

Application of Symplectic Integrators in Dynamical Astronomy シンプレクティック数値積分法の天体力学的応用

Takashi Ito (tito@cc.nao.ac.jp)

伊藤孝士 (国立天文台天文学データ解析計算センター)

National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan

Various enhancement of symplectic integrators are reviewed from the viewpoint of dynamical astronomy, especially in our solar system dynamics: mixed variable method (Wisdom-Holman map), warm start, individual stepsize method, several techniques handling close encounters (democratic heliocentric coordinate (DH), symplectic massive body algorithm (SyMBA), hybrid method, modified SyMBA), and a regularization method by Mikkola.

0. はじめに

シンプレクティック数値積分法の基礎と背景、その良い性質については本巻の吉田春夫氏の記事に詳しく記されている通りである。本稿では吉田記事の内容を踏まえ、実際の天体の運動、とりわけ太陽重力場が支配的な太陽系内の天体の運動に対してシンプレクティック数値積分法を応用する際の手法の幾つかを概観する。まずシンプレクティック数値積分法の復習を行い、Wisdom-Holman map と呼ばれる混合変数型の方法を説明する。Wisdom-Holman map はシンプレクティック数値積分法の今日の発展の礎となった記念碑的な手法であり、なおかつ現在でも大いに現役として活躍する手法である。然る後に warm start と呼ばれる特殊な出発方法を説明し、固定刻み幅 WH map の応用例のひとつとして独立刻み幅を実装する方法について触れる。後半は天体同士の近接遭遇を扱う方法についての解説である。シンプレクティック数値積分法は本然的に可変刻み幅と馴染まず、それ故に天体同士の近接遭遇を苦手にしてきたが、近年になってポテンシャルの分割・Democratic Heliocentric method (DH)・Symplectic Massive Body Algorithm (SyMBA)・ハイブリッド法・修正 SyMBA など、近接遭遇に対応できる各種の方法が工夫されて来た。これらの方法の概念を解説し、応用の可能性について触れる。最後は S. Mikkola によって開拓された来たシンプレクティック数値積分法と正則化の融合領域について簡単に述べる。なお、図表は筆者がオリジナルに作製したものだけを掲載し、参考文献からの直接の引用は避けた。参考文献の図で重要なものについては図の番号のみを記しているし、末尾に添付した PowerPoint のスライドには当該図の主要なものを掲載してある。

参考までに、図 1 にはシンプレクティック数値積分法の基本から天体力学的応用までの発展を概観した系統樹を示す。ここに示された枝はシンプレクティック数値積分法研究のごく一部であり、現時点で筆者が認識している部分に過ぎないことに留意する必要がある。シンプレクティック数値積分法に関してはその基礎および応用に関して膨大な数の新しい論文が次々と発表され続けており、その進歩が已む気配は全く無い。

1. シンプレクティック数値積分法の基礎

本節は吉田春夫氏の記事の復習に該当する。より詳細については吉田記事、また Yoshida (1990b, 1992, 1993), 吉田 (1995, 1997), Gladman et al. (1991), Sanz-Serna & Calvo (1994) などの文献を参照していただきたい。

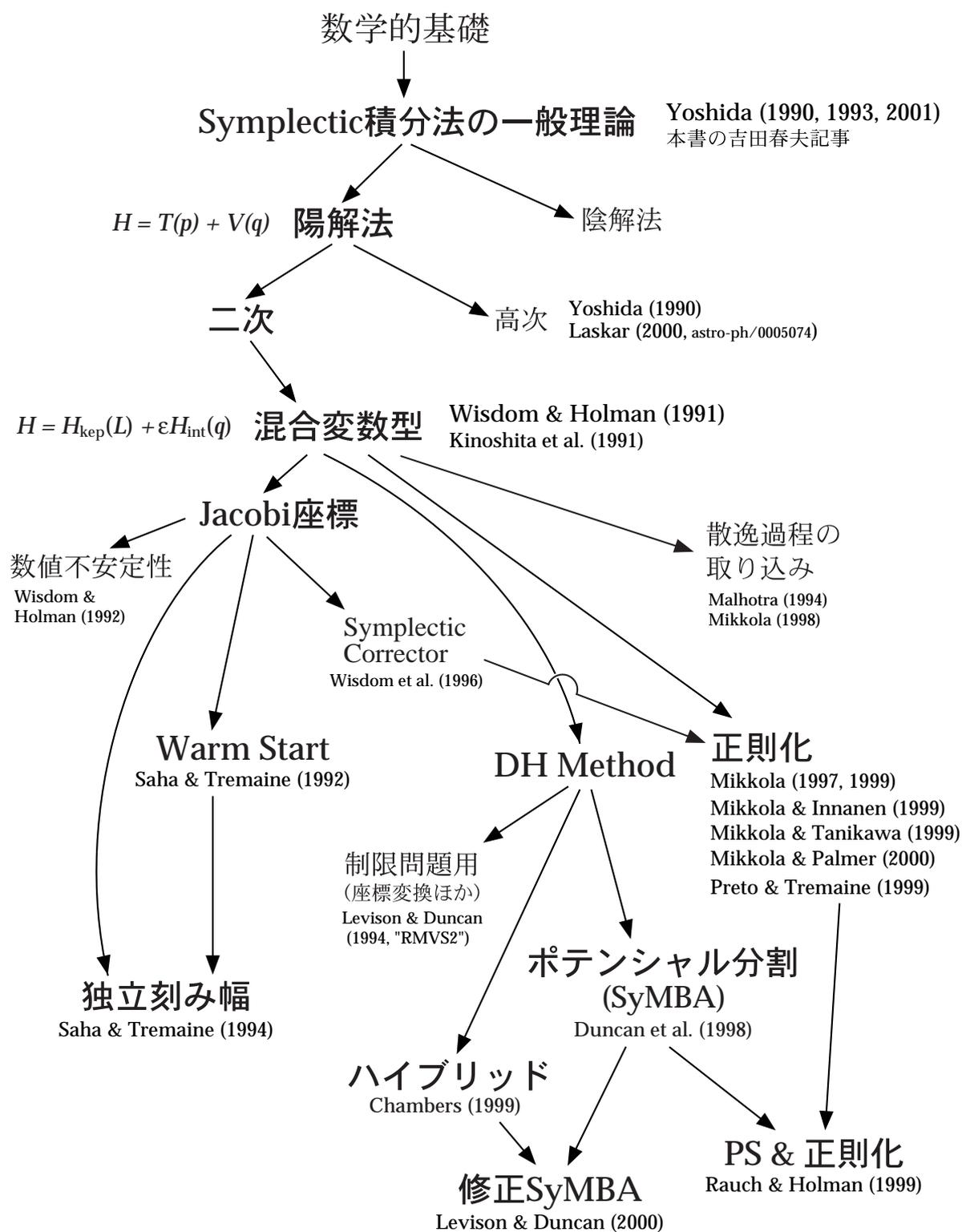


図 1. [A part of the development tree of symplectic integrators] シンプレクティブ数値積分法の発展系統樹の一部。矢印の流れはほぼ歴史的な時間の経過にも合致している。本稿で解説するのは主として図中のゴシックあるいは Palatino フォントで記された項目である。

ハミルトニアンを H , 一般化座標を q , 共役な運動量を p , 時刻を t と書くと、ハミルトンの正準運動方程式は以下のように書ける。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1)$$

上記二本の式をまとめると以下のようなになる。

$$\frac{dz}{dt} = \{z, H(z)\}, \quad (2)$$

但し z は q または p , 括弧 $\{, \}$ はいわゆる Poisson 括弧である。ここで微分演算子 $\{, G\}$ を以下のように導入する。

$$\{, G\} F \equiv \{F, G\}. \quad (3)$$

すると、ハミルトンの運動方程式 (2) は以下のように書ける。

$$\frac{dz}{dt} = \{, H\} z. \quad (4)$$

この方程式 (4) について、時刻 $t = 0$ から $t = \tau$ までの $z(t)$ の時間発展を表現する形式的な解は以下のように書ける。但し以下は飽くまで形式的な解であることに留意する必要がある。私達が必要な形に「解けた」わけではない。

$$z(\tau) = \left[e^{\tau\{, H\}} \right] z(0). \quad (5)$$

ここで、以下のように分割可能なハミルトニアンを考える。例えば $T(p)$ は運動エネルギー、 $V(q)$ はポテンシャルエネルギーである。このようにハミルトニアンが分割可能であることは、シンプレクティック数値積分法のもっとも基礎的な前提のひとつである。

$$H = T(p) + V(q). \quad (6)$$

すると形式的な解 (5) は

$$z(\tau) = \left[e^{\tau(A+B)} \right] z(0), \quad (7)$$

となる。但し

$$A \equiv \{, T\}, \quad B \equiv \{, V\}, \quad (8)$$

である。ここで、 $T(p)$, $V(q)$ はそれぞれ独立には積分可能であるとする。即ち

$$z_A(\tau) = \left[e^{\tau A} \right] z_A(0), \quad z_B(\tau) = \left[e^{\tau B} \right] z_B(0), \quad (9)$$

の両方が個別には求積可能であることを意味する。ここで登場するのが吉田記事にも出て来た BCH (Baker–Campbell–Hausdorff) 公式である。BCH 公式を適用した一次のシンプレクティック数値積分法の公式は以下のようなになる。

$$e^{\tau\{, T\}} e^{\tau\{, V\}} = e^{\tau\{, \tilde{H}_{1st}\}}, \quad (10)$$

但し

$$\tilde{H}_{1st} = T + V + \frac{\tau}{2}\{T, V\} + \frac{\tau^2}{12}(\{\{T, V\}, V\} + \{\{V, T\}, T\}) + \frac{\tau^3}{24}\{\{\{T, V\}, V\}, T\} + \dots, \quad (11)$$

である。二次の公式も同様にして

$$e^{\frac{\tau}{2}\{,T\}}e^{\tau\{,V\}}e^{\frac{\tau}{2}\{,T\}} = e^{\tau\{, \tilde{H}_{2nd}\}}, \quad (12)$$

但し

$$\tilde{H}_{2nd} = T + V + \tau^2 \left(\frac{1}{12} \{ \{ T, V \}, V \} - \frac{1}{24} \{ \{ V, T \}, T \} \right) + O(\tau^4), \quad (13)$$

となる。同様にして n 次の公式と代理ハミルトニアン (surrogate Hamiltonian) \tilde{H}_n は以下のようになる。 H_{err} は誤差ハミルトニアン (error Hamiltonian) と呼ばれている。

$$\tilde{H}_n = H + H_{err} + O(\tau^{n+1}), \quad (14)$$

2. 混合変数型の方法

シンプレクティック数値積分法の一次の公式 (10) や二次の公式 (12) は汎用であったが、太陽系天体の場合には太陽の重力が支配的であるという特徴がある。この特徴を考慮し、シンプレクティック数値積分の実行効率を大いに高めることができる。この方法は Wisdom & Holman (1991, 1992) および Kinoshita et al. (1991) に於いて発案され、その後の応用的シンプレクティック数値積分法の発展に極めて大きな貢献を果たした。本稿ではこの方法を Wisdom-Holman map あるいは WH map と呼ぶことにする。

2.1 Wisdom-Holman map

太陽系のように中心星の重力が支配的な系では、ハミルトニアンの分割を以下のようにすることが出来る。

$$H = H_{kep} + \epsilon H_{int}. \quad (15)$$

H_{kep} は中心星周りのケプラー運動を表すハミルトニアン、 ϵH_{int} は惑星同士の相互作用を表すハミルトニアンである。式 (15) 右辺第二項の係数 ϵ は、ケプラー運動ハミルトニアンが相互作用ハミルトニアンに比べて非常に大きいということを形式的に表すために付加したものである。

ハミルトニアンを (15) のように分割した場合、二次の公式を用いて書き下した誤差ハミルトニアンは以下のようになる。

$$\begin{aligned} H_{err} &= \frac{\tau^2}{12} \{ \{ H_{kep}, \epsilon H_{int} \}, \epsilon H_{int} \} - \frac{\tau^2}{24} \{ \{ \epsilon H_{int}, H_{kep} \}, H_{kep} \} + O(\tau^4) \\ &= \frac{\epsilon \tau^2}{24} \{ \{ H_{kep}, H_{int} \}, H_{kep} \} + O(\epsilon^2 \tau^2) + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) が意味するところは即ち、シンプレクティック数値積分法による誤差が τ^2 から $\epsilon \tau^2$ に低減されているということである。惑星運動の場合、摂動の大きさ ϵ は摂動関数の大きさのオーダー、つまり惑星質量と太陽質量の比に相当する。太陽系であれば、木星質量が太陽質量の $1/1000$ であることを考えると大雑把に言って

$$\epsilon H_{int} \sim 10^{-3} H_{kep}, \quad (17)$$

となる。ハミルトニアンの分割 (15) を用いた新しいシンプレクティック数値積分法で使われる時間ステップを τ_{new} とし、従来の方と誤差の程度を等しくする、すなわち H_{err} の主要項を同じ大きさに保とうとすると、二次の方法ならば

$$\epsilon \tau_{new}^2 \sim \tau^2, \quad (18)$$

となるので、結局

$$\therefore \tau_{new} \sim \epsilon^{-\frac{1}{2}} \tau \sim 32\tau, \quad (19)$$

となる。即ち、ハミルトニアン分割として (15) で表される方法を採用すると、従来の方法 (6) に比べて一桁以上の高速化が実現されることになる。もちろん刻み幅を不変に保てばこの新しい方法は従来の方法に比べて誤差ハミルトニアンが大きさが ϵ 倍に小さく、高い精度を実現できる。

ちなみに n 次の公式を考えると、刻み幅は

$$\tau_{new} \sim \epsilon^{-\frac{1}{n}} \tau \quad (20)$$

となる。新しい刻み幅が $\epsilon^{-\frac{1}{n}}$ に比例することから、(15) の分割方法は次数が低いほど高速化の効率が高いことがわかる。WH map としては専ら二次の方法が用いられている所以である。

前述した微分演算子を用いて新しい公式による時間発展を記述すると、一ステップ (時間 τ) 分は以下ようになる。

$$e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{kep}\}} e^{\tau\{, \epsilon H_{int}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{kep}\}}. \quad (21)$$

式 (21) を複数個連ねた実際のスキームは以下ようになる。

$$e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{kep}\}} e^{\tau\{, \epsilon H_{int}\}} e^{\tau\{, H_{kep}\}} e^{\tau\{, \epsilon H_{int}\}} \dots e^{\tau\{, \epsilon H_{int}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{kep}\}}. \quad (22)$$

ここで $H_{kep}(L)$ は軌道要素 (Delauney 変数) で積分可能、 $H_{int}(q)$ は直交座標で積分可能である。もう少し具体的に書けば以下ようになる。

$$\begin{aligned} H &= H_{kep} + \epsilon H_{int} \\ &= H_{kep}(L) + \epsilon H_{int}(L, G, H, l, g, h) \\ &= H_{kep}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon H_{int}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) のように二種類の変数が混在することから、この新しいシンプレクティック数値積分法は混合変数型の方法とも呼ばれる。式 (23) を見てわかるように、この新しいハミルトニアン分割方法は H_{kep} と ϵH_{int} の評価 (これらのハミルトニアンに支配された系の時間進化。ハミルトニアン偏微分の計算と言っても良い) の度に変数変換が必要であり、従来の方法に比べるとその分やや計算の効率が落ちる。但しこの変数変換は Gauss の fg 法など (Danby, 1992) を用いて比較的高速な実装を実現することが可能である。

参考までに Gauss の fg 法の概要を述べておく。 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ と $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ をそれぞれ時刻 t_0 に於ける天体のケプラー軌道上の位置ベクトルと速度ベクトルとする。この二種のベクトルは平行ではないと仮定する。つまり、軌道の角運動量は 0 ではないとする。軌道運動は平面内に限る。 $\mathbf{r}(t)$ を時刻 t に於けるケプラー軌道上の位置ベクトル、 $\mathbf{v}(t)$ を時刻 t に於ける速度ベクトルとすると、初期の位置ベクトル \mathbf{r}_0 と速度ベクトル \mathbf{v}_0 は定ベクトルであるから、一意に確定するスカラー関数 f と g を用いてこの $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{v}(t)$ を以下のように記述することができる。

$$\mathbf{r}(t) = f(t, t_0)\mathbf{r}_0 + g(t, t_0)\mathbf{v}_0, \quad (24)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{f}(t, t_0)\mathbf{r}_0 + \dot{g}(t, t_0)\mathbf{v}_0, \quad (25)$$

但し

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}, \quad \dot{g} = \frac{dg}{dt}, \quad (26)$$

である。\$f, g, \dot{f}, \dot{g}\$の具体的な関数形と値に関する詳細は Danby (1992) や Battin (1987) に記されている。

