平成13年度 地球惑星科学特別講義V レポート課題解答例

平成15年3月2日

伊藤孝士 (文部科学省 国立天文台 データ解析センター)

この資料は、平成14年1月9日から1月11日にかけて東京工業大学にて実施された集中講義『地球惑星科学特別講義V—微小摂動系での天体力学概論』のレポートとして出題した幾つかの課題についての解答例を与えるものです。但し全ての課題の解答例が与えられているわけではなく、受講者各位の解答の中から代表的なものを選んで紹介する形式を採用しています。内容は (1) 幾つかの楕円展開, (2) 軌道要素の変数変換の計算, (3) Lagrange 括弧の性質の計算, (4) 要素変化の方程式と Lagrange 括弧, (5) Poisson 括弧の性質と Jacobi の恒等式, (6) シンプレクティク行列の性質, (7) 月と太陽の運動方程式, (8) 非線型一次元振り子の摂動解周期成分, です。本資料に関する誤りの指摘や疑問については電子メールで講師 (tito@cc.nao.ac.jp) に問い合わせてください。出来る限りの範囲で回答します。

1. 幾つかの楕円展開

以下の量を平均近点離角 l で展開せよ。$O(e^2)$ までで良い。k は自然数とする。

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f, \quad \cos ku, \quad \sin ku$$

講義で説明した主要な楕円展開は以下であった (と思う)。$J_p(x)$ を p 次の Bessel 関数として、

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_p(pe)\cos pl, \tag{1}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\frac{d}{de} J_p(pe)\cos pl, \tag{2}$$

$$\cos f = -e + \frac{2\left(1-e^2\right)}{e}\sum_{p=1}^{\infty} J_p(pe)\cos pl, \tag{3}$$

$$\sin f = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\frac{d}{de} J_p(pe)\sin pl. \tag{4}$$

Bessel 関数 $J_p(x)$ の表現は幾つもあるが、以下のような級数の形が実際の計算には便利である。

$$J_p(x) \quad = \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(j+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+2p}. \tag{5}$$

ちなみに具体形を幾つか書き下してみると

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + O(x^6), \tag{6}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{3x^3}{16} + O(x^5), \tag{7}$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + O(x^6), \tag{8}$$

などとなる。

1.1 $(a/r)^p \cos qf$, $(a/r)^p \sin qf$ の l による展開

楕円展開の中でも、$(a/r)^p \cos qf$ および $(a/r)^p \sin qf$ の平均近点離角 l による展開 (p, q は整数) は最も使用頻度が高い。いずれも低次の展開式を掛け合わせて高次の展開式を得て行くという道筋になる。Bessel 関数の具体形 (6)(7)(8) らを用いて (1)(2)(3)(4) を書き下すと以下のようになる。どこの教科書にも書いてある形であるが、ここでは $O(e^2)$ までの項だけ取り出すと

$$\frac{a}{r} = 1 + e\cos l + e^2 \cos 2l + O(e^3), \tag{9}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos l + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2l) + O(e^3), \tag{10}$$

$$\cos f = \cos l + e(\cos 2l - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3l - \cos l) + O(e^3), \tag{11}$$

$$\sin f = \sin l + e \sin 2l + e^2\left(\frac{9}{8}\sin 3l - \frac{7}{8}\sin l\right) + O(e^3). \tag{12}$$

従って、$\left(\frac{a}{r}\right)^2$ と $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ は (9) を二乗および三乗すれば得られる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^2 &= \left(1 + e\cos l + e^2\cos 2l + O(e^3)\right)^2 \\ &= 1 + e^2\cos^2 l + 2e\cos l + e^2\cos 2l + O(e^3) \\ &= 1 + 2e\cos l + \frac{e^2}{2}(1 + 5\cos 2l) + O(e^3),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3 &= \left(1 + e\cos l + e^2\cos 2l + O(e^3)\right)^3 \\ &= 1 + 3e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos 2l\right) + O(e^3).\end{aligned} \tag{14}$$

上記と同様にして

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2 &= \left(1 - e\cos l + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2l) + O(e^3)\right)^2 \\ &= 1 - 2e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2l\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{15}$$

となる。一方、$\cos 2f$ と $\sin 2f$ は三角函数の半角 (または二倍角) の公式

$$\cos 2f = 2\cos^2 f - 1, \quad \sin 2f = 2\sin f \cos f, \tag{16}$$

を使って直ちに計算出来る。

$$\begin{aligned}\cos^2 f &= \left(\cos l + e(\cos 2l - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3l - \cos l)\right)^2 \\ &= \cos^2 l + e^2(\cos 2l - 1)^2 + 2\cos l \cdot e(\cos 2l - 1) + 2\cos l \cdot \frac{9e^2}{8}(\cos 3l - \cos l) + O(e^3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2l + e(\cos 3l - \cos l) + e^2\left(\frac{13}{8}\cos 4l - 2\cos 2l + \frac{3}{8}\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{17}$$

より

$$\cos 2f = \cos 2l + 2e(\cos 3l - \cos l) + e^2\left(\frac{3}{4} - 4\cos 2l + \frac{13}{4}\cos 4l\right) + O(e^3), \tag{18}$$

同じように

$$\begin{aligned}\sin 2f &= 2\left(\sin l + e\sin 2l + e^2\left(\frac{9}{8}\sin 3l - \frac{7}{8}\sin l\right)\right)\\ &\quad\times\left(\cos l + e(\cos 2l - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3l - \cos l)\right) + O(e^3)\\ &= \sin 2l + 2e(\sin 3l - \sin l) + e^2\left(\frac{13}{4}\sin 4l - 4\sin 2l\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{19}$$

ここまで求まれば、$\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f$ については上述した結果 (10) (14) (18) (19) を全部代入して計算するだけで良い。今や数式処理アプリケーションを使えばこれらはすぐに計算出来るのだが (Maple による結果の例を実際に後に示している)、天体力学を専門にしない人でも一生に一度は自分で手計算してみることをお薦めする。$O(e^3)$ くらいまでなら手計算でもそれほど時間は掛からない。$O(e^5)$ などの高次項が必要になるとさすがに手計算では苦しくなって来るが、普通の人はそんな状況には生涯出喰わすことはないだろうから、心配しなくて良い。と言うわけで $O(e^2)$ まで手計算すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f &= \left(1 - 2e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &\quad\times\left(\cos 2l + 2e(\cos 3l - \cos l) + e^2\left(\frac{3}{4} - 4\cos 2l + \frac{13}{4}\cos 4l\right) + O(e^3)\right)\\ &= \cos 2l + e\left(\cos 3l - 3\cos l\right) + e^2\left(-\frac{5}{2}\cos 2l + \cos 4l + \frac{5}{2}\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f &= \left(1 - 2e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &\quad\times\left(\sin 2l + 2e(\sin 3l - \sin l) + e^2\left(\frac{13}{4}\sin 4l - 4\sin 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &= \sin 2l + e\left(\sin 3l - 3\sin l\right) + e^2\left(\sin 4l - \frac{5}{2}\sin 2l\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f &= \left(1 + 3e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &\quad\times\left(\cos 2l + 2e(\cos 3l - \cos l) + e^2\left(\frac{3}{4} - 4\cos 2l + \frac{13}{4}\cos 4l\right) + O(e^3)\right)\\ &= \cos 2l + e\left(\frac{7}{2}\cos 3l - \frac{1}{2}\cos l\right) + e^2\left(-\frac{5}{2}\cos 2l + \frac{17}{2}\cos 4l\right) + O(e^3),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f &= \left(1 + 3e\cos l + e^2\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &\quad\times\left(\sin 2l + 2e(\sin 3l - \sin l) + e^2\left(\frac{13}{4}\sin 4l - 4\sin 2l\right) + O(e^3)\right)\\ &= \sin 2l + e\left(\frac{7}{2}\sin 3l - \frac{1}{2}\sin l\right) + e^2\left(\frac{17}{2}\sin 4l - \frac{5}{2}\sin 2l\right) + O(e^3).\end{aligned} \tag{23}$$

参考までに、Maple を使って $\cos 2f$, $\sin 2f$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f$ を $O(e^8)$ まで求めた例を掲載しておく。手計算での検算は行っていないので、数式処理アプリケーションに強い人は確認してみてほしい。このように高次項までを求める場合には当然ながら元々の Bessel 関数 (5) に戻って高次項を拾い集める必要がある。$O(e^8)$ まで計算したいなら

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{147456}x^8 - \frac{1}{14745600}x^{10}, \tag{24}$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 - \frac{1}{18432}x^7 + \frac{1}{1474560}x^9 - \frac{1}{176947200}x^{11}, \tag{25}$$

$$J_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + \frac{1}{17694720}x^{10}, \tag{26}$$

$$J_3(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{768}x^5 + \frac{1}{30720}x^7 - \frac{1}{2211840}x^9 + \frac{1}{247726080}x^{11}, \tag{27}$$

$$J_4(x) = \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{7680}x^6 + \frac{1}{368640}x^8 - \frac{1}{30965760}x^{10}, \tag{28}$$

$$J_5(x) = \frac{1}{3840}x^5 - \frac{1}{92160}x^7 + \frac{1}{5160960}x^9 - \frac{1}{495452160}x^{11}, \tag{29}$$

$$J_6(x) = \frac{1}{46080}x^6 - \frac{1}{1290240}x^8 + \frac{1}{82575360}x^{10}, \tag{30}$$

$$J_7(x) = \frac{1}{645120}x^7 - \frac{1}{20643840}x^9 + \frac{1}{1486356480}x^{11}, \tag{31}$$

$$J_8(x) = \frac{1}{10321920}x^8 - \frac{1}{371589120}x^{10}, \tag{32}$$

$$J_9(x) = \frac{1}{185794560}x^9 - \frac{1}{7431782400}x^{11}, \tag{33}$$

$$J_{10}(x) = \frac{1}{3715891200}x^{10}, \tag{34}$$

および上記の一階導関数を揃えておけば余りにも十分であろう (と言うか実際には冗長すぎる)。また、$\sin f$ の展開式 (4) に現れる $\sqrt{1-e^2}$ も以下のようにあらかじめ Taylor 展開しておく。

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 - \frac{7}{256}e^{10} + O(e^{12}). \tag{35}$$

あとは逐次の代入展開整理を計算機にやらせるだけで良いから、文字通り機械的である。

$$\begin{aligned}
\cos 2f = {} & \cos 2l + 2\left(-\cos l + \cos 3l\right) e + \left(\frac{3}{4} - 4\cos 2l + \frac{13}{4}\cos 4l\right) e^2 \\
& + \left(\frac{11}{6}\cos l - \frac{27}{4}\cos 3l + \frac{59}{12}\cos 5l\right) e^3 \\
& + \left(\frac{1}{8} + \frac{167}{48}\cos 2l - \frac{259}{24}\cos 4l + \frac{115}{16}\cos 6l\right) e^4 \\
& + \left(-\frac{5}{192}\cos l + \frac{2079}{320}\cos 3l - \frac{3221}{192}\cos 5l + \frac{9893}{960}\cos 7l\right) e^5 \\
& + \left(\frac{3}{64} - \frac{503}{720}\cos 2l + \frac{8401}{720}\cos 4l - \frac{2049}{80}\cos 6l + \frac{42037}{2880}\cos 8l\right) e^6 \\
& + \left(\frac{751}{11520}\cos l - \frac{1427}{640}\cos 3l + \frac{163363}{8064}\cos 5l - \frac{889303}{23040}\cos 7l + \frac{367439}{17920}\cos 9l\right) e^7 \\
& + \left(\frac{3}{128} + \frac{227}{1920}\cos 2l - \frac{18209}{3360}\cos 4l + \frac{306699}{8960}\cos 6l - \frac{2321957}{40320}\cos 8l + \frac{461843}{16128}\cos 10l\right) e^8,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
\sin 2f = {} & \sin 2l + 2\left(-\sin l + \sin 3l\right) e + \left(-4\sin 2l + \frac{13}{4}\sin 4l\right) e^2 \\
& + \left(\frac{5}{3}\sin l - \frac{27}{4}\sin 3l + \frac{59}{12}\sin 5l\right) e^3 \\
& + \left(\frac{163}{48}\sin 2l - \frac{259}{24}\sin 4l + \frac{115}{16}\sin 6l\right) e^4 \\
& + \left(-\frac{5}{64}\sin l + \frac{2061}{320}\sin 3l - \frac{3221}{192}\sin 5l + \frac{9893}{960}\sin 7l\right) e^5 \\
& + \left(-\frac{527}{720}\sin 2l + \frac{8369}{720}\sin 4l - \frac{2049}{80}\sin 6l + \frac{42037}{2880}\sin 8l\right) e^6 \\
& + \left(\frac{151}{2880}\sin l - \frac{2881}{1280}\sin 3l + \frac{326101}{16128}\sin 5l - \frac{889303}{23040}\sin 7l + \frac{367439}{17920}\sin 9l\right) e^7 \\
& + \left(\frac{599}{5760}\sin 2l - \frac{10951}{2016}\sin 4l + \frac{61275}{1792}\sin 6l - \frac{2321957}{40320}\sin 8l + \frac{461843}{16128}\sin 10l\right) e^8,
\end{aligned} \tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f = {} & \cos 2l + \left(-3\cos l + \cos 3l\right) e + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cos 2l + \cos 4l\right) e^2 \\
& + \left(\frac{4}{3}\cos l - \frac{19}{8}\cos 3l + \frac{25}{24}\cos 5l\right) e^3 \\
& + \left(\frac{11}{8}\cos 2l - \frac{5}{2}\cos 4l + \frac{9}{8}\cos 6l\right) e^4 \\
& + \left(-\frac{37}{384}\cos l + \frac{1053}{640}\cos 3l - \frac{1075}{384}\cos 5l + \frac{2401}{1920}\cos 7l\right) e^5 \\
& + \left(-\frac{179}{720}\cos 2l + \frac{94}{45}\cos 4l - \frac{261}{80}\cos 6l + \frac{64}{45}\cos 8l\right) e^6 \\
& + \left(\frac{11}{3840}\cos l - \frac{243}{512}\cos 3l + \frac{29375}{10752}\cos 5l - \frac{12005}{3072}\cos 7l + \frac{59049}{35840}\cos 9l\right) e^7 \\
& + \left(\frac{7}{320}\cos 2l - \frac{86}{105}\cos 4l + \frac{16281}{4480}\cos 6l - \frac{1504}{315}\cos 8l + \frac{15625}{8064}\cos 10l\right) e^8,
\end{aligned} \tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f = {} & \sin 2l + \left(-3\sin l + \sin 3l\right) e + \left(-\frac{5}{2}\sin 2l + \sin 4l\right) e^2 \\
& + \left(\frac{23}{12}\sin l - \frac{19}{8}\sin 3l + \frac{25}{24}\sin 5l\right) e^3 \\
& + \left(\frac{3}{2}\sin 2l - \frac{5}{2}\sin 4l + \frac{9}{8}\sin 6l\right) e^4 \\
& + \left(\frac{19}{128}\sin l + \frac{1087}{640}\sin 3l - \frac{1075}{384}\sin 5l + \frac{2401}{1920}\sin 7l\right) e^5 \\
& + \left(-\frac{73}{360}\sin 2l + \frac{763}{360}\sin 4l - \frac{261}{80}\sin 6l + \frac{64}{45}\sin 8l\right) e^6 \\
& + \left(\frac{371}{2560}\sin l - \frac{59}{128}\sin 3l + \frac{925}{336}\sin 5l - \frac{12005}{3072}\sin 7l + \frac{59049}{35840}\sin 9l\right) e^7 \\
& + \left(\frac{299}{5760}\sin 2l - \frac{4111}{5040}\sin 4l + \frac{16353}{4480}\sin 6l - \frac{1504}{315}\sin 8l + \frac{15625}{8064}\sin 10l\right) e^8,
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f &= \cos 2l + \left(-\frac{1}{2}\cos l + \frac{7}{2}\cos 3l\right) e + \left(-\frac{5}{2}\cos 2l + \frac{17}{2}\cos 4l\right) e^2 \\
&+ \left(\frac{1}{12}\cos l - \frac{123}{16}\cos 3l + \frac{845}{48}\cos 5l\right) e^3 \\
&+ \left(\frac{41}{48}\cos 2l - \frac{115}{6}\cos 4l + \frac{533}{16}\cos 6l\right) e^4 \\
&+ \left(\frac{1}{768}\cos l + \frac{4971}{1280}\cos 3l - \frac{32525}{768}\cos 5l + \frac{228347}{3840}\cos 7l\right) e^5 \\
&+ \left(-\frac{133}{1440}\cos 2l + \frac{9079}{720}\cos 4l - \frac{13827}{160}\cos 6l + \frac{73369}{720}\cos 8l\right) e^6 \\
&+ \left(\frac{7}{2880}\cos l - \frac{841}{1024}\cos 3l + \frac{2194175}{64512}\cos 5l - \frac{3071075}{18432}\cos 7l + \frac{12144273}{71680}\cos 9l\right) e^7 \\
&+ \left(\frac{9}{640}\cos 2l - \frac{469}{120}\cos 4l + \frac{730347}{8960}\cos 6l - \frac{775727}{2520}\cos 8l + \frac{634085}{2304}\cos 10l\right) e^8, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f &= \sin 2l + \left(-\frac{1}{2}\sin l + \frac{7}{2}\sin 3l\right) e + \left(-\frac{5}{2}\sin 2l + \frac{17}{2}\sin 4l\right) e^2 \\
&+ \left(\frac{1}{24}\sin l - \frac{123}{16}\sin 3l + \frac{845}{48}\sin 5l\right) e^3 \\
&+ \left(\frac{37}{48}\sin 2l - \frac{115}{6}\sin 4l + \frac{533}{16}\sin 6l\right) e^4 \\
&+ \left(-\frac{7}{256}\sin l + \frac{4809}{1280}\sin 3l - \frac{32525}{768}\sin 5l + \frac{228347}{3840}\sin 7l\right) e^5 \\
&+ \left(-\frac{217}{1440}\sin 2l + \frac{8951}{720}\sin 4l - \frac{13827}{160}\sin 6l + \frac{73369}{720}\sin 8l\right) e^6 \\
&+ \left(-\frac{827}{46080}\sin l - \frac{461}{512}\sin 3l + \frac{1089275}{32256}\sin 5l - \frac{3071075}{18432}\sin 7l + \frac{12144273}{71680}\sin 9l\right) e^7 \\
&+ \left(-\frac{181}{5760}\sin 2l - \frac{1439}{360}\sin 4l + \frac{727431}{8960}\sin 6l - \frac{775727}{2520}\sin 8l + \frac{634085}{2304}\sin 10l\right) e^8. \qquad (41)
\end{aligned}
$$

