

自転・軌道共鳴

～共鳴による自転軸傾斜角の変動～



東京工業大学
井田研究室 修士2年
跡部 恵子

はじめに

自転・軌道共鳴とは・・・

- 自転周期と公転周期
- 歳差周期と軌道面変動周期

- 内容
- 共鳴が引き起こす現象
 - 共鳴発生のしくみ
 - 共鳴の解析

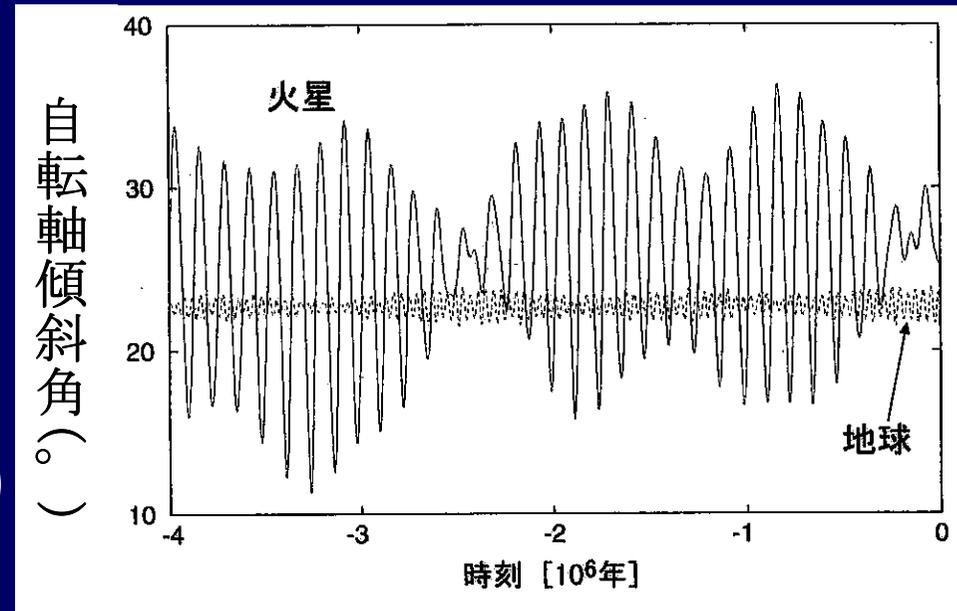
太陽系における自転・軌道共鳴の影響

■ Ward (1973,1974)

- 地球 $23.3^\circ \pm 1.3^\circ$
- 火星 $25^\circ \pm 13^\circ$

■ Laskar & Robutel (1993)

- 火星 $0 \sim 60^\circ$
- 地球(月なし) $0 \sim 85^\circ$



全地球史解説(2002) p.151より(by伊藤さん)

自転軸傾斜角の大変動を引き起こす

⇒ 気候に影響

自転軸歳差運動と軌道面変動

■ 自転軸歳差運動

歳差方程式 (Ward 1974)

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{dt} = \alpha (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{n}})$$

歳差定数

自転周期

惑星の \mathbf{a} , \mathbf{D} に依存

■ 軌道面変動

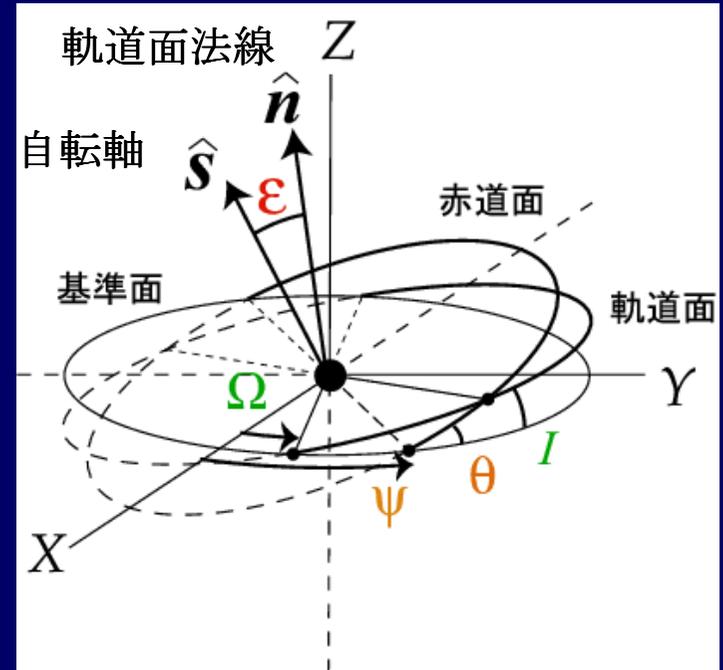
$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(I, \Omega)$$

$$I \ll 1$$

$$\begin{cases} I \sin \Omega = \sum_i I_i \sin(f_i t + \gamma_i) \\ I \cos \Omega = \sum_i I_i \cos(f_i t + \gamma_i) \end{cases}$$

固有振動数 ($f_i < 0$)