参考までに、WH map を用いて太陽系全 9 惑星の軌道運動を±40 億年以上数値積分した例 (Ito and Tanikawa, 2002) に於ける全エネルギーと全角運動量の保存状況を図 2に示す。この数値積分では \$10^{12}\$個近い時間ステップ数が踏まれているが、全エネルギー (図 2下) に永年誤差は見られず、相対誤差 \$10^{-9}\$以内程度で良好に保存している。一方、全角運動量 (図 2上) は全般的には相対誤差 \$10^{-11}\$で保存している。陽解法のシンプレクティック数値積分に於いては角運動量に相当する量が厳密に保存されるため (Yoshida, 1990a)、数値的な誤差は打ち切り誤差 (truncation error) ではなく丸め誤差 (round-off error) に支配されるためである。なお、角運動量の相対誤差には何らかの永年的な変化が発現しているように見えるが、これは数値積分を実行した各種計算機の OS や数学関数の実装方法に於ける丸め誤差処理方法の違いに起因するものであることが確認されている (Ito, 2000)。実際のところ、丸め誤差の見地から見て許容範囲内の WH map 実行環境を提供する計算機はさほど多くはない。PC 上の FreeBSD や Linux はおおむね合格である。HP-UX, ひと昔前の Solaris (2.5.1 まで) や IRIX (6.2 まで) も何とか許容範囲にある。けれども alpha 系の OSF/1 や Tru64 UNIX, および Solaris や IRIX の新しい版の数学関数は丸め誤差の処理に殆ど気を使っておらず、精度の高いシンプレクティック数値積分法の実行にはまったく不向きであることが判明している。

2.2 Jacobi 座標

その定式化の過程を見れば明らかのように、混合変数型のシンプレクティック数値積分法で用いられるハミルトニアンには以下のような形式が要請される。

1. ケプラー項部分が二体問題を表すハミルトニアン $H_{kep} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\mu}{r}$ と同等、あるいはこの和の形に書ける。
2. 相互作用項が $\epsilon H_{int} = V(r)$ という相互距離のみの関数である。

けれども太陽中心座標 (heliocentric) や重心中心座標 (barycentric) は上記の要請を満たすことができない。例えば重心中心の座標でハミルトニアンを書き下してみると

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=0}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \left(- \sum_{i=1}^N \frac{Gm_0m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} + \sum_{i=1}^N \frac{Gm_0m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} \right) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\
 &= \frac{p_0^2}{2m_0} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_0m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{Gm_0m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} - \left(\sum_{j=1}^N \frac{Gm_0m_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) \\
 &= \frac{p_0^2}{2m_0} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_0m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \tag{27}
 \end{aligned}$$

のようになり、太陽の運動エネルギー $p_0^2/2m_0$ が H_{kep} にも ϵH_{int} にも分類不能になってしまう。混合変数型の WH map を実装するためには、ハミルトニアンを私達が望む形に分割できるための正準変数の組が必要なのである。幸いなことに、私達の要請を満たす正準変数の組は存在する。いわゆる Jacobi 座標と呼ばれるものがそれであり、以下の $\tilde{\mathbf{r}}_i$ のように定義される (Plummer, 1960)。

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \frac{1}{\sigma_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} m_j \mathbf{r}_j, \tag{28}$$

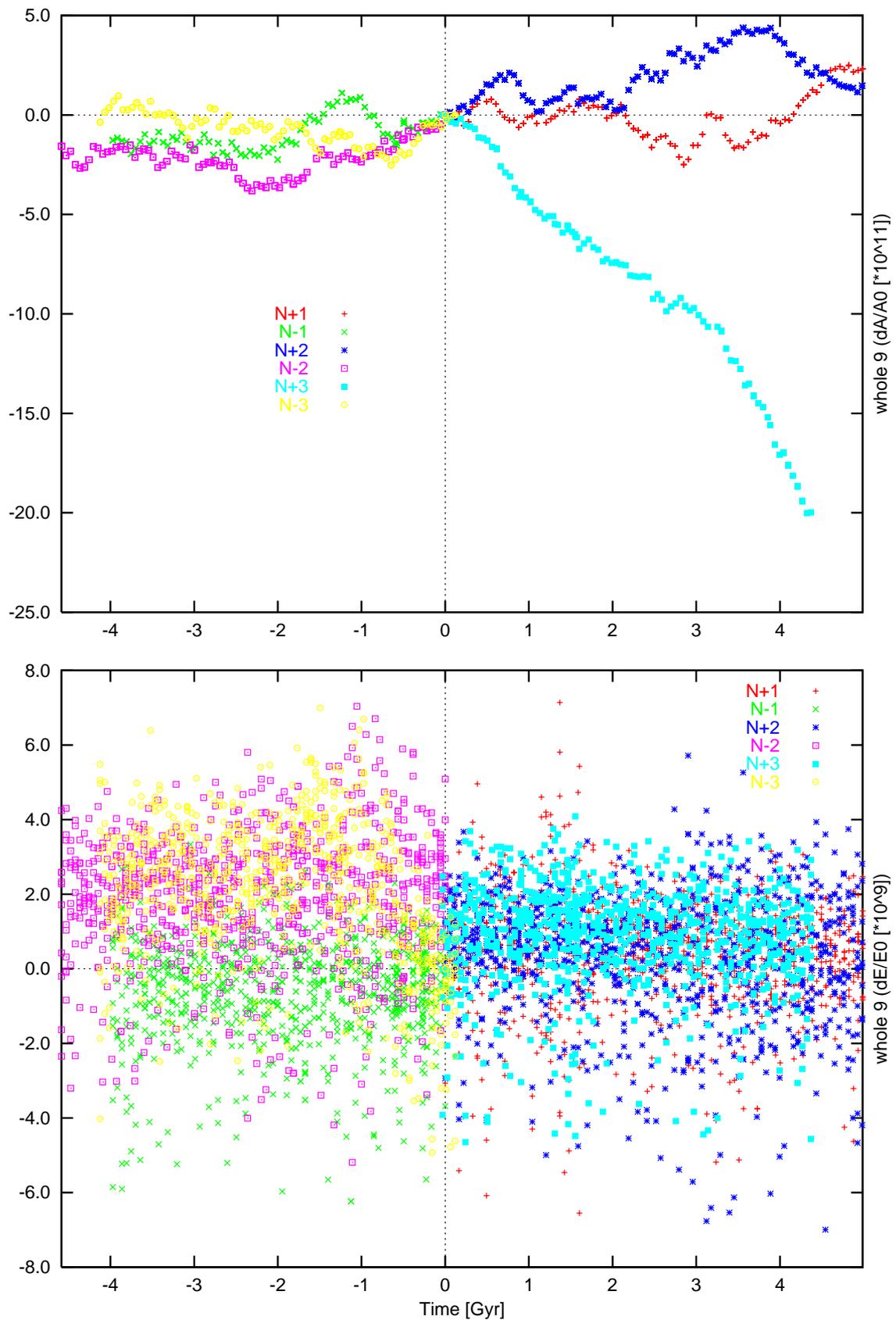


図 2. [An example of relative errors in orbital energy and angular momentum of planetary motions] WH map による数値積分での全エネルギーと全角運動量の相対的な保存の例。複数の異なる初期値から出発した数値積分の結果を重ねてプロットしている。

但し

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + m_i, \quad \sigma_0 = m_0 = \text{太陽質量}, \quad \sigma_{-1} \equiv 0, \quad (29)$$

$$\tilde{m}_i = \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} m_i, \quad (30)$$

$$\tilde{\mu}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}} G, \quad (31)$$

座標 \tilde{r}_i に対応する共役な運動量は

$$\tilde{p}_i = \tilde{m}_i \tilde{v}_i, \quad (32)$$

であり、速度は

$$\tilde{v}_i = \frac{d\tilde{r}_i}{dt}. \quad (33)$$

となる。Jacobi 座標を用いてハミルトニアンを書き下してみると以下ようになる。

$$H = H_{kep} + \epsilon H_{int}, \quad (34)$$

但し

$$H_{kep} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tilde{p}_i^2}{2\tilde{m}_i} - \tilde{\mu}_i \frac{\tilde{m}_i m_0}{\tilde{r}_i} \right), \quad (35)$$

$$\epsilon H_{int} = H_{direct} + H_{indirect}, \quad (36)$$

$$H_{direct} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (37)$$

$$H_{indirect} = G \sum_{i=1}^N m_i m_0 \left(\frac{1}{\tilde{r}_i} - \frac{1}{r_i} \right). \quad (38)$$

上記ハミルトニアンの具体的な導出は Ito (2000) などに記されている。Jacobi 座標で表現する角運動量の表式も同様にして得ることが可能である。

2.2.1 Jacobi 座標による偏微分

Jacobi 座標の定義式は (28) だが、これを成分表記で以下のように書くことにする。

$$\tilde{q}_i = q_i - \frac{1}{\sigma_{i-1}} \sum_{j<i} m_j q_j. \quad (39)$$

さて、Jacobi 座標で書かれたハミルトニアンから出発して WH map を実装する際、以下のような偏微分が頻出する。

$$\frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \tilde{q}_i}, \quad (40)$$

但し $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_N)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ である。太陽中心座標 q で書かれたハミルトニアンの全微分を考えると

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_N} dq_N, \quad (41)$$

なので、結局 (40) は

$$\frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_i} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \tilde{q}_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_N} \frac{\partial q_N}{\partial \tilde{q}_i} \quad (42)$$

$$= \sum_{j=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}, \quad (43)$$

となる。この偏微分 $\partial q_j / \partial \tilde{q}_i$ を計算する作業は、(39) の逆変換が

$$q_i = \tilde{q}_i + \sum_{j<i} \frac{m_j \tilde{q}_j}{\sigma_j}, \quad (44)$$

であることを確認する作業と関連している。以下ではこのことを確認してみる。

まず式 (39) を行列形式で書くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \vdots \\ \tilde{q}_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{m_1}{\sigma_1} q_1 + q_2 \\ -\frac{m_1}{\sigma_2} q_1 - \frac{m_2}{\sigma_2} q_2 + q_3 \\ \vdots \\ -\frac{m_1}{\sigma_{N-1}} q_1 - \frac{m_2}{\sigma_{N-1}} q_2 - \dots - \frac{m_{N-1}}{\sigma_{N-1}} q_{N-1} + q_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -\frac{m_1}{\sigma_1} & 1 & & & \\ -\frac{m_1}{\sigma_2} & -\frac{m_2}{\sigma_2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{m_1}{\sigma_{N-1}} & -\frac{m_2}{\sigma_{N-1}} & \dots & -\frac{m_{N-1}}{\sigma_{N-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (45)$$

となる。これを

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad (46)$$

と書くことにする。同様に (44) も

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \frac{m_1}{\sigma_1} \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 \\ \frac{m_1}{\sigma_1} \tilde{q}_1 + \frac{m_2}{\sigma_2} \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 \\ \vdots \\ \frac{m_1}{\sigma_1} \tilde{q}_1 + \frac{m_2}{\sigma_2} \tilde{q}_2 + \frac{m_3}{\sigma_3} \tilde{q}_3 + \dots + \frac{m_{N-1}}{\sigma_{N-1}} \tilde{q}_{N-1} + \tilde{q}_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \frac{m_1}{\sigma_1} & 1 & & & \\ \frac{m_1}{\sigma_1} & \frac{m_2}{\sigma_2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{m_1}{\sigma_1} & \frac{m_2}{\sigma_2} & \dots & \frac{m_{N-1}}{\sigma_{N-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \vdots \\ \tilde{q}_N \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (47)$$

となるので、これを

$$\mathbf{q} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{q}}, \quad (48)$$

と書く。行列 A の i 行目は

$$-\frac{m_1}{\sigma_{i-1}} \quad -\frac{m_2}{\sigma_{i-1}} \quad \cdots \quad -\frac{m_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad (49)$$

($i-1$ 列) (i 列) ($i+1$ 列)

であり、行列 B の j 列目は

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \quad (j-1 \text{ 行}) \\ 1 \quad (j \text{ 行}) \\ \frac{m_j}{\sigma_j} \quad (j+1 \text{ 行}) \\ \vdots \\ \frac{m_j}{\sigma_j} \end{array} \quad (50)$$

となっている。

(i) $i = j$ の場合 明らかに

$$(AB)_{ij} = (AB)_{ii} = 1 \times 1 = 1, \quad (51)$$

である。従って積行列 AB の対角成分は 1 になる。

(ii) $i < j$ の場合 (49) より、 A の i 行目の第 $i+1$ 成分以降は 0 となる。(50) より、 B の j 列目の第 $j-1$ 成分以前は 0 となる。従って

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} = 0, \quad (52)$$

となる。

(iii) $i > j$ の場合 (49)(50) より、 $(AB)_{ij}$ のうち 0 でない積を産み出すのは、 A の i 行目および B の j 列目の第 j 成分から第 i 成分までのみである。従って

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=j}^i A_{ik} B_{kj} \\ &= \underbrace{-\frac{m_j}{\sigma_{i-1}} \times 1}_{k=j} + \underbrace{\left(-\frac{m_{j+1}}{\sigma_{i-1}} - \cdots - \frac{m_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \right) \times \frac{m_j}{\sigma_j}}_{k=j+1, \dots, i-1} + \underbrace{1 \times \frac{m_j}{\sigma_j}}_{k=i} \\ &= -\frac{m_j}{\sigma_{i-1}} - \frac{m_j}{\sigma_j \sigma_{i-1}} \underbrace{\sum_{k=j+1}^{i-1} m_k}_{=\sigma_{i-1} - \sigma_j} + \frac{m_j}{\sigma_j} \\ &= \frac{1}{\sigma_{i-1}} \left[-m_j - \frac{m_j}{\sigma_j} (\sigma_{i-1} - \sigma_j) \right] + \frac{m_j}{\sigma_j} \\ &= \frac{m_j}{\sigma_{i-1}} \left(-1 - \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_j} + 1 \right) + \frac{m_j}{\sigma_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m_j}{\sigma_j} + \frac{m_j}{\sigma_j} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{53}$$

(51)(52)(53) より、積行列 AB は単位行列であることが示された。これにより、(39) と (44) は互いに逆変換になっていることがわかる。それに加え、式 (47) の一行目を見るまでもなく、懸案の偏微分係数の値はここまでの過程で

$$\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} = B_{ij} = \begin{cases} \frac{m_i}{\sigma_i}, & (i < j) \\ 1, & (i = j) \\ 0, & (i > j) \end{cases} \tag{54}$$

であることが明らかに判明した。

3. Warm Start

シンプレクティック数値積分法が包含する誤差、特に平均近点離角などの角変数の誤差は、軌道半長径などの作用変数の平均的誤差に由来している。ここでは作用変数を一般に J と書くことにすると、その平均的誤差とは以下のようなものである。

$$\langle \tilde{J} - J \rangle, \tag{55}$$

但し \tilde{J} は代理系 (surrogate system) の作用変数であり、 $\langle \rangle$ は時間平均を表すものとする。例えば、軌道半長径 a の時間平均誤差 Δa に由来する平均近点離角 l の誤差 Δl は、二体問題の諸公式からすぐに以下のように見積もられる。 n は平均運動を表す。

$$\Delta l \propto \int \frac{\Delta a}{a} n dt, \tag{56}$$

このような角変数の永年誤差はシンプレクティック数値積分法では時間の一次に比例するに留まるとは言え、長い積分期間の間には重大な大きさに成り得る。これをなるべく小さくするための工夫が warm start と呼ばれる特殊な数値積分の開始方法である (Saha and Tremaine, 1992)。

Warm start の原理は非常に簡単である。まず、刻み幅 $\tau \rightarrow 0$ の極限では代理系のハミルトニアン \tilde{H} は真の系のハミルトニアン H に等しく、従って作用変数 \tilde{J} も J に一致する。この状況から出発し、刻み幅 τ を徐々に大きくして行くと、最終的には代理系ハミルトニアン \tilde{H} は真の系のハミルトニアンから誤差分だけずれる。

$$\tilde{H}(\sim H) \rightarrow H + H_{err}. \tag{57}$$

この時のポイントは「徐々に」という点である。ハミルトン力学系のいわゆる断熱定理により、系を記述する或る種のパラメータ (この場合には刻み幅 τ) が非常にゆっくりと変化した場合にエネルギーは一般に変化するが、作用変数は変化しない (戸田, 1994)。即ち作用変数は断熱不変量 (adiabatic invariants) であり、

$$\tilde{J} \sim J, \tag{58}$$

となるのである。

3.1 Warm Start のもう少し詳しい説明

Warm start によってシンプレクティック数値積分法の角変数の誤差が低減できることの本質的な理由は、前述の断熱定理の適用で尽きている。が、ここではもう少し定量的な解説を試みている。以下の説明は基本的に Saha & Tremaine (1992) に沿ってはいるが、当該論文の記載はかなり直感的かつ抽象的であり、あまつさえ一部は不正確である。本稿ではその辺りを記載を修正しながら話を進める。が、完全に厳密な論理展開にはなっていないかもしれない部分があることをあらかじめお断りしておく。

WH map に於ける代理系のハミルトニアン \tilde{H} と真の系のハミルトニアン H の関係が以下であることは何度も述べた通りである。

$$\tilde{H} = H + H_{err}, \quad (59)$$

$$H = H_{kep} + \epsilon H_{int}, \quad (60)$$

$$H_{err} = \frac{\epsilon \tau^2}{24} \{ \{ H_{kep}, H_{int} \}, H_{kep} \} + O(\epsilon^2 \tau^2). \quad (61)$$

