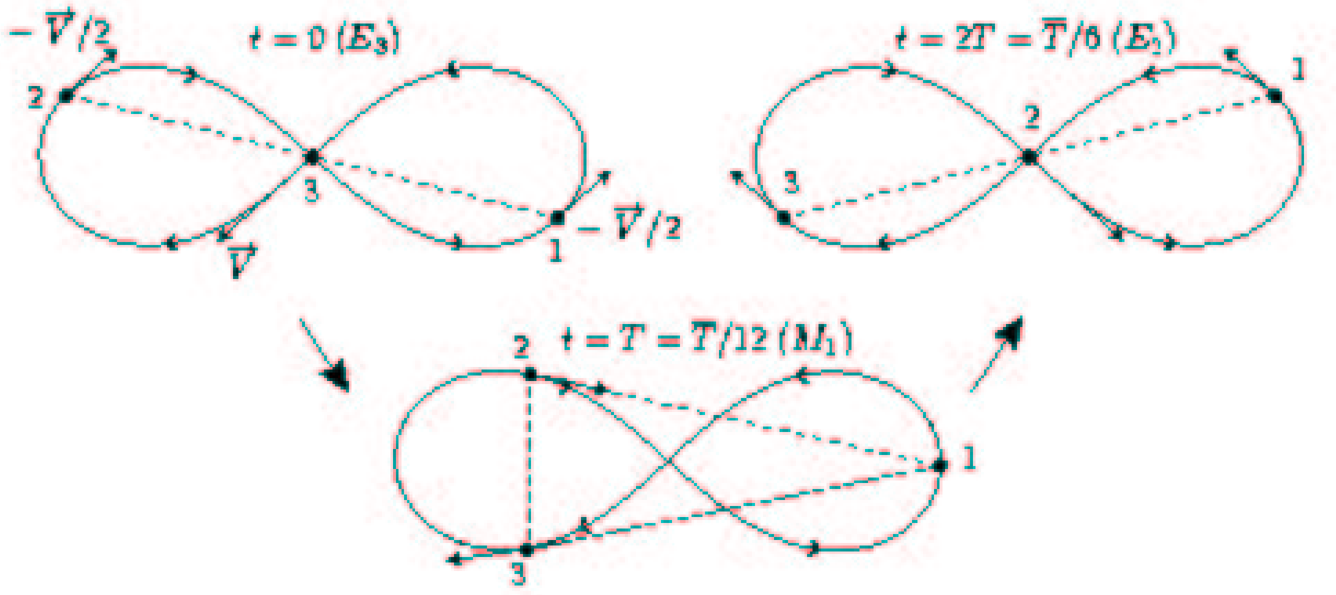
わたしの 8 の字入門

関口　昌由
masa@kisarazu.ac.jp
木更津高専

3 体問題の 8 の字解

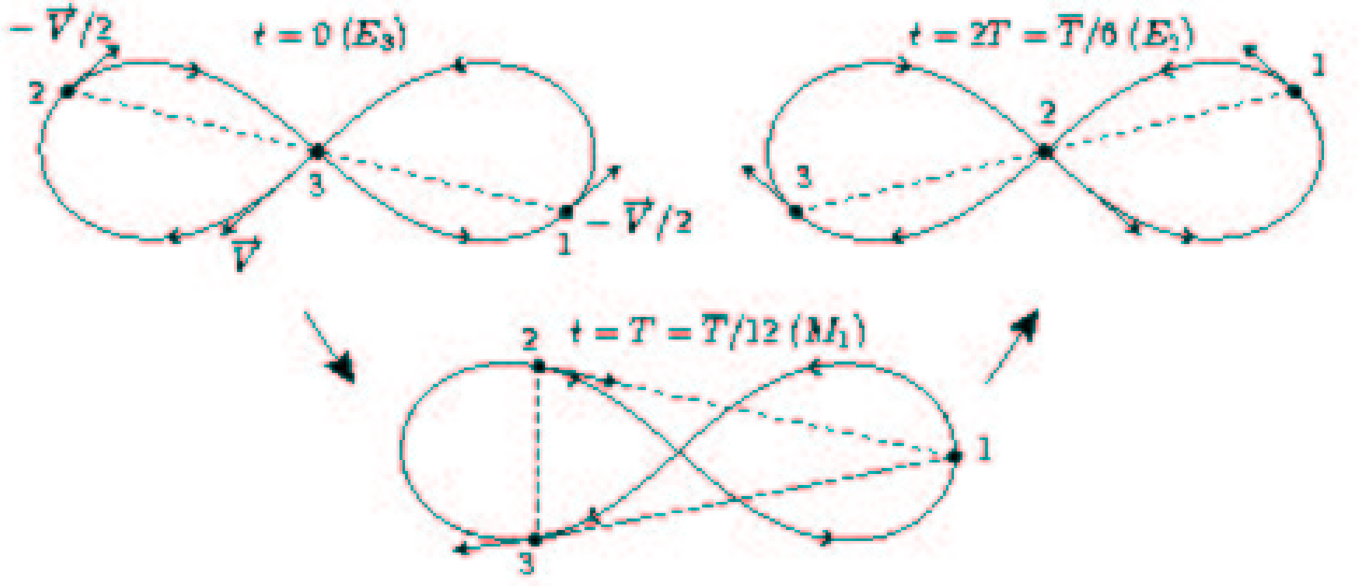
- 1993, Moore が数値的に発見
- 2000, Chenciner & Montgomery が存在証明