系にある惑星の \mathbf{m}_j , \mathbf{a}_j に依存



共鳴発生メカニズム

■ 傾斜角 $\frac{d\theta}{dt} = \alpha \cos \varepsilon \left[\sum_i I_i \sin(\psi - \Omega_i) \right] + O(I^2) \quad (\Omega_i \equiv f_i t + \gamma_i)$

■ 歳差角 $\frac{d\psi}{dt} = \underbrace{-\alpha \cos \varepsilon + \alpha \cos \varepsilon \cot \theta}_{\text{歳差運動の振動数}} \left[\sum_i I_i \cos(\psi - \Omega_i) \right] + O(I^2)$

歳差運動の振動数 $\sim -\alpha \cos \varepsilon$

$$\theta = \theta_0 + \sum_i \frac{\alpha \cos \varepsilon_0 I_i}{\alpha \cos \varepsilon_0 + f_i} \left[\cos \left\{ \underbrace{(-\alpha \cos \varepsilon_0 - f)}_{\text{歳差運動の振動数}} t + \psi_0 - \gamma_i \right\} - \cos(\psi_0 - \gamma_i) \right]$$

歳差運動の周期 \cong 軌道変動の周期

\Rightarrow 共鳴

■ 振幅
■ 変動周期 } 増大

現在の太陽系の場合は・・・

- 歳差運動 ($\alpha \cos \varepsilon_0$)
 - 地球 26,000年
 - 火星 175,000年
- 軌道面変動 (f_i)
 - 50,000年
 - $\sim 2,000,000$ 年



共鳴発生！

共鳴が発生する範囲は？

共鳴の詳しい解析は行われていなかった！

そこで・・・

- 共鳴幅 を求め、定式化
- 自転軸傾斜角振幅

- どのような惑星 (a_j, m_j) があつたときに、
- どのような範囲 (a, D) で、
- どの程度 ($\Delta\varepsilon$) の共鳴が発生

解析の手法

- 考える系

中心星 + 摂動惑星 + 地球型惑星

- 基礎方程式

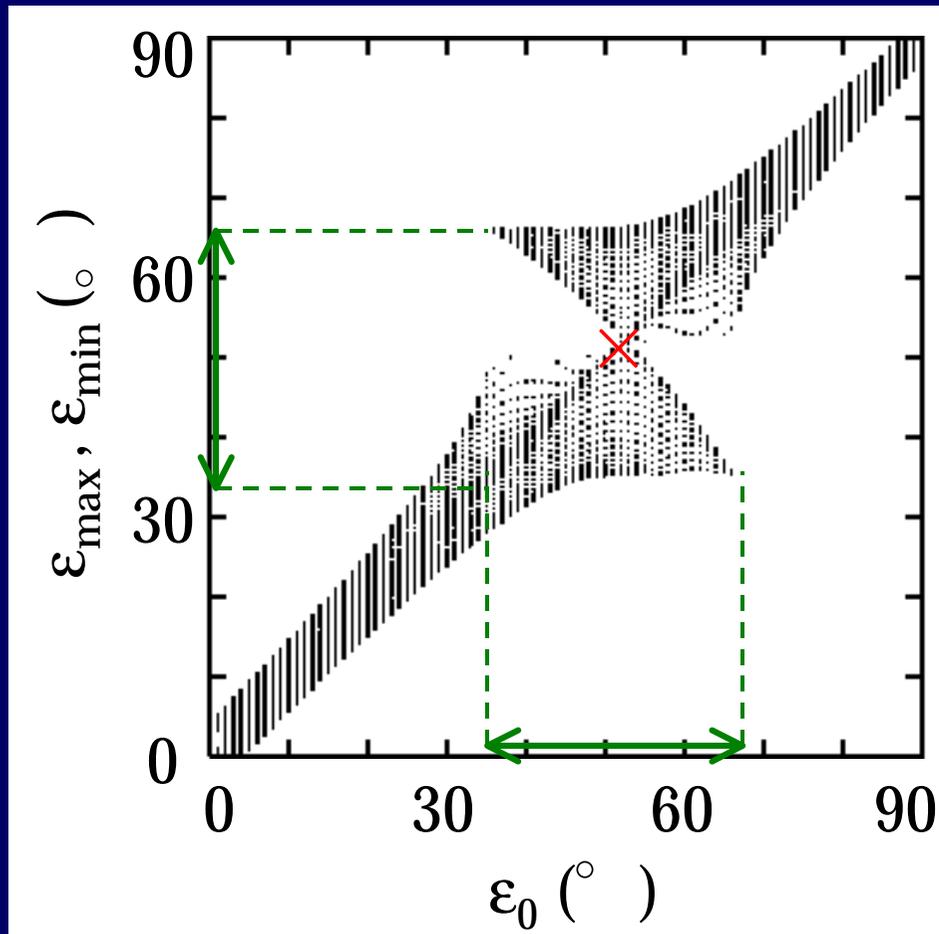
歳差方程式

- 色々な パラメータ (m_j, a_j, I, a, D) で数値計算

初期値 (ε_0, ψ_0)