以下の議論では、誤差ハミルトニアン H_{err} を真の系のハミルトニアン $H = H_{kep} + \epsilon H_{int}$ に対する摂動と看做し、摂動論を適用して解を求めるという方針を採用する。

代理系および真の系に於ける作用変数と角変数を具体的に以下のように記す。

$$\begin{cases} \text{代理系の作用変数} & \tilde{J} = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3) \\ \text{代理系の角変数} & \tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3) \\ \\ \text{真の系の作用変数} & J = (J_1, J_2, J_3) \\ \text{真の系の角変数} & \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{cases}$$

ケプラー運動を表すハミルトニアン H_{kep} に関しては、作用変数と角変数は以下のような Delauney 変数で記述することにする。実際には H_{kep} は L のみの関数である。

$$\begin{cases} H_{kep} \text{の作用変数} & L = (L, G, H) \\ H_{kep} \text{の角変数} & l = (l, g, h) \end{cases}$$

WH map で扱うような問題では H と H_{kep} の差がせいぜい $O(\epsilon)$ であることを私達は知っている。従って、それぞれの作用変数および角変数に関する差異も以下ようになる¹。

$$\begin{aligned} J_1 &= L + O(\epsilon), & \theta_1 &= l + O(\epsilon), \\ J_2 &= G + O(\epsilon), & \theta_2 &= g + O(\epsilon), \\ J_3 &= H + O(\epsilon), & \theta_3 &= h + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (63)$$

¹この言い回しは極めて直感的だが、以下のように考えると理解できた気になるかもしれない。後述する正準変換摂動論を適用すると、例えば真の系に於ける作用変数 J_1 は一次の近似の範囲内で

$$J_1 = \bar{J}_1 - \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta_1} \int (H_{int} - \overline{H_{int}}) d\bar{t}, \quad (62)$$

と表すことができる。ここで \bar{J}_1 は積分可能な時間平均ハミルトニアン $\langle H_{kep}(\bar{J}_1) \rangle$ の作用変数、つまり L に相当するものである。 $H = H_{kep} + \epsilon H_{int}$ の場合を考えれば一目瞭然だが、 $\epsilon \rightarrow 0$ なら $H \rightarrow H_{kep}$ で且つ $J_1 \rightarrow \bar{J}_1$ となるのだから、 \bar{J}_1 は L と同等である。従って J_1 と L_1 は $O(\epsilon)$ の違いしか無い。他の変数に関しても同様である。

ここで H_{kep} は L のみの関数 ($H_{kep} = -\sum_i \frac{\mu_i^2}{2L_i^2}$) なので、 $J_2, J_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ に対する H_{kep} の依存性はすべて $O(\epsilon)$ の大きさに限られる。より具体的に書けば以下ようになる。式 (63) より $J_1 = L + O(\epsilon)$ なので、これを

$$L = J_1 + \epsilon, \quad (64)$$

と書くことにすると、

$$\begin{aligned} H_{kep} &= H_{kep}(L) \\ &= H_{kep}(J_1 + \epsilon) \\ &= H_{kep}(J_1) + \frac{\partial H_{kep}(J_1)}{\partial J_1} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_{kep}(J_1)}{\partial J_1^2} \epsilon^2 + \dots, \end{aligned} \quad (65)$$

となる。従って、式 (65) を偏微分すると $\frac{\partial H_{kep}}{\partial J_1}$ については $O(1)$ の量が残るが、それ以外は

$$\frac{\partial H_{kep}}{\partial J_2} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial H_{kep}}{\partial J_3} = O(\epsilon), \quad (66)$$

$$\frac{\partial H_{kep}}{\partial \theta_1} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial H_{kep}}{\partial \theta_2} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial H_{kep}}{\partial \theta_3} = O(\epsilon), \quad (67)$$

となる。これが上述した「 $J_2, J_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ に対する H_{kep} の依存性はすべて $O(\epsilon)$ の大きさに限られる」の意味である。

式 (67) を式 (61) に代入し、Poisson 括弧 $\{, \}$ を真の系の正準変数 (J, θ) で評価し、誤差ハミルトニアン H_{err} を書き直してみる。すると、 $O(\epsilon)$ までの近似では誤差ハミルトニアンには $\frac{\partial H_{kep}}{\partial J_1}$ を含む項しか残らないことがすぐにわかる。式 (61) を見ればわかるように、誤差ハミルトニアン H_{err} には元々 ϵ のファクターが掛かっているからである。

$$H_{err} = -\frac{\epsilon \tau^2}{24} \left(\frac{\partial H_{kep}}{\partial J_1} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2} \right) + O(\epsilon^2 \tau^2). \quad (68)$$

ここで、私達は太陽系の惑星運動のように有界な運動のみを念頭に置いていることを思い出そう。すると、式 (68) の $\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2}$ は周期項のみで構成されていなければならないことがわかる。仮に $\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2}$ 内に定数項が含まれており、例えば

$$\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2} = C_1, \quad (69)$$

のような状況だとすれば、これを θ_1 で積分することで

$$\frac{\partial H_{int}}{\partial \theta_1} = C_1 \theta_1 + C_2, \quad (70)$$

となる。 C_2 は別種の積分定数である。 H_{int} に関する作用変数のひとつ $J_{1, H_{int}}$ を

$$\frac{dJ_{1, H_{int}}}{dt} = \frac{\partial H_{int}}{\partial \theta_1} = C_1 \theta_1 + C_2, \quad (71)$$

と置くことで定めると、(71) を時間で積分することで

$$J_{1, H_{int}} = C_2 t + f(\theta_1; t), \quad (72)$$

を得る。ここで $f(\theta_1; t)$ は θ_1 と t の関数である。式 (72) の意味するところは、もし式 (68) の $\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2}$ に定数項が含まれているなら、作用変数 $J_{1, H_{int}}$ には時刻に比例する永年項が現れるということである。少なくとも私達は有界な運動を扱っているのだから、時刻に比例する作用変数の永年変化とは縁が無いはずである。従って式 (68) の $\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2}$ には定数項は無く、周期項のみを含むということになる。 $\frac{\partial^2 H_{int}}{\partial \theta_1^2}$ が周期項だけで表されるという事実は、惑星間摂動を表す摂動関数の中に“生の”角変数 θ が現れては来ないということをも意味する。摂動関数内の角変数は、すべて $\sin \theta$ や $\cos \theta$ と言った周期関数の形で現れる。

以上より、 $O(\epsilon)$ までの近似範囲内では誤差ハミルトニアン H_{err} は周期項のみを含み、永年項を含まないことがわかる。従って H_{err} の時間平均値は以下ようになる。

$$\langle H_{err} \rangle = O(\epsilon^2 \tau^2). \quad (73)$$

式 (73) が表す事実は後に、warm start の誤差低減原理に於いて本質的な役割を果たす。

本節では以降、WH map を一種の摂動問題として扱う。即ち、積分可能なハミルトニアン H に対して摂動 H_{err} が加わった $\tilde{H} = H + H_{err}$ という系を解く問題として WH map を扱うのである。以下の議論では H_{kep} , ϵH_{int} , H_{err} をそれぞれ

$$H_{kep} \rightarrow H_0, \quad \epsilon H_{int} \rightarrow H_1, \quad H_{err} \rightarrow H_2, \quad (74)$$

と置き換えて話を進める。下添字 0, 1, 2 は各項に関する摂動のオーダーと捉えても悪くはない。

3.1.1 真の系

真の系を支配するハミルトニアンは以下である。

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{J}) + H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}). \quad (75)$$

$H_0(\mathbf{J})$ は $H_{kep}(L)$ に $L = \mathbf{J}$ を代入したものである (実際には H_{kep} が L のみの関数であることは既述なので、厳密な書き方とは言えない)。Hori (1966, 1967) や Deprit (1969) の摂動論を用いると、或る母関数を用いて H を角変数 $\boldsymbol{\theta}$ を含まない以下のような形に正準変換することができる。

$$H^*(\mathbf{J}^*) = H_0^*(\mathbf{J}^*) + H_1^*(\mathbf{J}^*). \quad (76)$$

式 (76) での上添字 * は当該変数が正準変換されたものであることを示す。以下の議論でも同様である。Hori (1966, 1967) らの理論に従うと、 $O(\epsilon)$ までの近似で

$$H_0^*(\mathbf{J}^*) = H_0(\mathbf{J}^*), \quad (77)$$

$$H_1^*(\mathbf{J}^*) = \langle H_1(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \rangle_{\boldsymbol{\theta}^*}, \quad (78)$$

$$W_{real} = \int (H_1 - H_1^*) dt^*, \quad (79)$$

となる。但し W_{real} は正準変換の母関数であり、下添字 $\langle \rangle_{\boldsymbol{\theta}^*}$ は角変数 $\boldsymbol{\theta}^*$ に関する平均化を表す。この正準変換により元々の $H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$ が積分可能な形 $H^*(\mathbf{J}^*)$ に変換されるので、新しい作用変数 \mathbf{J}^* の解を得ることができる。となれば、 $O(\epsilon)$ までの近似での最終的な解は \mathbf{J} は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}^* + \{ \mathbf{J}^*, W_{real} \} \\ &= \mathbf{J}^* - \frac{\partial W_{real}}{\partial \boldsymbol{\theta}^*}. \end{aligned} \quad (80)$$

3.1.2 代理系

代理系のハミルトニアンは以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\tilde{J}, \tilde{\theta}) &= H(\tilde{J}, \tilde{\theta}) + H_{err}(\tilde{J}, \tilde{\theta}) \\ &= H_0(\tilde{J}) + H_1(\tilde{J}, \tilde{\theta}) + H_2(\tilde{J}, \tilde{\theta}).\end{aligned}\quad (81)$$

$H_0(\tilde{J})$ は例によって $H_{kep}(L)$ に $L = \tilde{J}$ を代入したようなものである。

ここでは、 $H_1 + H_2 = \epsilon H_{int} + H_{err}$ をひとまとめにして摂動を受けたハミルトン系と捉えることにする。母関数 W_{surr} を用いた正準変換を行って角変数 $\tilde{\theta}$ を除去すると、真の系の場合と同様に以下のような結果を得る。

$$\tilde{H}^*(\tilde{J}^*) = H_0^*(\tilde{J}^*) + H_1^*(\tilde{J}^*) + H_2^*(\tilde{J}^*), \quad (82)$$

但し

$$H_0^*(\tilde{J}^*) = H_0(\tilde{J}^*), \quad (83)$$

$$H_1^*(\tilde{J}^*) = \left\langle H_1(\tilde{J}^*, \tilde{\theta}^*) \right\rangle_{\tilde{\theta}^*}, \quad (84)$$

$$H_2^*(\tilde{J}^*) = \left\langle H_2(\tilde{J}^*, \tilde{\theta}^*) \right\rangle_{\tilde{\theta}^*}, \quad (85)$$

$$W_{surr} = \int [(H_1 + H_2) - (H_1^* + H_2^*)] dt^*. \quad (86)$$

この正準変換によって元々の $\tilde{H}(\tilde{J}, \tilde{\theta})$ が積分可能な形 $\tilde{H}^*(\tilde{J}^*)$ に変換されるので、解 \tilde{J}^* を得ることができる。最終的な \tilde{J} の形は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= \tilde{J}^* + \{\tilde{J}^*, W_{surr}\} \\ &= \tilde{J}^* - \frac{\partial W_{surr}}{\partial \tilde{\theta}^*}.\end{aligned}\quad (87)$$

3.1.3 真の系と代理系の差異

以上のようにして得られた真の系と代理系の解を比較するために、式 (87) から式 (80) を差し引いてみる。

$$\begin{aligned}\tilde{J} - J &= \left(\tilde{J}^* - \frac{\partial W_{surr}}{\partial \tilde{\theta}^*} \right) - \left(J^* - \frac{\partial W_{real}}{\partial \theta^*} \right) \\ &= \tilde{J}^* - J^* - \left(\frac{\partial W_{surr}}{\partial \tilde{\theta}^*} - \frac{\partial W_{real}}{\partial \theta^*} \right) \\ &= \tilde{J}^* - J^* - \frac{\partial}{\partial \theta^*} \int [(H_1 + H_2 - H_1^* - H_2^*) - (H_1 - H_1^*)] dt^* \\ &= \tilde{J}^* - J^* - \frac{\partial}{\partial \theta^*} \int (H_2 - H_2^*) dt^*.\end{aligned}\quad (88)$$

なお式 (88) の二行目から三行目に掛けては、右辺の第三項と第四項が ϵ の大きさであることを考慮して $\partial/\partial \tilde{\theta}^*$ と $\partial/\partial \theta^*$ を同一視したことに留意すること。

式 (88) の第三項は周期項のみで構成されているので、時間平均した値 (永年値) は 0 になる。従って、代理系と真の系の作用変数の差の時間平均値は以下ようになる。

$$\langle \tilde{J} - J \rangle = \langle \tilde{J} \rangle - \langle J \rangle = \tilde{J}^* - J^*. \quad (89)$$

この結果 (89) は重要な示唆を持っている。私達が知りたいのは作用変数 \tilde{J} または J の永年誤差による角変数の数値誤差、すなわちシンプレクティック数値積分法での代理系と真の系に於ける角変数の差異である。けれども式 (89) が示す $\langle \tilde{J} \rangle - \langle J \rangle = \tilde{J}^* - J^*$ という事実は、作用変数 \tilde{J} または J の永年部分に関する議論を、これらの作用変数を正準変換して周期項を消去したもの (\tilde{J}^* や J^*) に関する議論に持ち込むことができることを意味している²。

この結果に留意し、正準変換された代理系ハミルトニアン (82) に話を戻そう。式 (73) で表現された注目すべき事実、つまり $O(\epsilon)$ までの近似では $\langle H_{err} \rangle = \langle H_2 \rangle = 0$ であることより、

$$H_2^*(J^*) = 0, \quad (90)$$

が $O(\epsilon)$ までの近似で成立する。従って結局

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*(\tilde{J}^*) &= H_0^*(\tilde{J}^*) + H_1^*(\tilde{J}^*), \\ &= H(\tilde{J}^*), \end{aligned} \quad (91)$$

であることがわかる。これ故、正準変換された代理系に於ける正準周波数すなわち $\tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*)$ は、 $O(\epsilon)$ までの近似で以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*) &\equiv \frac{\partial \tilde{H}^*(\tilde{J}^*)}{\partial \tilde{J}^*} = \frac{\partial H^*(\tilde{J}^*)}{\partial \tilde{J}^*} \\ &= \omega^*(\tilde{J}^*). \end{aligned} \quad (92)$$

これは結局、 $\tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*)$ が (正準変換された) 代理系の作用変数を代入した (正準変換された) 真の系 H^* のハミルトニアンに於ける正準周波数 $\omega^*(\tilde{J}^*)$ に等しいことを意味している。

話が長くなったが、ここで私達の本来の動機に戻ろう。私達が本当に知りたかったのは、真の系 H (あるいはそれが正準変換された H^*) における正準周波数であると言うことができる。それは式 (92) に於ける $\tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*)$ ではなく、 $\omega^*(\tilde{J}^*)$ でもなく、以下である。

$$\omega^*(J^*) \equiv \frac{\partial H^*(J^*)}{\partial J^*}. \quad (93)$$

けれども式 (92) から、もし

$$\tilde{J}^* = J^*, \quad (94)$$

が何らかの条件で満たされるのであれば、

$$\omega^*(J^*) = \omega^*(\tilde{J}^*) = \tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*), \quad (95)$$

という関係が成立することがわかる。式 (95) が成立すれば、代理系 $\tilde{\omega}^*(\tilde{J}^*)$ の正準周波数は $O(\epsilon)$ までの近似で真の系の正準周波数 $\omega^*(J^*)$ と等しくなる。このことは角変数 θ の数値誤差の大きな低減に直結する。シンプレクティック数値積分法に於ける角変数の数値誤差は時刻に比例して増えに行くからである。

以上のような原理を背景とし、シンプレクティック数値積分の開始時のみならず積分の最中にも式 (94) が成立するための工夫が、断熱定理を基礎とした warm start である。

²これに関して、Saha & Tremaine (1992) の p. 1636 にある記載は妙である。同ページ左段、(19a)(19b) の次の段落には以下のような記載がある。“Since \tilde{J} is fixed in the surrogate system (\tilde{H}), and J is fixed in the real system (H), ...” ここで “fixed” が 『不動の/一定した』を意味すると思うと、正準変換を行う以前の変数である \tilde{J} や J は周期項を含んでいるのだから、明らかに “fixed” ではない。従って Saha & Tremaine (1992) の上記記載で用いられている \tilde{J} , J は、本来は短周期成分に関して平均化された変数 \tilde{J}^* , J^* を意味しているべきものである。

3.2 Warm Start の実装

Warm start の実装は困難なものではなく、以下のような手法を用いて容易に実装が可能である。

1. 数値積分の初期刻み幅 τ を非常に小さく取る。
2. 刻み幅 τ を徐々に大きくする。
3. 刻み幅 τ が望むべき値にまで大きくなったら固定し、本番の数値積分を開始する。