1.2 $\cos ku$ の l による展開

$\cos ku$ と $\sin ku$ (k は自然数) の展開に関しては多少の追加説明を要する。

今、平均近点離角 l の周期函数 $F(l)$ が以下のようにフーリエ展開できるものと仮定する (講義で説明した流儀のフーリエ展開とは係数がちょっとだけ異なるが、本質的には何ら不変)。

$$F(l) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nl + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nl, \qquad (42)$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(l)dl, \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(l)\cos nl dl, \quad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(l)\sin nl dl. \qquad (43)$$

講義で説明したように、もし $F(l)$ が l の偶関数であれば $B_n = 0$ であり、もし $F(l)$ が l の奇関数であれば $A_0 = A_n = 0$ である。

さてこれも講義でやったが、ケプラー方程式 (をちょっと移項した形)

$$u - l = e \sin u, \qquad (44)$$

に前記のフーリエ展開を適用する。以下は自明な人には自明な事柄かもしれないが[1]、

1. $\sin(-u) = -\sin u$ より (44) の右辺は u について奇関数なので、
2. (44) の左辺も u について奇関数である。
3. 従って、左辺 $(-u) = -$左辺 (u) となる必要があるが、そのためには (44) の左辺は l についても奇関数である必要がある (左辺に入っている l は単に $-l$ なので、これは明らか)。
4. よって (44) の右辺も l に関して奇関数である。
5. 即ち $\sin u$ は u についてのみならず l についても奇関数である。
6. (44) より $u = e\sin u + l$ であり、$\sin u$ が l の奇関数なので、$e\sin u + l$ も l の奇関数となる。
7. 従って u 自体も l の奇関数である。
8. ということは、u の奇関数である $\sin ku$ は[2] l の奇関数である。
9. 同様にして $\cos ku$ は u の偶関数であるが、上記と同等の論理により l の偶関数でもある。

ということで、l の偶関数 $\cos ku$ をフーリエ展開した形を以下のように書く。

$$\cos ku = \frac{1}{2}A_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n}\cos nl. \tag{45}$$

係数 $A_{k,n}$ は (43) にある通りで、

$$\begin{aligned}
A_{k,n} &= \frac{2}{\pi}\int_n^{\pi} \cos ku \cos nl dl \\
&\quad \text{これを部分積分して} \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\cos ku \sin nl\right]_0^{\pi} + \frac{2k}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin ku \sin nl du \\
&\quad \text{これの第一項} = 0, \text{および三角関数の加法定理から} \\
&= \frac{k}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(nl - ku)du - \frac{k}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(nl + ku)du \\
&\quad \text{ケプラー方程式より } l = u - e\sin u \text{ なので、これを代入すると} \\
&= \frac{k}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{(n-k)u - ne\sin u\right\} du - \frac{k}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{(n+k)u - ne\sin u\right\} du, \qquad (46)
\end{aligned}$$

であるが、実は (46) の右辺はそれぞれ Bessel 函数の積分表示になっていることがわかる。Bessel 函数の積分表示については講義では説明しなかった (と記憶する) が、例えば Murray & Dermott (1999) “Solar System Dynamics” の (2.77) などを参照すると

$$\pi J_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta, \tag{47}$$

などというものである。これを (46) に適用すると

$$A_{k,n} = \frac{k}{n}\left[J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)\right], \tag{48}$$

[1] この辺りはおそらく、一般的な函数 $F_{\rm odd}(x)$ や $F_{\rm even}(x)$ などを用いればずっとすっきり書けるはずである。$F_{\rm odd}(-x) = -F_{\rm odd}(x)$, $F_{\rm even}(-x) = F_{\rm even}(x)$, など。

[2] 記すまでもないが、$\sin k(-u) = -\sin ku$ より u の奇関数。

となる。同様にして $A_{k,0}$ も

$$\begin{aligned} A_{k,0} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ku(1-e\cos u)du \\ &\quad \text{部分積分と三角函数の定理を一遍に使ったことにして} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos kudu - \frac{e}{\pi}\int_0^\pi \cos(k+1)udu - \frac{e}{\pi}\int_0^\pi \cos(k-1)udu \end{aligned} \tag{49}$$

ここで $k>1$ であれば (49) は

$$A_{k,0} = \frac{2}{k\pi}\left[\sin ku\right]_0^\pi - \frac{e}{(k+1)\pi}\left[\sin(k+1)u\right]_0^\pi - \frac{e}{(k-1)\pi}\left[\sin(k-1)u\right]_0^\pi, \tag{50}$$

となり、全項 $=0$ は自明。$k=1$ の場合には (49) の右辺最終項のみ残り、

$$A_{k,0} = -\frac{e}{\pi}\int_0^\pi \cos(1-1)udu = -\frac{e}{\pi}\pi = -e, \tag{51}$$

となる。従って結局 $\cos ku$ の展開は、$k>1$ の時

$$\cos ku = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)\right\}\cos nl, \tag{52}$$

$k=1$ の時

$$\cos u = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)\right\}\cos nl, \tag{53}$$

となる。ちなみに Bessel 函数には微分漸化式的な性質

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right), \tag{54}$$

があるので、これを利用すると (53) は

$$\cos u = -\frac{e}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{dJ_n(ne)}{de}\cos nl, \tag{55}$$

となる。(55) の結果もまた巷の教科書でお馴染みである。

1.3 $\sin ku$ の l による展開

$\cos ku$ の場合と同様にして、l の奇関数 $\sin ku$ をフーリエ展開した形を以下のように書く。

$$\sin ku = \sum_{n=1}^{\infty} B_{k,n}\sin nl. \tag{56}$$

係数 $B_{k,n}$ は (43) にある通りで、同様に計算すると

$$\begin{aligned} B_{k,n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ku \sin nl dl \\ &\quad \text{この辺りの計算は}\cos ku\text{の場合と全く同じ} \\ &= \frac{k}{n\pi}\int_0^\pi \left\{\cos(nl+ku) + \cos(nl-ku)\right\}du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nl+ku)du + \frac{k}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nl-ku)du \\
&\quad \text{ケプラー方程式 } l = u - e\sin u \text{ を代入} \\
&= \frac{k}{n\pi}\int_0^\pi \cos\left\{(n-k)u - ne\sin u\right\}du + \frac{k}{n\pi}\int_0^\pi \cos\left\{(n+k)u - ne\sin u\right\}du \\
&\quad \text{Bessel 函数の積分表示 (47) より} \\
&= \frac{k}{n}\left[J_{k+n}(ne) + J_{n-k}(ne)\right] \qquad (57)
\end{aligned}
$$

この結果を (56) に代入すれば、

$$
\sin ku = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[J_{n+k}(ne) + J_{n-k}(ne)\right]\sin nl, \tag{58}
$$

となり、特に $k=1$ の場合には

$$
\sin u = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[J_{n+1}(ne) + J_{n-1}(ne)\right]\sin nl, \tag{59}
$$

という形になる。また、Bessel 函数の漸化式

$$
nJ_n(x) = \frac{x}{2}\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right), \tag{60}
$$

を用いると、(59) は以下のようにどこかで見た形になる。

$$
\sin u = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nl. \tag{61}
$$

2. 軌道要素の変数変換 (Jacobi 行列) の計算

軌道要素間の変数変換のための以下のヤコビ行列を計算せよ。

$$
\frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,f)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)},\quad \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,l)},\quad \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,l)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,f)},\quad \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)}
$$

この種の Jacobi 行列の計算は変数の定義に従って丁寧に進める以外にない。まずは以下の議論で使う変数の定義を列挙しておく。

$$
\eta \equiv \sqrt{1-e^2}, \tag{62}
$$

$$
r = a(1-e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}. \tag{63}
$$

離心近点離角 u と真近点離角 f の以下の関係も多用する。

$$
\sin u = \frac{\eta\sin f}{1+e\cos f},\quad \cos u = \frac{e+\cos f}{1+e\cos f}, \tag{64}
$$

$$
\sin f = \frac{\eta\sin u}{1-e\cos u},\quad \cos f = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}. \tag{65}
$$

L, G, H などは以下で定義される Delaunay 変数である。

$$
\begin{aligned}
L &= \sqrt{\mu a}, & l &= l, \\
G &= L\sqrt{1-e^2}, & g &= \omega, \\
H &= G\cos I, & h &= \Omega.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

上記のような変数の関係があるので結果の Jacobi 行列の表現は一意ではないが、どのような表記を用いても適切な変数変換を行えば等価な物になっているはずである。

2.1 $(da, de, d\omega, dI, d\Omega, df) \to (da, de, d\omega, dI, d\Omega, du)$

計算すべきものは以下である。

$$
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ df \end{pmatrix} = \frac{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, f)}{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, u)} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial u} \\
\frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial u} \\
\frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial u} \\
\frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial u} \\
\frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial u} \\
\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial \Omega} & \frac{\partial f}{\partial u}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix}. \tag{67}
$$

まず (67) のうち明らかに 0 になるものを拾集する。ケプラー軌道要素のうち a, e, ω, I, Ω は互いに完全に独立であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial e} = \frac{\partial a}{\partial \omega} = \frac{\partial a}{\partial I} = \frac{\partial a}{\partial \Omega} = 0, \\
\frac{\partial e}{\partial a} = \frac{\partial e}{\partial \omega} = \frac{\partial e}{\partial I} = \frac{\partial e}{\partial \Omega} = 0, \\
\frac{\partial \omega}{\partial a} = \frac{\partial \omega}{\partial e} = \frac{\partial \omega}{\partial I} = \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} = 0, \\
\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial e} = \frac{\partial I}{\partial \omega} = \frac{\partial I}{\partial \Omega} = 0, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{\partial \Omega}{\partial e} = \frac{\partial \Omega}{\partial I} = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = 0,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

明らかに 1 になるものもある。

$$
\frac{\partial a}{\partial a} = \frac{\partial e}{\partial e} = \frac{\partial \omega}{\partial \omega} = \frac{\partial I}{\partial I} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} = 1. \tag{69}
$$

$\partial/\partial u$ が絡むと多少話が面倒になることがあるが、(67) に現れる u の偏微分係数を計算する際に他のどれが独立変数になっているのか (あるいは偏微分の際にどの変数を定数として扱うべきなのか) を把握しておけば良い。例えば e を u で偏微分することを考えると、この時には (67) の右辺の縦ベクトルに現れる変数のうち a, e, ω, I, Ω はみな一定として偏微分することになる。つまり $\left.\frac{\partial e}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega}$ を考えることになるが、e を一定として e を u で偏微分するのだから、これは明らかに 0 となる。即ち

$$
\left.\frac{\partial e}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{70}
$$

ここで下手にケプラー方程式 $u - e\sin u = l$ を持ち出して

$$
e = \frac{u-l}{\sin u}, \quad \therefore \ \frac{\partial e}{\partial u} = \frac{\sin u - (u-l)\cos u}{\sin^2 u}, \tag{71}
$$

などとすると思い切りハマることになるので、注意が必要である。

同様にして

$$\left.\frac{\partial a}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial I}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{72}$$

あとは f を偏微分する係数であるが、f と u の関係式である (64) と (65) を見てみれば、どこをどう引っ繰り返しても f, u, e 以外の変数は出て来ないことがわかる。ということで

$$\left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{e,\omega,I,\Omega,u} = \left.\frac{\partial f}{\partial \omega}\right|_{a,e,I,\Omega,u} = \left.\frac{\partial f}{\partial I}\right|_{a,e,\omega,\Omega,u} = \left.\frac{\partial f}{\partial \Omega}\right|_{a,e,\omega,I,u} = 0, \tag{73}$$

が得られ、結局のところ計算すべき Jacobi 行列は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial u} \\ \frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial u} \\ \frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial u} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial \Omega} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}. \tag{74}$$

f, e, u が絡む偏微分係数については (64) と (65) から出発して計算する。(65) の第二式を e で偏微分すると

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \cos f}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,u} &= -\sin f \left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,u} \\ &= \frac{\partial}{\partial e}\left((\cos u - e)(1 - e\cos u)^{-1}\right) \\ &= -1 \cdot (1 - e\cos u)^{-1} + (-e + \cos u) \cdot (-1) \cdot (1 - e\cos u)^{-2}(-\cos u) \\ &= \frac{-1}{1 - e\cos u} + \frac{-e + \cos u}{(1 - e\cos u)^2}\cos u \\ &= \frac{1}{(1 - e\cos u)^2}\left[-1 + e\cos u + (-e + \cos u)\cos u\right] \\ &= \frac{1}{(1 - e\cos u)^2}\left(\cos^2 u - 1\right) \\ &= \frac{-\sin^2 u}{(1 - e\cos u)^2} \\ &= -\left(\frac{\sin u}{1 - e\cos u}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{\sin f}{\eta}\right)^2, \quad (\because (64)) \end{aligned} \tag{75}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,u} = \left(\frac{1}{-\sin f}\right)\left(-\frac{\sin^2 f}{\eta^2}\right) = \frac{1}{\eta^2}\sin f = \frac{L^2}{G^2}\sin f. \tag{76}$$

同様にして式 (65) の第二式を u で偏微分すると

$$\left.\frac{\partial \cos f}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = -\sin f \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial u}\left((\cos u - e)(1 - e\cos u)^{-1}\right) \\
&= -\sin u(1 - e\cos u)^{-1} + (-e + \cos u)\cdot(-1)\cdot(1 - e\cos u)^{-2} e\sin u \\
&= \frac{-\sin u}{1 - e\cos u} - \frac{-e + \cos u}{(1 - e\cos u)^2} e\sin u \\
&= \frac{1}{(1 - e\cos u)^2}\left[-\sin u(1 - e\cos u) - e\sin u(-e + \cos u)\right] \\
&= \frac{\sin u}{(1 - e\cos u)^2}(1 - e^2) \\
&= \frac{\eta^2 \sin^2 u}{(1 - e\cos u)^2}\left(-\frac{1}{\sin u}\right) \\
&= -\frac{\sin^2 f}{\sin u}, \quad (\because (64))
\end{aligned}
\tag{77}
$$

$$
\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \bigg|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left(-\frac{1}{\sin f}\right)\left(-\frac{\sin^2 f}{\sin u}\right) = \frac{\eta \sin u}{1 - e\cos u}\frac{1}{\sin u} = \frac{a\eta}{r} \quad (\because (63)). \tag{78}
$$

以上より結局、式 (67) は以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ df \end{pmatrix} = \frac{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, f)}{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, u)} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{G^2}\sin f & 0 & 0 & 0 & \frac{a\eta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix}. \tag{79}
$$

2.2 $(da, de, d\omega, dI, d\Omega, du) \to (da, de, d\omega, dI, d\Omega, dl)$

計算すべきものは以下である。

$$
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix} = \frac{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, u)}{\partial(a, e, \omega, I, \Omega, l)} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial l} \\
\frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial l} \\
\frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial l} \\
\frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial l} \\
\frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial l} \\
\frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial e} & \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial I} & \frac{\partial u}{\partial \Omega} & \frac{\partial u}{\partial l}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}. \tag{80}
$$

(80) のうち明らかに 0 または 1 になるものについては前出の (68) と (69) がそのまま成り立つ。

$\partial/\partial l$ が絡んだものについても前出の $\partial/\partial u$ が絡んだものと同様に考える。例えば e を l で偏微分することを考えると、この時には (80) の右辺の縦ベクトルに現れる変数のうち a, e, ω, I, Ω はみな一定として偏微分することになるので、$\frac{\partial e}{\partial l}\Big|_{a,e,\omega,I,\Omega}$ を考えることになる。即ち e を一定として e を l で偏微分するのだから、これは明らかに 0 となる。

$$
\frac{\partial e}{\partial l}\bigg|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{81}
$$

ここでも、下手にケプラー方程式 $u - e\sin u = l$ を持ち出して

$$
e = \frac{u - l}{\sin u}, \quad \therefore \quad \frac{\partial e}{\partial l} = -\frac{1}{\sin u}, \tag{82}
$$

