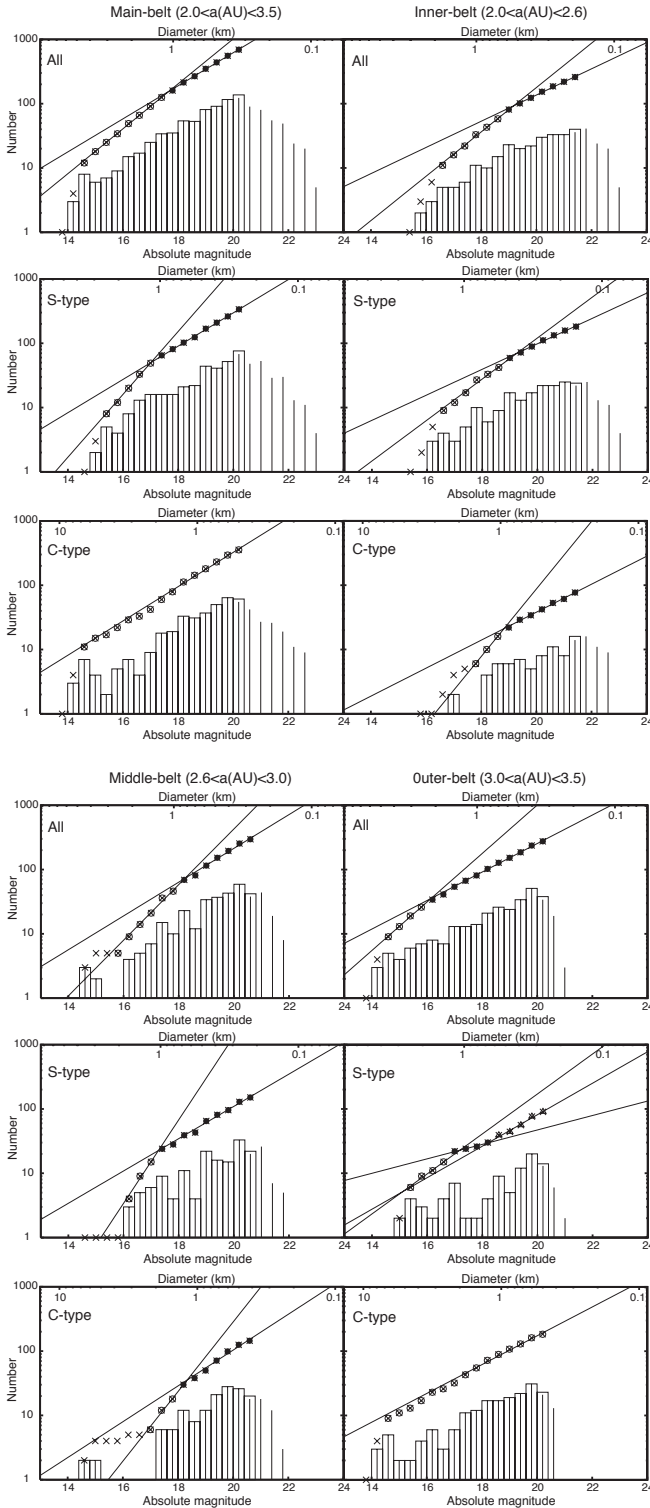
(b)

(d)

Fig. 6 (a) and (b) show the observed surface density of asteroids and the fraction of each type to the total surface density as a function of heliocentric distance for 1001 MBAs. (c) and (d) are bias-corrected surface density and the fraction of both types, respectively.

One can see the depletion of asteroids around $a = 2.5$ AU and 2.8-3.0 AU in Fig. 6(a). These region are corresponding to the mean motion resonances (3:1, 5:2 or 7:3) with Jupiter. The S- and C-type asteroids are indicated by solid line and dot line, respectively. The distributions of two types asteroids are obviously different: the S-type asteroids dominate in the inner main-belt, the C-type asteroids dominate in the outer main-belt. Fig. 6 (a) and (b) include the observational bias so that we could not detect the faint asteroids in the outer region of main-belt and much more S-type asteroids are discovered at any limiting magnitude than C-type are, because of their high albedo. Taking account of such observational bias, we re-plotted these figures in Fig. 6 (c) and (d); (c): surface density and (d): fraction of each type by using the asteroids larger than 0.6 km which seems to be completed in our survey.

