標準写像における振動解

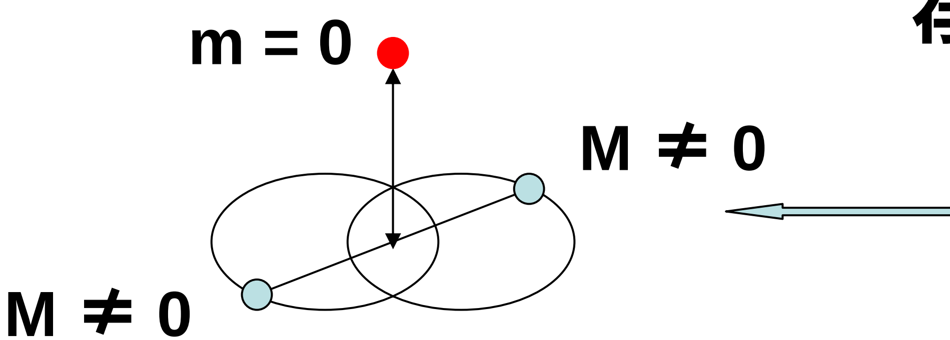
山口喜博（帝京平成大学）
谷川清隆（国立天文台）

天体力学N体力学研究会：箱根 2004年3月

1　　はじめに

1.1　　3体問題における振動解

赤：質量 m=0 (z軸上で運動する)



青：2体の重心は原点にある
両者の軌道はx－y平面上で
楕円軌道を描く

振動解

1922　Chazy

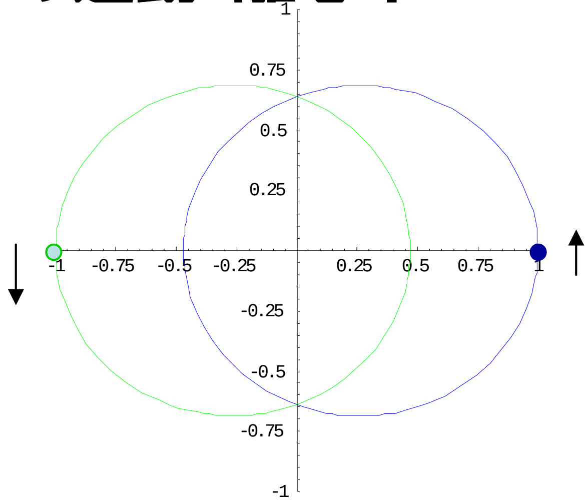
存在証明

1960　Sitnikov
(Sitnikov**問題と呼ばれる**)
1968-69　Alekseev
m ≠ 0
1973　Easton - McGehee
1973　Moser
…
1994　Xia
(Arnold**拡散と振動解**)

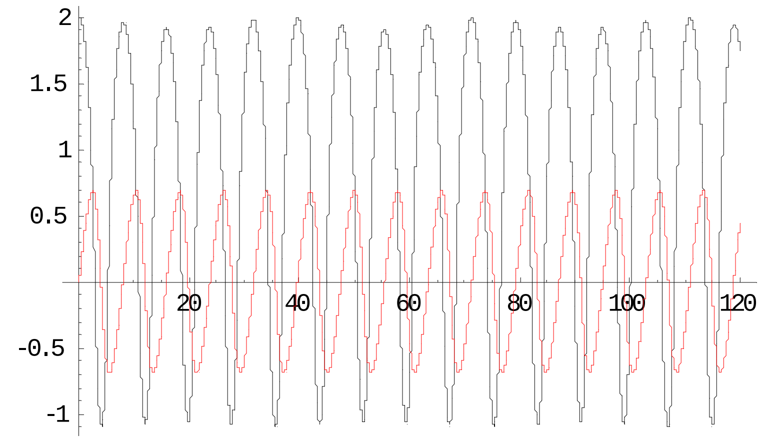
Sitnikov問題

黒：第3体のz座標、赤：青のy座標

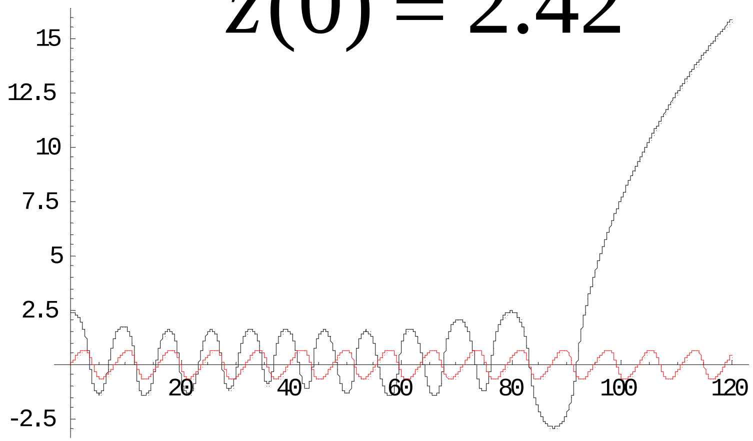
2体の運動：離心率=0.64



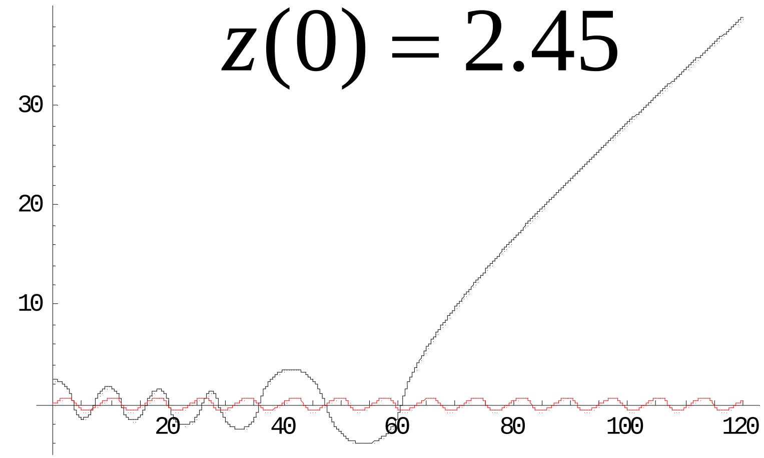
$$z(0) = 2$$



$$z(0) = 2.42$$



$$z(0) = 2.45$$



振動解の存在する系がもつ性質

時間が無限に経つと、軌道が無限遠に発散する初期点がある
　その初期点の近くに、「遠くに行くがもとにもどる周期軌道の点がある」
　両者が入れ子構造になっている

標準写像

このような構造が

加速モードが存在するときにある

→　標準写像にも「振動解」がある

1.2 円筒面上の標準写像

$$T : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{R}^1 \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{R}^1 \qquad x \in \mathrm{S}^1, y \in \mathrm{R}^1$$

$$T : \begin{cases} y_{n+1} = y_n + f(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$f(x) = a \sin x \, (a > 0)$$