などとすると手痛い思いをすることになるので、注意が必要である。同様にして

$$\left.\frac{\partial a}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial I}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{83}$$

あとは u を偏微分する係数だが、u と l の関係式であるケプラー方程式 $u - e\sin u = l$ を考えてみればどこをどう引っ繰り返しても u, l, e 以外の変数は出て来ないことがわかる。よって

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{e,\omega,I,\Omega,l} = \left.\frac{\partial u}{\partial \omega}\right|_{a,e,I,\Omega,l} = \left.\frac{\partial u}{\partial I}\right|_{a,e,\omega,\Omega,l} = \left.\frac{\partial u}{\partial \Omega}\right|_{a,e,\omega,I,l} = 0, \tag{84}$$

が得られる。なおここでも勘違いしてケプラー方程式を

$$u - e\sin u = l = n(t - t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \tag{85}$$

などと変形し、a が関係していると勘違いすると大変に苦しいことになろう。ということで結局、計算すべき Jacobi 行列は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial l} \\ \frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial l} \\ \frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial l} \\ \frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial l} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial l} \\ \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial e} & \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial I} & \frac{\partial u}{\partial \Omega} & \frac{\partial u}{\partial l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial l} \end{pmatrix}. \tag{86}$$

残りの偏微分係数については以下のように進めれば良い。ケプラー方程式

$$u - e\sin u = l \tag{87}$$

の両辺を e で偏微分すると

$$\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,l} - \left(\sin u + e\cos u \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,l}\right) = \left.\frac{\partial l}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,l} = 0, \tag{88}$$

$$\therefore \quad (1 - e\cos u)\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,l} = \sin u, \tag{89}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\omega,I,\Omega,l} = \frac{\sin u}{1 - e\cos u} = \frac{\sin f}{\eta}. \quad (\because (65)) \tag{90}$$

同様にして式 (87) の両辺を l で偏微分すると、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} - e\cos \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial l}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 1, \tag{91}$$

$$\therefore \quad (1 - e\cos u)\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 1, \tag{92}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \frac{1}{1 - e\cos u} = \frac{a}{r}. \tag{93}$$

以上より式 (86) は以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix}
= \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,l)}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \mbox{\Large 0} & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
\mbox{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\
0 & \frac{\sin f}{\eta} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{r}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}. \tag{94}
$$

2.3 $(da, de, d\omega, dI, d\Omega, df) \to (da, de, d\omega, dI, d\Omega, dl)$

これは前の二個と同様に直接定義から計算しても良いが、行列の掛け算を行えば自動的に計算出来るものでもある。今まで得られた結果について $df \to du \to dl$ と経由して行けば良く、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ df \end{pmatrix}
&= \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,f)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,l)}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial l} \\
\frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial l} \\
\frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial l} \\
\frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial l} \\
\frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial l} \\
\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial \Omega} & \frac{\partial f}{\partial l}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,f)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)} \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,l)}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & & & & \mbox{\Large 0} & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
\mbox{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\
0 & \frac{\partial f}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \mbox{\Large 0} & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
\mbox{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\
0 & \frac{\partial u}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial l}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & & & & \mbox{\Large 0} & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
\mbox{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\
0 & \frac{L^2}{G^2}\sin f & 0 & 0 & 0 & \frac{a\eta}{r}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \mbox{\Large 0} & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
\mbox{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\
0 & \frac{\sin f}{\eta} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{r}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{G^2}\sin f + \frac{a\eta}{r}\frac{\sin f}{\eta} & 0 & 0 & 0 & \frac{a\eta}{r}\frac{a}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a}{r} + \frac{L^2}{G^2}\right)\sin f & 0 & 0 & 0 & \frac{a^2\eta}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ dl \end{pmatrix}. \tag{95}
$$

2.4 $(da, de, d\omega, dI, d\Omega, du) \to (da, de, d\omega, dI, d\Omega, d\sigma)$

古い天体力学教科書の多くでは、六番目の軌道要素として l ではなく元期近点離角 $\sigma = l - nt$ を用いている。定数変化法による Laplace–Lagrange 方程式の導出に於いては、この σ の使用が話をややこしくする最たる原因なので、ハミルトン形式全盛の現在ではあまりお薦め出来ない変数である。だがここでは練習の一環として σ を含んだ Jacobi 行列を計算してみる。なお、この σ は後出する「4. 要素変化の方程式と Lagrange 括弧」に於ける χ と同一物である。歴史的事情に従ったためにこのように二種類の記号を使うことになった。

ここで計算すべきものは以下である。

$$
\begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ du \end{pmatrix} = \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial e} & \frac{\partial a}{\partial \omega} & \frac{\partial a}{\partial I} & \frac{\partial a}{\partial \Omega} & \frac{\partial a}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial e}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial \omega} & \frac{\partial e}{\partial I} & \frac{\partial e}{\partial \Omega} & \frac{\partial e}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \omega}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega}{\partial I} & \frac{\partial \omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial I}{\partial a} & \frac{\partial I}{\partial e} & \frac{\partial I}{\partial \omega} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial \Omega} & \frac{\partial I}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial \Omega}{\partial e} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial I} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial e} & \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial I} & \frac{\partial u}{\partial \Omega} & \frac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de \\ d\omega \\ dI \\ d\Omega \\ d\sigma \end{pmatrix}. \tag{96}
$$

σ はその定義から平均近点離角 l に依存するが、それのみならず平均運動 n にも依存する。即ち

$$
\sigma = l - nt = l - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t, \tag{97}
$$

であるが、この n を通じて、σ には軌道半長径 a への依存性もあるのである。σ と a のこの依存性は様々な所で混乱を引き起こす。

u と σ の関係を考えると、例によってケプラー方程式より

$$
u - e\sin u = \sigma + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t, \tag{98}
$$

だから、u は a, e, σ の関数すなわち $u = u(a,e,\sigma)$ であることがわかる。これを念頭に置きつつ (98) を e で偏微分すると

$$
\text{左辺} = \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\sigma} - \left(\sin u + e\cos u \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\sigma}\right) = \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\sigma}(1 - e\cos u) - \sin u, \tag{99}
$$

また、右辺に於いて μ は定数、t もここではパラメータのようなものだから

$$右辺 = \left.\frac{\partial\left(\sigma+\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t\right)}{\partial e}\right|_{a,\sigma} = 0, \tag{100}$$

従って以下が得られる。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{a,\sigma} = \frac{\sin u}{1-e\cos u} = \frac{\sin f}{\eta}. \tag{101}$$

a による u の偏微分は、ケプラー方程式を以下のように書いておいて

$$u - e\sin u = n(t-t_0), \tag{102}$$

この両辺を a で偏微分する。

$$左辺 = \left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{e,\sigma}(1-e\cos u), \tag{103}$$

n は a のみの関数なので $\partial n/\partial a = dn/da$ であることより

$$右辺 = \frac{dn}{da}(t-t_0) = -\frac{3n}{2a}(t-t_0). \tag{104}$$

ここで (103)=(104) と置き、

$$r = a(1-e\cos u), \quad n(t-t_0) = l, \tag{105}$$

という関係を思い出せば結局以下を得る。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{e,\sigma} = -\frac{3}{2}\frac{l}{r}. \tag{106}$$

σ による u の偏微分は、ケプラー方程式を以下のように書き、

$$u - e\sin u = nt + \sigma, \tag{107}$$

この両辺を σ で偏微分する。これは a を一定にしておいて行う u での偏微分だから、n, t は定数と看做すことが出来る。従って

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right|_{a,e}(1-e\cos u) = 1, \tag{108}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right|_{a,e} = \frac{1}{1-e\cos u} = \frac{a}{r}. \tag{109}$$

$\partial/\partial\sigma$ が絡むその他の項についても以前と同様に考える。例えば e を σ で偏微分することを考えると、この時には (96) の右辺の縦ベクトルに現れる変数のうち a, e, ω, I, Ω はみな一定として偏微分することになるので、$\left.\frac{\partial e}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega}$ を考えることになる。即ち e を一定として e を σ で偏微分するのだから、これは明らかに 0 となる。

$$\left.\frac{\partial e}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{110}$$

ここでも下手にケプラー方程式 $u - e\sin u = l$ を持ち出すと「l は e の関数で、且つ $l = \sigma + nt$ だから σ の関数でもあって ...」などとなり、日が暮れてしまう。同様にして

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial I}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right|_{a,e,\omega,I,\Omega} = 0. \tag{111}$$

また、独立なケプラー軌道要素 a, e, I, ω, Ω 間については前出の (68) と (69) がそのまま成り立つ。と言うことで、(96) の Jacobi 行列要素のうち有意義なものは (106)(101)(109) だけとなる。

$$
\frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Large 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Large 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{l}{r} & \frac{\sin f}{\eta} & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{r} \end{pmatrix}. \tag{112}
$$

ここまで来たついでに、(112) の逆行列すなわち $\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)/\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)$ を計算しておこう。再び σ の定義に戻って u による偏微分をいちいち計算するのも良いが、

$$
\frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)} \cdot \frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)} = \text{単位行列}, \tag{113}
$$

であり、かついずれの行列も大概の成分は 1 か 0 なので、逆行列をそのまま計算してみる方が早い。ここまで計算を進めて来た論理をそのまま使うと、行列 $\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)/\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)$ の成分のうち自明に 1 か 0 にならな**ない**ものは 6 列目、即ち σ の偏微分係数だけであり、しかもそのうち以下も明らかである。

$$
\frac{\partial \sigma}{\partial \omega} = \frac{\partial \sigma}{\partial I} = \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = 0. \tag{114}
$$

従って (113) を成分で書けば

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Large 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Large 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 & 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial a} & \frac{\partial \sigma}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \sigma}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix}. \tag{115}
$$

(115) の 6 列目の成分を両辺で比較すると、$0 = 0$ 以外のものは

$$
\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial a} = 0, \tag{116}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial e} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial e} = 0, \tag{117}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 1. \tag{118}
$$

(116) より

$$
\frac{\partial \sigma}{\partial a} = -\frac{\partial u}{\partial a}\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^{-1} = -\frac{3l}{2r} \cdot \frac{r}{a} = -\frac{3l}{2a}. \tag{119}
$$

(117) より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial e} &= -\frac{\partial u}{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^{-1} \\
&= \frac{\sin f}{\eta} \cdot \frac{r}{a} \\
&= -\sin u \frac{a}{r} \cdot \frac{r}{a} \qquad (\because (63)(64)(65)) \\
&= -\sin u.
\end{aligned} \tag{120}
$$

(118) より

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)^{-1} = 1 - e\cos u = \frac{r}{a}. \tag{121}$$

以上より以下の結果が得られる。

$$\frac{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,\sigma)}{\partial(a,e,\omega,I,\Omega,u)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & 1 & 0 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial a} & \frac{\partial\sigma}{\partial e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\sigma}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{l}{a} & -\sin u & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{a} \end{pmatrix}. \tag{122}$$

3. Lagrange 括弧の性質の計算

Lagrange 括弧式 $[u,v]$ について、以下の性質が成り立つを示せ。

$$[u,v] = -[v,u], \tag{123}$$

$$\frac{d}{dt}[u,v] = 0. \tag{124}$$

Lagrange 括弧の定義は以下である。u,v は q_i,p_i に依存する変数として (あるいは q_i,p_i が u,v に依存すると思っても良い)

$$[u,v]_{q_i,p_i} \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right). \tag{125}$$

ここで (q_i,p_i) は正準変数の組だが、Lagrange 括弧は正準不変量であり、どの正準変数を採用してもその値は不変である。つまり、別の正準変数の組 (Q_i,P_i) を採用しても Lagrange 括弧の値は変わらないということである。

$$[u,v]_{q_i,p_i} = [u,v]_{Q_i,P_i}. \tag{126}$$

さて、与式 (123) はすぐに示すことが出来る。定義に従って計算するだけで良く、

$$\begin{aligned} -[v,u] &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u} - \frac{\partial p_i}{\partial v}\frac{\partial q_i}{\partial u}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial v}\frac{\partial q_i}{\partial u} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) \\ &= [u,v]. \end{aligned} \tag{127}$$

次に (124) だが、これも定義に従って計算してみる。

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\right)\frac{\partial p_i}{\partial v} + \frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial v}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)\frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)\frac{\partial p_i}{\partial v}+\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\frac{\partial q_i}{\partial v}-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)\right] \\
&\quad \text{総和すると 0 になるような項を幾つか加える} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)\frac{\partial p_i}{\partial v}+\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\frac{\partial q_i}{\partial v}-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial u\partial v}-\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial v\partial u}+\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial u\partial v}-\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial v\partial u}\right] \\
&\quad \text{項の順番を入れ替える} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)\frac{\partial p_i}{\partial v}+\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\frac{\partial q_i}{\partial v}-\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial v\partial u}\right. \\
&\qquad \left.-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)-\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial v\partial u}+\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial u\partial v}\right] \\
&\quad \text{良く見ると二項ずつ組になっていることがわかる} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{dp_i}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{dp_i}{dt}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{dp_i}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial u}-\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{dp_i}{dt}\right)\right]. \qquad (128)
\end{aligned}
$$

ここで、Lagrange 括弧を構成する (q_i, p_i) は正準変数であれば何でも良かったことを思い出す。ここでは (q_i, p_i) を最も基本的な正準変数である直交座標に於ける位置と運動量だと思うことにすると、ハミルトニアン H を導入して

$$
\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt}=p_i, \qquad (129)
$$

が成立する。この (129) を (128) に代入すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[u,v] &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial v}+\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial u}+\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{dH}{dq_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{dH}{dq_i}\right)\right]. \qquad (130)
\end{aligned}
$$

以下では (130) の $\sum$ 内各項の偏微分を計算する。第一項は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial}{\partial v}\frac{dq_i}{dt}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)^2. \qquad (131)
\end{aligned}
$$

同様にして第三項は

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial v}\left(p_i\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial}{\partial u}\frac{dq_i}{dt}\right) &= -\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}\left(\frac{dq_i}{dt}\right)^2. \qquad (132)
\end{aligned}
$$

従って

$$
\text{第一項}+\text{第三項}=\frac{\partial}{\partial u}\left(p_i\frac{\partial}{\partial v}\frac{dq_i}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(p_i\frac{\partial}{\partial v}\frac{dq_i}{dt}\right)=0. \tag{133}
$$

ここまでは良いが、H の二階偏微分が出て来る第二項と第四項は多少ややこしい。

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2 q_i}{\partial v\partial u}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right), \tag{134}
$$

であるが、ここで

$$
H=H(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n), \tag{135}
$$

であると同時に

$$
q_i=q_i(u,v),\quad p_i=p_i(u,v),\quad (i=1,\ldots,n) \tag{136}
$$

であることも思い出す必要がある。即ち H は q_i,p_i を通して u,v の関数でもあるので、H を u,v で偏微分すると q_i,p_i に関連する項がぞろぞろと出て来る。即ち

$$
\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n), \tag{137}
$$

の時、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_1}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_2}{\partial u}+\cdots+\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_n}{\partial u}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial u},
\end{aligned} \tag{138}
$$

ということである。よって第二項を $\sum_{i=1}^{n}$ したものは

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial u\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial q_i}{\partial v}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial u}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 q_i}{\partial u\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial v}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial u}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 q_i}{\partial u\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v},
\end{aligned} \tag{139}
$$

であり、同様にして第四項を $\sum_{i=1}^{n}$ したものは

$$
-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 q_i}{\partial v\partial u}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial v}\frac{\partial q_i}{\partial u}, \tag{140}
$$

となる。(139)(140) より結局

$$
\sum_{i=1}^{n}(\text{第二項}+\text{第四項})=0, \tag{141}
$$

となる。(133)(141) より、最終的な結論

$$
\frac{d}{dt}[u,v]=0, \tag{142}
$$

が得られることになる。

4. 要素変化の方程式と Lagrange 括弧

定数変化法を用いて要素変化の方程式を導く過程で表れる Lagrange 括弧間に以下の関係が成り立つことを示せ。なお、以下で使う記号 (α, βなど) の定義は講義で説明したものと同一である。

$$[\alpha,\beta] = [\alpha,\beta]' + \frac{\partial(\Omega, x'\dot{y}' - y'\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{143}$$

$$[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta]'', \tag{144}$$

$$[\alpha,\beta]'' = [\alpha,\beta]''' + \frac{\partial(\omega, x'''\dot{y}''' - y'''\dot{x}''')}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{145}$$

$$[\alpha,\beta]''' = \frac{\partial(\chi, L)}{\partial(\alpha,\beta)}. \tag{146}$$

様々な方法があるだろうが、ここでは愚直に定義通り計算を進めてみる。まず $[\alpha,\beta]$,$[\alpha,\beta]'$ らの定義から始めると

$$[\alpha,\beta] = \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\beta} - \frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta} - \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\beta} - \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\alpha}\right), \tag{147}$$

$$[\alpha,\beta]' = \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} - \frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{z}'}{\partial\beta} - \frac{\partial z'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{z}'}{\partial\alpha}\right), \tag{148}$$

$$[\alpha,\beta]'' = \left(\frac{\partial x''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}''}{\partial\beta} - \frac{\partial x''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}''}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial y''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}''}{\partial\beta} - \frac{\partial y''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}''}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial z''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{z}''}{\partial\beta} - \frac{\partial z''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{z}''}{\partial\alpha}\right), \tag{149}$$

$$[\alpha,\beta]''' = \left(\frac{\partial x'''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}'''}{\partial\beta} - \frac{\partial x'''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'''}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial y'''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}'''}{\partial\beta} - \frac{\partial y'''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'''}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial z'''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{z}'''}{\partial\beta} - \frac{\partial z'''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{z}'''}{\partial\alpha}\right). \tag{150}$$