Chenciner & Montgomery (2000)
Figure 1 (Initial conditions computed by Carles Simó)

8の字解の特徴 (1)

- 等質量3質点が同一軌道上を周期的運動
  → 舞踏解 (Choreographic Solution)

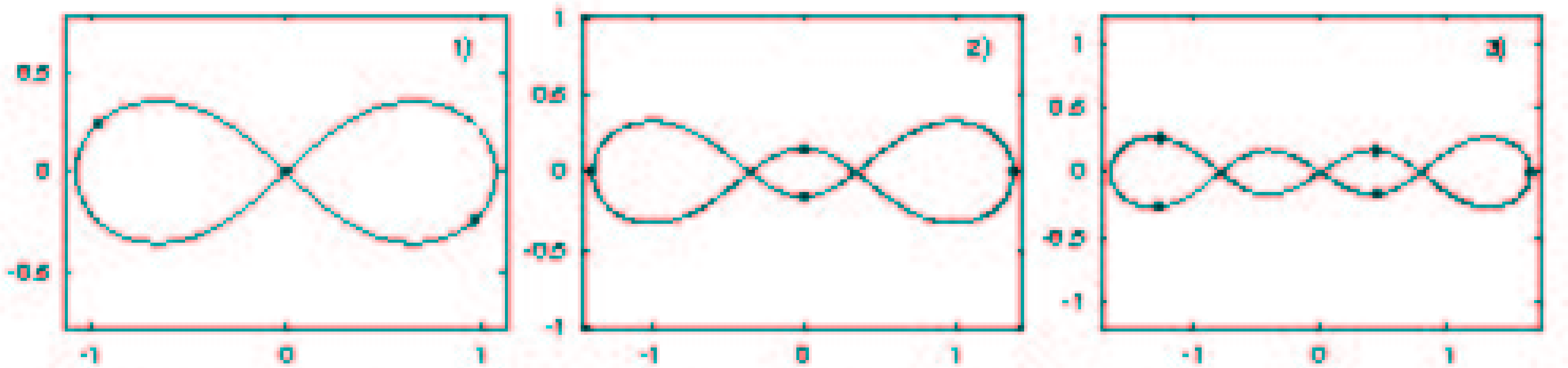


Chenciner & Montgomery (2000)
Figure 1 (Initial conditions computed by Carles Simó)

8 の字解の特徴 (2)

- 衝突なし
- 角運動量がゼロ
- 軌道の関数表現は未発見?
- 安定
  存在確率は 1 銀河 〜 1 宇宙につき 1 個
  by Heggie (2000)?

Choreographic Solutions の発見



Simo (2001)

FIGURE 1. Chains with 3, 4 and 5 bodies.