- 解析計算

共鳴領域の解析 I



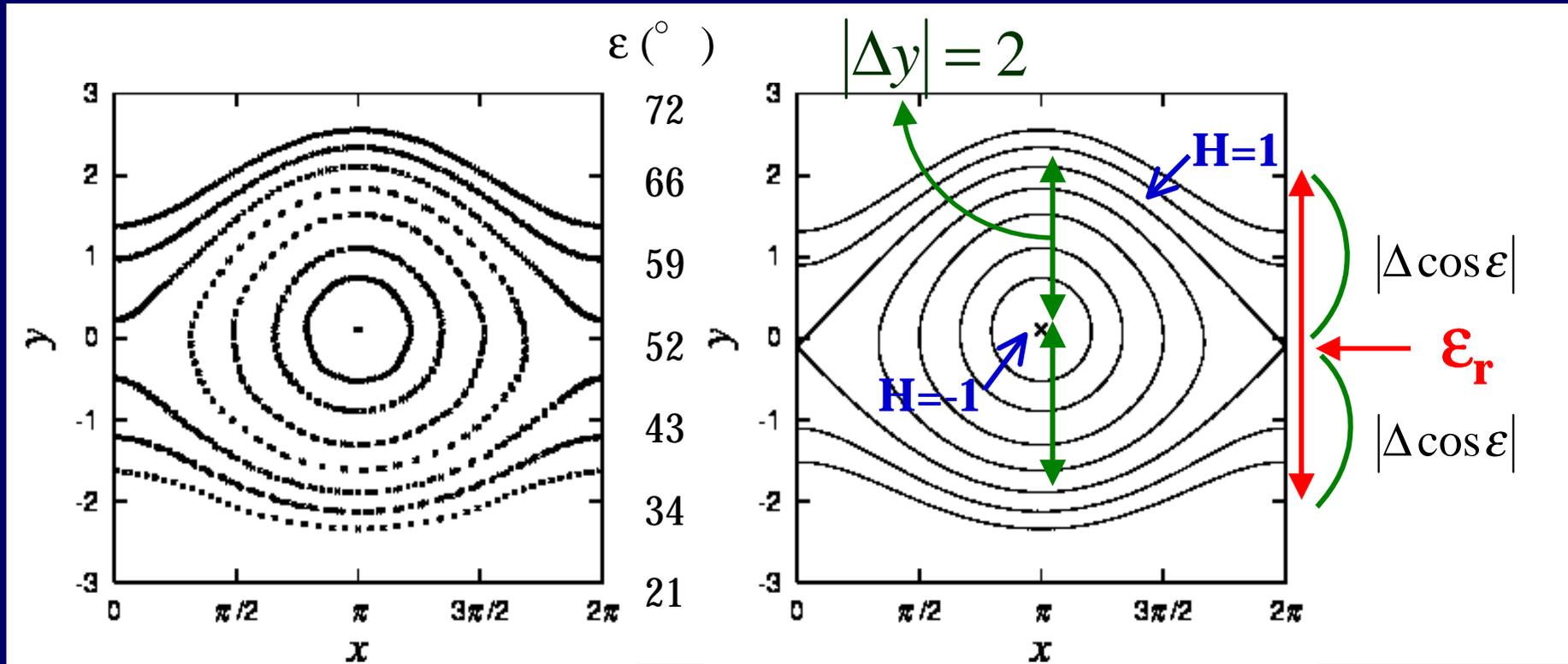
- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星 $1M_{\text{木星}}$ 、5.2AU
- 地球型惑星 1.1AU、D=24時間
 $I=1.3^\circ$

- 変動範囲は ψ_0 に依存
- 共鳴の中心

$$\alpha \cos \varepsilon_r + f_1 = 0$$

- 共鳴の発生範囲(ε_0)と
(最大)変動範囲が一致

共鳴領域の解析 II



- $x = \psi - \Omega_1$
- $y = -(\alpha \cos \epsilon + f_1)/\beta$
($\beta \equiv \sqrt{\alpha f_1 I \sin \epsilon_r}$)