以下ではこれらのヤコビ行列式的な表現も利用することがある。

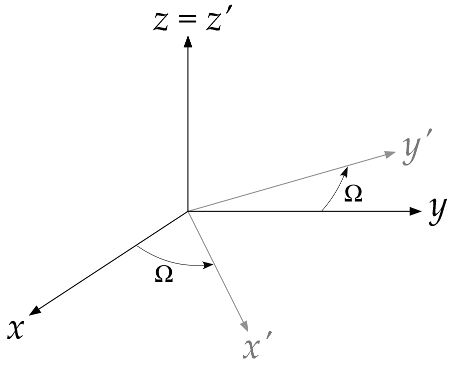
$$[\alpha,\beta] = \frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(z,\dot{z})}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{151}$$

$$[\alpha,\beta]' = \frac{\partial(x',\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(y',\dot{y}')}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{152}$$

$$[\alpha,\beta]'' = \frac{\partial(x'',\dot{x''})}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(y'',\dot{y''})}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(z'',\dot{z''})}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{153}$$

$$[\alpha,\beta]''' = \frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(z''',\dot{z}''')}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{154}$$

4.1 $(x,y,z) \to (x',y',z')$



まずは (143) だが、(x,y,z) と (x',y',z') は z 軸周りの Ω 回転により関係付けられている。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{155}$$

逆変換を考えれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{156}$$

従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\Omega - y'\sin\Omega \\ x'\sin\Omega + y'\cos\Omega \\ z' \end{pmatrix}. \tag{157}$$

ここの議論では Ω は時間依存しない定数だと思っているので、時間微分についてもまったく同様な関係になる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{158}$$

従って

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'\cos\Omega - \dot{y}'\sin\Omega \\ \dot{x}'\sin\Omega + \dot{y}'\cos\Omega \\ \dot{z}' \end{pmatrix}. \tag{159}$$

上記の結果より、x, y, z の α, β による偏微分をダッシュ$'$付きの量で表現する。

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} - y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega, \tag{160}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} - y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega, \tag{161}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z'}{\partial \alpha}, \tag{162}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial x'}{\partial \beta} - y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega, \tag{163}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial \beta} - y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega, \tag{164}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z'}{\partial \beta}. \tag{165}$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ の α, β による偏微分も同様にダッシュ$'$付きの量で表現する。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha} - \dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha} + \dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega, \tag{166}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha} + \dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha} - \dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega, \tag{167}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \dot{z}'}{\partial \alpha}, \tag{168}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta} - \dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta} + \dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega, \tag{169}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta} + \dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta} - \dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega, \tag{170}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \beta} = \frac{\partial \dot{z}'}{\partial \beta}. \tag{171}$$

ここまでに得られた各偏微分係数を用いて、$[\alpha,\beta]$ の定義式 (147) を $'$ 付きの量で書き表すことを考える。愚直に一項ずつ計算して行けば良い。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\beta} &= \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\right] \\
&\qquad\qquad \times \left[\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\right] \\
&= \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos^2\Omega - \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega\sin\Omega \\
&\quad - \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\cos\Omega + \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin^2\Omega.
\end{aligned} \tag{172}$$

ここでは下手に $\left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)$ など括弧の中味を展開しない方が良い。y についても同様で、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta} &= \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\right] \\
&\qquad\qquad \times \left[\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\right] \\
&= \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos^2\Omega + \left(\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega\sin\Omega \\
&\quad + \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin^2\Omega.
\end{aligned} \tag{173}$$

まだまだ単調な計算が続くが、もうしばらく我慢して進んでみよう。α と β を入れ換えたものも同様に計算できる。まず x について

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha} &= \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\right] \\
&\qquad\qquad \times \left[\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega - \left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\right] \\
&= \left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos^2\Omega - \left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega\sin\Omega \\
&\quad - \left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\cos\Omega + \left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin^2\Omega.
\end{aligned} \tag{174}$$

y についても同じく

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha} &= \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\sin\Omega\right] \\
&\qquad\qquad \times \left[\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega + \left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\right] \\
&= \left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos^2\Omega + \left(\frac{\partial y'}{\partial\beta} + x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\cos\Omega\sin\Omega \\
&\quad + \left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha} + \dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin\Omega\cos\Omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial\beta} - y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha} - \dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\sin^2\Omega.
\end{aligned} \tag{175}$$

(172) と (173) を加算してみると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta}+\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta}\\
&\quad=\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos^2\Omega-\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega\sin\Omega\\
&\quad-\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega\cos\Omega+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin^2\Omega\\
&\quad+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos^2\Omega+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\cos\Omega\sin\Omega\\
&\quad+\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin\Omega\cos\Omega+\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\sin^2\Omega\\
&\quad\sin\Omega\cos\Omega,\ \sin^2\Omega,\ \cos^2\Omega\text{で項を整理する}\\
&\quad=\Bigg[\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)-\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)-\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\Bigg]\sin\Omega\cos\Omega\\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\right]\cos^2\Omega\\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\right]\sin^2\Omega\\
&\quad\sin\Omega\cos\Omega\text{の項は 0 になり、}\sin^2\Omega+\cos^2\Omega=1\text{ より多くの項が整理できる}\\
&\quad=\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\\
&\quad=\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}-\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+y'\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\dot{x}'\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}+x'\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+x'\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\\
&\quad=\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}+\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \beta}+\left(x'\dot{x}'+y'\dot{y}'\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\left(x'\frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \beta}\right)+\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\left(x'\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}-y'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha}\right).
\end{aligned}
\tag{176}
$$

同様にして、(174) と (175) を加算してみると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}+\frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\\
&\quad=\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos^2\Omega-\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega\sin\Omega\\
&\quad-\left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega\cos\Omega+\left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin^2\Omega\\
&\quad+\left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos^2\Omega+\left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}+x'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\cos\Omega\sin\Omega\\
&\quad+\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \alpha}+\dot{x}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin\Omega\cos\Omega+\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}-y'\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \alpha}-\dot{y}'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\sin^2\Omega.\\
&\quad\sin\Omega\cos\Omega,\ \sin^2\Omega,\ \cos^2\Omega\text{で項を整理する}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)-\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)-\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\right]\sin\Omega\cos\Omega\\
&+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\right]\cos^2\Omega\\
&+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\right]\sin^2\Omega
\end{aligned}
$$

$\sin\Omega\cos\Omega$ の項は 0 になり、$\sin^2\Omega+\cos^2\Omega=1$ より多くの項が整理できる

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{\partial x'}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial y'}{\partial\beta}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right)\\
&=\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+y'\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\\
&\qquad+\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\dot{x}'\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+x'\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+x'\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\\
&=\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}+\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\left(x'\dot{x}'+y'\dot{y}'\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\\
&\qquad+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}\right).
\end{aligned}
\tag{177}
$$

z に関しては物事が何も変わらないことを思い出すと

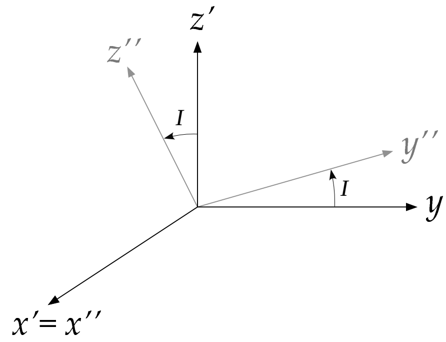
$$
\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{\partial(z,\dot{z})}{\partial(\alpha,\beta)}.
\tag{178}
$$

(176)(177)(178) を (147) あるいは (151) に代入すれば、$[\alpha,\beta]$ と $[\alpha,\beta]'$ の関係が得られる。

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta]&=\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\beta}-\frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\alpha}\right)\\
&=\frac{\partial x'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}+\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta}+\left(x'\dot{x}'+y'\dot{y}'\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\\
&\qquad+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\right)\\
&\quad-\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}-\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}-\left(x'\dot{x}'+y'\dot{y}'\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\\
&\qquad-\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}\\
&=\frac{\partial x'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}-\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}+\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\beta}-\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}\\
&\quad+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\left(x'\frac{\partial\dot{y}}{\partial\beta}-y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\beta}-\dot{x}'\frac{\partial y'}{\partial\beta}+\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\left(\dot{x}'\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial\alpha}-x'\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\alpha}+y'\frac{\partial\dot{x}'}{\partial\alpha}\right)\\
&=\frac{\partial(x',\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(y',\dot{y}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(x'\dot{y}'-y'\dot{x}'\right)-\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(x'\dot{y}'-y'\dot{x}'\right)\\
&=\frac{\partial(x',\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(y',\dot{y}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(\Omega,x'\dot{y}'-y'\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)}\\
&=[\alpha,\beta]'+\frac{\partial(\Omega,x'\dot{y}'-y'\dot{x}')}{\partial(\alpha,\beta)},
\end{aligned}
\tag{179}
$$

となり、与式 (143) が成立することがわかる。

4.2 $(x, y, z) \to (x', y', z')$



次に (144) だが、ここで念頭に置かれている座標回転は以下である。(x', y', z') と (x'', y'', z'') は $x' = x''$ 軸周りの I 回転により関係付けられており、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{180}$$

従って

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \cos I - z'' \sin I \\ y'' \sin I + z'' \cos I \end{pmatrix}. \tag{181}$$

ここの議論では I は時間依存しない定数だと思っているので、時間微分についてもまったく同様な関係になる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'' \\ \dot{y}'' \\ \dot{z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}, \tag{182}$$

従って

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'' \\ \dot{y}'' \cos I - \dot{z}'' \sin I \\ \dot{y}'' \sin I + \dot{z}'' \cos I \end{pmatrix}. \tag{183}$$

あとは (143) を示した際と同様な単調計算を延々と繰り返せば良い。しかし良く考えてみると、(155)(157)(158)(159) と (180)(181)(182)(183) は実に良く似ている。具体的には

$$z \to x', \quad x \to y', \quad y \to z', \quad z' \to x'', \quad x' \to y'', \quad y' \to z'', \quad \Omega \to I$$

という置換を考えてみれば同等であると言うことが出来る。よって最終的な変換の結果は実際の計算を行わずとも容易に予想でき、以下のようになる。

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta]'' + \frac{\partial(I, y''\dot{z}'' - z''\dot{y}'')}{\partial(\alpha, \beta)}. \tag{184}$$

ところで、この座標回転は「$x' = x''$ 軸の周りに角度 I」というものであるが、全体の文脈を把握している人なら (x'', y'') 面が天体の軌道面そのものであることにすぐ気が付くであろう (この後で再び z'' 軸に関する角度 ω 回転という操作が現れるが、こちら回転では面自体が動くことはない)。一方で量 $y''\dot{z}'' - z''\dot{y}''$ は何であるかと言うと、これは天体の角運動量の x'' 成分である。ケプラー運動は平面運動であるから、軌道面での角運動量は z 成分のみ、すなわち x, y 成分は 0 になる。と言うことで

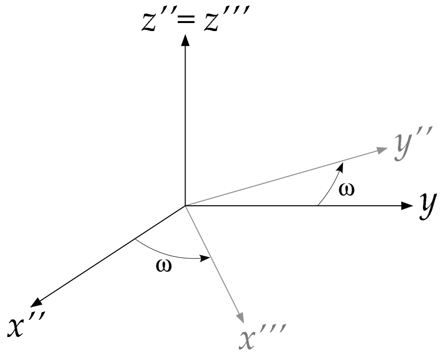
$$y''\dot{z}'' - z''\dot{y}'' = 0, \tag{185}$$

従って

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta]'', \tag{186}$$

となり、与式 (144) が成立する。

4.3 $(x,y,z) \to (x',y',z')$



次に (145) だが、ここで念頭に置かれている座標回転は以下である。(x'',y'',z'') と (x'',y'',z''') は $z''=z'''$ 軸周りの ω 回転により関係付けられており、

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad (187)$$

従って

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'''\cos\omega - y'''\sin\omega \\ x'''\sin\omega + y'''\cos\omega \\ z''' \end{pmatrix}. \quad (188)$$

ここの議論では ω は時間依存しない定数だと思っているので、時間微分についてもまったく同様な関係になる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}''' \\ \dot{y}''' \\ \dot{z}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'' \\ \dot{y}'' \\ \dot{z}'' \end{pmatrix}, \quad (189)$$

従って

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'' \\ \dot{y}'' \\ \dot{z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'''\cos\omega - \dot{y}'''\sin\omega \\ \dot{x}'''\sin\omega + \dot{y}'''\cos\omega \\ \dot{z}''' \end{pmatrix}. \quad (190)$$

ここでも同様に単調な計算を延々と繰り返せば答が得られるが、例により (155)(157)(158)(159) と (187)(188)(189)(190) は実に良く似ている。具体的には

$$x \to x'', \quad y \to y'', \quad z \to z'', \quad x' \to x''', \quad y' \to y''', \quad z' \to z''', \quad \Omega \to \omega$$

という置換を考えてみれば同等であると言うことが出来る。よって最終的な変換の結果は実際の計算を行わずとも容易に予想でき、以下のようになる。

$$[\alpha,\beta]'' = [\alpha,\beta]''' + \frac{\partial(\omega, x'''\dot{y}''' - y'''\dot{x}''')}{\partial(\alpha,\beta)}. \quad (191)$$

従って与式 (145) が成立することがわかる。

最後に (146) であるが、これにも様々なやり方がある。講義で半分くらいは示しているが、ここでもまた定義通りに計算をこなして行く方法を採用してみる。まず $[\alpha,\beta]'''$ の定義に戻って考えると、例によって $x'''y'''$ 面は軌道面なのだから、運動の z''' 成分は 0、即ち

$$[\alpha,\beta]''' = \left(\frac{\partial x'''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{x}'''}{\partial\beta} - \frac{\partial x'''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{x}'''}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial y'''}{\partial\alpha}\frac{\partial\dot{y}'''}{\partial\beta} - \frac{\partial y'''}{\partial\beta}\frac{\partial\dot{y}'''}{\partial\alpha}\right), \quad (192)$$

である。また x''' 成分と y''' 成分は平面の軌道要素に依存するので、a, e, $\chi \equiv \varepsilon - \varpi$ に依存する (x''' は既に近点方向を向いているので ω に依存するとは言えない)。従って (192) の各項は以下のようになる。

$$\frac{\partial x'''}{\partial\alpha} = \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial\alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}, \quad (193)$$

$$\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \alpha} = \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \tag{194}$$

$$\frac{\partial y'''}{\partial \alpha} = \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \tag{195}$$

$$\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \alpha} = \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \tag{196}$$

$$\frac{\partial x'''}{\partial \beta} = \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \tag{197}$$

$$\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \beta} = \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \tag{198}$$

$$\frac{\partial y'''}{\partial \beta} = \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \tag{199}$$

$$\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \beta} = \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}. \tag{200}$$

まず (193)(194)(195)(196)(197)(198)(199)(200) を全部 (192) に突っ込み、4 項を $3 \times 3 \times 4 = 36$ 項に分解する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \beta} &= \left(\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta},
\end{aligned} \tag{201}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right) \\
&= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha},
\end{aligned} \tag{202}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \beta} &= \left(\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta},
\end{aligned} \tag{203}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}+\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)\\
&= \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}+\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}.
\end{aligned}
\tag{204}
$$

次は (201)(202)(203)(204) を (192) にそのまま代入し、項を整理する。有能な読者の中には、こういう単純なやり方が愚直ではなく単なる愚かな方法に見える人も居るかもしれない。けれども、ある時には頭が悪くて直線的にしか前に進めないことが正解に辿り着く唯一の道であることもある。歳を取ればそういう事柄も自ずから体験されて来るであろう。いずれにせよ

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta]''' &= \left(\frac{\partial x'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \beta}-\frac{\partial x'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \alpha}\right)+\left(\frac{\partial y'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \beta}-\frac{\partial y'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \alpha}\right)\\
&= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&- \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&- \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&- \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}+\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\\
&- \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&- \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\\
&- \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}-\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}.
\end{aligned}
\tag{205}
$$

(205) を良く見ると、以下の項の組がキャンセルすることがわかる。

$$
\text{第 1 項} + \text{第 10 項} = \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}-\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}=0, \tag{206}
$$

$$\text{第 5 項} + \text{第 14 項} = \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} = 0, \tag{207}$$

$$\text{第 9 項} + \text{第 18 項} = \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = 0, \tag{208}$$

$$\text{第 19 項} + \text{第 28 項} = \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0, \tag{209}$$

$$\text{第 23 項} + \text{第 32 項} = \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} = 0, \tag{210}$$

$$\text{第 27 項} + \text{第 36 項} = \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = 0. \tag{211}$$

従って項の総数は 36 から 24 に減り、(205) は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
[\alpha, \beta]''' &= \left(\frac{\partial x'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{\partial y'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \alpha}\right) \\
&= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} \\
&- \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&- \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&- \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} \\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} \\
&- \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&- \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&- \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{212}$$