不動点　サドル $P = (0,0)$

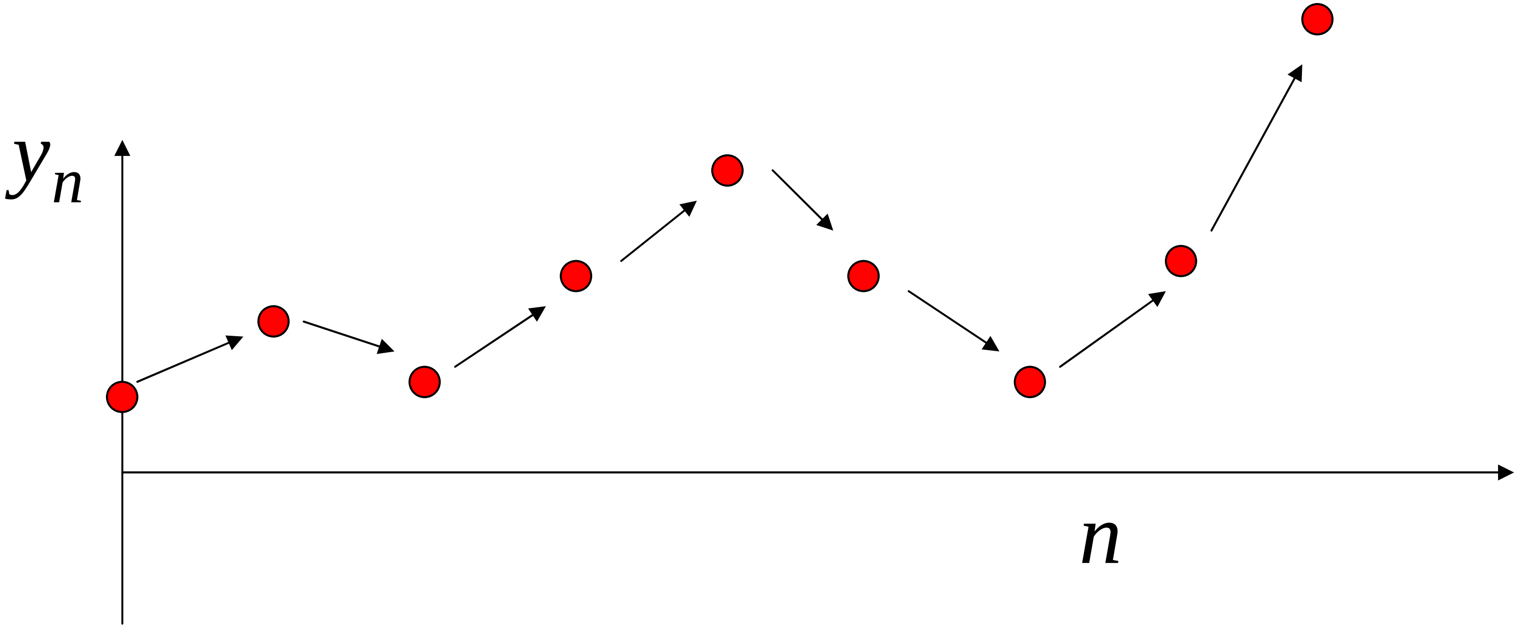
楕円点または反転型のサドル $Q = (\pi, 0)$

振動解の存在証明: $a = 2\pi$ **の場合に行う**

1.3　標準写像における振動解

$$\limsup_{n\to\infty} y_n = \infty, \liminf_{n\to\infty} y_n < \infty, y_n > 0$$

ここで考える振動解



2　準備編

2.1　2 重対称性

$$T = H \circ G = h \circ g$$

対称線　$x = 0, \pi$

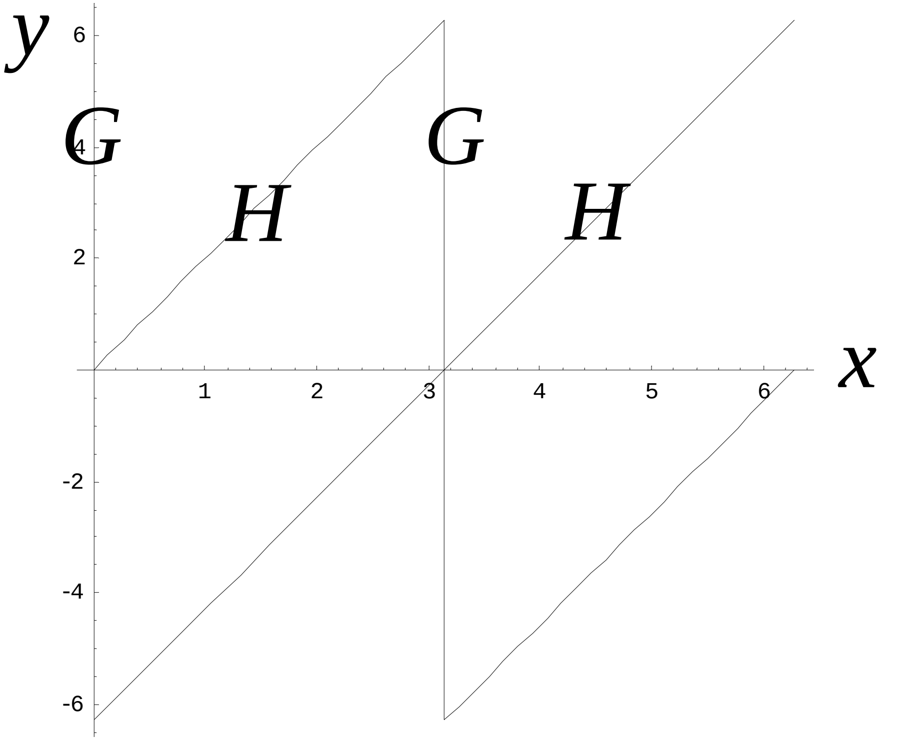
$y = 2x, 2(x - \pi)$

対合　H, G, h, g

左右の対称性

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y \end{pmatrix}$$

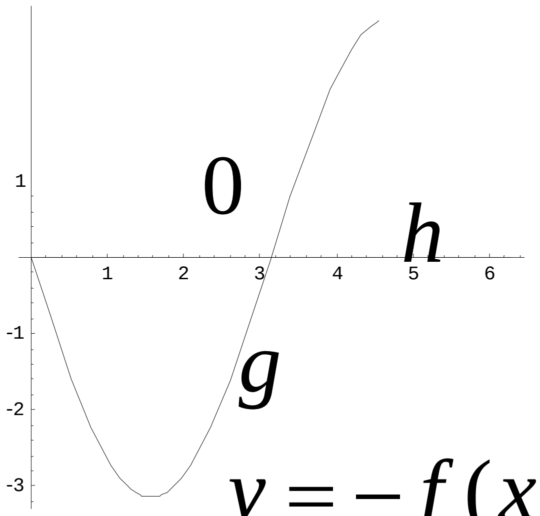
$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y + f(x) \end{pmatrix}$$