$$H = \cos x + y^2/2$$

共鳴幅 $|\Delta \cos \epsilon| = \sqrt{2I \sin 2\epsilon_r}$

自転軸傾斜角 振幅の定式化

共鳴時

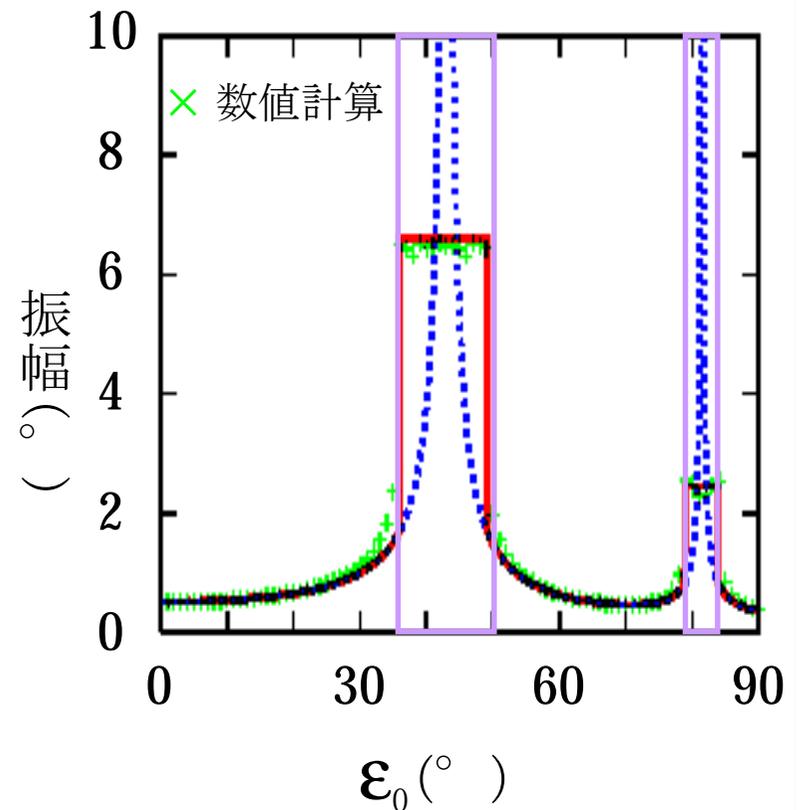
共鳴の中心 $\alpha \cos \varepsilon_r + f_i = 0$

$$|\Delta \cos \varepsilon| \cong \sqrt{2I \sin 2\varepsilon_r}$$

非共鳴時

Ward (1974) の解析解

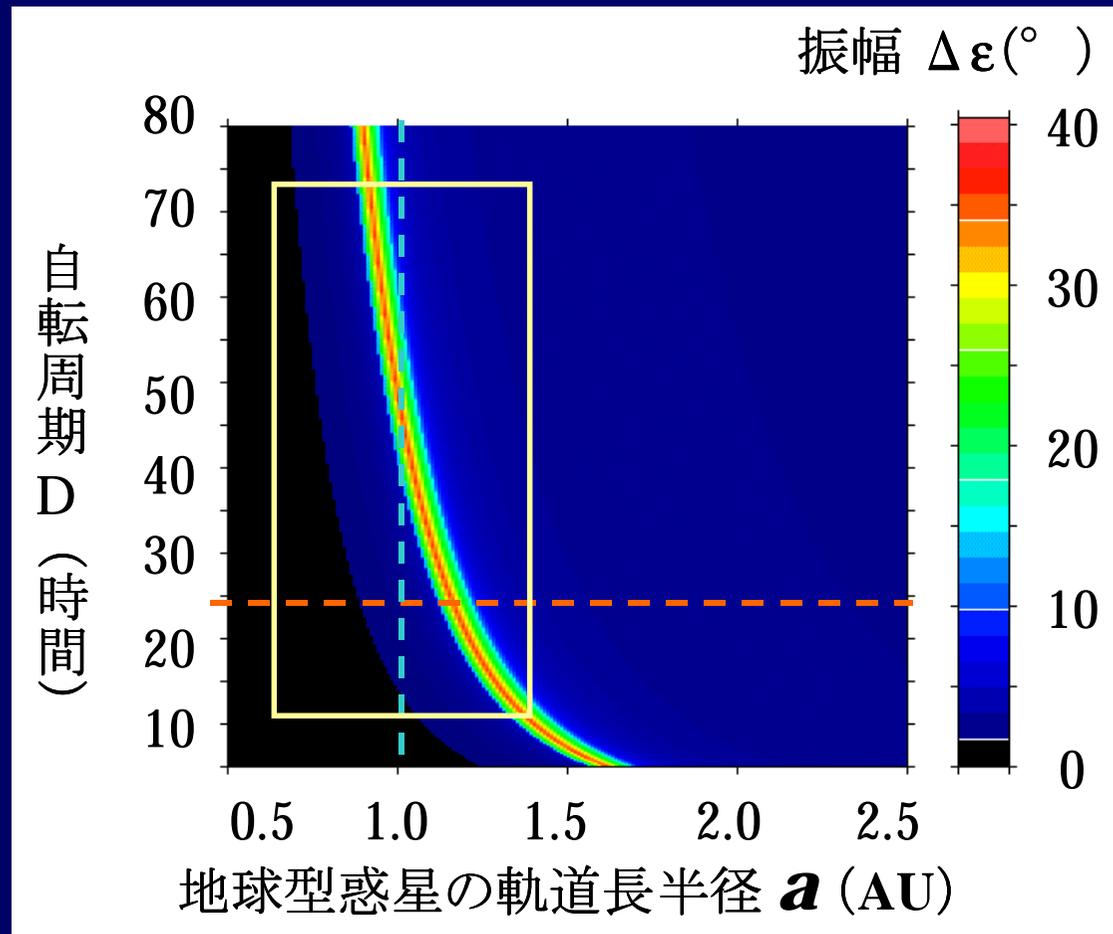
- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星1 $1M_{\text{木星}}, 5.2\text{AU}$
2 $1M_{\text{土星}}, 9.5\text{AU}$
- 地球型惑星 $0.8\text{AU}, D=24\text{時間}$



自転・軌道共鳴領域の例

- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星 $1M_{\text{木星}}$ 、 5.2AU
- 地球型惑星 $I=1.3^\circ$ 、 $\varepsilon_0=25$