ここで (212) の第 1,3,7,9 項を取り出してみると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \\
&= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\left(\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\right) \\
&= \frac{\partial(a,e)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(a,e)}.
\end{aligned} \tag{213}
$$

次に (212) の第 3,4 項、第 1,6 項、第 9,10 項、第 7,12 項の各組を見ると、(213) で扱った a と χ が入れ替わっただけである。従って (213) と完全に同様な変形を行うことができるので、結局

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&\qquad = \left(\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e} - \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\right) \\
&\qquad = \frac{\partial(\chi,e)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\chi,e)} \\
&\qquad = \frac{\partial(e,\chi)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(e,\chi)}.
\end{aligned} \tag{214}
$$

同様にして (212) の第 1,2 項、第 3,5 項、第 7,8 項、第 9,11 項の各組を見ると、(213) で扱った e と χ が入れ替わっただけである。よって (213)(214) と完全に同様な変形を行い得るので、結局

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \\
&\qquad = \left(\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi} - \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right) \\
&\qquad = \frac{\partial(a,\chi)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(a,\chi)}. \\
&\qquad = \frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\chi,a)}.
\end{aligned} \tag{215}
$$

(213)(214)(215) で行って来た変形に於いてすべて x を y に読み替えると、(212) 後半の第 13 項から第 24 項に関しても全く同様な変形が可能であることがわかる。よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \\
&\qquad = \left(\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\right) \\
&\qquad = \frac{\partial(a,e)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(a,e)},
\end{aligned} \tag{216}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\
&\qquad = \left(\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e} - \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial e}{\partial \alpha}\right) \\
&\qquad = \frac{\partial(\chi,e)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\chi,e)} \\
&\qquad = \frac{\partial(e,\chi)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(e,\chi)},
\end{aligned} \tag{217}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \\
= \left(\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi} - \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right) \\
= \frac{\partial(a,\chi)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(a,\chi)}. \\
= \frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\chi,a)}. \qquad (218)
\end{aligned}
$$

と言うことで (213)(214)(215)(216)(217)(218) をすべて (212) に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta]''' &= \left(\frac{\partial x'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \beta} - \frac{\partial x'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{\partial y'''}{\partial \alpha}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \beta} - \frac{\partial y'''}{\partial \beta}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \alpha}\right) \\
&= \frac{\partial(a,e)}{\partial(\alpha,\beta)}\left(\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(a,e)} + \frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(a,e)}\right) \\
&+ \frac{\partial(e,\chi)}{\partial(\alpha,\beta)}\left(\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(e,\chi)} + \frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(e,\chi)}\right) \\
&+ \frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)}\left(\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\chi,a)} + \frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\chi,a)}\right). \qquad (219)
\end{aligned}
$$

ここまで来れば、あとは偏微分係数 $\partial x'''/\partial a$ や $\partial x'''/\partial e$ などの値を計算して (219) に代入するだけである。このための準備として、x''', y''' などを微小量 $t-t_0$ で Taylor 展開することを考える。t_0 は近点通過時刻である。ケプラー方程式

$$u - e\sin u = n(t-t_0), \qquad (220)$$

から出発するが、$t-t_0$ が微小量なので u も微小量である。よって $u=0$ の周りで $\sin u$ を展開して

$$u - e\left(u - \frac{u^3}{6} + \cdots\right) = n(t-t_0), \qquad (221)$$

$$\therefore\ u(1-e) = n(t-t_0) + e\left(-\frac{u^3}{6} + \cdots\right), \qquad (222)$$

これより

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{n}{1-e}(t-t_0) + \frac{e}{1-e}\left(-\frac{u^3}{6} + \cdots\right), \\
&\quad \text{上式の右辺の } u \text{ に左辺を再帰的に代入する} \\
&= \frac{n}{1-e}(t-t_0) + \frac{e}{1-e}\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{n}{1-e}(t-t_0)\right)^3 + \cdots\right), \\
&= \frac{n}{1-e}(t-t_0) + O\left[(t-t_0)^3\right]. \qquad (223)
\end{aligned}
$$

この結果を $\cos u$ と $\sin u$ に適用すると

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \cdots = 1 - \frac{n^2}{2(1-e)^2}(t-t_0)^2 + O\left[(t-t_0)^4\right], \qquad (224)$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + \cdots = \frac{n}{1-e}(t-t_0) + O\left[(t-t_0)^3\right]. \qquad (225)$$

次に離心近点離角 u と軌道面上の座標 x''', y''' の関係を書き下すと

$$\begin{aligned} x''' &= a(\cos u - e) \\ &= a\left(1 - \frac{n^2}{2(1-e)^2}(t-t_0)^2 + O\left[(t-t_0)^4\right] - e\right) \\ &= a(1-e) - \frac{an^2}{2(1-e)^2}(t-t_0)^2 + O\left[(t-t_0)^4\right], \end{aligned} \tag{226}$$

$$\dot{x}''' = -\frac{an^2}{(1-e)^2}(t-t_0) + O\left[(t-t_0)^3\right], \tag{227}$$

$$\begin{aligned} y''' &= a\sqrt{1-e^2}\sin u \\ &= a\sqrt{1-e^2}\frac{n}{1-e}(t-t_0) + O\left[(t-t_0)^3\right] \\ &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}an(t-t_0) + O\left[(t-t_0)^3\right], \end{aligned} \tag{228}$$

$$\dot{y}''' = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}an + O\left[(t-t_0)^2\right]. \tag{229}$$

ここで、(124) で示したように Lagrange 括弧には時間依存性が無いことを思い出す。今示そうとしている (146) は結局のところ Lagrange 括弧 $[\alpha, \beta]$ であるが、これが時間に依存しないということは、適当に計算しやすい t のところで偏微分係数 $\partial x'''/\partial a$ などを計算し、代入すれば良いことになる。この場合の「計算しやすい t」とは明らかに $t = t_0$ の点であり、(226) より

$$\left.\frac{\partial x'''}{\partial a}\right|_{t=t_0} = 1-e, \quad \left.\frac{\partial x'''}{\partial e}\right|_{t=t_0} = -a, \tag{230}$$

となる。また、講義で説明したように χ の定義は

$$\chi = l - nt = \epsilon - \varpi = -nt_0, \tag{231}$$

であったので[3] 、

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \leftrightarrow -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t_0} \tag{232}$$

という対応関係になる。と言うことで (226) より

$$\left.\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{233}$$

である。同様にして次々と偏微分係数が計算できる。

$$\left.\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}\right|_{t=t_0} = -\frac{an}{(1-e)^2}, \tag{234}$$

$$\left.\frac{\partial y'''}{\partial a}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y'''}{\partial e}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\right|_{t=t_0} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}a, \tag{235}$$

[3] この χ は前問の「2. 軌道要素の変数変換 (Jacobi 行列) の計算」に出て来た元期近点離角 σ と全く同一のものである。歴史的事情に従ったためにこのように二種類の記号を使うことになったことをお詫びしたい。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}\right|_{t=t_0} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}n, \qquad \left(\because n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) \qquad (236)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}\right|_{t=t_0} &= an\frac{\partial}{\partial e}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\
&= an\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\partial}{\partial e}\left((1+e)(1-e)^{-1}\right) \\
&= \frac{an}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}, \qquad (237)
\end{aligned}
$$

$$
\left.\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}\right|_{t=t_0} = 0. \qquad (238)
$$

ということで前出していた各々の Jacobi 行列式を $t=t_0$ の点で評価すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(a,e)} &= \frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e}-\frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a} \\
&= (1-e)\cdot 0-(-a)\cdot 0 \\
&= 0, \qquad (239)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(e,\chi)} &= \frac{\partial x'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi}-\frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial e} \\
&= (-a)\cdot\left(-\frac{an}{(1-e)^2}\right)-0\cdot 0 \\
&= \frac{na^2}{(1-e)^2}, \qquad (240)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\chi,a)} &= \frac{\partial x'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial a}-\frac{\partial x'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{x}'''}{\partial \chi} \\
&= 0\cdot 0-(1-e)\cdot\left(-\frac{an}{(1-e)^2}\right) \\
&= \frac{na}{1-e}, \qquad (241)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(a,e)} &= \frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e}-\frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a} \\
&= 0\cdot\frac{an}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}-0\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}n\right) \\
&= 0, \qquad (242)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(e,\chi)} &= \frac{\partial y'''}{\partial e}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi}-\frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial e} \\ &= 0\cdot 0-\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}a\cdot\frac{an}{(1-e)\sqrt{1-e^2}} \\ &= -\frac{na^2}{(1-e)^2}, \end{aligned}\tag{243}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\chi,a)} &= \frac{\partial y'''}{\partial \chi}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial a}-\frac{\partial y'''}{\partial a}\frac{\partial \dot{y}'''}{\partial \chi} \\ &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}a\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}n\right)-0\cdot 0 \\ &= -\frac{na(1+e)}{2(1-e)}. \end{aligned}\tag{244}$$

上記の結果より

$$\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(a,e)}+\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(a,e)}=0,\tag{245}$$

$$\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(e,\chi)}+\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(e,\chi)}=\frac{na^2}{(1-e)^2}-\frac{na^2}{(1-e)^2}=0,\tag{246}$$

$$\frac{\partial(x''',\dot{x}''')}{\partial(\chi,a)}+\frac{\partial(y''',\dot{y}''')}{\partial(\chi,a)}=\frac{na}{1-e}-\frac{na(1+e)}{2(1-e)}=\frac{na}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}.\tag{247}$$

ということで、結局 (219) は

$$[\alpha,\beta]'''=\frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}},\tag{248}$$

となる。ここで新しい変数 $L=\sqrt{\mu a}$ を持ち込むと

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=\mu^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \alpha}a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\partial a}{\partial \alpha},\tag{249}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}=\mu^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \beta}a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\partial a}{\partial \beta},\tag{250}$$

なので

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha}=2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial L}{\partial \alpha},\tag{251}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}=2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial L}{\partial \beta},\tag{252}$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)} &= \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial \beta}-\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial L}{\partial \beta}-\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial L}{\partial \alpha} \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial L}{\partial \beta}-\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial(\chi,L)}{\partial(\alpha,\beta)}, \end{aligned}\tag{253}$$

よって

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta]''' &= \frac{\partial(\chi,a)}{\partial(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial(\chi,L)}{\partial(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \\
&= \frac{\partial(\chi,L)}{\partial(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}
\tag{254}
$$

以上にて (146) は目出たく示されたことになる。ちなみに、L を導入したのと同様にして

$$
H = y''\dot{z}'' - z''\dot{y}'' = \sqrt{\mu a\,(1-e)^2}\cos I, \tag{255}
$$

$$
G = x'''\dot{y}''' - y'''\dot{x}''' = \sqrt{\mu a\,(1-e)^2}, \tag{256}
$$

を導入すると、(143)(144)(145)(146) の結果をまとめることで以下を得ることが出来る。この表現まで来ると多くの教科書で共通に見られる記載となる。

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta] &= \frac{\partial(\chi,L)}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(\omega,G)}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(\Omega,H)}{\partial(\alpha,\beta)} \\
&= \frac{\partial(\varepsilon-\varpi,L)}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(\varpi-\Omega,G)}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(\Omega,H)}{\partial(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}
\tag{257}
$$

5. Poisson 括弧の性質と Jacobi の恒等式

Poisson 括弧に関する以下の性質を示せ。但し λ_1, λ_2 は定数である。

$$
\{A,B\} = -\{B,A\}, \tag{258}
$$

$$
\{A,\lambda_1 B + \lambda_2 C\} = \lambda_1\{A,B\} + \lambda_2\{A,C\}, \tag{259}
$$

$$
\{AB,C\} = A\{B,C\} + \{A,C\}B, \tag{260}
$$

$$
\{\{A,B\},C\} + \{\{B,C\},A\} + \{\{C,A\},B\} = 0. \tag{261}
$$

特に (261) は Jacobi の恒等式と言われる重要な性質である。Lagrange 括弧に関してはこの性質が成り立たないことを示せ。即ち、$[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B]$ は必ずしも 0 ではない。

Poisson 括弧の定義から始めると

$$
\{A,B\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right). \tag{262}
$$

この定義からすぐにわかるのは

$$
\begin{aligned}
\{B,A\} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right) \\
&= -\{A,B\},
\end{aligned}
\tag{263}
$$

なので、与式 (258) は示された。次は

$$
\begin{aligned}
\{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} (\lambda_1 B + \lambda_2 C) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} (\lambda_1 B + \lambda_2 C) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} (\lambda_1 B) + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} (\lambda_2 C) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} (\lambda_1 B) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} (\lambda_2 C) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} + \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \lambda_1 \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \lambda_1 \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) \\
&= \lambda_1 \{A, B\} + \lambda_2 \{A, C\}, \qquad (264)
\end{aligned}
$$

なので、与式 (259) は示された。次は

$$
\begin{aligned}
\{AB, C\} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial AB}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial AB}{\partial p_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{\partial A}{\partial q_i} B + A \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \left[\frac{\partial A}{\partial p_i} B + A \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} B + A \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} \right] - \left[\frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} B + A \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] B + A \left[\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] \right) \\
&= B \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) + A \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right) \\
&= B \{A, C\} + A \{B, C\} \\
&= A \{B, C\} + \{A, C\} B, \qquad (265)
\end{aligned}
$$

なので、与式 (260) は示された。

最後は Jacobi の恒等式 (261) である。これの証明には実に様々な方法があるようだが、ここでは私達の基本的方針に従い、あまりスマートに考えようとせず定義通りの計算を進めてみる。

$$
\begin{aligned}
&\{\{A, B\}, C\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right), C \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] \frac{\partial C}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i} \right) \frac{\partial C}{\partial p_j} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i} \right) \frac{\partial C}{\partial q_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j}\right).
\end{aligned}
\tag{266}
$$

(266) に於いて $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ の置換を行えば $\{\{B, C\}, A\}$ が得られるので、

$$
\begin{aligned}
&\{\{B, C\}, A\} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} + \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} + \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right).
\end{aligned}
\tag{267}
$$

(267) に於いて $B \to C$, $C \to A$, $A \to B$ の置換を行えば $\{\{C, A\}, B\}$ が得られるので、

$$
\begin{aligned}
&\{\{C, A\}, B\} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right).
\end{aligned}
\tag{268}
$$

何も考えずに (266)(267)(268) を全部足し合わせると

$$
\begin{aligned}
&\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j}\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} + \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} + \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right).
\end{aligned}
\tag{269}
$$

(269) 内の 16 項をじっと眺めると、以下の組み合わせが 0 になることに気付く。まず A の二階微分の項に着目すると

$$第1項 + 第20項 = 0,$$

これはつまり

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{270}$$

ということである。同様にして

$$第7項 + 第22項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{271}$$

$$第3項 + 第24項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{272}$$

$$第5項 + 第18項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2 A}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{273}$$

となり、A の二階微分の項の総和は 0 になる。B の二階微分の項も同様で

$$第2項 + 第13項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{274}$$

$$第4項 + 第9項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{275}$$

$$第6項 + 第15項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{276}$$

$$第8項 + 第11項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 B}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{277}$$

となり、B の二階微分の項の総和は 0 になる。C の二階微分の項も同様で

$$第10項 + 第21項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{278}$$

$$第12項 + 第17項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{279}$$

$$第14項 + 第23項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{280}$$

$$第16項 + 第19項 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{281}$$

となり、C の二階微分の項の総和は 0 になる。要するに結局 (269) の全項の総和は 0 になるので、Poisson 括弧に関する Jacobi の恒等式 (261) が成立することになる。

一方 Lagrange 括弧に関して同様な恒等式が存在するかどうかを確認するために、$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]$ を計算してみる。

$$\begin{aligned}
[[A,B],C] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial A}\frac{\partial p_i}{\partial B}-\frac{\partial p_i}{\partial A}\frac{\partial q_i}{\partial B}\right),C\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial A}\frac{\partial p_i}{\partial B}-\frac{\partial p_i}{\partial A}\frac{\partial q_i}{\partial B}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial C}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial A}\frac{\partial p_i}{\partial B}-\frac{\partial p_i}{\partial A}\frac{\partial q_i}{\partial B}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial C}\right).
\end{aligned} \tag{282}$$

これを見ただけで既に望み薄であることが知れるが、念のために

$$\begin{aligned}
[[B,C],A] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial B}\frac{\partial p_i}{\partial C}-\frac{\partial p_i}{\partial B}\frac{\partial q_i}{\partial C}\right),A\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial B}\frac{\partial p_i}{\partial C}-\frac{\partial p_i}{\partial B}\frac{\partial q_i}{\partial C}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial A}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial B}\frac{\partial p_i}{\partial C}-\frac{\partial p_i}{\partial B}\frac{\partial q_i}{\partial C}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial A}\right),
\end{aligned} \tag{283}$$

$$\begin{aligned}
[[C,A],B] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C}\frac{\partial p_i}{\partial A}-\frac{\partial p_i}{\partial C}\frac{\partial q_i}{\partial A}\right),B\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C}\frac{\partial p_i}{\partial A}-\frac{\partial p_i}{\partial C}\frac{\partial q_i}{\partial A}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial B}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C}\frac{\partial p_i}{\partial A}-\frac{\partial p_i}{\partial C}\frac{\partial q_i}{\partial A}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial B}\right).
\end{aligned} \tag{284}$$