上下の対称性

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix}$$



$y = -f(x)/2$

対称線

$y = 0$

$y = -f(x)/2$

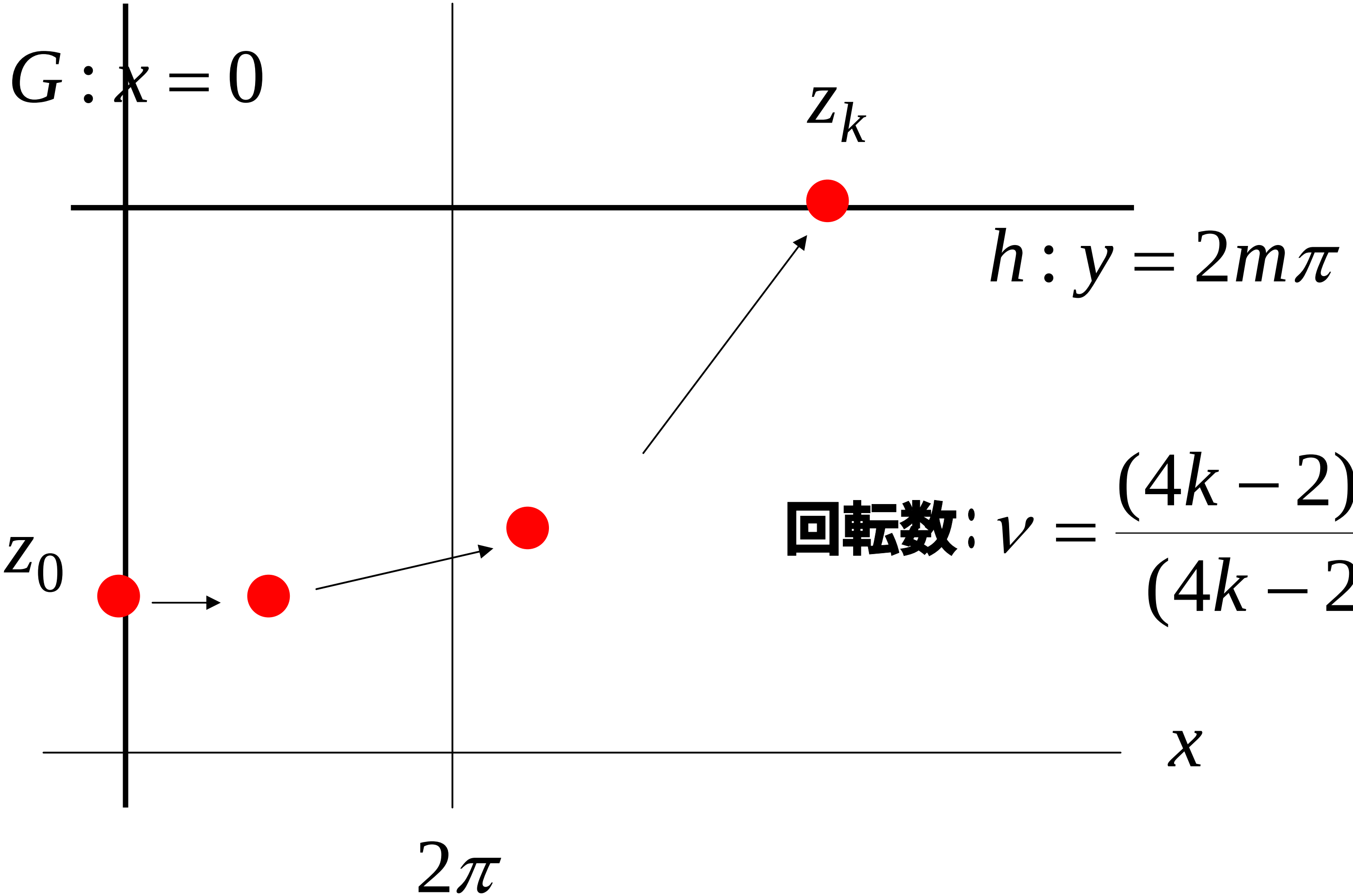
これらを y 方向に

$2n\pi$ だけ平行移動した

軸も対称線

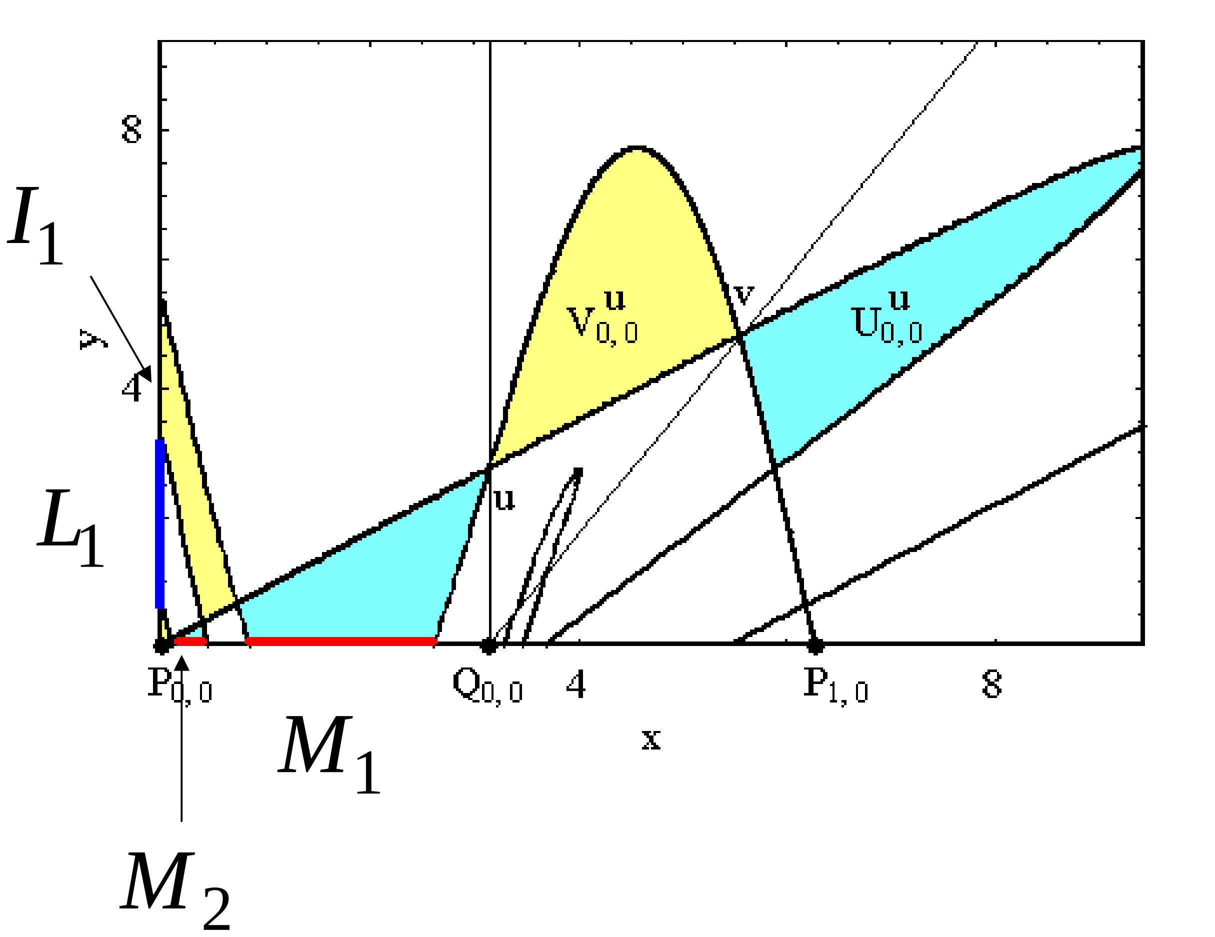
2.2 G の対称線と h の対称線上に点をもつ周期軌道

「**2重対称周期軌道**」(DRPO)