上記の 1. と 2. に於いては代理系ハミルトニアン \hat{H} は一定ではないので、厳密な意味ではこれはシンプレクティック数値積分ではない。Warm start が「特殊な始動方法」(“special start-up procedure”)と呼ばれる所以である。

ところで、実際の数値積分に於いては以下のような手続きがより適していることが Saha and Tremaine (1992) らに記載されている。

0. Warm Start で用いるステップ数を確定する。ここでは S ステップとする。
1. 本積分の刻み幅を τ とするが、時刻 $t = 0$ から刻み幅 $\tau_0 = \frac{\tau}{4S}$ でシンプレクティック数値積分法を稼働させ、 S ステップ進行する。一ステップごとに刻み幅を τ_0 ずつ増す。すなわち刻み幅は $\tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0, \dots, S\tau_0$ となる。
2. S ステップ進行したら、積分方向を反転させて $2S$ ステップ進む。ここでも一ステップごとに刻み幅を τ_0 ずつ増す。すなわち刻み幅は $(S + 1)\tau_0, (S + 2)\tau_0, \dots, 3S\tau_0$ となる。
3. $S + 2S = 3S$ ステップ進行したら、再び積分方向を反転させて S ステップ進む。ここでも一ステップごとに刻み幅を τ_0 ずつ増す。すなわち刻み幅は $(3S + 1)\tau_0, (3S + 2)\tau_0, \dots, 4S\tau_0$ となる。
4. これにて刻み幅は $4S\tau_0 = \tau$ となるので、この値に固定し、本積分を開始する。

上記の手続きで注目すべきことは、3. が終了する時刻、すなわち本積分を開始すべき時点の時刻がちょうど $t = 0$ になっていることである。つまり、前進する区間 1. と区間 3. の長さの合計が後退する区間 2. に等しくなっているのである (図 3)。このことは以下のように示される。

$$\begin{aligned} T_1(= \text{手続き 1. を行う期間}) &= \tau_0 + 2\tau_0 + 3\tau_0 + \dots + S\tau_0 \\ &= \frac{S(S+1)}{2}\tau_0, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} T_2(= \text{手続き 2. を行う期間}) &= (S+1)\tau_0 + (S+2)\tau_0 + (S+3)\tau_0 + \dots + 3S\tau_0 \\ &= \left(\frac{3S(3S+1)}{2} - \frac{S(S+1)}{2} \right) \tau_0 \\ &= (4S^2 + S) \tau_0, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} T_3(= \text{手続き 3. を行う期間}) &= (3S+1)\tau_0 + (3S+2)\tau_0 + (3S+3)\tau_0 + \dots + 4S\tau_0 \\ &= \left(\frac{4S(4S+1)}{2} - \frac{3S(3S+1)}{2} \right) \tau_0, \end{aligned} \quad (98)$$

従って

$$\begin{aligned}
 T_1 + T_3 &= \left(\frac{S(S+1)}{2} + \frac{4S(4S+1)}{2} - \frac{3S(3S+1)}{2} \right) \cdot \tau_0 \\
 &= (4S^2 + S) \tau_0 \\
 &= T_2,
 \end{aligned} \tag{99}$$

となるのである。なお太陽系の力学に関する諸問題では $S \sim 5000$ とすれば十分に warm start が効力を発揮し、誤差が軽減されることが経験的にわかっている。

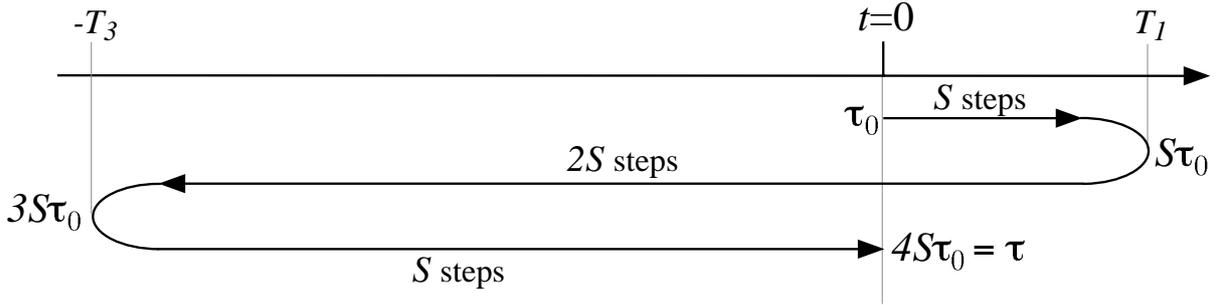


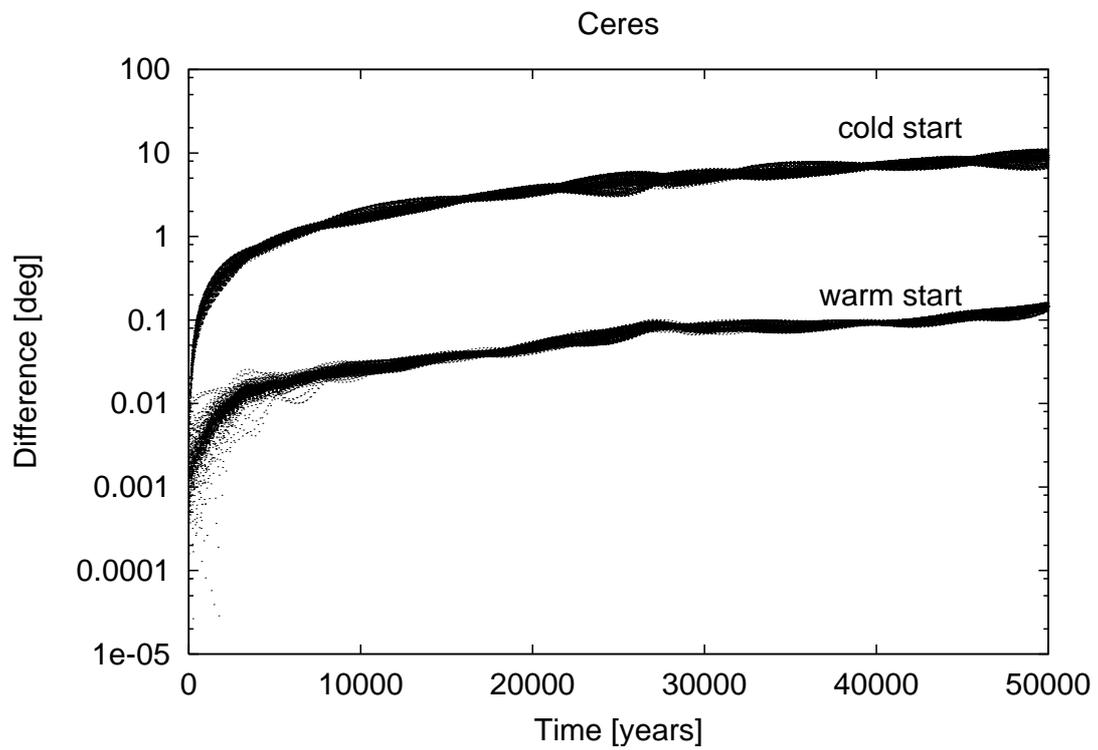
図 3. [A schematic illustration of the warm start] Warm start の模式図。初期刻み幅 τ_0 で出発して S ステップ進み、 $2S$ ステップ戻り、再び S ステップ進むと丁度出発点 $t = 0$ に戻って来る ($|T_1| + |T_3| = |T_2|$)。

3.3 Warm start の数値例

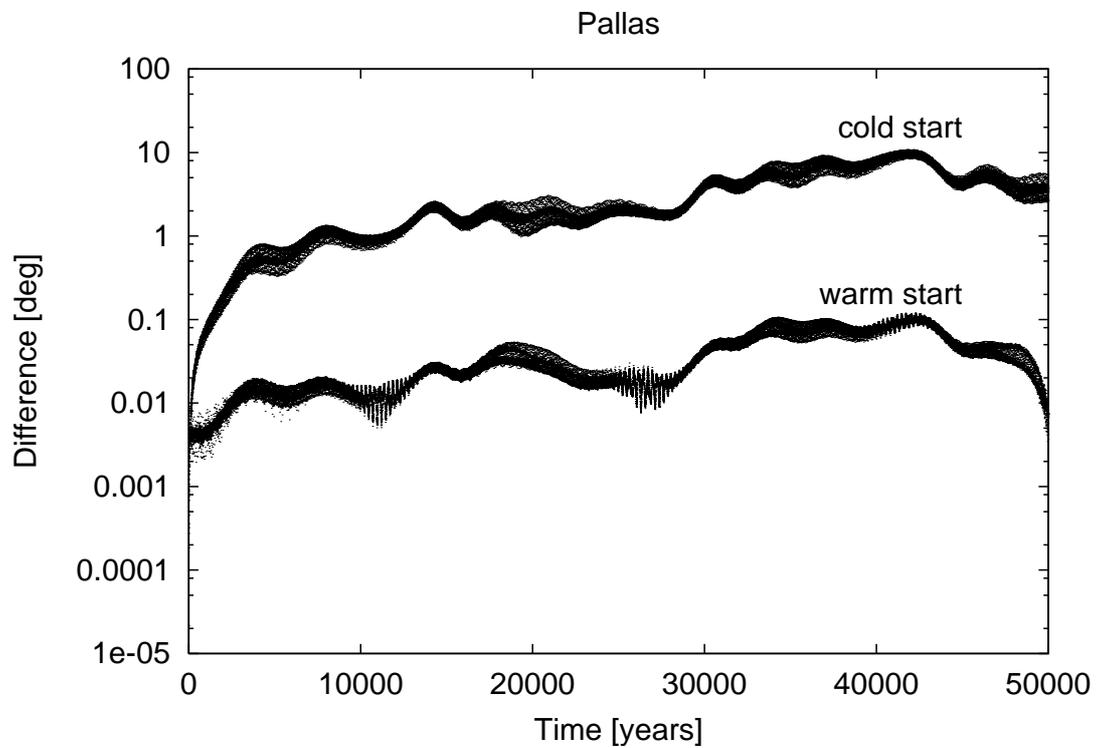
太陽-小惑星-木星の三体系を例に取り、warm start の効果を確認するための数値積分を行った。小惑星としてはいわゆる四大小惑星 (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) を対象とし、すべての天体の軌道要素と質量は現在の値を用いた。具体的には、 5×10^4 年間の数値積分を warm start を使った場合と使わなかった場合 (cold start を呼ぶ) で出発し、平均近点離角 l の計算誤差を計測した。誤差計測の基準としては非常に小さな刻み幅 ($\tau = 0.125$ 日) を用いた試験的数値積分を行い、その解を真の解と仮定した。誤差の評価は、この擬似的な真の解と本積分 ($\tau = 40$ 日) の解との差を計測することで行った。例えば図 4 は Ceres についての数値結果であるが、warm start を使った本積分での平均近点離角の誤差は、cold start による本積分での平均近点離角の誤差と比べて圧倒的に小さくなっていることがわかる。他の小惑星についても同様である (図 5, 図 6, 図 7)。かくして warm start は、その実装が極めて簡単であるにも関わらず効果的に誤差を減らし得る有益な方法であることが判明した。

4. 独立刻み幅 (individual stepsize method)

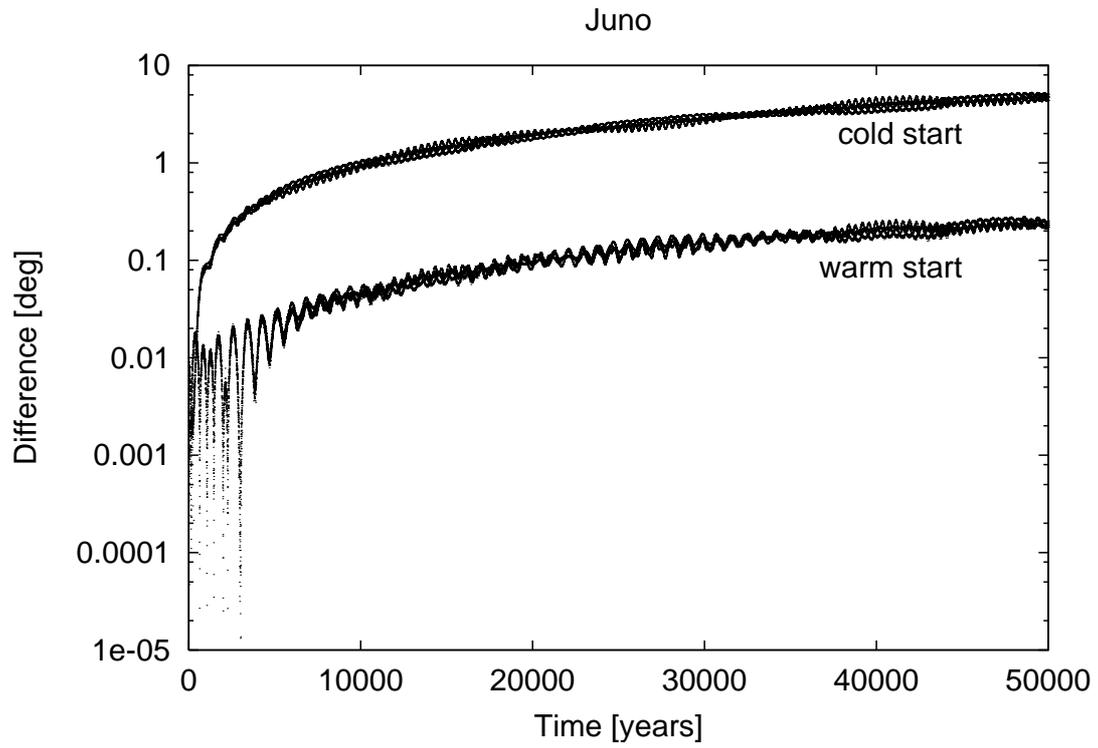
太陽系の惑星運動を考えてみると、最内惑星の水星の公転周期は 90 日未満であるのに対して最外惑星の冥王星は 250 年近い公転周期を持つ。通常は最内惑星の公転周期が刻み幅決定の目安になるが、水星の公転周期を基準にして冥王星の軌道進化を数値積分するのは明らかに無駄が多いように思える。ここでは、こうした背景から産まれた独立刻み幅の方法 (individual stepsize method)



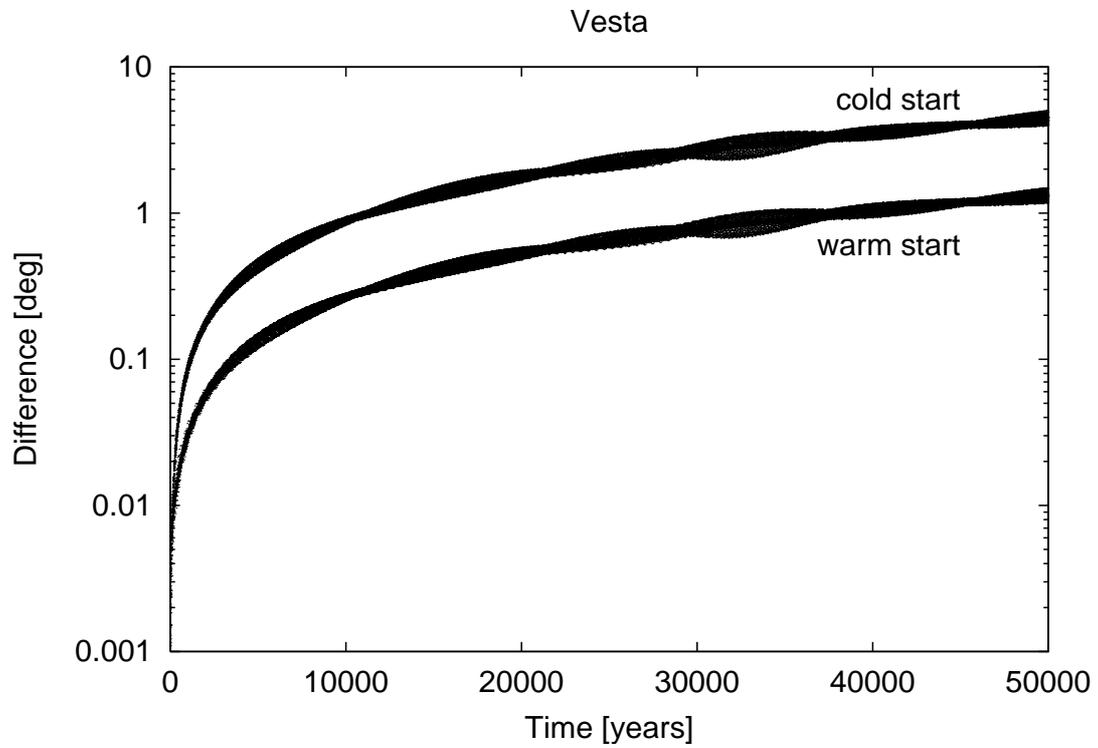
⊗ 4. An example of warm start (errors in mean anomaly): (1) Ceres.



⊗ 5. An example of warm start (errors in mean anomaly): (2) Pallas.



⊠ 6. An example of warm start (errors in mean anomaly): (3) Juno.



⊠ 7. An example of warm start (errors in mean anomaly): (4) Vesta.