(282)(283)(284) を全部足してみると

$$\begin{aligned}
&[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial A}\frac{\partial p_i}{\partial B}-\frac{\partial p_i}{\partial A}\frac{\partial q_i}{\partial B}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial C}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial A}\frac{\partial p_i}{\partial B}-\frac{\partial p_i}{\partial A}\frac{\partial q_i}{\partial B}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial C}\right) \\
&+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial B}\frac{\partial p_i}{\partial C}-\frac{\partial p_i}{\partial B}\frac{\partial q_i}{\partial C}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial A}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial B}\frac{\partial p_i}{\partial C}-\frac{\partial p_i}{\partial B}\frac{\partial q_i}{\partial C}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial A}\right) \\
&+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C}\frac{\partial p_i}{\partial A}-\frac{\partial p_i}{\partial C}\frac{\partial q_i}{\partial A}\right)}\frac{\partial p_j}{\partial B}-\frac{\partial p_j}{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C}\frac{\partial p_i}{\partial A}-\frac{\partial p_i}{\partial C}\frac{\partial q_i}{\partial A}\right)}\frac{\partial q_j}{\partial B}\right).
\end{aligned} \tag{285}$$

となるが、ここには偏微分係数の和が各項の分母にあるために同類項が存在せず、総和が 0 になることは一般には無い。つまり、Lagrange 括弧には Jacobi の恒等式に相当する関係が存在しない。

6. シンプレクティク行列の性質

J をシンプレクティク行列とする。今

$$MJM^T = J, \tag{286}$$

が成り立つ時、以下も成り立つことを示せ。

$$M^TJM = J. \tag{287}$$

(以下の回答例は跡部恵子さんのレポートを参照して作製しました)

講義で説明した通り、$2n \times 2n$ のシンプレクティク行列 J は以下のように定義される。

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{288}$$

$\mathbf{0}$ は成分がすべて 0 の行列、$\boldsymbol{I}$ は単位行列を表す。また、与式 (286) 内の M は変数変換 $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ の Jacobi 行列であるが、ここではその中味は話に関係しない。念のために書いておくと

$$M \equiv \frac{\partial(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \tag{289}$$

さて、条件 (286) の両辺に右から $\left(M^T\right)^{-1}$ を掛けてみる。

$$MJM^T\left(M^T\right)^{-1} = J\left(M^T\right)^{-1}, \tag{290}$$

$$\therefore\ MJ = J\left(M^T\right)^{-1}. \tag{291}$$

これの両辺に左から J を掛けてみる。

$$JMJ = JJ\left(M^T\right)^{-1}. \tag{292}$$

J の定義より $J^2 = -\boldsymbol{I}$ だから

$$JMJ = -\left(M^T\right)^{-1}. \tag{293}$$

今度は右から $-J$ を掛ける。

$$JMJ(-J) = -\left(M^T\right)^{-1}(-J). \tag{294}$$

$J(-J) = \boldsymbol{I}$ なので

$$JM = \left(M^T\right)^{-1}J. \tag{295}$$

最後に左から M^T を掛けると

$$M^TJM = M^T\left(M^T\right)^{-1}J = J, \tag{296}$$

となり、これにて与式 (287) は示された。

7. 月と太陽の運動方程式

地球を原点とした月の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 月–地球系の重心を原点とした太陽の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$ とする時、月と太陽の運動方程式がそれぞれ以下のようになることを示せ。

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + G(m_1 + m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Gm_3(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{297}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}_1}, \tag{298}$$

但し

$$F \equiv \frac{m_2}{\Delta} + \frac{m_1}{\Delta_1}. \tag{299}$$

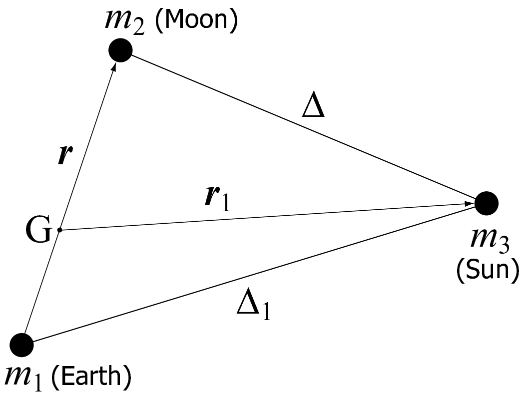
(跡部恵子さんの回答が非常に明快で簡潔な方法を採用していましたので、以下の回答も跡部レポートにかなり沿って記しました)

各天体の位置関係と諸量は図の通り。慣性系を基準とした地球 (天体 1), 月 (天体 2), 太陽 (天体 3) の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ とする。これらを用いて慣性系に於ける地球、月、太陽の運動方程式を書き下すと

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2|^3}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2) - \frac{Gm_1m_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3), \tag{300}$$

$$m_2\frac{d^2\boldsymbol{R}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_2m_1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1|^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1) - \frac{Gm_2m_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3), \tag{301}$$

$$m_3\frac{d^2\boldsymbol{R}_3}{dt^2} = -\frac{Gm_3m_1}{|\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1|^3}(\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1) - \frac{Gm_3m_2}{|\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_2|^3}(\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_2). \tag{302}$$



また、後々の準備として $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ および慣性系基準の月–地球系重心 (G) の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ と $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}$ の関係を考えてみると

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1, \quad r = |\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1|, \tag{303}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\boldsymbol{R}_1 + m_1\boldsymbol{R}_2}{m_1+m_2}, \tag{304}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}, \tag{305}$$

である。また、$\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_3$ を考えると、これは $m_3 \to \mathrm{G} \to m_1$ という道筋を辿れば良いので

$$\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_3 = -\boldsymbol{r}_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}. \tag{306}$$

同様にして $\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_3$ は $m_3 \to \mathrm{G} \to m_2$ という道筋を辿れば良いので

$$\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_3 = -\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \tag{307}$$

となる。

これで準備が完了したので、まずは月に関する (297) から始める。相対運動の方程式を導く際の常道として $(301)/m_2 - (300)/m_1$ を作ってみると

$$左辺 = \frac{d^2\boldsymbol{R}_2}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2}, \tag{308}$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= -\frac{Gm_1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1|^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1)-\frac{Gm_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3) \\
&\quad +\frac{Gm_2}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2|^3}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)+\frac{Gm_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3) \\
&= -\frac{G(m_1+m_2)}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1|^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1)-Gm_3\left(\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}-\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\right). \qquad (309)
\end{aligned}
$$

この (309) を $\boldsymbol{r}$ を使って表現すると

$$
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-G(m_1+m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-Gm_3\left(\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}-\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\right). \qquad (310)
$$

後の便宜のために (310) をちょっとだけ変形しておく。右辺第一項を左辺に移項し、新しい右辺に因子 $\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)\cdot\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)=1$ を掛けておく。

$$
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+G(m_1+m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=Gm_3\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\right). \qquad (311)
$$

ここで (299) で定義される F に立ち帰ってみると、

$$
\Delta=|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|\,,\quad \Delta_1=|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|\,, \qquad (312)
$$

より

$$
F=\frac{m_1}{\Delta_1}+\frac{m_2}{\Delta}=\frac{m_1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|}+\frac{m_2}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|}, \qquad (313)
$$

である。この F を $\boldsymbol{r}$ で偏微分することを考える。良く見る微分の関係式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \\
&= -\frac{x}{r^3}, \qquad (314)
\end{aligned}
$$

などを思い出し、(306) を使うと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|} &= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3) \\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(-\boldsymbol{r}_1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right) \\
&\quad \boldsymbol{r}\text{と}\boldsymbol{r}_1\text{は独立だから}\partial\boldsymbol{r}_1/\partial\boldsymbol{r}=0 \\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) \\
&= \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (315)
\end{aligned}
$$

同様にして (307) を使うと

$$
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|} = -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(-\boldsymbol{r}_1+\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right) \\
&\quad \boldsymbol{r}\text{と}\boldsymbol{r}_1\text{は独立だから}\partial\boldsymbol{r}_1/\partial\boldsymbol{r}=0 \\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \\
&= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (316)
\end{aligned}
$$

(313) の F を $\boldsymbol{r}$ で偏微分し、(315) と (316) を適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}} &= m_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|}+m_2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|} \\
&= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (317)
\end{aligned}
$$

(317) の右辺は (311) の右辺 () 内の量に等しい。従って (311) は

$$
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+G(m_1+m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{Gm_3(m_1+m_2)}{m_1m_2}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad (318)
$$

となり、これにて月に関する運動方程式 (297) が示された。

次は太陽に関する (298) である。$\boldsymbol{r}_1$ の起点は月–地球系の重心なので、まずは月–地球系重心に関する運動方程式を作る。はじめに (300) + (301)/(m_1+m_2) を作ってみると

$$
\text{左辺}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2\boldsymbol{R}_2}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{R}_\mathrm{G}}{dt^2}, \qquad (319)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= -\frac{Gm_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2|^3}-\frac{Gm_1m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3} \\
&\quad -\frac{Gm_2m_1}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1|^3}-\frac{Gm_2m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3} \\
&\quad \text{第一項と第三項は打ち消し合うので} \\
&= -\frac{Gm_1m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}-\frac{Gm_2m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (320)
\end{aligned}
$$

つまり (319)(320) より月–地球系重心の運動方程式は

$$
\frac{d^2\boldsymbol{R}_\mathrm{G}}{dt^2}=-\frac{Gm_3}{m_1+m_2}\left(m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+m_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\right). \qquad (321)
$$

$\boldsymbol{r}_1$ と重心 G の関係は (305) なので、今度は (305)/m_3 − (321) を計算する。

$$
\text{右辺}=\frac{d^2\boldsymbol{R}_3}{dt^2}-\frac{d^2\boldsymbol{R}_\mathrm{G}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}, \qquad (322)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= -\frac{Gm_1}{|\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1|^3}(\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1)-\frac{Gm_2}{|\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_2|^3}(\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_2) \\
&\quad +\frac{Gm_3}{m_1+m_2}\left(m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+m_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Gm_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+Gm_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}+\frac{Gm_1m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+\frac{Gm_2m_3}{m_1+m_2}\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\\
&= \left(Gm_1+\frac{Gm_1m_3}{m_1+m_2}\right)\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+\left(Gm_2-\frac{Gm_2m_3}{m_1+m_2}\right)\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\\
&= \left(G\frac{m_1(m_1+m_2)+m_1m_3}{m_1+m_2}\right)\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+\left(G\frac{m_2(m_1+m_2)+m_2m_3}{m_1+m_2}\right)\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\\
&= \left(G\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}\right)m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+\left(G\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}\right)m_3\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\\
&= \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2}\left(m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+m_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\right). \qquad (323)
\end{aligned}
$$

ここで、F を $\boldsymbol{r}_1$ で偏微分することを考え、以下を計算する。(306) を使うと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|} &= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3)\\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\left(-\boldsymbol{r}_1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right)\\
&\quad \boldsymbol{r}\text{と}\boldsymbol{r}_1\text{は独立だから}\partial\boldsymbol{r}/\partial\boldsymbol{r}_1=0\\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}(-1)\\
&= \frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (324)
\end{aligned}
$$

同様にして (307) を使うと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|} &= -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3)\\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\left(-\boldsymbol{r}_1+\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right)\\
&\quad \boldsymbol{r}\text{と}\boldsymbol{r}_1\text{は独立だから}\partial\boldsymbol{r}/\partial\boldsymbol{r}_1=0\\
&= -\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}(-1)\\
&= \frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (325)
\end{aligned}
$$

(324) と (325)、および F の定義式 (299) より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{r}_1} &= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{m_1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|}+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{m_2}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|}\\
&= m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+m_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}. \qquad (326)
\end{aligned}
$$

(326) を良く見ると、これは (323) 右辺の () 内の量そのものであることがわかる。即ち

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} &= \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2}\left(m_1\frac{\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_3|^3}+m_2\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_3|^3}\right)\\
&= \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2}\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{r}_1}. \qquad (327)
\end{aligned}
$$

以上により太陽の運動方程式 (298) が示された。

8. 非線型一次元振り子の摂動解周期成分

以下のハミルトニアンで記述される一次元非線型振り子

$$K(\theta_0, J_0) = \omega_0 J_0 - \frac{\varepsilon}{6} J_0^2 \sin^4 \theta_0 + \frac{\varepsilon^2}{90} \frac{J_0^3}{\omega_0} \sin^6 \theta_0 + \cdots, \tag{328}$$

の摂動解を得る過程に於いて、二次の母関数が以下のようになることを示せ。

$$\frac{\partial S_2}{\partial \theta_0} = \frac{J^2}{\omega_0^2} \left(-\frac{5}{576} \cos 2\theta_0 + \frac{43}{5760} \cos 4\theta_0 - \frac{1}{320} \cos 6\theta_0 + \frac{1}{2304} \cos 8\theta_0 \right). \tag{329}$$

なお講義では右辺の最終項の符号を負 $\left(-\frac{1}{2304}\cos 8\theta_0\right)$ と書いてしまったかもしれないが、それは誤りであり、(329) が正しい。

補足資料に記した通り、この一次元振り子のハミルトニアンは以下の形から出発する。

$$K = \frac{p^2}{2} - b \cos q. \tag{330}$$

振幅 q が小さいとして $\cos q$ を展開し、

$$K = \frac{p^2}{2} - b \left(1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots \right), \tag{331}$$

ハミルトニアンの定数部分 $(-b)$ は話の筋と関係ないので省略する。

$$K = \frac{p^2 + bq^2}{2} - b \left(\frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots \right). \tag{332}$$

左辺第一項は無摂動部分のハミルトニアンなので K_0 と置き、K_0 内では $b = \omega_0^2$ と置く。

$$K = K_0 - b \left(\frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots \right), \quad K_0 = \frac{p^2 + \omega_0^2 q^2}{2}. \tag{333}$$

式 (333) 第一式の右辺第二項以降では各項毎に b が ε, ε^2, ε^3, $\cdots$ の意味を持つと解釈する。

$$K = K_0 - \left(\frac{\varepsilon}{4!} q^4 - \frac{\varepsilon^2}{6!} q^6 + \cdots \right). \tag{334}$$

無摂動の調和振動子に於ける q, p と θ_0, J_0, ω_0 の関係 (補足資料にて解説している) を用いると、(334) は結局以下のようになり、これは (328) と同一である。

$$K = \omega_0 J_0 - \frac{\varepsilon}{6} J_0^2 \sin^4 \theta_0 + \frac{\varepsilon^2}{90} \frac{J_0^3}{\omega_0} \sin^6 \theta_0 - \cdots. \tag{335}$$

ここで $K_0 = \omega_0 J_0$ は無摂動系、即ち一次元調和振動子のハミルトニアンである。なお、(329) は von Zeipel 型摂動論の適用過程で出て来る正準変換の母関数である。以下では von Zeipel 型のみならず、堀源一郎型の摂動論も適用してこの振動子の摂動解を二次近似まで求めることを試みる。これは時間が足らずに講義では実演しなかった事項である。また、von Zeipel 法による求解も (講義では一次までしか実演できなかったので) 二次まで行ってみる。

8.1 von Zeipel の方法を使う

まず復習として、von Zeipel 型正準摂動論の一般論の概略を述べることから始める。

微小な摂動を受けたハミルトン系 $H(q,p)$ を考える。0 次の近似系 (無摂動系) が積分可能であるとすると、この無摂動系のハミルトニアンは作用変数 J_0 のみの関数になる。これを $K_0(J_0)$ と書くことにすれば、無摂動系の正準方程式は以下のようになる。

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{\partial K_0(J_0)}{\partial J_0}, \quad \frac{dJ_0}{dt} = -\frac{\partial K_0(J_0)}{\partial \theta_0}. \tag{336}$$

上記 (336) の第二式の右辺には θ_0 が含まれていないので、明らかに 0 になる。即ち J_0 は時間変化しない。第一式の右辺は J_0 のみの関数、即ち定数なので、これを $\omega_0(J_0)$ と書く。これは無摂動系の正準振動数に他ならず、J_0 が定数であることから、$\omega_0(J_0)$ も定数となる。ということで結局、(336) から以下が導かれる。

$$\theta_0 = \omega_0(J_0)t + \text{constant}, \quad J_0 = \text{constant}. \tag{337}$$

以下では、無摂動系に対して微小な摂動が加わった系

$$H(q,p) = K(\theta_0, J_0), \tag{338}$$

に然るべき正準変換を施すことで、ハミルトニアンを最終的に

$$K(\theta_0, J_0) = E(J), \tag{339}$$

という新しい作用変数 (または積分) J のみに関数にすることを考える。要するに変数を消去し、解けない問題を解ける問題に持ち込むのである。このための正準変換の母関数としては以下を用いる。新しい変数 J と古い変数 θ_0 が混合していることに注目する。

$$S(\theta_0, J) = S_0(\theta_0, J) + \varepsilon S_1(\theta_0, J) + \varepsilon^2 S_2(\theta_0, J) + \varepsilon^3 S_3(\theta_0, J) + \dots. \tag{340}$$