回転数: $\nu = \dfrac{(4k-2)m}{(4k-2)}$

2.3 区間の定義



2.4 加速モード

1ー加速モード

1回の写像毎に、y方向に 2π 進行する

軌道：

$$z_0 = (\pi / 2, 0) \in M_1$$

$$z_1 = (5\pi / 3, 2\pi)$$

$$z_n = (n(n+1)\pi + \pi / 2, 2n\pi)$$

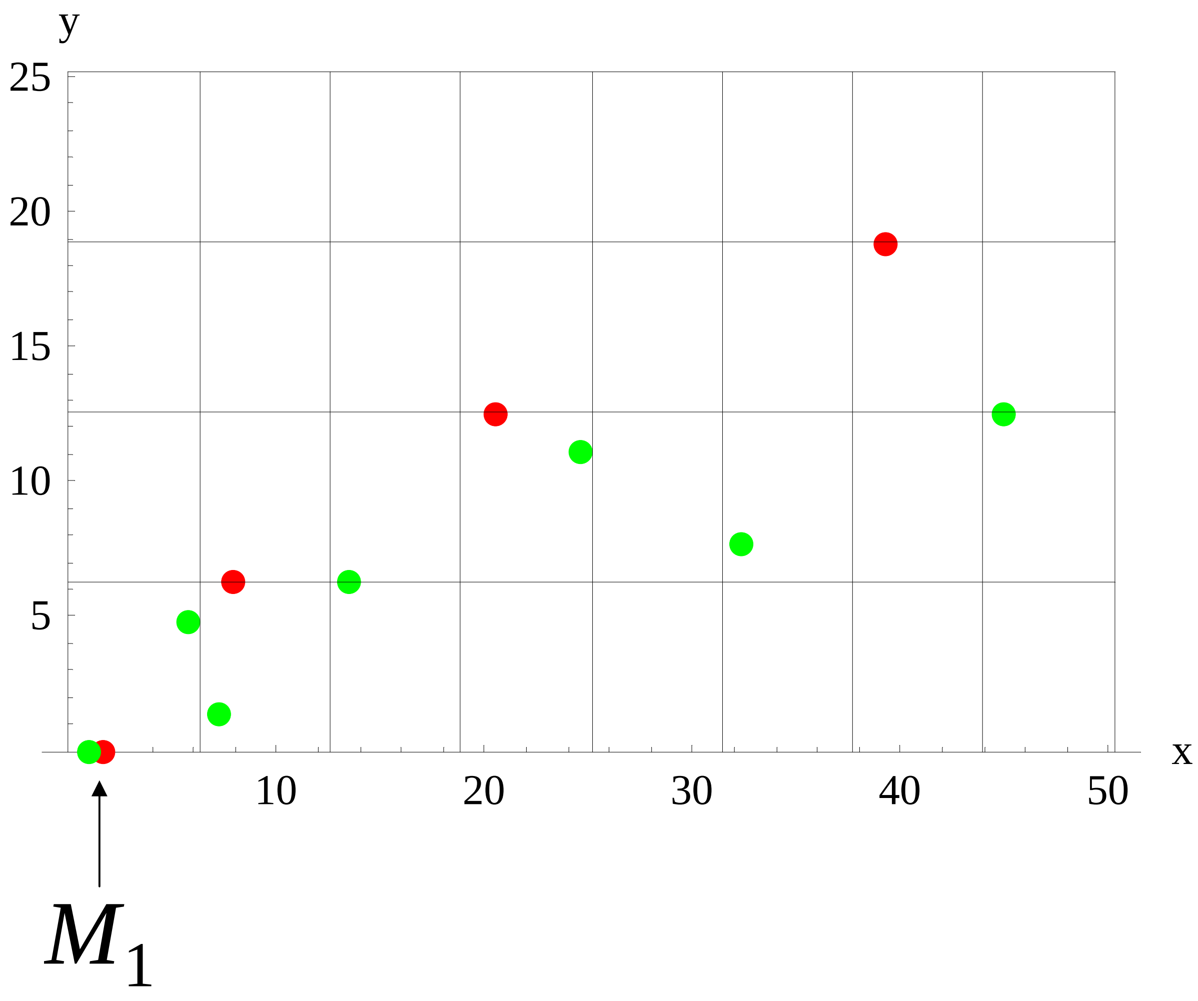
$a = 2\pi$ **：1ー加速モードが生じる臨界値**

トーラス面：不動点

加速モード：トーラス面で周期軌道

加速モードの例

赤 1^1 　 緑 3^2



2.5　加速モードとDRPOの関係

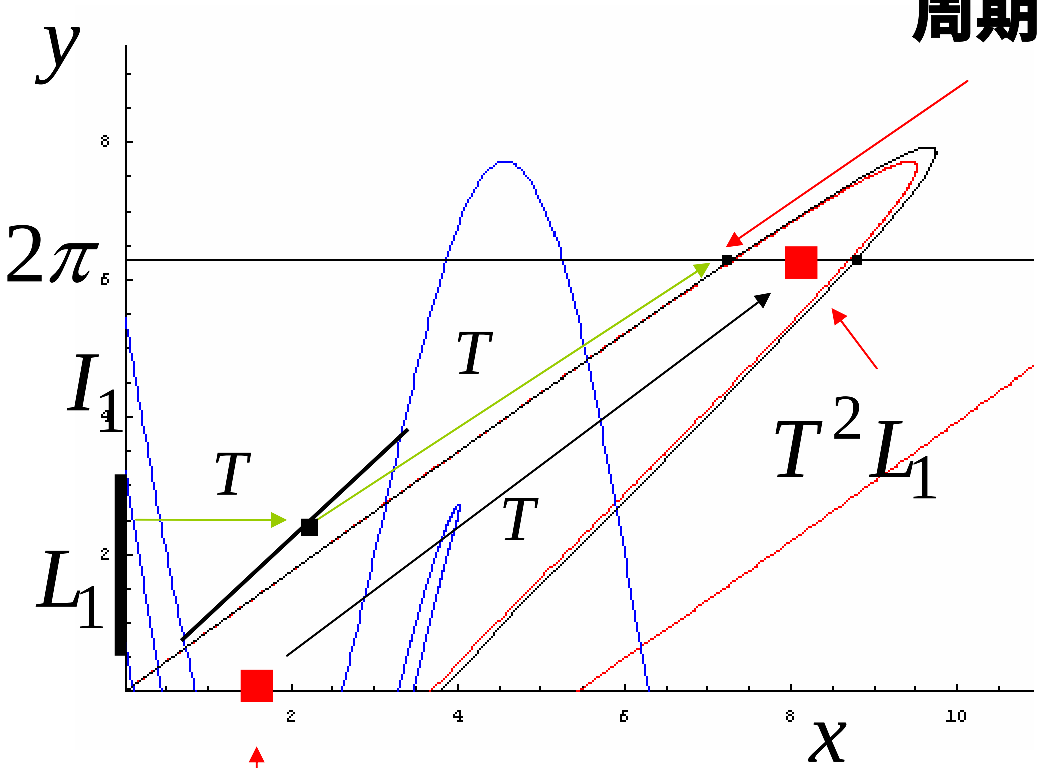
区間		区間
M_1		I_1
$1^1 - SAM$	$\Rightarrow$	$6 - DRPO$
		$10 - DRPO$
		$14 - DRPO$
		$\cdots$