について概観する (Saha and Tremaine, 1994)。なおここで言う独立刻み幅とは、各天体ごとに独立 (individual) ではあるが数値積分全般を通して固定された (fixed) ものであり、いわゆる可変 (variable) 刻み幅ではない。シンプレクティック数値積分法が可変刻み幅の方法に馴染まないことについては Gladman et al. (1991) や Yoshida (1993) らに記されている通りである。

4.1 ケプラー運動時計と相互作用時計

前述したように、中心星の重力が支配的な系でのハミルトニアン分割は以下ようになる。

$$H = H_{kep} + \epsilon H_{int}. \quad (100)$$

ここで、 H_{kep} と ϵH_{int} はそれぞれ時計 K と I に対応すると考える。

- $K \cdots$ 各天体は各自の接触軌道上をケプラー運動する。天体間の相互作用は働かない。
- $I \cdots$ 各天体の位置は不動。天体間で運動量の交換が行われる。

通常の WH map を例に取って K と I の時間発展を書き下すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\langle K \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \\ &\langle I \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\ &\langle K \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \end{aligned}$$

上記は一ステップ (刻み幅 τ 分) のみの話であり、数値積分全体では以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\langle K \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \\ &\text{loop} \\ &\quad \langle I \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\ &\quad \langle \text{出力が必要なら loop を抜ける} \rangle \\ &\quad \langle K \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\ &\text{end loop} \\ &\langle K \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \end{aligned}$$

更に話を進め、惑星が N 個ある場合を考える。この時は、ハミルトニアン H_{kep} と ϵH_{int} を以下のように分割する。

$$H_{kep} = \sum_{i=1}^N H_{kep,i}, \quad \epsilon H_{int} = \sum_{i=1}^N H_{int,i}, \quad (101)$$

但し $H_{kep,i}$ と $H_{int,i}$ はそれぞれ以下のような意味を持つ。

- $H_{kep,i} \cdots$ 天体 i のケプラー運動を表すハミルトニアン
- $H_{int,i} \cdots$ 天体 i に対する天体 $i+1, \dots, N$ の相互作用を表すハミルトニアン

具体例として $N = 2$ の場合の二ステップ (2τ) 分を書き下してみる。 $H_{int,2} = 0$ であることに注意すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_1 \text{を} \tau, K_2 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle
\end{aligned}$$

同様にして $N = 3$ の場合の三ステップ (3τ) 分は以下ようになる。この場合には $H_{int,3} = 0$ である。

$$\begin{aligned}
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau, I_2 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_1 \text{を} \tau, K_2 \text{を} \tau, K_3 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau, I_2 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_1 \text{を} \tau, K_2 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau, I_2 \text{を} \tau \text{進める} \rangle \\
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau, K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau \text{進める} \rangle
\end{aligned}$$

4.2 再帰呼び出しを使う方法

以上の背景を頭に入れれば、独立刻み幅スキームの構築方針が自ずから以下のように定められる。以下の要件を満たすようにスキームを作れば良い。

1. 各ステップ中に出て来る同一の K_i, I_i はなるべくまとめる。
2. 各ステップの終わりにはどの時計 K_i, I_i も同じだけ進んでいる。
3. 各ステップの途中でも各時計間の同期がなるべく保たれる。

上記項目を満たす独立刻み幅スキーム構築のために利用できる Poisson 括弧の性質としては以下が挙げられる。いずれも $H_{kep,i}$ や $H_{int,i}$ の定義から容易に導出が可能なものばかりなので、興味を持った読者は自分で試してみると良い。

$$\{H_{kep,i}, H_{kep,j}\} = 0, \quad \{H_{int,i}, H_{int,j}\} = 0, \quad (102)$$

$$\{H_{kep,i}, H_{int,j}\} = 0. \quad (j > i) \quad (103)$$

独立刻み幅を実装するスキームは一意ではない。ここでは Saha & Tremaine (1994) に例示された再帰型のスキームに従って解説を行う。再帰呼び出しを用いるスキームでは、天体 i に刻み幅 τ_i を割り当て、以下のようなソースコードイメージによって独立刻み幅スキームを実装する。

```

procedure TICK(i)
   $\langle K_i \text{を} \frac{1}{2}\tau_i \text{進める} \rangle$ 
   $\langle I_i \text{を} \tau_i \text{進める} \rangle$ 
  if i > 1

```

```

    loop  $\tau_i/\tau_{i-1}$  回
      call TICK( $i - 1$ )
    end loop
  end if
   $\langle K_i$ を $\frac{1}{2}\tau_i$ 進める $\rangle$ 
end TICK

```

上記のスキームで N 体系の時間進化を時間 τ_N だけ追うには、単に

```
call TICK( $N$ )
```

とすれば良い。具体的に $N = 2$ の場合 (call TICK(2)) を書き下すと、 $\tau_2 = 2\tau_1$ であるから以下のようなになる。ここで I_2 は実際には何もしないので、無視して良いことに留意する。

```

 $\langle K_2$ を $\frac{1}{2}\tau_2$ 進める $\rangle$ 
 $\langle I_2$ を $\tau_2$ 進める $\rangle$ 
   $\langle K_1$ を $\frac{1}{2}\tau_1$ 進める $\rangle$ 
   $\langle I_1$ を $\tau_1$ 進める $\rangle$ 
   $\langle K_1$ を $\frac{1}{2}\tau_1$ 進める $\rangle$ 
   $\langle K_1$ を $\frac{1}{2}\tau_1$ 進める $\rangle$ 
   $\langle I_1$ を $\tau_1$ 進める $\rangle$ 
   $\langle K_1$ を $\frac{1}{2}\tau_1$ 進める $\rangle$ 
 $\langle K_2$ を $\frac{1}{2}\tau_2$ 進める $\rangle$ 

```

4.3 再帰呼び出しを使わない方法

上述した再帰呼び出し型のスキームの例をよく見ると、ケプラー運動時計 K_1 の進行が $\tau_1/2 + \tau_1/2$ に分割されていることがわかる。これは即ちケプラー方程式の求解を二度繰り返す必要があることを意味しており、計算効率悪化の原因となる。この欠点を改善するために、非再帰型のスキームが考案されている。非再帰型のスキームも勿論一意ではないが、例えば以下のようなになる。

```

 $\langle$ すべての  $i$  について  $K_i$ を $\frac{1}{2}\tau_i$ 進める $\rangle$ 
loop
   $\langle K_i$ が  $I_i$ よりも後になって変更されたすべての  $i$  に関して、 $I_i$ を $\tau_i$ 進める $\rangle$ 
   $\langle$ すべての  $I_i$ が等しく、出力が要求される場合には exit loop $\rangle$ 
  loop for  $i = 1, \dots, N$ 
     $\langle i = 1$  または  $K_i + \frac{1}{2}\tau_i \leq K_{i-1}$  ならば、 $K_i$ を $\tau_i$ 進める $\rangle$ 
  end loop
end loop
 $\langle$ すべての  $i$  について  $K_i$ を $\frac{1}{2}\tau_i$ 進める $\rangle$ 

```

例として $N = 2$ の場合を書き下すと、 $\tau_2 = 2\tau_1$ であるから

$$\begin{aligned}
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\langle K_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1, K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle
\end{aligned}$$

となる。一見してわかるように、スキームの中盤に於いて K_1 が一気に τ_1 進められる分だけ、非再帰型の方法が再帰型の方法に比べて計算量が少なく済む。このことは $N = 3$ (call TICK(3)) の場合を考えるとより明白である。 $N = 3$ の場合には $\tau_3 = 2\tau_2 = 4\tau_1$ であることに注意し、再帰型スキームと非再帰型スキームの実際を書き下すと以下のようになる。非再帰型スキームは再帰型スキームよりも四段階も少ない手間で一ステップ分の数値積分を終えることができる。この差異は N が大きくなるとますます拡大し、非再帰型のスキームが有利になって行く。

再帰型

$$\begin{aligned}
&\langle K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau_3 \text{進める} \rangle \\
&\langle I_3 \text{を} \tau_3 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_2 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_2 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\langle K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau_3 \text{進める} \rangle
\end{aligned}$$

非再帰型

$$\begin{aligned}
&\langle K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau_3 \text{進める} \rangle \\
&\langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_3 \text{を} \tau_3 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_2 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle I_1 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle K_2 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_1 \text{を} \tau_1 \text{進める} \rangle \\
&\quad\quad \langle I_2 \text{を} \tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_3 \text{を} \frac{1}{2}\tau_3 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_2 \text{を} \frac{1}{2}\tau_2 \text{進める} \rangle \\
&\quad \langle K_1 \text{を} \frac{1}{2}\tau_1 \text{進める} \rangle
\end{aligned}$$

こうした独立刻み幅のスキームを用いても、誤差ハミルトニアンが大きさが τ^2 より大きくなることはない。 $N = 2$ の場合の非再帰型スキームに於ける誤差ハミルトニアンを以下に示す。以下の形は上の非再帰型スキームに BCH 公式を繰り返し適用することで得られたものである。

$$\begin{aligned}
H_{err} = & \frac{\tau^2}{12} \left(\left\{ \left\{ H_{kep,1}, H_{int,1} \right\}, H_{int,1} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left\{ H_{kep,1}, H_{int,1} \right\}, H_{kep,1} \right\} \right. \\
& + 4 \left\{ \left\{ H_{kep,2}, H_{int,1} \right\}, H_{int,1} \right\} + 2 \left\{ \left\{ H_{kep,2}, H_{int,1} \right\}, H_{kep,2} \right\} \\
& \left. + 4 \left\{ \left\{ H_{kep,2}, H_{int,1} \right\}, H_{kep,1} \right\} \right) + O(\tau^4). \tag{104}
\end{aligned}$$

独立刻み幅スキームを用いることによる肝心の計算効率の向上だが、まずは

- $\Delta t_{K,i} \equiv$ 時計 K_i を一ステップ進めるのに必要な時間
- $\Delta t_{I,i} \equiv$ 時計 I_i を一ステップ進めるのに必要な時間

と定義する。すると、独立刻み幅スキームと共通刻み幅スキームとの実計算時間の比は以下のようになる。

$$\frac{\text{独立刻み幅}}{\text{共通刻み幅}} = \frac{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta t_{K,i}}{\tau_i} + (N-i) \frac{\Delta t_{I,i}}{\tau_i} \right]}{\frac{N\Delta t_K}{\tau} + \frac{N(N-1)\Delta t_I}{2\tau}} = \begin{cases} 0.28 & (\text{if } \Delta t_K \gg \Delta t_I) \\ 0.46 & (\text{if } \Delta t_K \ll \Delta t_I) \end{cases}. \tag{105}$$

Saha & Tremaine (1994) の Fig. 1 と Fig. 2 では太陽系 9 惑星の軌道進化の数値積分を独立刻み幅と共通刻み幅のスキームで実行し、誤差を比較している。この時には式 (105) の比の値は 0.43 になっており、独立刻み幅を用いることによって 2 倍以上の高速化が実現されていることがわかる。

独立刻み幅のスキームは、太陽系惑星のように (1) 円軌道に近くて (2) 階層的で (3) 安定な軌道を周回する天体の数値積分には適していると言える。この三条件がすべて揃っていない天体の軌道に向いている方法ではない。

5. 近接遭遇への対応

天体同志の近接遭遇 (close encounter) が発生する場合、天体の運動はケプラー運動から大きく外れる。従ってこの場合には generic な WH map をそのまま適用することは出来ない。Generic WH map は天体の運行がケプラー運動に近いということを大前提に置いているからである。一般に close encounter を正確に計算し切るとは如何なる数値積分法にとっても難関と言えるが、ここ数年の間にシンプレクティック性を損わずに近接遭遇を乗り切る計算方法が提案され始めた。本節ではそうした方法の幾つかを紹介する。

5.1 ポテンシャル分割の概念

近接遭遇に対応できるシンプレクティック数値積分法の代表的な例は、Skeel & Biesiadecki (1994) からのアイデアを元にした Lee et al. (1997) および Duncan et al. (1998) によって提案されている。この方法は、近接遭遇する天体が作るポテンシャルを幾つものポテンシャルの和に再帰的に分割するというアイデアを基本として構成されている。直感的なイメージは以下ようになる。

1. 或る天体の周囲に同心球状の薄い殻を何枚も置く。外側の大きな球殻には大きな刻み幅を対応させ、内側の小さな球殻には小さな刻み幅を対応させる。
2. もう一方の天体が接近すると、相手の天体の球殻を通過して行く。
3. 天体が球殻を通過してもうひとつの天体に近づく度に、刻み幅を小さくする。天体が遠ざかって球殻を抜けて行く場合には、刻み幅を大きくする。

ここでは、前述した相互作用ハミルトニアン ϵH_{int} に相当するポテンシャルエネルギーを

$$H_V = -\frac{Gm_0m_1}{r}, \quad (106)$$

と書くことにする。ポテンシャル H_V を分割するとは、即ち H_V を

$$H_V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k, \quad (107)$$

という V_k の和に分けて考えることを意味している。 H_T を運動エネルギーとしてハミルトニアン全体を書くと

$$H = H_T + \sum_{k=0}^{\infty} V_k, \quad (108)$$

となる。なお、ここでの実装としてはポテンシャル H_V を分割して V_k の和にするのではなく、ポテンシャルを偏微分して得られる力 F を分割して F_k の和の形にする。その方がシンプレクティック数値積分法の実装上の手間が少ないからである。上述した「球殻通過」のイメージは、或るカットオフ半径 R_k を定義し、以下を満たすように力 F_k を分割することで具現化される。

1. すべての r に関して $F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r)$,
2. $r > R_k$ ($k \geq 1$) ならば $F_k = 0$,

また、力 F_k と刻み幅 τ_k との関係は以下のようにする。

- 力 F_k が関与する場合の刻み幅は τ_k
- τ_k/τ_{k+1} は固定された整数 (ここでは M)

この辺の話はやや面倒であるが、Duncan et al. (1998) の Fig. 1 などを参照にすると理解しやすい。例として、一回分割 (半径 R_1 を超えた接近遭遇) に於ける二次のスキームを書き下す。この時は $\tau_0 = M\tau_1$ である。

$$\begin{aligned} e^{\tau_0\{, H\}} &= e^{\tau_0\{, H_T + V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k\}} \\ &\approx e^{\frac{\tau_0}{2}\{, V_0\}} e^{\tau_0\{, H_T + \sum_{k=1}^{\infty} V_k\}} e^{\frac{\tau_0}{2}\{, V_0\}} \\ &\approx e^{\frac{\tau_0}{2}\{, V_0\}} \left[e^{\frac{\tau_1}{2}\{, V_1\}} e^{\tau_1\{, H_T + \sum_{k=2}^{\infty} V_k\}} e^{\frac{\tau_1}{2}\{, V_1\}} \right]^M e^{\frac{\tau_0}{2}\{, V_0\}}. \end{aligned} \quad (109)$$

上記のスキームに BCH 公式を適用すると、第 k 階層の再帰分割スキームから出て来る誤差ハミルトニアンが以下のようになることを簡単に示すことができる。

$$H_{err,k} = \frac{\tau_k^2}{12} \left\{ \{V_k, H_T\}, H_T + \frac{1}{2}V_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} V_l \right\} + O(\tau_k^4). \quad (110)$$

同様にして、再帰分割を無限回繰り返した後の誤差ハミルトニアンは以下ようになる。

$$H_{err} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\tau_k^2}{12} \left\{ \{V_k, H_T\}, H_T + \frac{1}{2}V_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} V_l \right\} + O(\tau_k^4) \right]. \quad (111)$$

無限回の再帰分割を繰り返せば式 (111) の右辺は無級数になるが、実際には天体の最接近距離のところでは再帰分割が行われなくなるので、級数も有限で打ち切られる。

なお、ここで述べた刻み幅縮小の方法は飽くまで固定 (fixed) した刻み幅を再帰的に分割するに過ぎず、可変 (variable) 刻み幅ではない。その意味で Duncan et al. (1998) で述べられた方法は、当該論文のタイトルにあるように “multiple stepsize” method と呼ぶべきものである。

5.2 ポテンシャル分割の実装

ポテンシャル分割方法の具体例を示す前に、ポテンシャルを以下のように書き直しておく。

$$H_V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k = \tilde{V}_0 + (\tilde{V}_1 - \tilde{V}_0) + (\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1) + \dots, \quad (112)$$

但し

$$\tilde{V}_0 = V_0, \quad V_k = \tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} \quad (k \geq 1), \quad \tilde{V}_k = \sum_{l=0}^k V_l. \quad (113)$$

繰り返しになるが、実際にはポテンシャル V ではなく力 F を分割する。即ち、以降は

$$\tilde{F}_k = -\frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial \mathbf{q}}, \quad (114)$$

を満たす \tilde{F}_k を考慮の対象とする。力の分割は、 $|\tilde{F}_{k-1}|$ が

1. $R_k < r$ では r^{-2} に比例し、
2. $R_{k+1} \leq r \leq R_k$ でスムーズに減少し、
3. $r < R_{k+1}$ では 0,