色々な Choreographic Solution

a) Trivial -- : 同形解

b) Simple -- : 同一軌道上を N 体が巡回

c) Multiple -- : 同一軌道上を巡回する n 体が複数組ある ($1<n<N$)

- 数値計算でたくさん発見されている
- 厳密な存在証明はほとんど (?) なかった。

Chen の舞踏解

- Chen(2003)
  Hilbert の直接法で以下を証明
  - 4 体問題で
    無限個の舞踏解 (double choreography) の存在
    非可算個の準周期解の存在
  - 6 体問題で
    無限個の舞踏解 (simple and double choreography) の存在
    非可算個の準周期解の存在

証明方法に共通する戦略

•Hilbert の直接法
作用積分

$$A(x)=\int_0^T L(x,\dot{x})\,dt$$

を極小化する経路の存在を示す

•周期解のうちで対称性の高いものを探す

↓

対称性の高い曲線群の中から作用積分を
最小化するものを探す

Chen の戦略 (1)

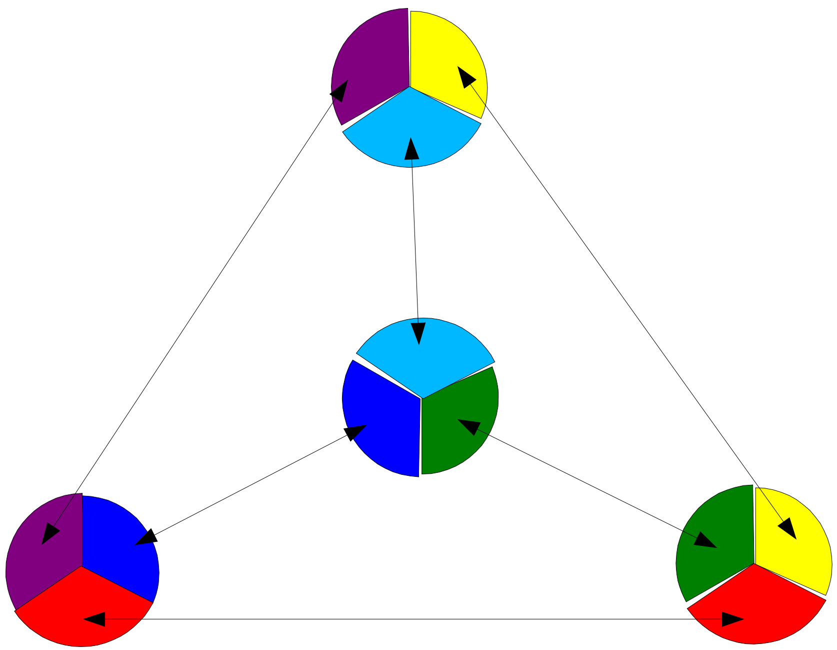
- 対称性の高い曲線群として、以下の曲線群だけに注目する
  - 角 $2\pi/d$ 回転で不変な曲線群で、かつ
    - d が有理数ならば周期解
    - d が無理数ならば準周期解
- 直交変換で不変な曲線群

Chen の戦略 (2)

- 作用積分の評価をするために
  Binary Decomposition を行う

- Binary Decomposition とは、
  各質点 (質量 1) を N-1 個の質点 (質量 1/(N-1))
  の結合体と考え、N 体を ${}_N C_2$ 個のバイナリー
  の集合として扱う。

Binary Decomposition (N=4)



Binary Decomposition (N=6)

省略

Binary Decomposition (N=4,6)

作用積分の分解

k=0 と k=1 に分けて評価可能。ただし、 0≤λ≤1

$$A_T(x) = \sum_{i<j,\,k=0,1} \int_0^T \left\{ K_{ij}^k(\dot{x}) + U_{ij}^k(x) \right\} dt$$

$$K_{ij}^0(\dot{x}) = \frac{1}{N-1} \left| \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_j}{2} \right|^2, \quad U_{ij}^0(x) = \frac{\lambda}{\left| x_i - x_j \right|},$$

$$K_{ij}^1(\dot{x}) = \frac{1}{N-1} \left| \frac{\dot{x}_i + \dot{x}_j}{2} \right|^2, \quad U_{ij}^1(x) = \frac{1-\lambda}{\left| x_i - x_j \right|},$$

残る問題点 (1)