5. Size Distribution of S- and C-type MBAs



We investigated the size distributions of our MBAs for each type in the different main-belt regions: i.e. the whole-belt ($2.0 < a(\text{AU}) < 3.5$), the inner-belt ($2.0 < a < 2.6$), the middle-belt ($2.6 < a < 3.0$), and the outer-belt ($3.0 < a < 3.5$) (Fig.7). We noticed that for small asteroids ($D < 1$ km), the CSD-slopes index of each type are similar with each other in any regions (the slopes were listed in table 3). Their slopes are 1.0-1.2 in the inner-belt and the outer belt. In the middle-belt, the slopes (1.3-1.4) are slightly larger than others. We reported before that the size distribution of asteroids may have differences between the inner-belt and outer-belt regions in our previous survey (Yoshida et al. 2003) as well as previous studies (e.g., Jedicke & Metcalfe 1998). However the Sloan Digital Sky Survey (SDSS) did not find any evidence that the size distribution varies with the heliocentric distance (Ivezić et al. 2001). Since all previous studies, except SDSS, assumed the mean albedo of asteroids because of the lack of their color information, despite significant differences in the mean albedo and heliocentric distribution on the major two different groups in the main-belt, we must think about the possibility that the mean albedo assumption brought apparent difference in the cumulative size distribution in the main-belt.

Fig.7 Size distributions of MBAs in the different regions in the main-belt.

In this new survey, we distinguished between S- and C-type, then we did not find that there is a clear difference of size distributions. However, Cheng (2004) mentioned that MBAs larger than 5 km in diameter are remnants which have survived over the collisional evolution in the main-belt until now. It is likely that the size distribution of planetesimals varies with the heliocentric distance in early solar system. We would like to keep getting more data and then confirm the size distribution differences.

Table 3 The CSD-slopes (b) in each main-belt region and each type asteroid. The fitting regions are shown in parentheses.

Types	Whole-belt	Inner-belt	Middle-belt	Outer-belt
S and C	1.29 ± 0.02	1.02 ± 0.03	1.31 ± 0.07	1.11 ± 0.02
	(17.8-20.2 mag)	(19.0-21.4 mag)	(18.2-20.6 mag)	(16.2-20.2 mag)
	1.75 ± 0.02	1.72 ± 0.06	2.16 ± 0.18	1.89 ± 0.07
	(14.6-17.4 mag)	(16.6-18.6 mag)	(15.8-17.8 mag)	(14.6-15.8 mag)
S-type	1.29 ± 0.02	0.99 ± 0.04	1.26 ± 0.05	1.22 ± 0.09
	(17.4-20.2 mag)	(19.0-21.4 mag)	(17.4-20.6 mag)	(18.6-20.2 mag)
	2.44 ± 0.09	1.59 ± 0.12	3.25 ± 0.44	0.56 ± 0.06
	(15.4-17.0 mag)	(16.6-18.6 mag)	(16.2-17.0 mag)	(17.0-18.2 mag)
				1.55 ± 0.13
				(15.4-16.6 mag)
C-type	1.33 ± 0.03	1.09 ± 0.03	1.39 ± 0.10	1.12 ± 0.03
	(14.6-20.2 mag)	(19.0-21.4 mag)	(18.2-20.6 mag)	(14.6-20.2 mag)
		2.63 ± 0.06	2.71 ± 0.44	
		(17.8-18.6 mag)	(17.0-17.8 mag)	