という要請を満たすように実装する。例えば以下ようになる。

$$\tilde{F}_{k-1} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{q}}{r^3}, & (R_k \leq r) \\ -f_l \left(\frac{R_k - r}{R_k - R_{k+1}} \right) \frac{\mathbf{q}}{r^3}, & (R_{k+1} \leq r < R_k) \\ 0. & (r < R_{k+1}) \end{cases} \quad (115)$$

ここで関数 $f_l(x)$ は x に関する $2l + 1$ 次の多項式であり、

$$f_l(0) = 1, \quad f_l(1) = 0, \quad (116)$$

である必要がある。 V_k の二階微分までを滑らかにする ($l = 1$) 例は

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad (117)$$

などがあり、 V_k の四階微分までを滑らかにする ($l = 3$) 例は

$$f_3(x) = 20x^7 - 70x^6 + 84x^5 - 35x^4 + 4, \quad (118)$$

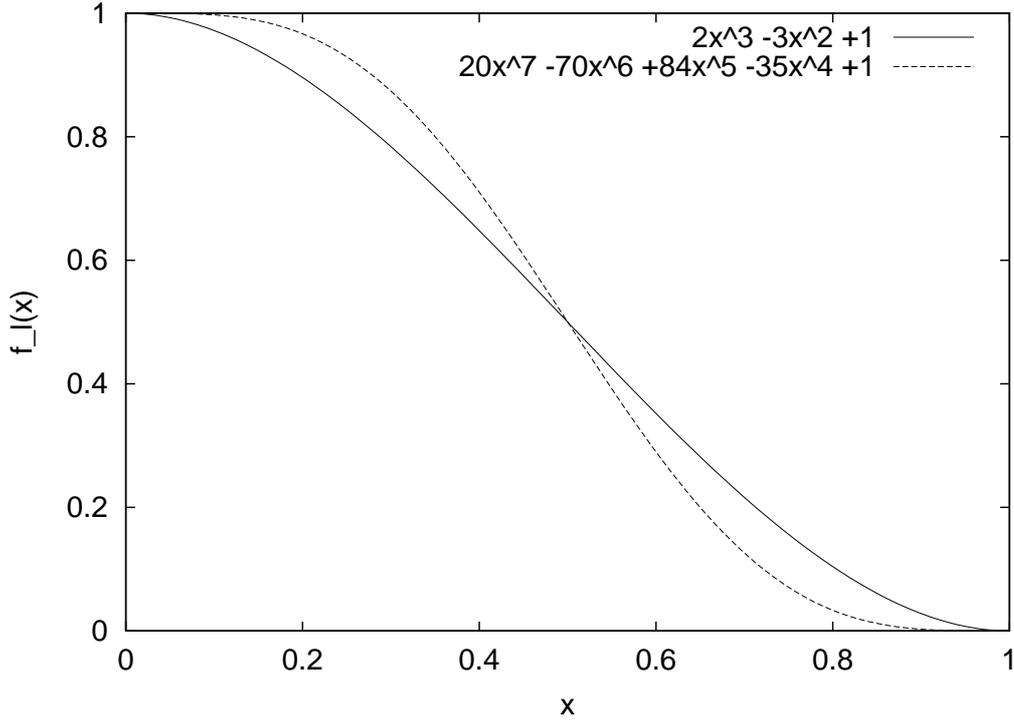


図 8. [An example of $f_l(x)$] $f_l(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ と $f_l(x) = 20x^7 - 70x^6 + 84x^5 - 35x^4 + 1$.

などがある。これら f_l の具体例は図 8 に示されている。

上述したポテンシャル分割のスキームは、原理的にはそのまま惑星同志の近接遭遇に応用が可能である。けれども現実には generic WH map への適用は簡単とは言えない。この理由をひとことで説明することは難しいが、以下のような状況を考えれば良い。Generic WH map のハミルトニアンは Jacobi 座標を用いて書かれており、ケプラー項 H_{kep} (35), 相互作用直接項 H_{dir} (37), 相互作用間接項 H_{ind} (38) に分割されている。このうち直接項 H_{dir} はすぐに分割可能な形をしているが、間接項 H_{ind} は Jacobi 座標と太陽中心 (heliocentric) 座標が混じっており、容易にポテンシャル分割のスキームに乗らないからである。このことを別の言い方で言うと以下ようになる。相互作用の直接項 H_{dir} を分割して作る二次のスキームとして以下のようなものがすぐに思い付く。

$$\begin{aligned}
& e^{\tau_0 \{ , H_{kep} + \epsilon H_{int} \}} \\
& \approx e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , \epsilon H_{int} \}} e^{\tau_0 \{ , H_{kep} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , \epsilon H_{int} \}} \\
& = e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{ind} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{dir} \}} e^{\tau_0 \{ , H_{kep} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{dir} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{ind} \}} \\
& \approx e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{ind} \}} \left[e^{\frac{\tau_1}{2} \{ , H_{dir,1} \}} e^{\tau_1 \{ , H_{kep} + \sum_{i=2}^{\infty} H_{dir,i} \}} e^{\frac{\tau_1}{2} \{ , H_{dir,1} \}} \right]^M e^{\frac{\tau_0}{2} \{ , H_{dir} \}} \\
& \approx \dots
\end{aligned} \tag{119}$$

ここで考えてみると、相互作用ハミルトニアンの間接項 H_{ind} は各天体がそれぞれ異なる中心を回っている (これは Jacobi 座標の定義のようなもの) ことに対する或る種の補正であると捉えることができる。この補正は各天体の接触軌道上での位置の変化、即ち H_{kep} による時間発展と同様の刻み幅で計算される必要がある。然るに、式 (119) のスキームでは H_{ind} が大外ループに置かれたままであり、 H_{kep} と同じ刻み幅では評価されない。このことは計算誤差の蓄積を招く。上述し

たポテンシャル分割スキームを generic な WH map にそのまま適用できないのは、以上のような理由に拠っている。

5.3 Democratic Heliocentric Method

ポテンシャル分割スキームと generic WH map の相性が良くはなく、その理由が Jacobi 座標を用いたことにあることは前節で述べた。では、Jacobi 座標以外に WH map 的な混合変数型のシンプレクティック数値積分法を実現する正準変数の組はあるのだろうか？この問いに対する回答を与えるのが民主的太陽中心座標 (Democratic Heliocentric coordinate (あるいは method), 以下では DH と略記) であり、以下のように表現される。

$$Q_i = \begin{cases} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_0, & (i = 1, \dots, N) \\ \frac{1}{m_{tot}} \sum_{j=0}^N m_j \mathbf{q}_j, & (i = 0) \end{cases} \quad (120)$$

$$P_i = \begin{cases} \mathbf{p}_i - \frac{m_i}{m_{tot}} \sum_{j=0}^N \mathbf{p}_j, & (i = 1, \dots, N) \\ \sum_{j=0}^N \mathbf{p}_j, & (i = 0) \end{cases} \quad (121)$$

但し $m_{tot} = \sum_{j=0}^N m_j$ は系の全質量である。 Q_i と P_i は互いに正準共役である。

DH 座標の物理的意義は単純で、位置座標の原点を中心天体 (heliocentric) に取り、運動量の原点を重心 (barycentric) に取った座標系である。このように座標と運動量についての二種類の原点が存在することから、DH 座標は混合中心座標 (mixed-centre coordinate) とも呼ばれている。

DH 座標で表わしたハミルトニアンは以下ようになる。ここで重要なことは、ハミルトニアンが generic WH map の場合の二分割とは異なり、以下のように三分割されることである³。

$$H = H_{Kep} + H_{Sun} + H_{int}, \quad (122)$$

$$H_{Kep} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right), \quad (123)$$

$$H_{Sun} = \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2, \quad (124)$$

$$H_{int} = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|}. \quad (125)$$

新しいハミルトニアン H_{Kep} , H_{Sun} , H_{int} を用いた二次のシンプレクティック数値積分スキームは以下のように書くことができる。式 (126) では、 $\{H_{Sun}, H_{int}\} = 0$ という事実を用いて $e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}}$ と $e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{Sun}\}}$ の順番を入れ替えていることに留意せよ。

$$e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{Sun}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\tau\{, H_{Kep}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{Sun}\}}. \quad (126)$$

式 (126) で表されるスキームの意味するところは以下である。

³この辺から ϵH_{int} を単に H_{int} , H_{kep} を H_{Kep} , H_{sun} を H_{Sun} などと表記する場合が増えて来るが、気にしない。

1. H_{Sun} 由来の位置座標の変化 (linear drift)。具体的には $\frac{\tau}{2} \frac{\partial H_{Sun}}{\partial \mathbf{P}_i} = \frac{\tau}{2m_0} \sum \mathbf{P}_i$ 。
2. H_{int} 由来の運動量変化 (kick)。 $\tau/2$ 分。
3. 瞬時のケプラー軌道に沿った位置の変化 drift, τ 分。
4. 再び kick, $\tau/2$ 分。
5. 再び linear drift, $\tau/2$ 分。

DH 座標を使ったシンプレクティック数値積分法の長所と短所は以下のように纏められる。

- 全惑星が共通中心を周回するので、前述した multiple stepsize method によく馴染む。
- 天体の順序が入れ変わっても数値計算の誤差が増大しない。Jacobi 座標を用いた generic WH map の場合には、天体の順序が入れ替わると計算誤差が増大するという報告がある (Chambers and Wetherill, 1998)。DH を使えばそのような心配はない。
- 惑星の近点が小さくなる場合 (長楕円軌道) には計算誤差が増大する。但しこれは generic WH map に於いても同様である。

最初の長所は次節以降で述べる SyMBA スキームの構築に直結するものである。最後の短所の改善については後の節で述べられる。

5.4 Symplectic Massive Body Algorithm — SyMBA

ここまで来れば、ポテンシャル分割スキームと DH method を組み合わせ、近接遭遇にも対応できる multiple stepsize のシンプレクティック数値積分法を構築することができる。

$$\begin{aligned}
& e^{\tau_0 \{ \cdot, H_{Sun} + H_{int} + H_{Kep} \}} \\
& \approx e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{Sun} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{int} \}} e^{\tau_0 \{ \cdot, H_{Kep} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{int} \}} e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{Sun} \}} \\
& \approx e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{Sun} \}} \left[e^{\frac{\tau_1}{2} \{ \cdot, H_{int,1} \}} e^{\tau_1 \{ \cdot, H_{Kep} + \sum_{i=2}^{\infty} H_{int,i} \}} e^{\frac{\tau_1}{2} \{ \cdot, H_{int,1} \}} \right]^M e^{\frac{\tau_0}{2} \{ \cdot, H_{Sun} \}} \\
& \dots
\end{aligned} \tag{127}$$

式(127)のスキームを用いた場合の誤差ハミルトニアンが以下になることもすぐにわかる。

$$\begin{aligned}
H_{err} &= \frac{\tau_0^2}{12} \left\{ \{ H_{Sun}, H_{Kep} \}, H_{Kep} + \frac{1}{2} H_{Sun} \right\} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\tau_k^2}{12} \left\{ \{ H_{int,k}, H_{Kep} \}, H_{Kep} + \frac{1}{2} H_{int,k} + \sum_{l=k+1}^{\infty} H_{int,l} \right\} + O(\tau_k^4) \right]. \tag{128}
\end{aligned}$$

Duncan et al. (1998) によって考案された上記のスキームは SyMBA (Symplectic Massive Body Algorithm) と呼ばれる。その出自から明らかなように、SyMBA は近接遭遇が無い状況では generic WH map と同様に高速な数値積分を実現し、近接遭遇が発生する場合には再帰的なポテンシャル分割を実行することによって高い精度を保つ。但し前述したように近点距離が近くなるような

軌道、即ち離心率が大きな天体の軌道を上手く扱うことはできない。近点距離が小さな軌道があると H_{Sun} が非常に大きくなり得、混合変数型シンプレクティック数値積分法の基本的前提である $H_{Kep} \gg H_{Sun}$ という条件が満たされなくなる可能性があるからである。また、上記の数式群を見てわかるように SyMBA の実装には非常に面倒臭いコーディング作業が伴う。これは開発者のひとりである Hal Levison 自身も認めるところであり、一般ユーザのために SWIFT というプログラムパッケージが公開されている (後述)。

Duncan et al. (1998) の論文内では、SyMBA の性能を検証する例として連惑星系、質量を増した木星型惑星系、円制限三体問題、微惑星の重力フォーカシング効果、月の集積過程、らの数値実験について従来の方法との比較結果が示されている。その結果は当該論文中の図に示されているが、いずれの場合にも SyMBA は優秀なパフォーマンスを示し、(コードさえ完成していれば) 実用に供し得るスキームであることが示されている。

5.5 A hybrid symplectic integrator

近接遭遇を扱うシンプレクティック数値積分法として、SyMBA とは独立に開発された方法が存在する (Chambers, 1999)。本節ではそれについて紹介する。

そもその問題は、天体同士が近接遭遇すると相互作用ハミルトニアン H_{int} が大きくなって H_{Kep} と同程度の大きさになり、generic WH map では誤差が増大してしまうという点にあった。本節で紹介する方法の要点は、 H_{Kep} が解析的に解けないものになってしまっても良いので、 H_{Kep} と H_{int} の大きさの比を $H_{Kep} \gg H_{int}$ に保ちたいという点にある。ここですぐに考え付く方法は、 H_{int} のうち近接遭遇に関係する項を強制的に H_{Kep} に繰り込んでしまうことである。例えば以下のような方法が考えられる。

$$H_{Kep} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_0m_i}{r_{i0}} \right) - \frac{Gm_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad (129)$$

$$H_{int} = -G \sum_{i \neq \alpha} \sum_{j > i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} - \sum_{\substack{j \neq \beta \\ j > \alpha}} \frac{m_\alpha m_j}{r_{\alpha j}}. \quad (130)$$

式 (129) と式 (130) は α 番目と β 番目の天体が近接遭遇するケースを考えた H_{Kep} と H_{int} である。天体 α と天体 β が近接遭遇すれば距離 $r_{\alpha\beta}$ が小さくなり、項 $-\frac{Gm_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$ の絶対値が非常に大きくなり得る。この項を H_{int} から H_{Kep} へと強制的に移動することにより、 $H_{Kep} \gg H_{int}$ の比に保つことができる。但しこの場合、 H_{Kep} はケプラー運動以外の項を含むので generic WH map のように解析的に解くことは出来なくなる。しかしこのことはそれほど問題にはならない。 H_{Kep} が解析的に解けなければ、補外法など従来型の数値積分法を用いて H_{Kep} の時間進化を機械 ϵ までの精度で数値的に解いてやれば、結果的には解析的に解を求めることとの差異は無くなるからである。WH map 的なシンプレクティック数値積分法を基本としながらも近接遭遇時には従来型の数値積分法を併用する方法は Chambers (1999) よって提唱され、hybrid symplectic integrator あるいは hybrid method と呼ばれている。

式 (129) と式 (130) は、近接遭遇時にハミルトニアン間で突如として項を移動することを意味している。けれどもこれでは代理系のハミルトニアンが或る時点に於いて唐突に不連続変化し、ハミルトニアンの偏微分 (Poisson 括弧) を組み合わせで作られる誤差ハミルトニアンが定義できなくなってしまう。これは明らかに好ましくない。近接遭遇に関係する項の移動を滑らかに言い、ハミルトニアンの偏微分がきちんと定義できるような方法を考えることが必要である。このために、SyMBA でも用いたような滑らかな関数 $K(r)$ を導入する。

$$H_{Kep} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_0m_i}{r_{i0}} \right) - G \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} [1 - K(r_{ij})], \quad (131)$$

$$H_{int} = -G \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} K(r_{ij}). \quad (132)$$

切り換え関数 K の例としては以下のようなものがある (図 9 参照)。

$$K = \begin{cases} 0, & (y < 0) \\ \frac{y^2}{2y^2 - 2y + 1}, & (0 < y < 1) \\ 1, & (y > 1) \end{cases} \quad (133)$$

$$y = \frac{r_{ij} - 0.1r_{crit}}{0.9r_{crit}}, \quad (134)$$

但し r_{crit} は近接遭遇を定義するためのパラメータであり、具体的な値は扱う問題に依存する。Chambers (1999) の Figure 9 も参照せよ。なお hybrid integrator も DH 座標を用いて構築されるので、以下のハミルトニアン H_{Sun} も考慮に入れる必要がある。

$$H_{Sun} = \frac{1}{2m_0} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right)^2. \quad (135)$$

この hybrid integrator を用いた二次の積分スキームは SyMBA と全く同じである。

$$e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{Sun}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\tau\{, H_{Kep}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{Sun}\}}. \quad (136)$$

1. 各天体の位置は不変。各天体は、時間 $\tau/2$ にわたり太陽を除く他の天体からの重力による加速度を受ける (H_{int} 由来)。この加速度には $K(r_{ij})$ の重みが掛かっている。
2. 各天体の運動量は不変。各天体の位置はそれぞれ $\tau \sum_i \mathbf{p}_i / 2m_\odot$ だけ変化する (H_{Sun} に由来する操作)。
3. 近接遭遇していない天体は太陽の周りのケプラー軌道上を時間 τ 分だけ進む。近接遭遇している天体に関しては、ケプラー項および $1 - K(r_{ij})$ の重みが掛かった近接相互作用項を時刻 τ 分だけ数値的に求め、時間進化の操作を行う。
4. ステップ 2. と同様。
5. ステップ 1. と同様。