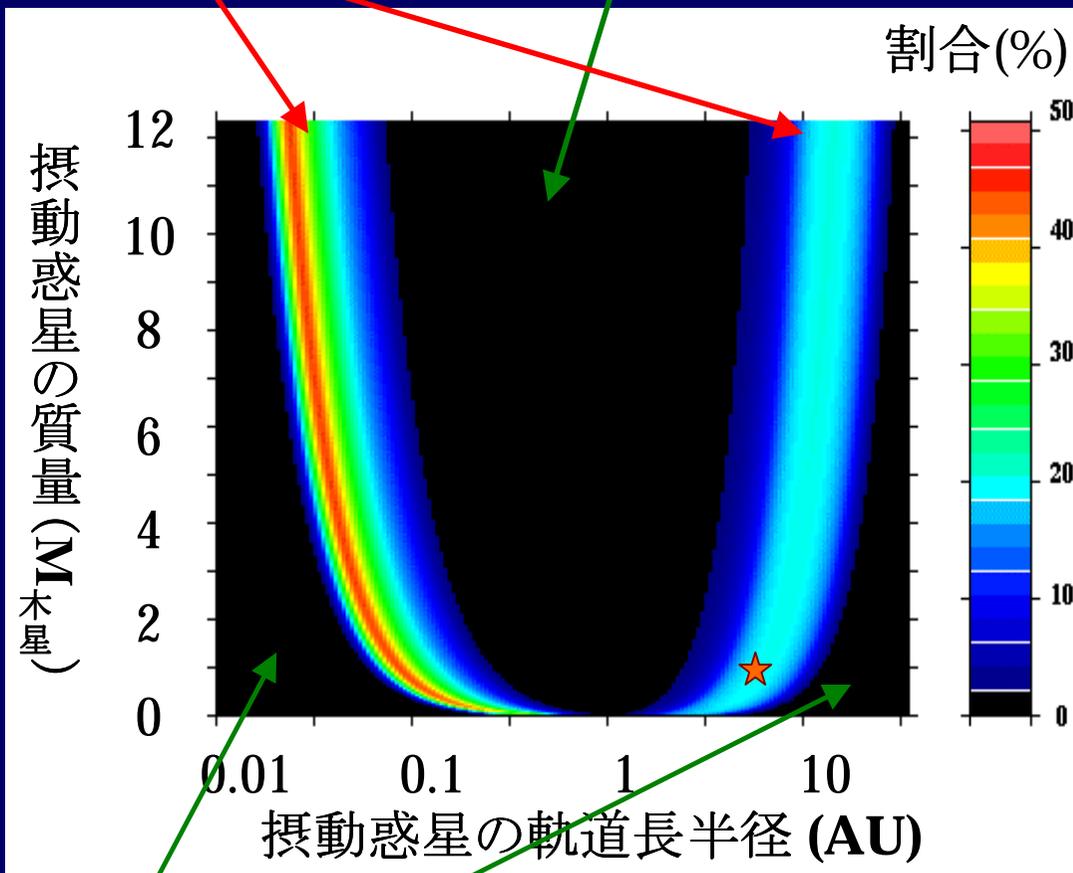
摂動惑星の m 、 a
を変え、 で
 $\Delta\varepsilon > 20^\circ$ 以上と
なる領域の割合を
計算



影響を及ぼす摂動惑星は？

$$\alpha \text{COSE} \sim f_1$$

$$\alpha \text{COSE} \ll f_1$$



- $1M_{\text{木星}}$ なら $a=0.1$ or $3\sim 5\text{AU}$

- 最も影響を与える質量、位置が存在

軌道安定性とは異なる傾向

$$\alpha \text{COSE} \gg f_1$$

まとめ

- 自転・軌道共鳴

- 歳差運動の周期と軌道面変動の周期の共鳴
- 自転軸傾斜角の大変動

- 共鳴が発生する範囲

$$\alpha \cos \varepsilon_r + f_i = 0 \quad |\Delta \cos \varepsilon| = \sqrt{2I \sin 2\varepsilon_r}$$

- 共鳴を引き起こす摂動惑星

≒ 地球型惑星の軌道を(ぎりぎり)安定に保つ惑星

補足1. Ward(1974)の解析解

■ 傾斜角 $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\sin I \cos \phi \frac{d\Omega}{dt} + \sin \phi \frac{dI}{dt}$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - (\psi - \Omega)$$