(340) 右辺第一項の $S_0(\theta_0, J)$ は $S_0(\theta_0, J) = \theta_0 J$ という $O(1)$ の関数であり、いわゆる恒等変換の母関数である。以下の第 j 項の大きさは $O(\varepsilon^j)$ だから、この母関数 $S(\theta_0, J)$ による変数変換 (正準変換) は量 ε で記述される微小なものということになる。母関数 S を用いた新しい正準変数 θ, J と旧い正準変数 θ_0, J_0 の関係は以下である。当然だが、ここでも新しい変数と古い変数が右辺と左辺で混じり合っている。

$$\theta = \frac{\partial S(\theta_0, J)}{\partial J} = \theta_0 + \varepsilon\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial J} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial J} + \varepsilon^3\frac{\partial S_3(\theta_0, J)}{\partial J} + \dots, \tag{341}$$

$$J_0 = \frac{\partial S(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} = J + \varepsilon\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^3\frac{\partial S_3(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \dots. \tag{342}$$

ここから具体的な手続きに入る。まず、元のハミルトニアン K が微小量 ε で展開されるとする。

$$K(\theta_0, J_0) = K_0(J_0) + \varepsilon K_1(\theta_0, J_0) + \varepsilon^2 K_2(\theta_0, J_0) + \varepsilon^3 K_3(\theta_0, J_0) + \dots. \tag{343}$$

J と J_0 は近いので、(343) の右辺各項の K_0, K_1, K_2 らをそれぞれ J の周りで展開する。

$$K_i(\theta_0, J_0) = K_i(\theta_0, J) + \left.\frac{\partial K_i(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J}(J_0 - J) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 K_i(\theta_0, J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J}(J_0 - J)^2 + \dots. \tag{344}$$

(344) 中の $J_0 - J$ に、(342) から得られる

$$J_0 - J = \varepsilon \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^3 \frac{\partial S_3(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \dots . \tag{345}$$

を代入し、母関数 S を使った表現にする。

$$\begin{aligned} K_i(\theta_0, J_0) &= K_i(\theta_0, J) + \left.\frac{\partial K_i(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_i(\theta_0, J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \dots \right)^2 + \dots \\ &= K_i(\theta_0, J) + \varepsilon \left.\frac{\partial K_i(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial K_i(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_i(\theta_0, J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \right)^2 \right) \\ &\quad + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{346}$$

今度は ε による K_i の展開式 (346) を K の展開式 (343) 内のそれぞれの K_i に代入する。

$$\begin{aligned} K(\theta_0, J_0) &= \Bigg[K_0(J) + \varepsilon \left.\frac{\partial K_0(J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial K_0(J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_0(J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \right)^2 \right) + \dots \Bigg] \\ &\quad + \varepsilon \Bigg[K_1(\theta_0, J) + \varepsilon \left.\frac{\partial K_1(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial K_1(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_1(\theta_0, J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \right)^2 \right) + \dots \Bigg] \\ &\quad + \varepsilon^2 \Bigg[K_2(\theta_0, J) + \varepsilon \left.\frac{\partial K_2(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial K_2(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_2(\theta_0, J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \right)^2 \right) + \dots \Bigg] \\ &= K_0(J) + \varepsilon K_1(\theta_0, J) + \varepsilon^2 K_2(\theta_0, J) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \left(\left.\frac{\partial K_0(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} + \varepsilon \left.\frac{\partial K_1(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial K_0(J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 K_0(J)}{\partial {J_0}^2}\right|_{J_0=J} \left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \right)^2 \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{347}$$

こうして得られた $K(\theta_0, J_0)$ が、最終的には作用変数 J のみの関数 $E(J)$ になると思って話を進めるのが正準摂動論の本筋である。即ちこの一致は私達の希望であり、要請である。このために $E(J)$ 自身も ε の冪乗で展開されるとする。

$$E(J) = E_0(J) + \varepsilon E_1(J) + \varepsilon^2 E_2(J) + \varepsilon^3 E_3(J) + \dots . \tag{348}$$

最終的には $K(\theta_0, J_0) = E(J)$ になってほしいので、そのために K についての展開式 (347) と E についての展開式 (348) の ε に関する同次項を比較等置する。便宜のために正準周波数 ω_0 を

$$\omega_0(J) \equiv \left.\frac{\partial K_0(J_0)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J}, \tag{349}$$

で定義しておく。まず $O(\varepsilon^0)$ については

$$E_0(J) = K_0(J), \tag{350}$$

だが、これは J のみの関数であることが最初から一目瞭然なので、何もすることはない。

$O(\varepsilon^1)$ については

$$E_1(J) = K_1(\theta_0, J) + \omega_0(J)\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0}, \tag{351}$$

となる。以下では周期項を母関数 S に押しやってハミルトニアンから消去するという大方針に従い、手続きを進める[4] 。周期成分を含まない部分については角変数による平均化を行うことで

$$E_1(J) = \left\langle K_1 + \omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} \right\rangle, \tag{352}$$

となるが、母関数 S_1 が周期項のみで構成される (べき) ことを考えるとこれは単に

$$E_1(J) = \langle K_1 \rangle, \tag{353}$$

となる。この結果を (351) に代入すれば、周期成分すなわち母関数 S_1 に関しては以下になる。

$$\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} = -\frac{1}{\omega_0}\left(K_1 - \langle K_1 \rangle\right). \tag{354}$$

$O(\varepsilon^2)$ については

$$\begin{aligned} E_2(J) &= K_2(\theta_0, J) + \left.\frac{\partial K_1(\theta_0, J)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J} \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\ &+ \omega_0(J)\frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial \omega_0(J_0)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J}\left(\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0}\right)^2, \end{aligned} \tag{355}$$

となるが、ここでも同様にして平均化することで以下を得る。

$$\begin{aligned} E_2(J) &= \left\langle K_2 + \frac{\partial K_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} + \omega_0 \frac{\partial S_2}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J_0}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0}\right)^2 \right\rangle \\ &\quad S_2\text{は周期成分のみで構成されるべきなので平均値は}0 \\ &= \langle K_2 \rangle + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} \right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J_0}\left\langle \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0}\right)^2 \right\rangle \\ &\quad \text{ここに (354) の}\partial S_1/\partial \theta_0\text{を代入する} \\ &= \langle K_2 \rangle + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J_0}\frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_1 \rangle - K_1\right) \right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J_0}\left\langle \left(\frac{1}{\omega_0}\left(K_1 - \langle K_1 \rangle\right)\right)^2 \right\rangle \\ &= \langle K_2 \rangle + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J_0}\frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_1 \rangle - K_1\right) \right\rangle + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J_0}\left\langle K_1^2 - 2K_1\langle K_1 \rangle + \langle K_1 \rangle^2 \right\rangle \\ &\quad \text{右辺では} -2\langle K_1 \langle K_1 \rangle\rangle = -2\langle K_1 \rangle\langle K_1 \rangle = -2\langle K_1 \rangle^2\text{なので} \\ &= \langle K_2 \rangle + \frac{1}{\omega_0}\left(\left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J_0} \right\rangle \langle K_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J_0} K_1 \right\rangle\right) + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\left\langle K_1^2 \right\rangle - \langle K_1 \rangle^2\right). \end{aligned} \tag{356}$$

[4]以下では簡単のために $K_1(\theta_0, J)$ を単に K_1 などと略記するが、各量がどの変数の関数になっているかを常に頭に入れておくことを忘れてはいけない。特に von Zeipel 型の方法では新旧変数が至る所で入り混じっているので、混乱しないことが重要である

周期成分すなわち母関数 S_2 については (355) から以下が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_2}{\partial \theta_0} &= -\frac{1}{\omega_0}\left[K_2 - E_2 + \frac{\partial K_1}{\partial J}\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0}\right)^2\right] \\
&= -\frac{1}{\omega_0}\Bigg[K_2 - \left(\langle K_2\rangle + \frac{1}{\omega_0}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}K_1\right\rangle\right) + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right)\right) \\
&\qquad + \frac{\partial K_1}{\partial J}\frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_1\rangle - K_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_1\rangle - K_1\right)\right)^2\Bigg] \\
&= -\frac{1}{\omega_0}\Bigg[K_2 - \langle K_2\rangle - \frac{1}{\omega_0}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}K_1\right\rangle\right) - \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right) \\
&\qquad + \frac{\partial K_1}{\partial J}\frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_1\rangle - K_1\right) + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\langle K_1\rangle^2 - 2K_1\langle K_1\rangle + K_1^2\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_2\rangle - K_2\right) + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle + \frac{\partial K_1}{\partial J}\left(K_1 - \langle K_1\rangle\right)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2\omega_0^3}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\langle K_1\rangle^2 - 2\langle K_1\rangle^2 - K_1^2 + 2K_1\langle K_1\rangle\right).
\end{aligned} \tag{357}
$$

以下、$O(\varepsilon^3)$ 以上の高次項も全く同様にして計算できる。このようにして得られた新しいハミルトニアン $E(J)$ を書き下して行くと

$$
\begin{aligned}
E(J) &= E_0(J) + \varepsilon E_1(J) + \varepsilon^2 E_2(J) + \ldots \\
&= K_0(J) + \varepsilon\langle K_1\rangle \\
&+ \varepsilon^2\left(\langle K_2\rangle + \frac{1}{\omega_0}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}K_1\right\rangle\right) + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right)\right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{358}
$$

この新しい系での正準方程式を書き下すと以下のようになる。

$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial E(J)}{\partial J}, \quad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial E(J)}{\partial \theta}. \tag{359}
$$

上記 (359) の第二式の右辺には θ が含まれていないので、明らかに 0 になる。即ち J は時間変化しない。と言うか、J が時間変化しないような系に持ち込むための操作を行ったのであるから、当然である。第一式の右辺は J のみの関数、即ち定数なので、これを $\omega(J)$ と書く。これは系の正準振動数に他ならず、J が定数であることから $\omega(J)$ も定数となる。ということで結局、(359) から以下が導かれる。

$$
\theta = \omega(J)t + \mathrm{constant}, \quad J = \mathrm{constant}. \tag{360}
$$

あとは、新変数 (θ, J) を新旧変数の関係式 (341)(342) に代入し、旧変数 (θ_0, J_0) について解き直せば最終的な解が得られることになる。

これで一般論の記載が終わった。次はこの手続きを実際に (335) で表されるハミルトニアンを持つ振動子の系に適用すれば良い。(335) は既にハミルトニアンを ε で展開した形になっている。

$$
K_0(J_0) = \omega_0 J_0, \tag{361}
$$

$$
K_1(\theta_0, J_0) = -\frac{J_0^2}{6}\sin^4\theta_0 = -\frac{J_0^2}{48}\left(3 - 4\cos 2\theta_0 + \cos 4\theta_0\right), \tag{362}
$$

$$K_2(\theta_0, J_0) = \frac{J_0^3}{90\omega_0}\sin^6\theta_0 = \frac{J_0^3}{2880\omega_0}\left(10 - 15\cos 2\theta_0 + 6\cos 4\theta_0 - \cos 6\theta_0\right). \tag{363}$$

以下では一般論を述べた際に現れた数式は番号で参照するだけでを繰り返しては書かない。言語的に述べれば、$K(\theta_0, J_0)$ が $(\theta_0, J_0) \to (\theta, J)$ の正準変換で積分可能に持ち込めると思うことにし、上記の K_1, K_2 らをそれぞれ $J_0 = J$ の周りで展開した結果が (347) である。そのようにして得られた $K(\theta_0, J_0)$ が最終的には作用変数 J のみの関数 $E(J)$ になり、$E(J)$ 自身も ε の冪乗で展開されるとして (348) の各項と (347) の各項を比較すれば良い。

$O(\varepsilon^0)$ 項の比較については簡単で、(350) より

$$E_0(J) = K_0(J) = \omega_0 J, \tag{364}$$

となる。ここは最初から J のみの関数なので、何もすることはない。

$O(\varepsilon^1)$ については (351) より

$$E_1(J) = K_1(\theta_0, J) + \omega_0(J)\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0}, \tag{365}$$

だが、$E_1(J)$ には周期成分を含ませない方針を採ることにより (353) と同様に

$$E_1(J) = \langle K_1(\theta_0, J)\rangle_{\theta_0} = -\frac{J^2}{16}, \tag{366}$$

となる。周期成分を担う母関数 S_1 については (354) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial \theta_0} &= -\frac{1}{\omega_0}\left(K_1 - \langle K_1\rangle\right) \\ &= -\frac{J^2}{48\omega_0}\left(4\cos 2\theta_0 - \cos 4\theta_0\right),\end{aligned} \tag{367}$$

なので、θ_0 で積分すれば以下のようになる。

$$S_1 = -\frac{J^2}{48\omega_0}\left(2\sin 2\theta_0 - \frac{1}{4}\sin 4\theta_0\right). \tag{368}$$

$O(\varepsilon^2)$ についても同様で、永年項のみ含む $E_2(J)$ については (356) から

$$E_2(J) = \langle K_2\rangle + \frac{1}{\omega_0}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J_0}K_1\right\rangle\right) + \frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\partial \omega_0}{\partial J}\left(\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right), \tag{369}$$

である。E_2 および S_2 を求めるために必要な量を計算しておく。

$$\langle K_1\rangle = E_1(J) = -\frac{J^2}{16}, \tag{370}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial J} = -\frac{J}{3}\sin^4\theta_0 = -\frac{J}{24}\left(3 + 4\cos 2\theta_0 + \cos 4\theta_0\right), \tag{371}$$

$$\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle = -\frac{J}{8}, \tag{372}$$

$$\langle K_2\rangle = \left\langle\frac{J_0^3}{2880\omega_0}\left(10 - 15\cos 2\theta_0 + 6\cos 4\theta_0 - \cos 6\theta_0\right)\right\rangle = \frac{J^3}{288\omega_0}, \tag{373}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1 &= \left(-\frac{J}{3}\sin 4\theta_0\right)\cdot\left(-\frac{J_0^2}{6}\sin^4\theta_0\right) \\
&= \frac{J^3}{18}\sin^8\theta_0 \\
&= \frac{J^3}{18}\cdot\frac{35-84\cos 2\theta_0+34\cos 4\theta_0-12\cos 6\theta_0+\cos 8\theta_0}{128},
\end{aligned} \tag{374}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle &= \left\langle\frac{J^3}{18}\cdot\frac{35-84\cos 2\theta_0+34\cos 4\theta_0-12\cos 6\theta_0+\cos 8\theta_0}{128}\right\rangle \\
&= \frac{J^3}{18}\cdot\frac{35}{128}.
\end{aligned} \tag{375}
$$

また無摂動系の正準周波数については

$$
\omega_0(J)=\left.\frac{\partial K_0(J_0)}{\partial J_0}\right|_{J_0=J}=\omega_0 \tag{376}
$$

であり、ω_0 が定数であることから $\partial\omega_0(J)/\partial J$ などの偏微分係数はみな 0 になる。これを念頭に置いて (369) から $E_2(J)$ を計算すると以下のようになる[5] 。

$$
\begin{aligned}
E_2(J) &= \frac{J^3}{288\omega_0}+\frac{1}{\omega_0}\left(\left(-\frac{J}{8}\right)\left(-\frac{J^2}{16}\right)-\frac{J^3}{18}\cdot\frac{35}{128}\right) \\
&= \frac{J^3}{\omega_0}\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{128}-\frac{35}{2304}\right) \\
&= -\frac{J^3}{256\omega_0}.
\end{aligned} \tag{377}
$$

二次の母関数 S_2 については (357) であるが、$\frac{\partial\omega_0}{\partial J}=0$ より (357) の三行目以降の項は 0 になるので、以下だけを計算すれば良い。こうした変形に際しては三角関数の加法定理を頻用する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_2}{\partial\theta_0} &= \frac{1}{\omega_0}\left(\langle K_2\rangle-K2\right)+\frac{1}{\omega_0^2}\left(\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle\langle K_1\rangle-\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle+\frac{\partial K_1}{\partial J}\left(K_1-\langle K_1\rangle\right)\right) \\
&= \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{J^3}{288\omega_0}-\frac{J_0^3}{2880\omega_0}\left(10-15\cos 2\theta_0+6\cos 4\theta_0-\cos 6\theta_0\right)\right) \\
&\quad +\frac{1}{\omega_0^2}\left(\left(-\frac{J}{8}\right)\left(-\frac{J^2}{16}\right)-\frac{J^3}{18}\cdot\frac{35}{128}+\left(-\frac{J}{3}\sin^4\theta_0\right)\left(\frac{J^2}{48}\left(4\cos 2\theta_0-\cos 4\theta_0\right)\right)\right) \\
&= \frac{J^3}{2880\omega_0}\left(15\cos 2\theta_0-6\cos 4\theta_0+\cos 6\theta_0\right) \\
&\quad +\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{J^3}{128}-\frac{35J^3}{2304}-\frac{J}{3}\cdot\frac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta_0+\cos 4\theta_0\right)\frac{J^2}{48}\left(4\cos 2\theta_0-\cos 4\theta_0\right)\right), \\
&= \frac{J^3}{2880\omega_0}\left(15\cos 2\theta_0-6\cos 4\theta_0+\cos 6\theta_0\right) \\
&\quad +\frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{17}{2304}-\frac{1}{1152}\left(12\cos 2\theta_0-3\cos 4\theta_0+8\cos 2\theta_0\cos 4\theta_0-16\cos^2 2\theta_0-\cos^2 4\theta_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