6. Spatial Distribution of S- and C-type MBAs

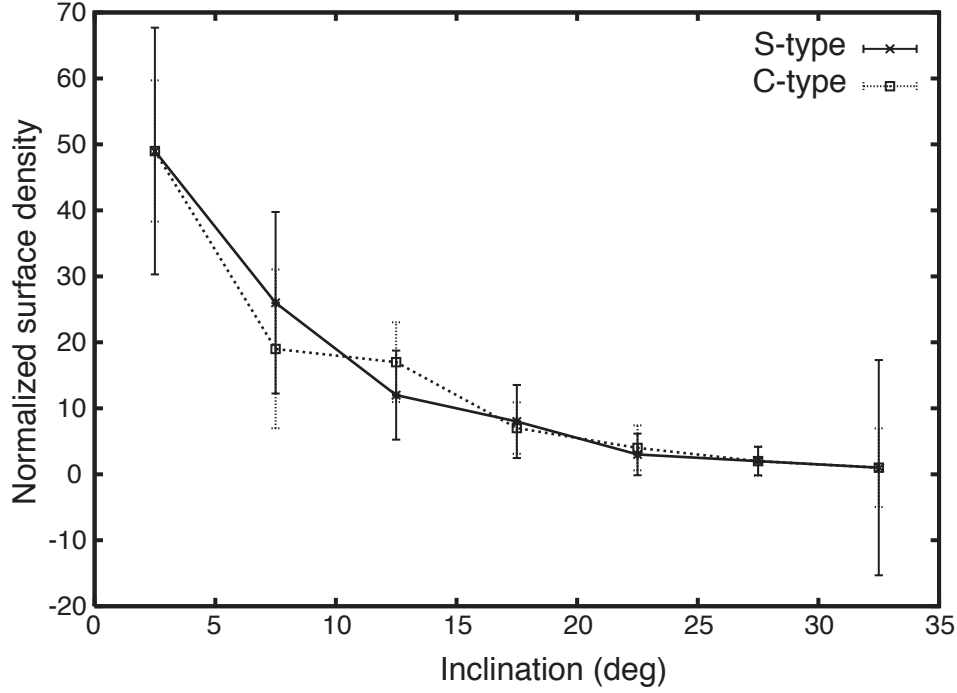


Fig. 8. The normalized surface density of the S- and C-type populations as a function of inclination.

We examined the spatial distributions along the ecliptic latitude of S- and C-type asteroids. We calculated the normalized surface density as a function of inclination as follows. At first we divided asteroids into the bins having the range of 0.2 AU in the a and 5 deg in the I , and then counted the number of asteroids in each bin, next calculated the percentage of the number of asteroids at each bin to the total number of asteroids including in the range of 0.2 AU in the a .

The solid line in Fig. 8 shows the normalized surface density of S- type population (517 asteroids) detected in the whole main-belt, the dotted line shows that of C-type population (484 asteroids). The error bars indicate the variation of the normalized surface density changing with the heliocentric distance. There is no significant difference of the distribution between S- and C-type. Asteroids of both types decrease exponentially with increasing their inclinations.

7. Summary and Discussion

The fraction of the S- to C-type asteroids from this survey varies with the heliocentric distance: for samples defined by the same absolute magnitude cutoff, the ratio of the S- to C-type asteroids changes from 4:1 at a ~ 2 AU, 1:1 at a ~ 2.8 AU, to about 3:7 at a $= 3.0$ - 3.4 AU (see figure 4 (a) (b)), for samples defined by the same size cutoff, namely for $D > 0.6$ km until which our survey is completed in the whole main-belt, the ratio of the S- to C-type asteroids is 3:2 in the inner main-belt, the ratio reverses around 2.5 AU, it becomes 1:4 in the outer main-belt (see figure 4 (c) (d)). The ratio of S- to C-type is 1:2.3 in the whole main-belt. These results are roughly consistent with the results obtained by the SDSS (Ivezić et al. 2001). Based on our estimation of size distribution of smaller MBAs ($D < 1$ km), we predict that the number fraction of the S- to C-type asteroids (1:2.3) would be invariable until much smaller MBAs ($D \sim 0.1$ km).

We estimated the size distribution in the entire main-belt for S-type population down to $D = 0.29$ km and for C-type population down to $D = 0.58$ km. The CSD-slopes of the asteroids smaller than 1 km in diameter are very close to ~ 1.3 for both types. This result is consistent with that of SDSS found the CSD-slope (1.3) for asteroids with the size range of $0.4 < D(\text{km}) < 5$. However, for S-type asteroids larger than 1 km in diameter, the SDSS and our survey have an inconsistency, namely our CSD-slope is close to 2, the SDSS's CSD-slope is 1.2 (Ivezić et al. 2001). About 80 % asteroids detected in our survey are smaller than 1 km in diameter. The small sampling number of large S-type ($D > 1$ km) in our survey might induce the inconsistency.