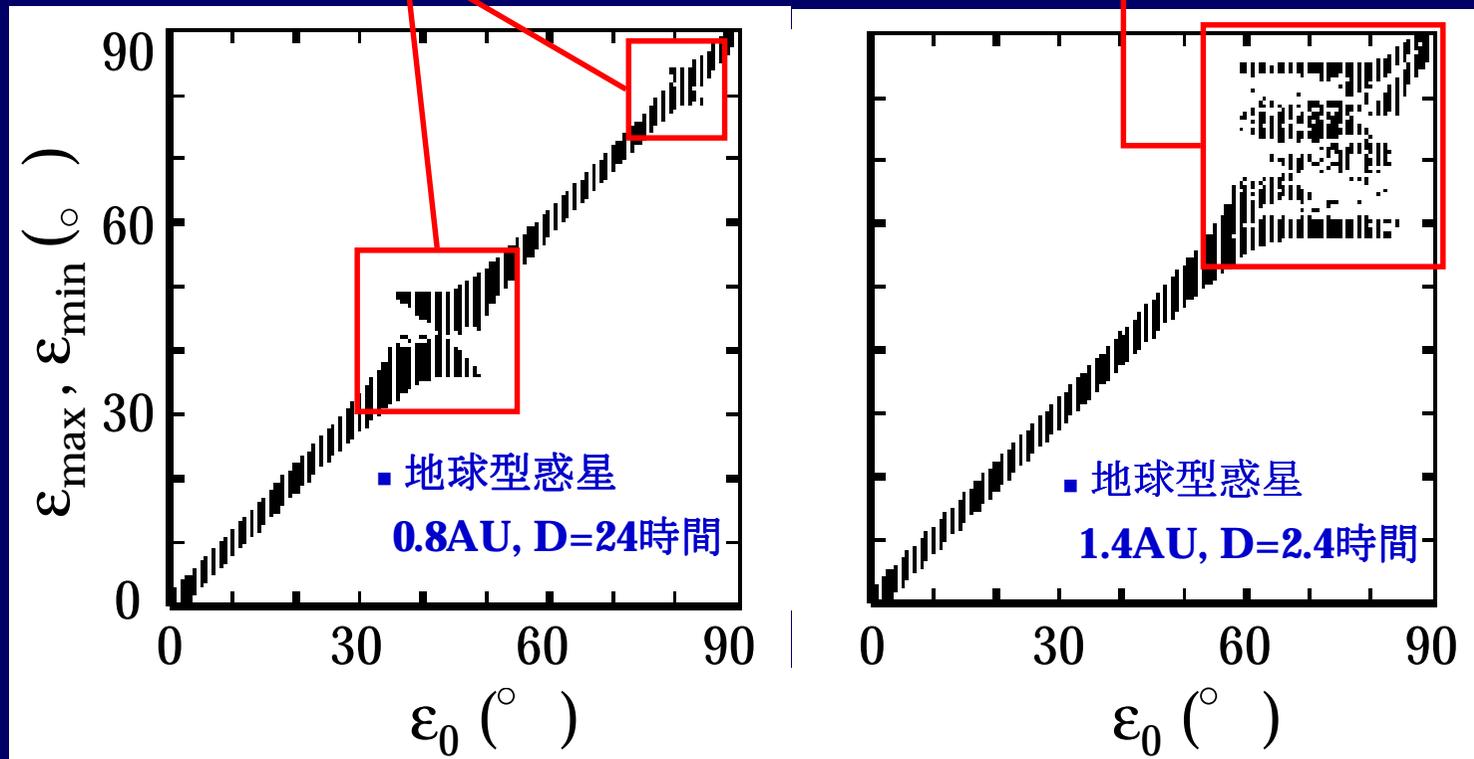
■ 歳差角 $\frac{d\phi}{dt} = -\alpha \cos \varepsilon - (\cos I - \sin I \cot \varepsilon \sin \phi) \frac{d\Omega}{dt} + \cot \varepsilon \cos \phi \frac{dI}{dt}$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \sum_i \frac{f_i I_i}{\alpha \cos \varepsilon_0 + f_i} \left[\sin \{ (-\alpha \cos \varepsilon_0 - f) t + \gamma_i - \phi_0 - \Omega_0 \} - \sin (\gamma_i - \phi_0 - \Omega_0) \right]$$

補足2. 変動領域 (摂動惑星2つの場合)

2つの共鳴領域

2つが重なって1つになっている



- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星 $1M_{\text{木星}}, 5.2\text{AU}; 1M_{\text{土星}}, 9.5\text{AU}$

補足3. 共鳴領域 (D=24時間)