Chambers (1999) の論文内では、この hybrid integrator の性能を検証する例として質量を増した外惑星系、制限三体問題、惑星胚 (原始惑星) の運動、周期彗星 Oterma の木星との近接遭遇、らの数値実験について従来の方法との比較結果が示されている。その結果は当該論文の図に示されているが、いずれの場合にもこの hybrid integrator は優秀なパフォーマンスを示し、(コードさえ完成していれば) 実用に供し得るスキームであることが示されている。ちなみにこの方法は SyMBA に比べてコーディング作業の面倒もかなり軽減されていると思われる。

蓋しこの hybrid integrator も、近点距離が非常に小さくなる場合、つまり長楕円軌道天体の運動を精密に追い掛けることは難しい。その理由は SyMBA の場合と全く同様であり、近点距離の小さな軌道では H_{Sun} が非常に大きくなり得、混合変数型シンプレクティック数値積分法の基本的前提である $H_{Kep} \gg H_{Sun}$ という条件が満たされなくなる可能性があるからである。

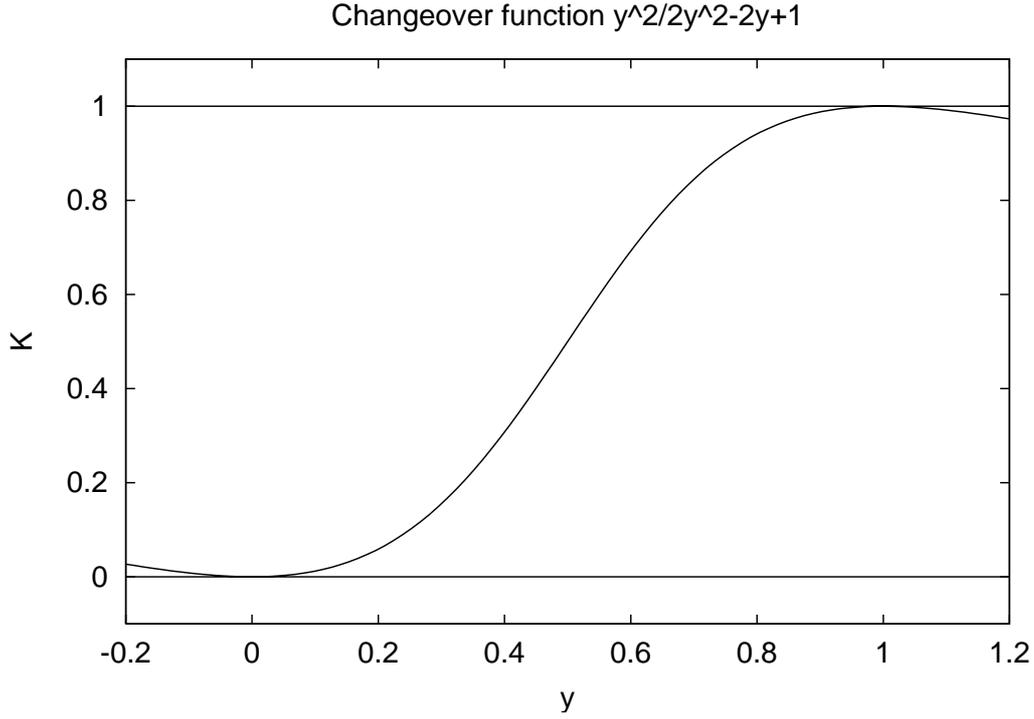


図 9. [An example of $K(r)$] 式 (133) で表現されるものをプロットした。

5.6 Modified SyMBA

前述したように、SyMBA や hybrid integrator の最大の欠点は長楕円軌道の天体を扱い難いことであった。けれども、この二つの方法の長所をうまく組み合わせることにより、この欠点を克服する方法を開発することができる (Levison and Duncan, 2000)。ここでの要点は、離心率が大きい軌道上で天体の近点距離が小さくなる事象を中心星との近接遭遇だと看做すことにある。具体的には、hybrid integrator の切り換え関数的考え方を SyMBA に移植し、天体の近点距離が小さくなった場合には該当する項を H_{Sun} から H_{Kep} に移動する。具体的なハミルトニアンは以下のようになる。

$$H = H'_{Kep} + H'_{Sun} + H_{int}, \quad (137)$$

$$H'_{Kep} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|Q_i|} \right) + \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right|^2 F(r_1, \dots, r_n), \quad (138)$$

$$H'_{Sun} = \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2 [1 - F(r_1, \dots, r_n)], \quad (139)$$

$$H_{int} = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|Q_i - Q_j|}. \quad (140)$$

上記のハミルトニアンを用いて修正された SyMBA は文字通り修正 SyMBA (modified SyMBA) と呼ばれている。 H'_{Kep} 中の項 $\frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right|^2 F(r_1, \dots, r_n)$ は任意の天体が主星に接近遭遇した場

合に H'_{Sun} から持ち込まれる項であり、切り替え関数 F によって滑らかにされている。 F は

$$F(r_1, \dots, r_N) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - f(r_i)], \quad (141)$$

のような形をしており、 $f(r_i)$ の例としては以下のようなものがある。 R_1, R_2 は主星との近接遭遇を判定するための定数であり、具体的な値は問題に依存する。 Levison & Duncan (2000) の Fig .2 も参照せよ。

$$f(r_i) = \begin{cases} 1, & (r_i < R_1) \\ 10 \left(\frac{R_2 - r_i}{R_2 - R_1} \right)^6 - 15 \left(\frac{R_2 - r_i}{R_2 - R_1} \right)^8 + 6 \left(\frac{R_2 - r_i}{R_2 - R_1} \right)^{10}, & (R_1 \leq r_i \leq R_2) \\ 0. & (r_i > R_2) \end{cases} \quad (142)$$

修正 SyMBA を用いた二次の積分スキームはオリジナルの SyMBA と全く同じである。

$$e^{\frac{\tau}{2}\{, H'_{Sun}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\tau\{, H'_{Kep}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H_{int}\}} e^{\frac{\tau}{2}\{, H'_{Sun}\}}. \quad (143)$$

Levison & Duncan (2000) の論文内では、この修正 SyMBA の性能を検証する例として木星と土星の惑星の運動、連惑星系、円制限三体問題、らの数値実験について従来の方法との比較結果が示されている。その結果は当該論文中の図に示されているが、いずれの場合にもこの修正 SyMBA は優秀なパフォーマンスを示し、(コードさえ完成していれば) 実用に供し得るスキームであることが示されている。但し、修正 SyMBA のコーディング作業がオリジナル SyMBA の場合よりも更に面倒になっていることは明白である。

6. 正則化

ここで話の方向を少し変えてみる。 Levi-Civita, Kustaanheimo–Stiefel に代表される正則化の方法は、シンプレクティック数値積分法が普及する以前から恒星系力学などの分野で日常的に用いられて来た (Stiefel and Scheifele, 1971)。代表的な KS (Kustaanheimo–Stiefel) 変換を例に取って説明すると以下ようになる。通常的位置ベクトル

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad (144)$$

は、KS 変換による正則化によって四次元ベクトル

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad (145)$$

に変換される。 \mathbf{r} と \mathbf{u} の関係は

$$\mathbf{r} = (x, y, z, 0) = L\mathbf{u}, \quad (146)$$

であり、変換行列 L は以下ようになる。

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \quad (147)$$

時刻を表す変数 t も同時に正則化される。

$$\frac{dt}{ds} = g(r). \quad (148)$$

但し $g(r)$ は時刻 t を正則化するための kernel function と呼ばれる関数であり、

$$g(r) = r, \quad (149)$$

や

$$g(r) = r^{\frac{3}{2}}, \quad (150)$$

などの形が用いられる場合が多い (cf. Arakida & Fukushima 2000, 2001)。

正則化の手法は、シンプレクティック数値積分法が扱うハミルトン力学系に対しても素直に拡張することができる (Brumberg, 1995)。Mikkola (1997) は WH map の枠組に KS 変換を持ち込み、WH map の特徴を保ちながら正則化の最大の特徴である近接遭遇の対処を巧みに実装した。正則化の操作を行うことで、ハミルトニアン H は以下のような Γ に変換される。

$$\Gamma = g(r) [H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, q_0) + p_0]. \quad (151)$$

ハミルトニアン Γ は時刻を陽に含むので次元が増える。古い時刻変数 t は一般化座標のひとつに、古いハミルトニアンの値は運動量のひとつになる。

$$p_0 = -H(0), \quad q_0 = t. \quad (152)$$

このような方法で実装された正則化 WH map の数値例が Mikkola (1997) の Figure 2 や Figure 3 に示されている。Mikkola (1997) での例は離心率の大きな階層的連星系であるが、Generic WH map では近接遭遇の度にエネルギーの保存状態が大きく変化するのに対し、正則化された WH map ではそのような誤差の増大が発現しないことが明らかである。計算時間の増大も無い。

シンプレクティック数値積分法を正則化するメリットは、単に近接遭遇を正確に扱えることのみではない。近接遭遇が無い系でも、正則化することによって generic WH map に比べて高速な計算が可能になる。このことは、generic WH map が接触軌道上の天体位置の変化 (いわゆる kick) を追うためにケプラー方程式の求解を必要とすることに原因がある。通常の直交座標を用いてケプラー問題を表す方程式を書き下すと、お馴染みの

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (153)$$

になる。だが、正則化するなわち r から u への変換を行うと、方程式 (153) は以下ようになる。 h_k は天体の軌道エネルギーに相当する量であり、無摂動のケプラー運動では定数となる。

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} + \frac{h_k}{2} \mathbf{u} = 0. \quad (154)$$

方程式 (154) は u について明らかに線形であり、解 u は調和振動子の重ね合わせとして表現できる。出来る。即ち、kick の際にケプラー方程式を解くことを行わずとも済むようになるのである。このことが正則化された WH map の高い計算効率の要因となっている。

正則化の一般的な短所として、正則化する天体の組をあらかじめ特定する必要のあることが挙げられる。予想外の天体ペアが近接遭遇するような場合、正則化は有効に機能しない。しかし、例えば離心率の大きな太陽系外惑星の安定性を検証するような場合には、正則化されたシンプレクティック数値積分法は極めて高精度かつ効率的な計算方法として使用できる。WH map の各種の拡張の中でも、正則化は今後の発展がもっとも強く期待される領域である。詳細は Seppo Mikkola の一連の論文に記載されている (Mikkola and Innanen, 1999; Mikkola, 1999; Mikkola and Tanikawa, 1999; Mikkola and Palmer, 2000)。

7. その他

最後にシンプレクティック数値積分法の応用に際しての補足的情報、特にケプラー方程式の高速解法とシンプレクティック数値積分法のプログラムパッケージについて触れる。

7.1 ケプラー方程式の高速解法

WH map に於ける接触軌道上での天体の位置変化 (kick) に際してケプラー方程式を解く必要があることは繰り返して述べた。正則化しない WH map に於いて、 $e^{\{, H_{kep}\}}$ の drift 部分の殆どの計算はケプラー方程式の求解に費やされると言っても良い。太陽系の惑星運動を WH map で数値積分した場合、 $e^{\{, H_{kep}\}}$ と $e^{\{, H_{int}\}}$ との計算時間比は 3:7 程度であるから、ケプラー方程式の求解を効率化して kick の計算を高速化することには大きな意義がある。

u を離心近点離角とした場合のケプラー方程式

$$u - e \sin u = l, \quad (155)$$

の効率的な求解は前世紀以前から研究されて来た古典中の古典と言える課題であるが、数値計算全盛の現代を迎えてその解法は一変しつつある。離心率 e が小さな場合には、ケプラー方程式 (155) を解く場合にさほどの気を使う必要はない。Newton 法 (二次収束) や Halley 法 (三次収束) でも十分な精度と効率を得られる。けれども離心率 e が大きな場合には、従来の方法には大いに問題がある。収束が遅いというのはまだましな方で、酷い場合には逐次近似がまったく収束しない事態すら発生し得る。

その中で国立天文台の福島登志夫氏による一連の研究は画期的であり、精度と効率を高い水準で両立させた極めてユニークな解法に関する論文群が多く出版されている (Fukushima 1996, 1997a, 1997b, 1997c, 1998)。福島氏の一連の研究で提唱されている方法の特徴は、ケプラー方程式を求解する際に \sin や \cos といった超越関数を使わないという点にある。超越関数の値を計算する組込数学関数の呼び出しは一般に数値計算のボトルネックになり易く、これを回避することによる計算効率の向上は大きい。例えば Fukushima (1996) では、まず挟み撃ち法でケプラー方程式の近似解を得、次に三角関数を使わずにテイラー展開を用いたニュートン法を駆使して精密かつ高速に求解するという方法を採用する。この方法は従来の方法に比べて二倍以上は高速で、且つ離心率 e の全領域に於いて安定であるという良好な試験結果が得られている。福島登志夫氏の一連の仕事は楕円軌道の場合のみならず、双曲線軌道の場合やケプラー方程式がガウス型をしている場合など、多岐なる領域の問題に対応できるものである。また邦文の福島 (1982) はケプラー方程式を高速に解くための巧みな初期値の選び方に関する研究であり、その実装も極めて簡単である。

7.2 プログラムパッケージ

シンプレクティック数値積分法の実装 (ソースコードの作製作業) は極めて困難と言うほどではないが、非常に簡単というものでもない。特に本稿で述べたように WH map の拡張を行って行くとソースコードは次第に複雑になり、研究過程に於けるプログラミング作業の占める割合がどんどん増えて行く。そのような過程を嫌う一般ユーザに利用してもらうため、シンプレクティック数値積分法のプログラムパッケージが存在している。特に、前述した各種の応用的シンプレクティック数値積分法の考案者自身が開発しているプログラムパッケージは信用が置けるし、他のユーザによる使用事例も多くあるので、初心者が取り付くには悪くないと思える。

- SWIFT … Hal Levison, M.J. Duncan らのグループが開発。RMVS から SyMBA までのプログラム群を包含している。詳しくは Duncan et al. (1998) に記載されている。
- MERCURY … J.E. Chambers が開発。Hybrid integrator に必要なプログラム群が包括されている。詳しくは Chambers (1999) に記載されている。

けれども、シンプレクティック数値積分法の算法を十分に理解して天体力学的な応用的研究を進めようという人には、上記のようなプログラムパッケージの使用はお薦めできない。他人が書いたソースコードを完全に理解することは極めて困難であるし、勉強だと思っても効率が悪い。シンプレクティック数値積分法は天文学に於けるひとつの道具であるから、道具の動作原理を完全に理解しなければ先に進めないという原理主義者達は、何としてもソースコードを自前で開発して計算を行うべきであろう。

8. まとめ

本稿ではシンプレクティック数値積分法の天体力学的応用に関して長々と述べて来た。シンプレクティック数値積分法の改良に関する論文は現在でも毎月のように発表され続けており (cf. Breiter 1999; Chambers 2000; Laskar & Robutel 2000)、将来への歩みの速度は全く緩むことがないように思える。では結局どれがお薦めなのか? という問いに対しては、常套句のようであるが「万能な方法は無い」という回答しかあり得ない。どの方法もそれぞれ長所と短所を持っており、解くべき問題の性質や必要とされる精度によって選択肢の自由度は無数にある。強いて言えば、至るところで近接遭遇が頻繁に発生するような状況ではなく、大局的に見て摂動二体系に近いような状況に適用する場合には、正則化された WH map を使うべきであろう。正則化された WH map は離心率がどんなに大きくなっても精度を落とすことがないし、ケプラー方程式を解く手間が省けるので高速である。実際のところ、現在の太陽系や太陽系外の惑星運動は殆どの場合に「至るところで近接遭遇が頻繁に発生するような状況ではなく、大局的に見て摂動二体系に近いような状況」であり、まずは正則化された WH map の使用が基本ということが言えるであろう。一方で、惑星集積過程のように近接遭遇が頻繁に発生する系に於いては、任意の天体の組の近接遭遇に対応し、なおかつ離心率が大きな軌道も精度良く扱うことができる修正 SyMBA が有効な手法として活用できると思われる。修正 SyMBA について言えば、Levison らが示したオリジナルの方法に対して、近接遭遇する天体に座標中心を移動する force-center switching および Mikkola 的な正則化の手法を組み込むことにより、更に高い精度と効率を得られる可能性があるという報告がなされている (Rauch and Holman, 1999)。

ところで、近接遭遇が頻発する系にシンプレクティック数値積分法を適用する場合の心構えをひとつ述べておこう。太陽系天体の運動に於いて近接遭遇が重要になる局面と言え、何と云っても惑星や衛星の集積過程が代表的である (Levison *et al.*, 1998; Chambers and Wetherill, 1998; Agnor *et al.*, 1999; Kominami and Ida, 2001)。そうした惑星集積の力学過程、特に N が小さな原始惑星系などの軌道進化をシンプレクティック数値積分法で計算するなら、SyMBA 的な方法が有効であることはすぐに想像が付く。しかしここで留意すべき点がある。有限サイズの天体の近接遭遇は遅かれ早かれ衝突合体あるいは衝突破壊に至る可能性が高いということである。天体が衝突合体を行えば必然的に系のハミルトニアンは全く別物になり、シンプレクティック数値積分法はそこで境界条件の初期化の如き作業を余儀なくされる。この問題はもちろん衝突頻度に依存するが、少なくとも衝突合体の回数だけのハミルトニアンの初期化が必要であり、その前後ではシン