左側の加速があれば、右側の2重対称周期軌道がある

G **の対称線上の区間** L_1 **より出発し**

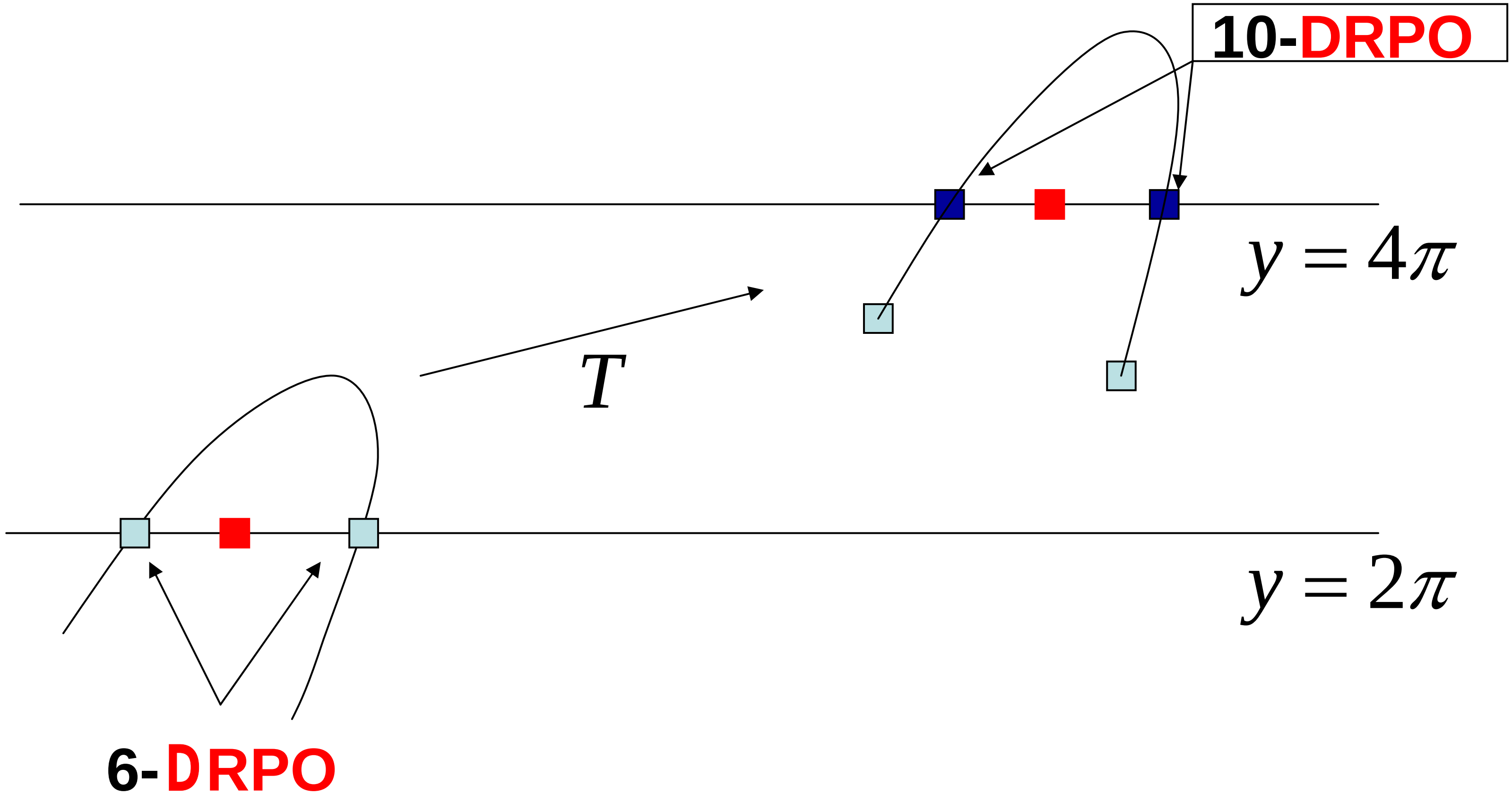
h **の対称線** $y=2\pi$ **上に点をもつ** **DRPO**

周期：6, 回転数：6/6



1ー加速モード

$a=2\pi$

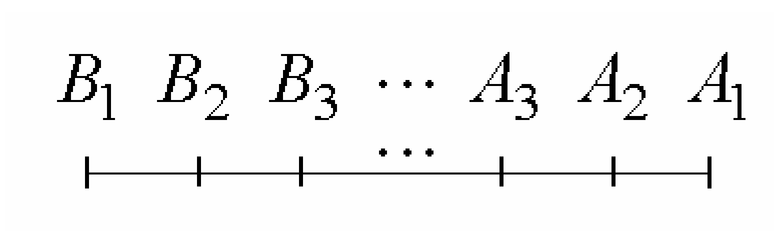


１－加速モード, 周期6, 周期１０のDRPOとの関係

1－加速モード → $(4n+2)(n \geq 1)-$DRPOがある

初期点の位置関係

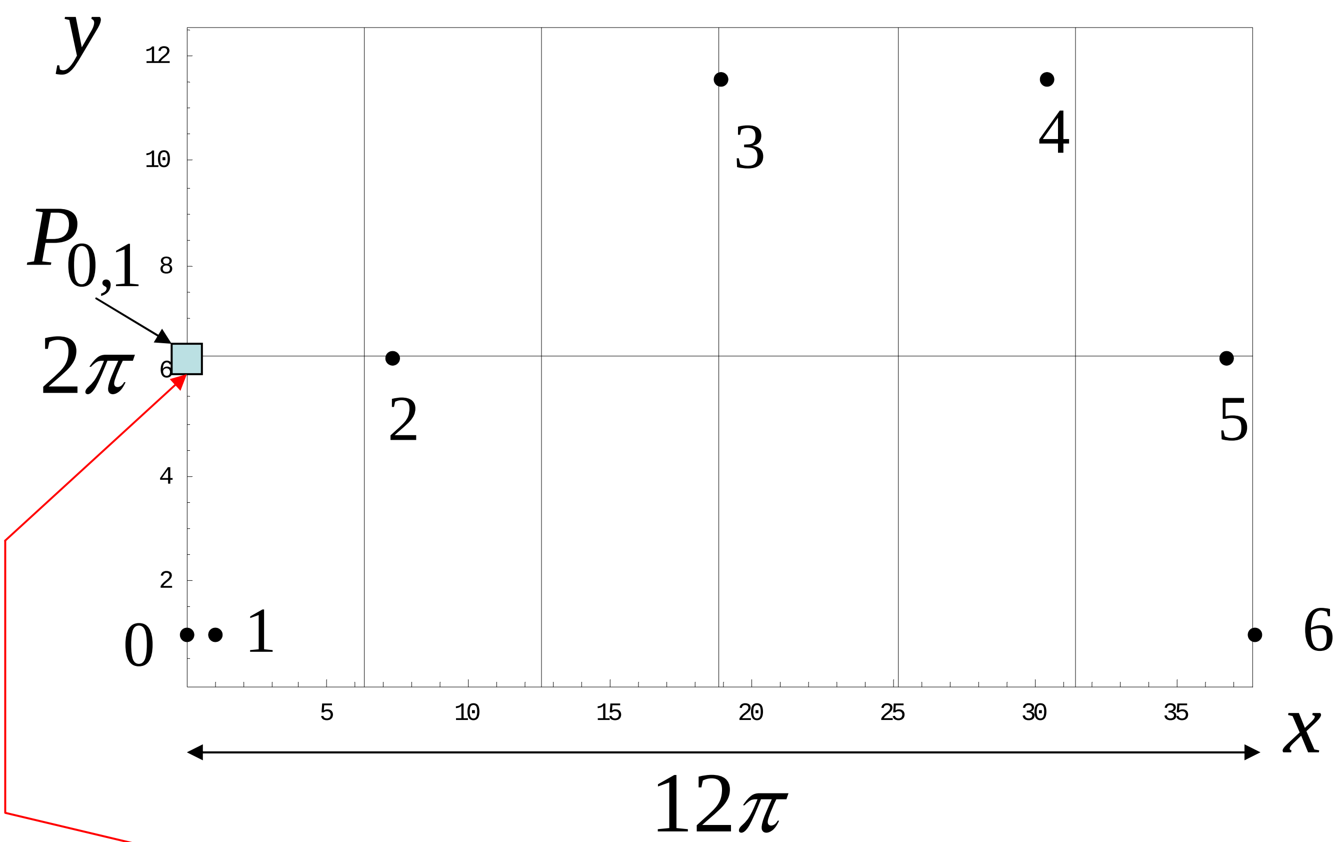
周期　6　10　14　　14　10　6