- 非対称の場合の存在証明

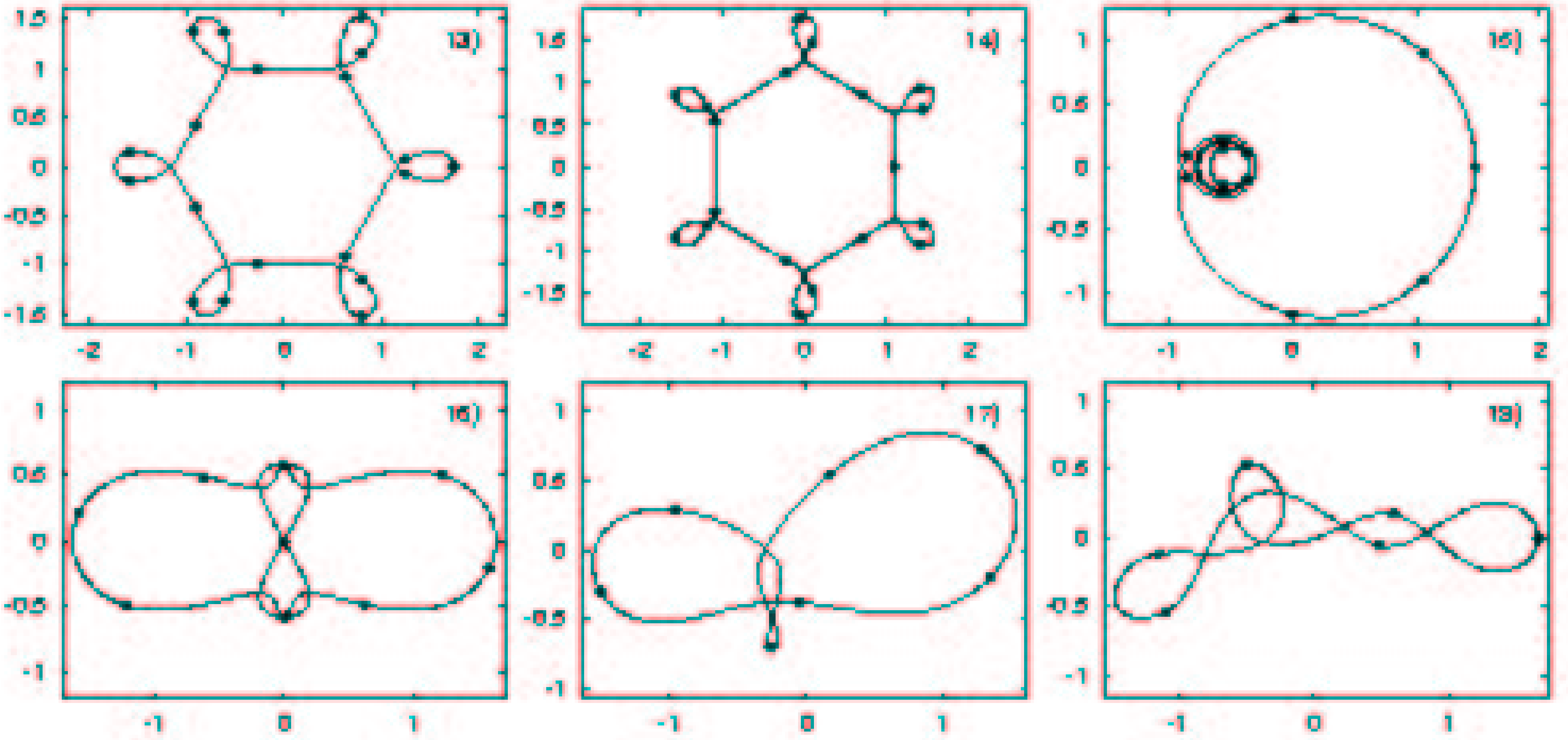


FIGURE 3. A sample of different choreographies.

Simo (2001)

残る問題点 (2)

- 関数表現は?
  8 の字 = レムニスケート　　　　　・・・ダメ
  4 次、6 次、8 次多項式・・・ダメ

References

1) Chenciner, A. and Montgomery, R., 2000, "A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses", Ann. Math., **152**, 881-901

2) Montgomery,R., 2001, "A New Solution to the Three-Body Problem", Notices AMS, **48**, 471-481

3) http://www.maia.ub.es/dsg/

4) Chen, K.C., 2003, "Variational methods on periodic and quasi-periodic solutions for the *N*-body problem", Ergod. Th. & Dynam. Sys., **23**, 1691-1715