中心星 $m_c = 1M_{\text{太陽}}$

摂動惑星

$m_p = 1.0M_{\text{木星}}$

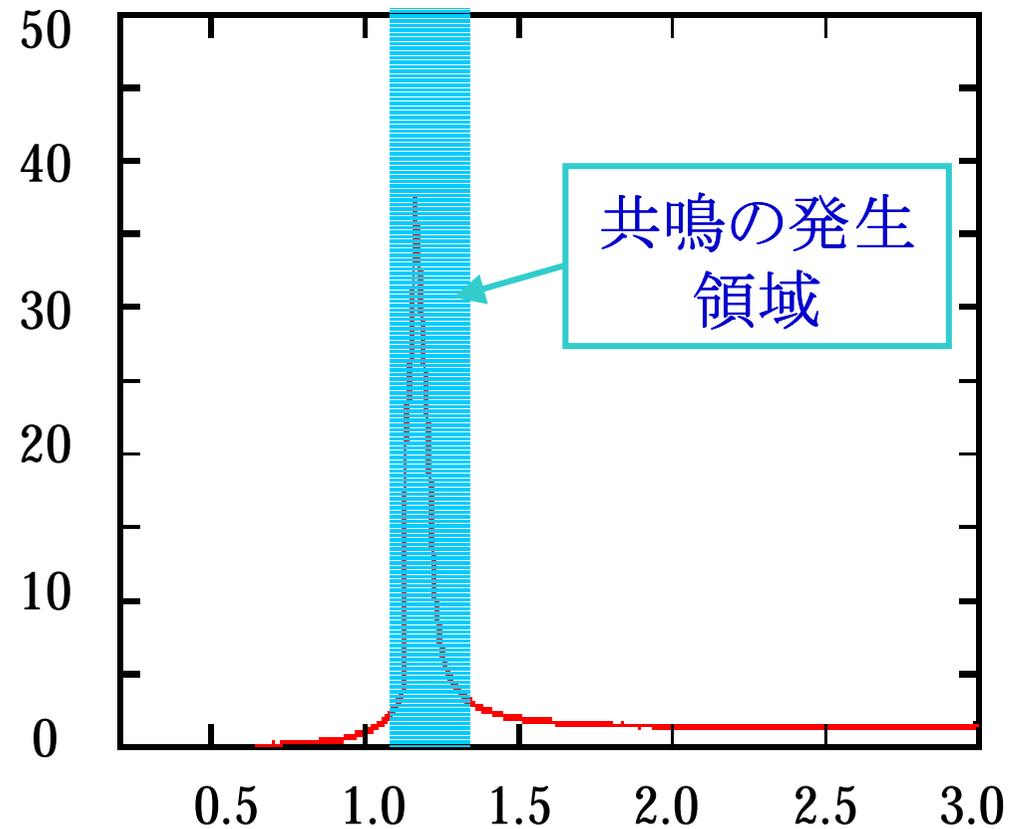
$a_p = 5.2\text{AU}$

$I = 1.3(^{\circ})$

$\varepsilon_{\text{初期}} = 25^{\circ}$

D = 24時間

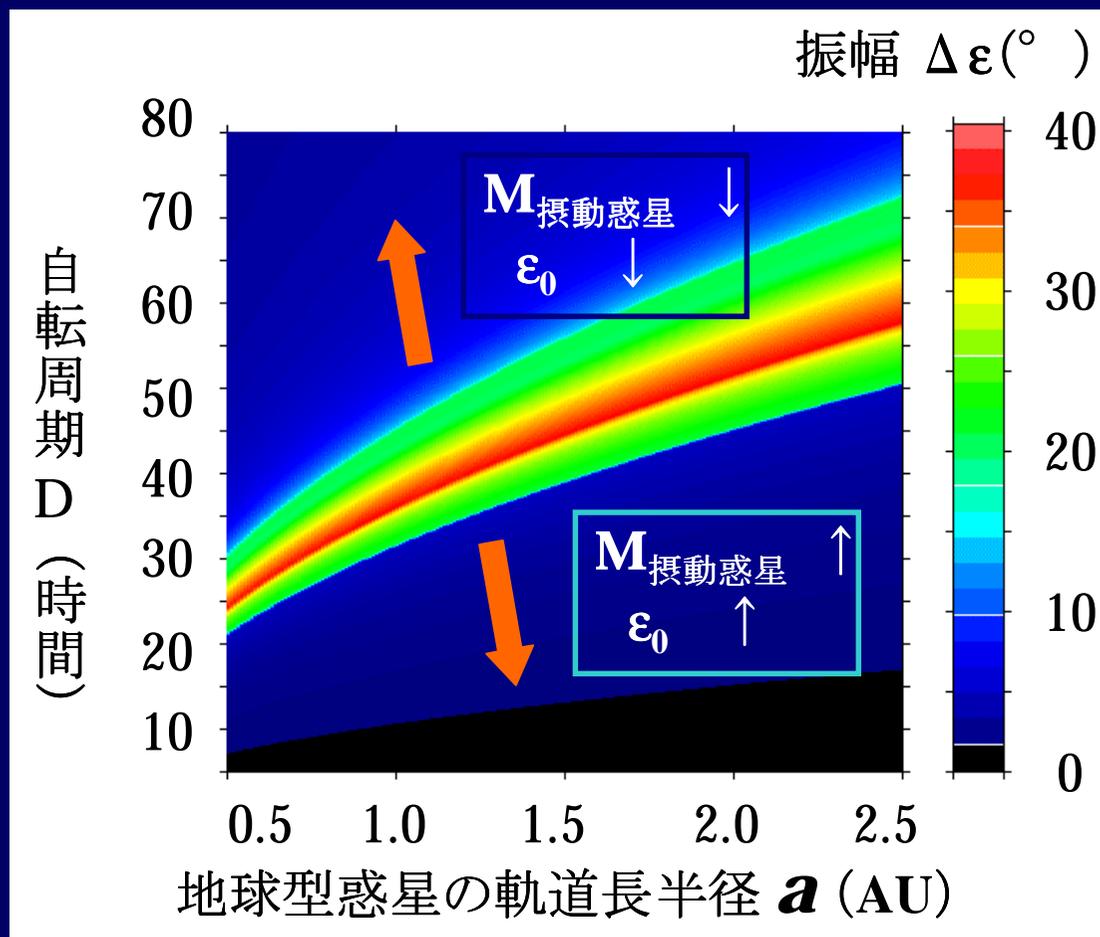
振幅 $\Delta\varepsilon (^{\circ})$



地球型惑星の軌道長半径 a (AU)