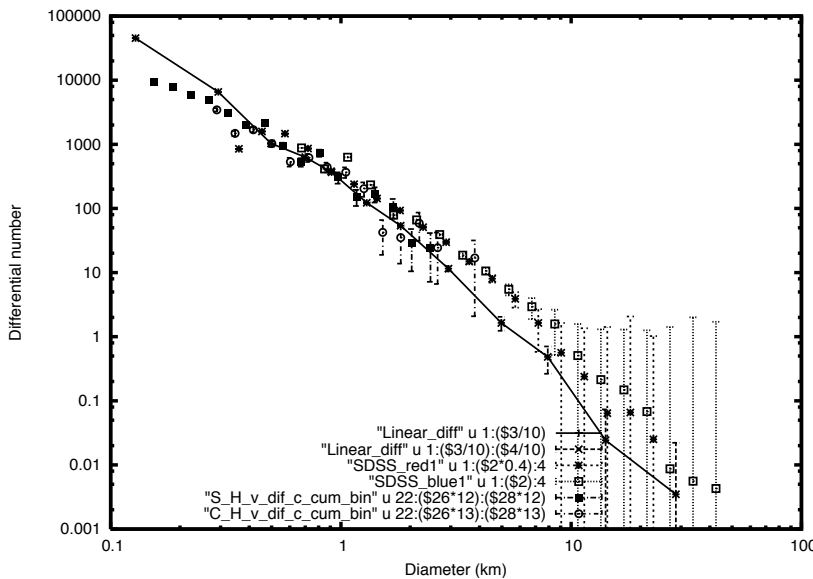


Fig. 9. Size distributions of LINEAR, SDSS, and our asteroid survey. The solid line shows the size distribution of NEAs from Stuart and Binzel (2004). The + and □ show the size distributions of the SDSS red (S-type) and SDSS blue (C-type), respectively. The ■ and ○ show the size distributions of our S-type and C-type asteroids in the inner-belt, respectively.

We compared our size distributions for both types with that of NEAs obtained by Stuart and Binzel (2004) and those of SDSS (Ivezić et al. 2001) in Fig.9. The solid line shows the differential size distribution of NEAs. The + and □ are the differential size distribution of SDSS S-type and C-type, ■ and ○ are our Subaru S-type and C-type asteroids in the inner-belt, respectively. Our survey extended the faint end of the SDSS down to 0.16 km in the inner-belt region. The slopes of the SDSS and ours are similar with each other. However, the shape of size distribution of NEAs seems to be different from those of the SDSS and ours in any size-ranges. Based on the excess of S-type asteroids in the NEAs population obtained from observations, if it is truly de-biased data, the large fraction of the S-type asteroids in the inner-belt obtained from our survey (Fig.6 (d)) must be an evidence that the NEAs population originate from the inner-belt region. However, when we compared the size distribution of NEAs with that of our S-type asteroids of the inner-belt and those of the SDSS, they are different from one another. This means that there must be some selection mechanisms for the transportation phase from the main-belt to near Earth region (e.g. Yarkovsky effect).

Our data of the small MBAs can be the base on the study on the dynamical evolution of NEAs. Especially, it would be a good data for estimating quantitatively the contribution of the Yarkovsky effect into the dynamical evolution of NEAs.

At last, we show Fig. 10 including an interesting speculation about early Solar System. Dr. T. Ito will present several interesting evidence and speculation about this figure in his talk.

We thanks Z. Ivezić, J. Stuart and B. G. Strom for providing their data.

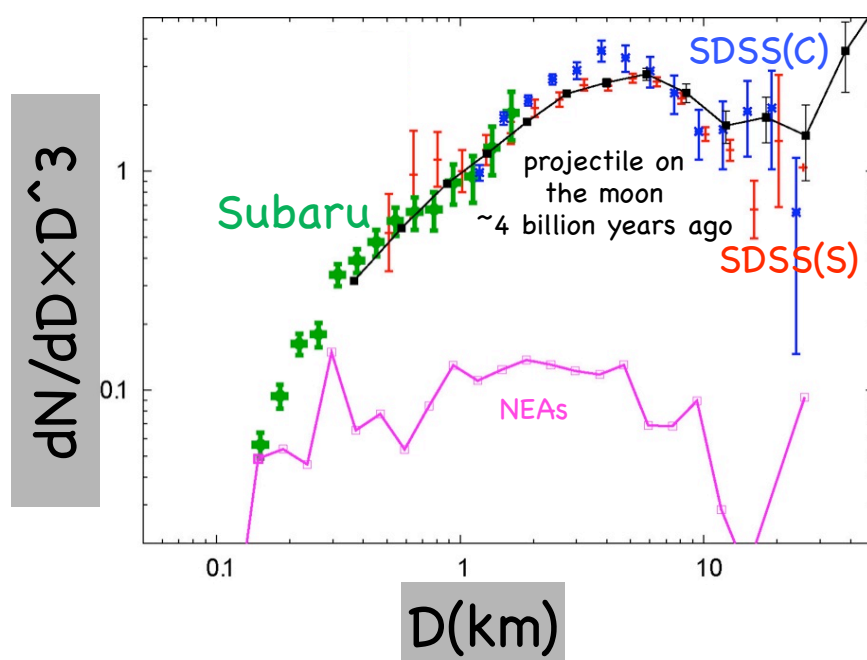


Fig.10. The current size distributions of MBAs (Subaru and SDSS) and NEAs comparing with that of the projectile which impacted on the moon ~ 4 billion years ago. The size distribution of MBAs does not change at all during 4 billion years until now ?