$\subset L_1 \subset y\text{-Axis}(y>0)$

A_m, B_m ：***m*** **は** ***h*** **の対称線の位置**

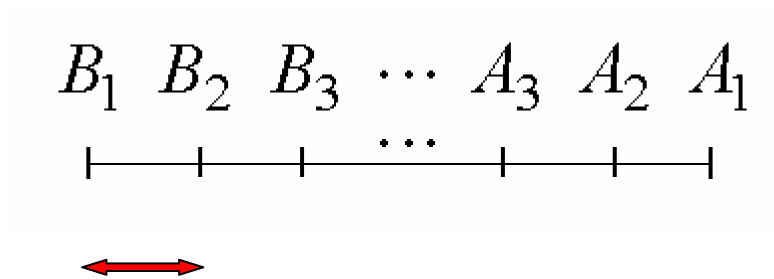
$$6-DRPO$$



上記の軌道は、サドル（ $P_{0,1}$ ：回転数:1）と同じ平均回転数をもつ

3　振動解の存在

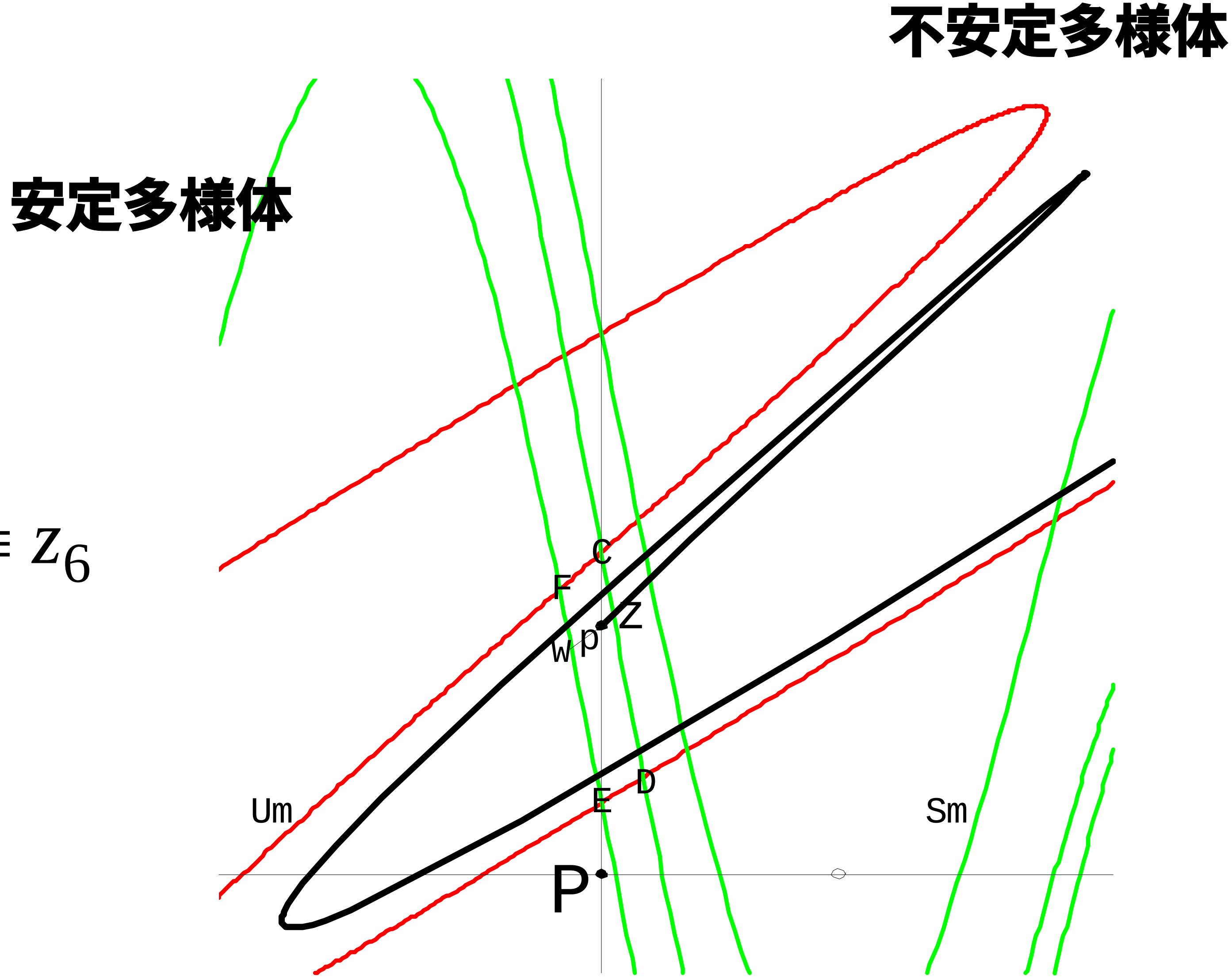
周期　6　10　14　　14　10　6



この区間を　6回　写像する

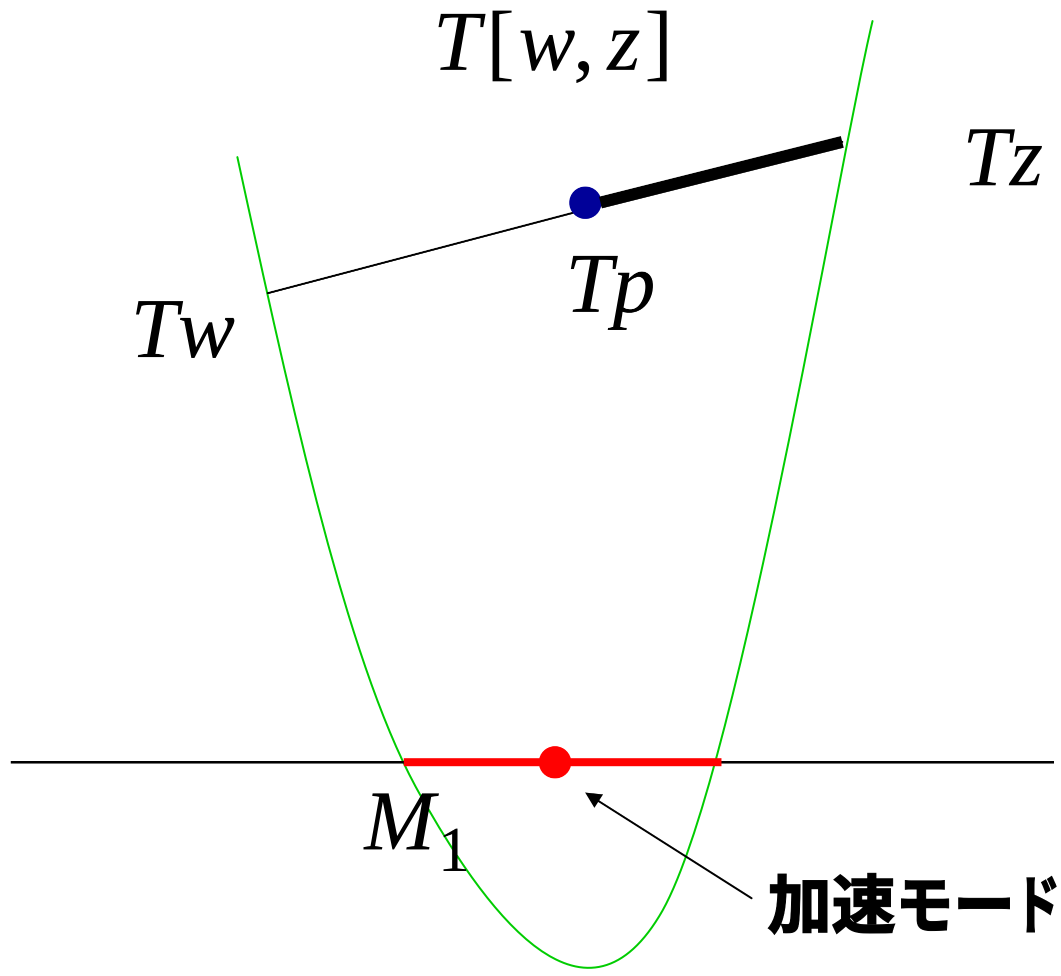
$(0, B_1)$　**から出発した軌道は1周期分進む：**　$(2\pi \times 6, B_1)$