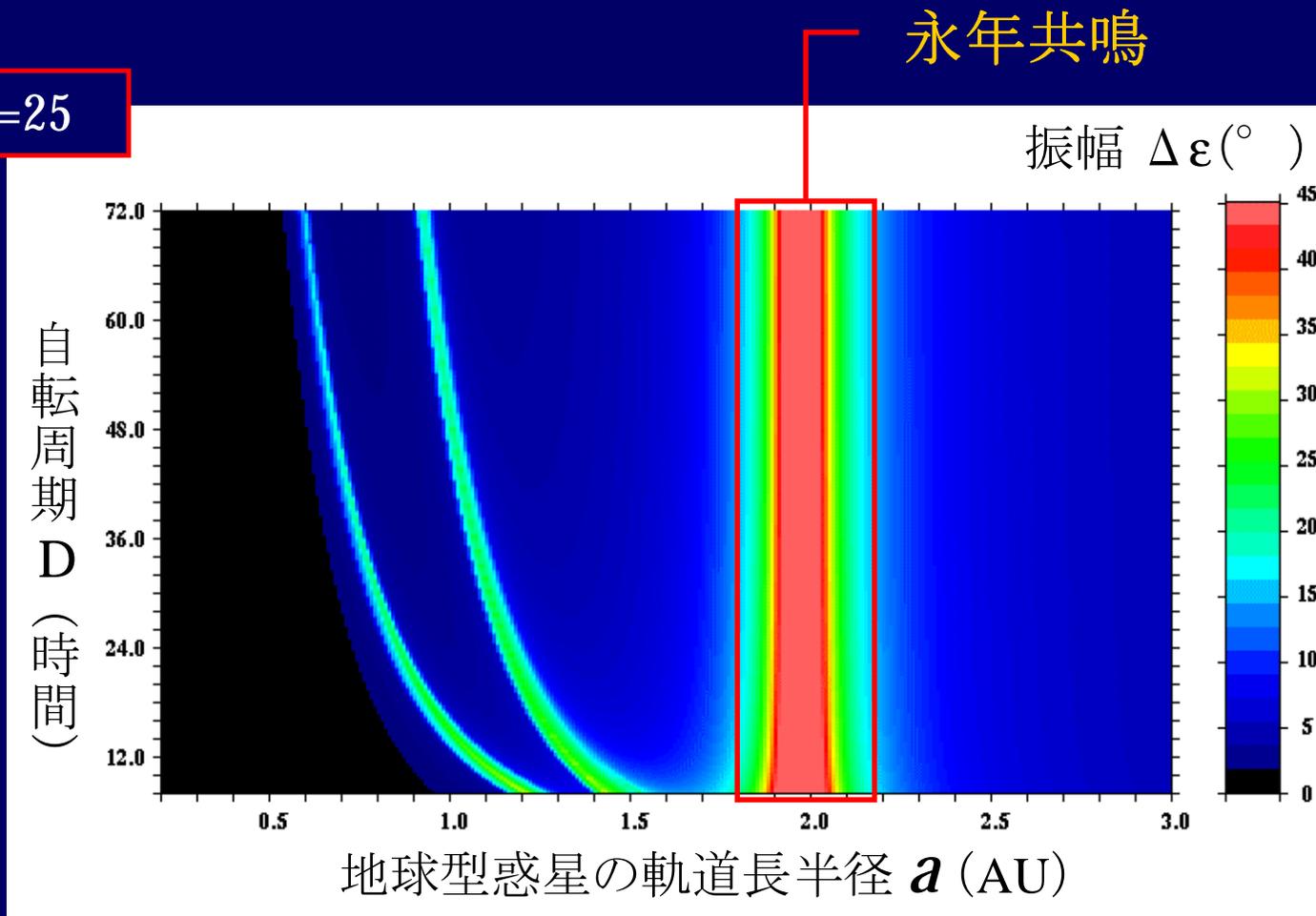
補足4. 自転・軌道共鳴領域の例 2

- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星 $1M_{\text{木星}}$ 、 0.1AU
- 地球型惑星 $I=1.3^\circ$ 、 $\varepsilon_0=25$



補足5. 自転・軌道共鳴領域の例 3

■ $\varepsilon_0=25$



- 中心星 $1M_{\text{太陽}}$
- 摂動惑星 $1M_{\text{木星}}, 5.2\text{AU}; 1M_{\text{土星}}, 9.5\text{AU}$

補足6. 自転軸傾斜角の変動を抑えるには

■ 地球型惑星の逆行回転

→ spin-orbit resonanceは発生しない

■ 巨大衛星の存在

衛星から受けるトルク

⇒ 歳差運動を速める働き

歳差運動の周期

> 軌道変動の周期

⇒ 自転軸安定化！