References

- Binzel, R.P., Rivkin, A.S., Stuart, J.S., Harris, A.W., Bus S.J., and Burbine T.H. Observed spectral properties of near-Earth objects: results for population distribution, source regions, and space weathering processes. *Icarus* 170, 259-294, 2004.
- Bottke, Jr., W.F., Jedicke, R., Morbidelli, A., Petit, J.M., and Gladman, B. Understanding the distribution of Near-Earth asteroids. *Science* 288, 2190-2194, 2000.
- Bottke, Jr., W.F., Morbidelli, A., Jedicke, R., Petit, J.M., Levison, H.F., Michel P., and Metcalfe, T.S. Debaised orbital and absolute magnitude distribution of near-Earth objects. *Icarus* 156, 399-433, 2002.
- Bowell, E., Skiff, B.A., Wasserman, L.H., and Russell, K.S., in *Asteroids, Comets, Meteors* (Proc. of ACM 89 Meeting), ed. C. I. Lagerkvist, H. Rickman, & B. A. Lindblad (Uppsala: Uppsala University). *Orbital Information from Asteroid Motion Vectors*. 19-24, 1990.
- Cheng A.F. Collisional evolution of the asteroid belt. *Icarus* 169, 357-372, 2004.
- Davis D.R. On the size distributions of asteroid taxonomic classes: the collisional interpretation. in *Asteroids, Comets, Meteors* (Proc. of ACM 89 Meeting), ed. C. I. Lagerkvist, H. Rickman, & B. A. Lindblad (Uppsala: Uppsala University). *Orbital Information from Asteroid Motion Vectors*. 39-44, 1990.
- Ivezić, Z., Tabachnik, S., Rafikov, R., Lupton, R.H., Quinn, T., Hammergren, M., Eyer, L., Chu, J., Armstrong, J.C., Fan, X., Finlator, K., Geballe, T.R., Gunn, J.E., Hennessy, G.S., Knapp, G.R., Leggett, S.K., Munn, J.A., Pier, J.R., Rockosi, C.M., Schneider, D.P., Strauss, M.A., Yanny, B., Brinkmann, J., Csabai, I., Hindsley, R.B., Kent, S., Lamb, D.Q., Margon, B., McKay, T.A., Smith, J.A., Waddel, P., and York D.G. (for the SDSS Collaboration) Solar system objects observed in the Sloan Digital Sky Survey commissioning data. *The Astronomical Journal* 122, 2749-2784, 2001.
- Jedicke, R., and Metcalfe T.S. The orbital and absolute magnitude distributions of main belt asteroids. *Icarus* 131, 245-260, 1998.
- Michel, P., Benz, W., and Richardson, D.C., Catastrophic disruption of preshattered parent bodies. *Icarus* 168, 420-432, 2004.
- Miyazaki, S., Komiyama, Y., Sekiguchi, M., Okamura, S., Doi, M., Furusawa, H., Hamabe, M., Imi, K., Kimura, M., Nakata, F., Okada, N., Ouchi, M., Shimasaku, K., Yagi, M., and Yasuda, N. Subaru Prime Focus Camera-Suprime-Cam. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 54, 833-853, 2002.
- Morbidelli, A., Jedicke, R., Bottke, W.F., Michel P., and Tedesco, E.F. From magnitudes to diameters: the albedo distribution of near Earth objects and the Earth collision hazard. *Icarus* 158, 329-342, 2002.
- Nakamura, T., and Yoshida, F. Statistical method for deriving spatial and size distributions of sub-km main-belt asteroids from their sky motions. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 54, 1079-1089, 2002.

Rabinowitz, D., Helin, E., Lawrence, K., and Pravdo, S. A reduced estimate of the number of kilometre-sized near-Earth asteroids. *Nature* 403, 165-166.

Stuart, J.S. A Near-Earth Asteroids population estimate from the LINEAR survey. *Science* 294, 1691-1693, 2001.

Stuart, J.S. and Binzel, R.P. Bias-corrected population, size distribution, and impact hazard for the near-Earth objects. *Icarus* 170, 295-311, 2004.

Yoshida, F., Nakamura, T., Fuse, T., Komiyama, Y., Yagi, M., Miyazaki, S., Okamura, S., Ouchi, M., Miyazaki, M. First Subaru observations of sub-km main-belt asteroids. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 53, L13-L16, 2001.

Yoshida, F., Nakamura, T., Watanabe, J., Kinoshita, D., Yamamoto, N., Fuse, T. Size and spatial distributions of sub-km main-belt asteroids. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 55, 701-715, 2003.

Yoshida, F., and Nakamura, T. Basic nature of sub-km main-belt asteroids: their size and spatial distributions. *Advances in Space Research* 33, 1543-1547, 2004.