$(0, B_2)$　**から出発した軌道の点は**　$x > 14\pi$　**にある**

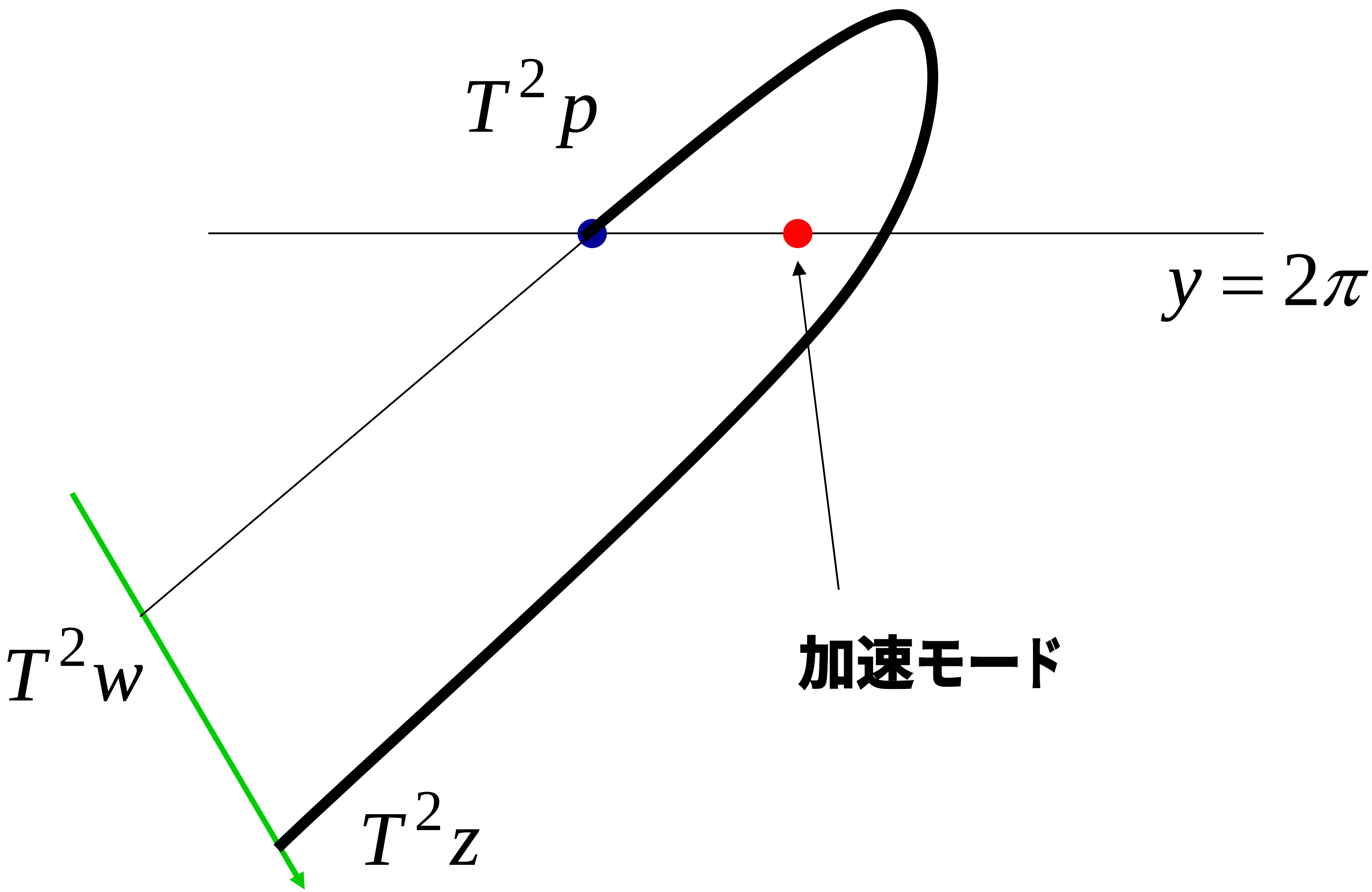


$$p \equiv z_6$$

$$x = 12\pi$$


$T[w, z]$
Tz
Tp
Tw
M_1
加速モード

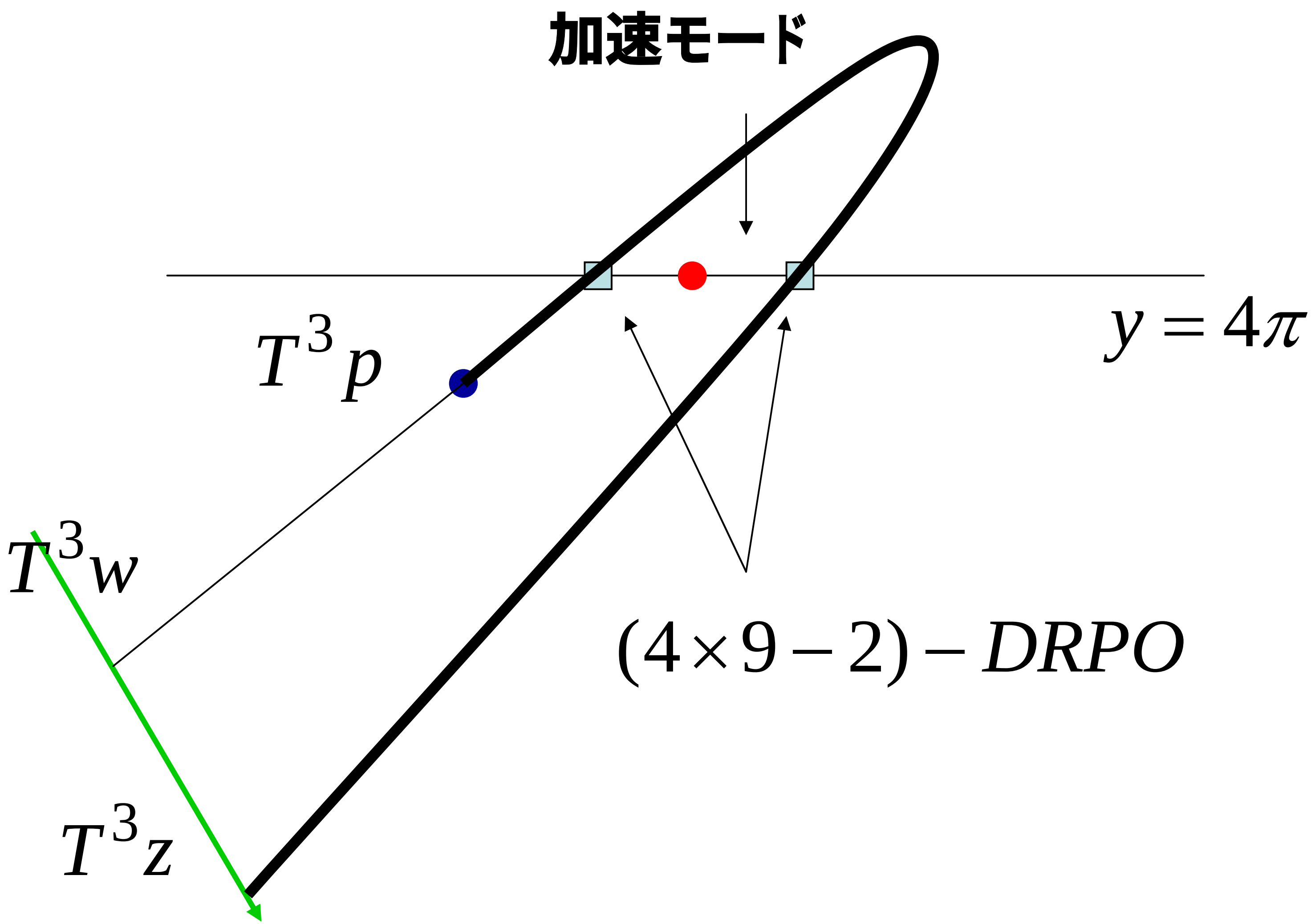
更に　1回　写像すると



更に　1　回 写像すると

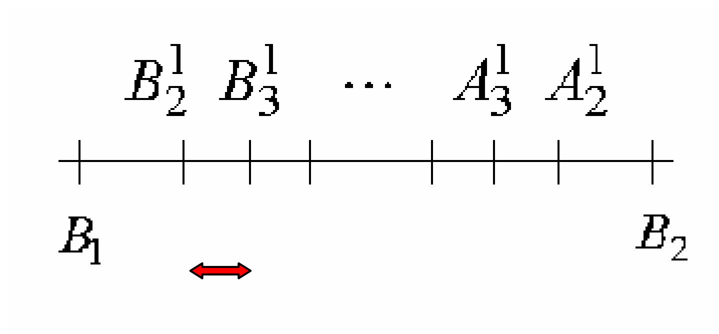
合計の写像回数

$6+1+2=9$



$$(4n+26)-DRPO\ \ (n\geq 2)$$ が存在する

これらの初期点の位置関係



弧 $[B_2^1, B_3^1]$ を 34回 写像して、今行った手順を

繰り返す

$$B_1 < B_2 < B_3 < \cdots < A_3 < A_2 < A_1$$

世代0

$$B_1 < B_2^1 < B_3^1 < \cdots < A_3^1 < A_2^1 < B_2$$

世代1

$$B_2^1 < B_3^{1,2} < B_4^{1,2} < \cdots < A_4^{1,2} < A_3^{1,2} < B_3^1$$

世代2

$$B_3^{1,2} < B_4^{1,2,3} < B_5^{1,2,3} < \cdots < A_5^{1,2,3} < A_4^{1,2,3} < B_4^{1,2}$$

世代3

初期点の位置を表す数列

$$B_1 < B_2^1 < B_3^{1,2} < \cdots < B_n^{1,2,\cdots,n-1} < \cdots$$

数列は集積する　集積点　B^*

初期点　$(0, B^*)$　**を出発する軌道　→　振動解**

まとめ

$a = 2\pi$　**において振動解が存在する**

4　まとめと今後の課題

ここで見つけた振動解

未来の軌道：振動しながら＋無限遠へ

過去の軌道：振動しながら＋無限遠へ

上下に振動する振動解もある

振動解の存在する系：　3体問題の特殊な解ではない

振動解の軌道：ホモ（ヘテロ）クリニックローブを渡り歩く

振動解の存在する必要十分条件？