プレクティブ性の保存など彼岸の話となる。こうした状況に於いて、シンプレクティブ数値積分法を使い続けることが本当に望ましい姿なのかどうかは甚だ疑わしい。こうした領域では Hermite scheme (Makino and Aarseth, 1992; Kokubo *et al.*, 1998) に代表されるような簡明かつ柔軟な数値解法が既に確立されており、敢えてシンプレクティブ数値解法を持ち込む積極的理由はさほど強くはなからう。シンプレクティブ数値積分法は確かにハミルトン力学系では極めて強力かつ有効な手法ではあるが、それは飽くまで使用者が周囲の状況を完全に把握しているという前提に立った話であり、使い方を誤れば良い道具もその能力を発揮できないことは火を見るより明らかである。その意味で、シンプレクティブ数値積分法は他一般の数値積分法と比べて使用者の見識が大いに問われる手法と言えるかもしれない。

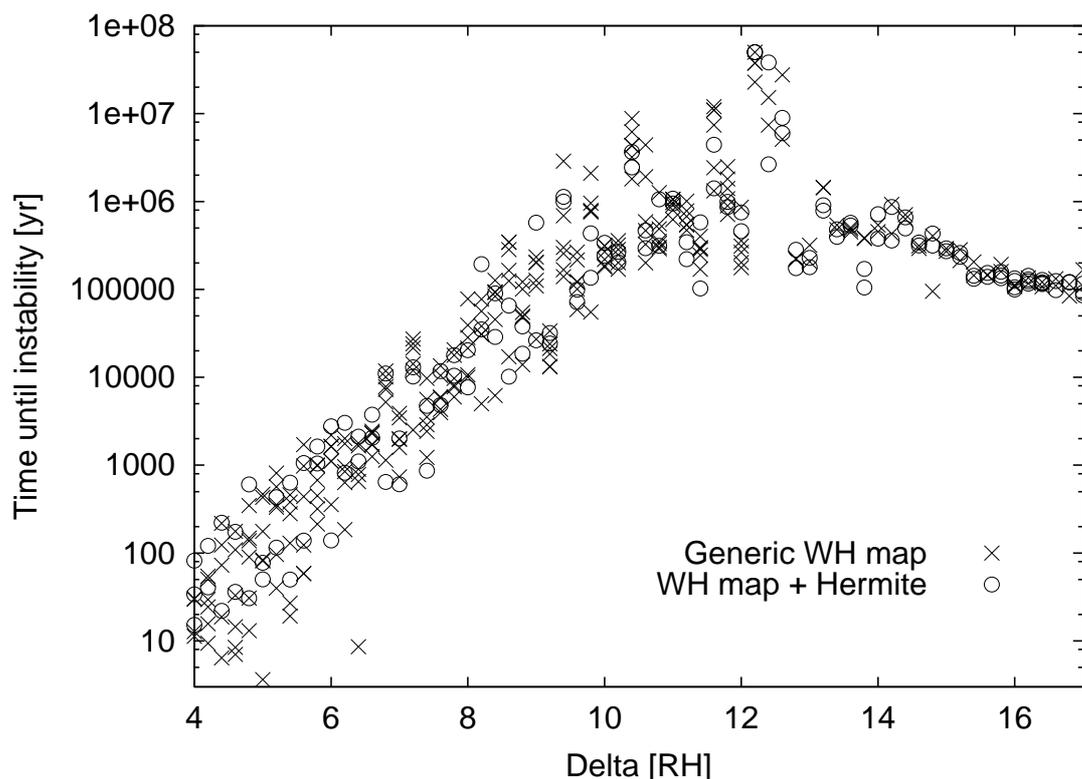


図 10. [A CWB diagram of terrestrial protoplanet systems (Ito & Tanikawa 1999)] 原始惑星系の CWB diagram の一例。横軸は相互 Hill 半径で規格化した原始惑星間の平均的間隔、縦軸は $1R_H$ 以内の近接遭遇が発生するまでの時間 (年)。×が generic な WH map での計算結果、○が generic な WH map と四次の Hermite scheme の混淆法での計算結果である。原始惑星の個数は 14, 最内天体の軌道半長径は 0.5AU, ランダム速度の初期値は $\langle e^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 2 \langle I^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.005$ の Rayleigh 分布、原始惑星質量のばらつきは 10%, 間隔のばらつきは 0。パラメータの詳細については Ito & Tanikawa (1999) を参照のこと。

蛇足になるが、generic WH map が近接遭遇をどの程度まで扱えるのかを知る手掛りになる一例を示しておこう。SyMBA を提唱する Duncan *et al.* (1998) や Levison & Duncan (2000) によれば、二天体の相互 Hill 半径⁴の三倍以内程度 ($3R_H$) の近接遭遇が発生したら何らかの処置 (SyMBA 的な刻み幅の再帰分割やハミルトニアン近接遭遇項の移動、あるいは force-center switching な

⁴二天体の質量を m_i, m_j , 主星 (質量 M) からの距離を r_i, r_j とすると、相互 Hill 半径 $R_H^{i,j}$ は以下のように定義さ

ど)を行うべきであるという記載がある。そのような忠告を無視し、Ito & Tanikawa (1999, 2001) では相互 Hill 半径の一倍 ($1R_H$) までの近接遭遇を刻み幅固定の WH map (warm start 付き) で計算した。対象となる系は地球型惑星領域の原始惑星系であり、木星と土星の摂動を考慮している。この時はまた、generic WH map で $1R_H$ までの近接遭遇を扱うことの妥当性を検証するために、二天体が $5R_H$ 以内に接近したら数値積分方法を WH map から四次の Hermite scheme へ変えた計算も行った。この場合にはシンプレクティック性の保存を犠牲にしていることになるが、近接遭遇の最中だけを取り出してみれば高い精度での計算が行われていると考えられる。ここでの generic WH map で用いた刻み幅は最内天体の公転周期の $1/20$ 程度であり、WH map を用いた標準的な数値積分にしばしば使われる値をそのまま採用した。近接遭遇を予期して予め刻み幅を小さくするような細工はしていない。この二通りの方法で数値積分を行い、初回の近接遭遇までに掛かった時間を (相互 Hill 半径で規格化した) 原始惑星の平均的間隔の関数として表示したのが図 10 である⁵。縦軸の不安定時間が対数で描かれていることも理由のひとつだが、二者の計算方法で行った結果に定性的な違いはまったく無い。即ち $1R_H$ 程度までの近接遭遇であれば、generic WH map を用いても計算誤差についてそれほど神経質になることはないという結果が得られた。もちろんこれは、図 10 のように多数の計算結果を並べて統計的な目で眺めたからこそ言える話である。個々の数値積分に関しては、generic WH map のみを用いた場合と Hermite scheme を併用した場合とで結果が大きく異なる場合があることもまた言を待たない。シンプレクティック数値積分法に限らず、どんなに高精度な数値積分法を用いたとしてもこの状況は同じである。

謝辞

今回の草津 N 体研究会への参加にあたり、以下の方々には大変お世話になった。小久保英一郎さん (国立天文台理論天文学研究系) には講演を薦めていただき、荒木田英禎さん (総合研究大学院大学数物科学研究科天文科学専攻博士課程) には正則化の基本を教授をしていただき、谷川清隆さん (国立天文台理論天文学研究系) には講演の予行演習にて幾つかの重要な助言をいただき、吉田二美さん (神戸大学大学院自然科学研究科構造科学専攻博士課程) には MS PowerPoint の詳細な使用法を指導していただいた。この場を借りて深く御礼を申し上げます。

れる。

$$R_H^{i,j} = \left(\frac{m_i + m_j}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r_i + r_j}{2} \right),$$

相互 Hill 半径は制限三体問題に於けるいわゆる Hill 近似から出て来る距離 (Nakazawa *et al.*, 1989a; Nakazawa *et al.*, 1989b; Gladman, 1993) であり、回転座標系上での天体の重力圏の大きさを表すものと思えば良い。

⁵ 図 10 のようなダイアグラムは Chambers, Wetherill and Boss (1996) に於いて初めて示されたので、CWB diagram とも呼ばれる。Yoshinaga *et al.* (1999), Iwasaki *et al.* (2001) にも参照のこと。

参考文献

- Agnor, C.B., Canup, R.M., and Levison, H.F. (1999) On the character and consequences of large impacts in the late stage of terrestrial planet formation, *Icarus*, **142**, 219–237.
- Arakida, H. and Fukushima, T. (2000) Long-term integration error of Kustaanheimo-Stiefel regularized orbital motion, *Astron. J.*, **120**, 3333–3339.
- Arakida, H. and Fukushima, T. (2001) Long-term integration error of Kustaanheimo-Stiefel regularized orbital motion. II. Method of variation of parameters, *Astron. J.*, **121**, 1764–1767.
- Battin, R.H. (1987) *An Introduction to The Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., New York.
- Breiter, S. (1999) Explicit symplectic integrator for highly eccentric orbits, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **71**, 229–241.
- Brumberg, V.A. (1995) *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- Chambers, J.E. (1999) A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **304**, 793–799.
- Chambers, J.E. and Murison, M.A. (2000) Pseudo-high-order symplectic integrators, *Astron. J.*, **119**, 425–433.
- Chambers, J.E. and Wetherill, G.W. (1998) Making the terrestrial planets: N -body integrations of planetary embryos in three dimensions, *Icarus*, **136**, 304–327.
- Danby, J.M.A. (1992) *Fundamentals of Celestial Mechanics (second edition, third printing)*, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia.
- Deprit, A. (1969) Canonical transformations depending on a small parameter, *Celes. Mech.*, **1**, 12–30.
- Duncan, M.J., Levison, H.F., and Lee, M.H. (1998) A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters, *Astron. J.*, **116**, 2067–2077.
- Fukushima, T. (1996) A fast procedure solving Kepler’s equation for elliptic case, *Astron. J.*, **112**, 2858–2861.
- Fukushima, T. (1997a) A method solving Kepler’s equation for hyperbolic case, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **68**, 121–137.
- Fukushima, T. (1997b) A method solving Kepler’s equation without transcendental function evaluations, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **66**, 309–319.
- Fukushima, T. (1997c) A procedure solving the extended Kepler’s equation for the hyperbolic case, *Astron. J.*, **113**, 1920–1924.

- Fukushima, T. (1998) A fast procedure solving Gauss' form of Kepler's equation, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **70**, 115–130.
- Gladman, B. (1993) Dynamics of systems of two close planets, *Icarus*, **106**, 247–263.
- Gladman, B., Duncan, M., and Candy, J. (1991) Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **52**, 221–240.
- Hori, G. (1966) Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 287–296.
- Hori, G. (1967) Non-linear coupling of two harmonic oscillations, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **19**, 229–241.
- Ito, T. (2000) *Stability and instability of planetary and protoplanetary systems*, PhD thesis, University of Tokyo, Tokyo.
- Ito, T. and Tanikawa, K. (1999) Stability and instability of the terrestrial protoplanet system and their possible roles in the final stage of planet formation, *Icarus*, **139**, 336–349.
- Ito, T. and Tanikawa, K. (2001) Stability of terrestrial protoplanet systems and alignment of orbital elements, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **53**, 143–151.
- Ito, T. and Tanikawa, K. (2002) Long-term integrations and stability of planetary orbits in our solar system, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **336**, 483–500.
- Iwasaki, K., Tanaka, H., Nakazawa, K., and Emori, H. (2001) The gas-drag effect on the orbital instability of a protoplanet-system, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **53**, 321–329.
- Kinoshita, H., Yoshida, H., and Nakai, H. (1991) Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **50**, 59–71.
- Kokubo, E., Yoshinaga, K., and Makino, J. (1998) On a time-symmetric Hermite integrator for planetary N -body simulation, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **297**, 1067–1072.
- Kominami, J. and Ida, S. (2001) The effect of dynamical friction on formation of terrestrial planet, in *Proc. 33rd Symp. Celes. Mech.*, National Astronomical Observatory, 99–107.
- Laskar, J. and Robutel, P. (2001) High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **80**, 39–62.
- Lee, M.H., Duncan, M.J., and Levison, H.F. (1997) Variable time step integrators for long-term orbital integrations, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.*, **123**, 32–37.
- Levison, H.F. and Duncan, M.J. (1994) The long-term dynamical behavior of short-period comets, *Icarus*, **108**, 18–36.
- Levison, H.F. and Duncan, M.J. (2000) Symplectically integrating close encounters with the Sun, *Astron. J.*, **120**, 2117–2123.

- Levison, H.F., Lissauer, J.J., and Duncan, M.J. (1998) Modeling the diversity of outer planetary systems, *Astron. J.*, **116**, 1998–2014.
- Makino, J. and Aarseth, S.J. (1992) On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **44**, 141–151.
- Malhotra, R. (1994) A mapping method for the gravitational few-body problem with dissipation, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **60**, 373–385.
- Mikkola, S. (1997) Practical symplectic methods with time transformation for the few-body problem, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **67**, 145–165.
- Mikkola, S. (1998) Non-canonical perturbations in symplectic integration, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **68**, 249–255.
- Mikkola, S. (1999) Efficient symplectic integration of satellite orbits, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 275–285.
- Mikkola, S. and Innanen, K. (1999) Symplectic tangent map for planetary motions, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 59–67.
- Mikkola, S. and Palmer, P. (2000) Simple derivation of symplectic integrators with first order correctors, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **77**, 305–317.
- Mikkola, S. and Tanikawa, K. (1999) Explicit symplectic algorithms for time-transformed Hamiltonians, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 287–295.
- Nakazawa, K., Ida, S., and Nakagawa, Y. (1989a) Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field I. Basic formulation, *Astron. Astrophys.*, **220**, 293–300.
- Nakazawa, K., Ida, S., and Nakagawa, Y. (1989b) Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field II. The validity of the two-body approximation, *Astron. Astrophys.*, **221**, 342–347.
- Plummer, H.C. (1960) *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Dover, New York.
- Preto, M. and Tremaine, S. (1999) A class of symplectic integrators with adaptive time step for separable hamiltonian systems, *Astron. J.*, **118**, 2532–2541.
- Rauch, K.P. and Holman, M. (1999) Dynamical chaos in the Wisdom-Holman integrator: origins and solutions, *Astron. J.*, **117**, 1087–1102.
- Saha, P. and Tremaine, S. (1992) Symplectic integrators for solar system dynamics, *Astron. J.*, **104**, 1633–1640.
- Saha, P. and Tremaine, S. (1994) Long-term planetary integrations with individual time steps, *Astron. J.*, **108**, 1962–1969.
- Sanz-Serna, J.M. and Calvo, M.P. (1994) *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman & Hall, London.

- Skeel, R.D. and Biesiadecki, J.J. (1994) Symplectic integration with variable stepsize, *Ann. Numer. Math.*, **1**, 191–198.
- Stiefel, E.L. and Scheifele, G. (1971) *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- Wisdom, J. and Holman, M. (1991) Symplectic maps for the N -body problem, *Astron. J.*, **102**, 1528–1538.
- Wisdom, J. and Holman, M. (1992) Symplectic maps for the n -body problem: stability analysis, *Astron. J.*, **104**, 2022–2029.
- Wisdom, J., Holman, M., and Touma, J. (1996) Symplectic correctors, in Marsden, J.E., Patrick, G.W., and Shadwick, W.F. eds., *Integration Algorithms and Classical Mechanics*, Vol. 10 of Fields Institute Communications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 217–244.
- Yoshida, H. (1990a) Conserved quantities of symplectic integrators for Hamiltonian systems, preprint.
- Yoshida, H. (1990b) Construction of higher order symplectic integrators, *Phys. Lett. A*, **150**, 262–268.
- Yoshida, H. (1992) Symplectic integration for Hamiltonian systems: basic theory, in *Chaos, resonance and collective dynamical phenomena in the solar system*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 407–412.
- Yoshida, H. (1993) Recent progress in the theory and application of symplectic integrators, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **56**, 27–43.
- Yoshida, H. (2001) Non-existence of the modified first integral by symplectic integration method, *Phys. Lett. A*, **282**, 276–283.
- Yoshinaga, K., Kokubo, E., and Makino, J. (1999) The stability of protoplanet systems, *Icarus*, **139**, 328–335.
- 戸田盛和 (1994) 一般力学 30 講, 物理学 30 講シリーズ, No. 1, 朝倉書店.
- 福島登志夫 (1982) Newton 反復に対する安定な出発値とその Kepler 方程式への応用, 第 15 回天体力学研究会集録, 国立天文台, 33–36.
- 吉田春夫 (1995) シンプレクティック数値解法, 数理科学, **384**, 37–46.
- 吉田春夫 (1997) ハミルトン力学系のためのシンプレクティック数値積分法, 共同研究「非線型現象の数理科学」・湘南レクチャー「非線型現象の数理」論文集, 総合研究大学院大学, 68–83.