[5] 講義では符号を誤って $J^3/256\omega_0$ と書いてしまったかもしれない。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{J^3}{2880\omega_0}(15\cos 2\theta_0 - 6\cos 4\theta_0 + \cos 6\theta_0) \\
&\qquad + \frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{17}{2304} - \frac{1}{1152}\left(16\cos 2\theta_0 - 11\cos 4\theta_0 + 4\cos 6\theta_0 - \frac{1}{2}\cos 8\theta_0 - \frac{17}{2}\right)\right), \\
&= \frac{J^3}{2880\omega_0}(15\cos 2\theta_0 - 6\cos 4\theta_0 + \cos 6\theta_0) \\
&\qquad - \frac{J^3}{1152\omega_0^2}\left(16\cos 2\theta_0 - 11\cos 4\theta_0 + 4\cos 6\theta_0 - \frac{1}{2}\cos 8\theta_0\right), \\
&= \frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{576}\cos 2\theta_0 + \frac{43}{5760}\cos 4\theta_0 - \frac{1}{320}\cos 6\theta_0 + \frac{1}{2304}\cos 8\theta_0\right).
\end{aligned} \tag{378}
$$

(378) は与式の (329) に等しい。(378) を θ_0 で積分すれば定数項を除いて以下のようになる。

$$
S_2(\theta_0, J) = \frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta_0 + \frac{43}{23040}\sin 4\theta_0 - \frac{1}{1920}\sin 6\theta_0 + \frac{1}{18432}\sin 8\theta_0\right). \tag{379}
$$

以上から、新しいハミルトニアン $E(J)$、正準周波数 $\omega(J)$、正準変換の母関数 $S(\theta_0, J)$ は以下のようになる。

$$
E(J) = \omega_0 J - \varepsilon\frac{J^2}{16} - \varepsilon^2\frac{J^3}{256\omega_0} + \dots, \tag{380}
$$

$$
\omega(J) \equiv \frac{\partial E(J)}{\partial J} = \omega_0 - \varepsilon\frac{J}{8} - \varepsilon^2\frac{3J^2}{256\omega_0} + \dots, \tag{381}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\theta_0, J) \quad &= \quad \theta_0 J - \varepsilon\frac{J^2}{48\omega_0}(4\cos 2\theta_0 - \cos 4\theta_0) \qquad (382) \\
&\qquad + \varepsilon^2\frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta_0 + \frac{43}{23040}\sin 4\theta_0 - \frac{1}{1920}\sin 6\theta_0 + \frac{1}{18432}\sin 8\theta_0\right) + \dots.
\end{aligned}
$$

新しい系 (θ, J) での正準方程式は以下のようになる。

$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial E(J)}{\partial J}, \quad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial E(J)}{\partial \theta}. \tag{383}
$$

上記 (383) の第二式の右辺には θ が含まれていないので、明らかに 0 になる。即ち J は時間変化しない。J が時間変化しないように正準変換を行ったのだから、これは当然である。第一式の右辺は J のみの関数 $\omega(J)$ で、これは正準振動数である。J が定数であることから、$\omega(J)$ も定数となる。ということで結局、(383) から以下が導かれる。

$$
\theta = \omega(J)t + \text{constant}, \quad J = \text{constant}. \tag{384}
$$

新変数 (θ, J) と旧変数 (θ_0, J_0) の関係は (341)(342) まで戻り、

$$
\begin{aligned}
\theta \quad &= \quad \frac{\partial S(\theta_0, J)}{\partial J} \\
&= \quad \theta_0 + \varepsilon\frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial J} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial J} + \varepsilon^3\frac{\partial S_3(\theta_0, J)}{\partial J} + \dots \\
&= \quad \theta_0 - \varepsilon\frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta_0 - \frac{1}{4}\sin 4\theta_0\right) \qquad (385) \\
&\qquad + \varepsilon^2\frac{3J^2}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta_0 + \frac{43}{23040}\sin 4\theta_0 - \frac{1}{1920}\sin 6\theta_0 + \frac{1}{18432}\sin 8\theta_0\right) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \frac{\partial S(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} \\
&= J + \varepsilon \frac{\partial S_1(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \varepsilon^3 \frac{\partial S_3(\theta_0, J)}{\partial \theta_0} + \dots \\
&= J - \varepsilon \frac{J^2}{48\omega_0} (4\cos 2\theta_0 - \cos 4\theta_0) \qquad (386) \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{J^3}{\omega_0^2} \left(-\frac{5}{576}\cos 2\theta_0 + \frac{43}{5760}\cos 4\theta_0 - \frac{1}{320}\cos 6\theta_0 + \frac{1}{2304}\cos 8\theta_0 \right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

なお、θ_0 については (386) の右辺第二項以降を移項して

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= \theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2\sin 2\theta_0 - \frac{1}{4}\sin 4\theta_0 \right) \qquad (387) \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{3J^2}{\omega_0^2} \left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta_0 + \frac{43}{23040}\sin 4\theta_0 - \frac{1}{1920}\sin 6\theta_0 - \frac{1}{18432}\sin 8\theta_0 \right) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

という形にしておいた方が後に述べる逐次近似の作業では都合が良い。

(386)(387) は最終的な解ではなく、この先には (386)(387) を $\theta_0 = \theta_0(\theta, J)$, $J_0 = J_0(\theta, J)$ の形に解き直す必要がある。これは決して簡単な作業ではない。(386)(387) は両辺に新旧の変数 θ, J, θ_0, J_0 が入り混じっており、高次の摂動解を求めたり大自由度系での求解を行う場合には大変な計算になることがある。von Zeipel 型正準摂動論の難所と言える。

とは言え、ここで挙げた例のように自由度が低い場合にはさほど難儀せずに求解を行うことが可能なことが多い。言うまでもなく 0 次の摂動解は以下である。

$$
\theta_0 = \theta, \quad J_0 = J. \qquad (388)
$$

一次の摂動解を求めるために、この 0 次解 (388) を (388)(387) の右辺に代入する。一次の近似の話をしているのだから、各右辺の $O(\varepsilon)$ 項内では θ_0 と θ, J_0 と J の区別をしなくて良い。ということで一次の摂動解もすぐに求まり、以下のようになる。

$$
\theta_0 = \theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta \right) + O(\varepsilon^2), \qquad (389)
$$

$$
J_0 = J - \varepsilon \frac{J^2}{48\omega_0} (4\cos 2\theta - \cos 4\theta) + O(\varepsilon^2). \qquad (390)
$$

次は二次の摂動解を求める。まず θ についてだが、一次解 (389) を (388) の右辺に代入する。今は二次の近似の話をしているのだから各右辺の $O(\varepsilon^2)$ 項内では θ_0 と θ の区別をしなくて良いが、$O(\varepsilon)$ 項内では θ_0 と θ の区別を行う必要がある。

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= \theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left[2\sin 2\left(\theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}\sin 4\left(\theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta \right) \right) \right] \qquad (391) \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{3J^2}{\omega_0^2} \left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta + \frac{43}{23040}\sin 4\theta - \frac{1}{1920}\sin 6\theta - \frac{1}{18432}\sin 8\theta \right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

ここで便宜のために、sin の引数の中に入っている $O(\varepsilon)$ の量を

$$
A \equiv \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta \right), \qquad (392)
$$

と置く。sin と cos の Taylor 展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \tag{393}$$

を使うと、三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\sin 2(\theta + A) &= \sin 2\theta \cos 2A + \cos 2\theta \sin 2A \\ &= \sin 2\theta + 2A \cos 2\theta + O(\varepsilon^2) \\ &= \sin 2\theta + 2 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\cos 2\theta + O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{394}$$

$$\begin{aligned}\sin 4(\theta + A) &= \sin 4\theta \cos 4A + \cos 4\theta \sin 4A \\ &= \sin 4\theta + 4A \cos 4\theta + O(\varepsilon^2) \\ &= \sin 4\theta + 4 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\cos 4\theta + O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{395}$$

となる。(393)(394)(395) を (391) に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left[2\left\{\sin 2\theta + 2 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\cos 2\theta\right\}\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4}\left\{\sin 4\theta - 4 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\cos 4\theta\right\}\right] \\ &\quad -\varepsilon^2 \frac{3J^2}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{1152}\sin 2\theta + \frac{43}{23040}\sin 4\theta - \frac{1}{1920}\sin 6\theta - \frac{1}{18432}\sin 8\theta\right) + O(\varepsilon^3) \\ &\quad \text{ここでまた三角関数の加法定理を多用して} \\ &= \theta + \varepsilon \frac{J}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{J^2}{92160\omega_0^2}\left(1280\sin 2\theta + 124\sin 4\theta - 96\sin 6\theta + 5\sin 8\theta\right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{396}$$

この (396) が θ_0 についての二次の摂動解である。

J についても全く同様で、一次解 (390) を (387) の右辺に代入する。今は二次の近似の話をしているのだから各右辺の $O(\varepsilon^2)$ 項内では J_0 と J の区別をしなくて良いが、$O(\varepsilon)$ 項内では J_0 と J の区別を行う必要がある。

$$\begin{aligned}J_0 &= J - \varepsilon \frac{J^2}{48\omega_0}\left[4\cos 2\left(\theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right)\right. \\ &\quad \left. - \cos 4\left(\theta + \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right)\right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{J^3}{\omega_0^2}\left(-\frac{5}{576}\cos 2\theta + \frac{43}{5760}\cos 4\theta - \frac{1}{320}\cos 6\theta - \frac{1}{2304}\cos 8\theta\right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{397}$$

θ の場合と同様にして三角関数の加法定理と Taylor 展開を組み合わせ、以下を得る。

$$\begin{aligned}\cos 2(\theta + A) &= \cos 2\theta \cos 2A - \sin 2\theta \sin 2A \\ &= \cos 2\theta - 2A \sin 2\theta + O(\varepsilon^2) \\ &= \cos 2\theta - 2 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0}\left(2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\sin 2\theta + O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{398}$$

$$\begin{aligned}
\cos 4(\theta + A) &= \cos 4\theta \cos 4A - \sin 4\theta \sin 4A \\
&= \cos 4\theta - 4A \sin 4\theta + O(\varepsilon^2) \\
&= \cos 4\theta - 4 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2 \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \sin 4\theta + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{399}$$

(398)(399) を (397) に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
J_0 &= J - \varepsilon \frac{J^2}{48\omega_0} \left[4 \left\{ \cos 2\theta - 2 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2 \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \cos 4\theta - 4 \cdot \varepsilon \frac{J}{24\omega_0} \left(2 \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \sin 4\theta \right\} \right] \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{J^3}{\omega_0^2} \left(-\frac{5}{576} \cos 2\theta + \frac{43}{5760} \cos 4\theta - \frac{1}{320} \cos 6\theta - \frac{1}{2304} \cos 8\theta \right) + O(\varepsilon^3) \\
&\quad \text{ここでまた三角関数の加法定理を多用して} \\
&= J - \varepsilon \frac{J^2}{24\omega_0} \left(2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{J^3}{11520\omega_0^2} (85 - 150 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta + 14 \cos 6\theta) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{400}$$

この (400) が J_0 についての二次の摂動解である。これらをもとのハミルトニアンを記述する変数 $q = q(\theta_0, J_0)$, $p = p(\theta_0, J_0)$ に代入すれば、最終的な $q(t)$, $p(t)$ を知ることが出来る。

8.2 堀源一郎の方法を使う

今度は同じ問題を堀源一郎 (Hori, 1966) の正準摂動論を用いて解いてみよう。講義では時間の都合で途中までしか実演出来なかった。堀源一郎の方法は、Poisson 括弧に関する Lie の定理 (展開定理) を用いることで新旧の変数をうまく分離する手法である。まずは一般論の復習を記す。

$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ を $2n$ 個の正準変数のセットとし、$f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ の任意函数とする。$\{,\}$ で Poisson 括弧を表すことにして、演算子 D_S^n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を以下のように定義する。

$$D_S^0 f = f, \quad D_S^1 f = \{f, S\} \quad D_S^n f = D_S^{n-1}(D_S^1 f), \quad (n \geq 2) \tag{401}$$

ここで ε を $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ とは独立な微小定数とし、

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \tag{402}$$

によって $2n$ 個の変数セット $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を定義することにする。この時、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は (402) 右辺の級数が収束すれば正準となる。これが Poisson 括弧に関する Lie の定理 (展開定理) と呼ばれるものであり、証明のひとつは以前に配布した補足資料にて与えてある。この展開定理を用い、解けない問題を解ける問題に持ち込む摂動論が堀源一郎の方法である。以下ではその形式的手続きの一般論を記す。なお以下では歴史的事情により von Zeipel 方の場合とは多少異なる記号を用いる。

元々のハミルトニアンを $H(q, p)$ とし、これが微小パラメータ ε で展開されるとする。最終的には $H(q, p) \rightarrow H^*(q^*, p^*)$ の変換を行いたい。

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p) + \varepsilon^2 H_2(q, p) + \varepsilon^3 H_3(q, p) + \ldots. \tag{403}$$

正準変換に用いる母関数 $S(q^*,p^*)$ を微小パラメータで展開する。なお、Lie の展開定理 (402) に於いて $n=0$ の場合には自動的に $(q,p)=(q^*,p^*)$ となるので、von Zeipel 法の場合に使ったような恒等変換の母関数 S_0 は不要である。従って S_i の添字番号と ε の次数がひとつずれていることに注意する。

$$S(q^*,p^*) = S_1(q^*,p^*) + \varepsilon S_2(q^*,p^*) + \varepsilon^2 S_3(q^*,p^*) + \varepsilon^3 S_4(q^*,p^*) + \dots. \tag{404}$$

次に、ハミルトニアン $H(q,p)$ に Lie の展開定理を適用する。

$$H(q,p) = H(q^*,p^*) + \varepsilon\left\{H(q^*,p^*), S(q^*,p^*)\right\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{H(q^*,p^*), S(q^*,p^*)\right\}, S(q^*,p^*)\right\} + \dots. \tag{405}$$

(405) 内のハミルトニアン $H(q^*,p^*)$ および母関数 $S(q^*,p^*)$ に、それぞれの ε での展開結果 (403)(404) を代入する。以下では簡単のためにかなり省略してあるが、右辺はすべて (q^*,p^*) の関数になっていることを常に頭に置いておく必要がある。

$$\begin{aligned}
H(q,p) &= H_0(q^*,p^*) + \varepsilon H_1(q^*,p^*) + \varepsilon^2 H_2(q^*,p^*) + \varepsilon^3 H_3(q^*,p^*) + \dots \\
&\quad + \varepsilon\left\{H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \dots\right\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \dots\right\}, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \dots\right\} + \dots \\
&= H_0(q^*,p^*) + \varepsilon H_1(q^*,p^*) + \varepsilon^2 H_2(q^*,p^*) \\
&\quad + \varepsilon\left\{H_0, S_1\right\} + \varepsilon^2\left(\left\{H_0, S_2\right\} + \left\{H_1, S_1\right\}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{H_0, S_1\right\}, S_1\right\} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{406}$$

さて、正準変換後のハミルトニアン $H^*(q^*,p^*)$ も ε の冪乗で展開されるとする。

$$H^*(q^*,p^*) = H_0^*(q^*,p^*) + \varepsilon H_1^*(q^*,p^*) + \varepsilon^2 H_2^*(q^*,p^*) + \varepsilon^3 H_3^*(q^*,p^*) + \dots. \tag{407}$$

ここではハミルトニアンが時刻 t を陽に含まないと仮定する。もしも時刻 t を陽に含むような問題であれば、次元をひとつ増やして形式的に時刻を陽に含まないようにハミルトニアンを変更すれば良い。いずれにせよこの場合には

$$H^*(q^*,p^*) = H(q,p), \tag{408}$$

となる。(408) の両辺に (407) と (406) を代入し、ε に関する同次項を比較する。このあたりの手続きは von Zeipel 法の場合と大差ない。$O(\varepsilon^0)$ については

$$H_0^*(q^*,p^*) = H_0(q^*,p^*), \tag{409}$$

$O(\varepsilon^1)$ については

$$H_1^*(q^*,p^*) = \left\{H_0(q^*,p^*), S_1(q^*,p^*)\right\} + H_1(q^*,p^*). \tag{410}$$

ここで von Zeipel 法の場合と同様に、正準変換後のハミルトニアンには永年項のみが残り、周期成分はすべて母関数が担うという要請を行う。となれば H_1^* については

$$H_1^*(q^*,p^*) = \left\langle H_1(q^*,p^*)\right\rangle, \tag{411}$$

とするべきである。但しここで若干の疑問を持つ人がいるかもしれない。(411) には平均化の記号 $\langle\rangle$ が現れているが、この平均化は一体どの変数で行うべきなのであろうか？

これを考えるために、無摂動系のハミルトニアン $H_0(q^*, p^*)$ が満たす正準方程式に立ち戻る。

$$\frac{dq^*}{dt^*} = \frac{\partial H_0(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt^*} = -\frac{\partial H_0(q^*, p^*)}{\partial q^*}. \tag{412}$$

ここで t^* は無摂動系に於ける時刻と言うべき変数である。堀源一郎の正準摂動論では、$H_0(= H_0^*)$ のみならず新しいハミルトニアン H^* 全体がこの t^* を含まないように母関数 $S(q^*, p^*)$ を決定するという方針で作業を進める。これは私達の要請であり、願望である。と言うことで、(411) などに現れる平均化 $\langle\rangle$ は t^* で行う。

さて (410) に戻ることにすると、Poisson 括弧の定義より

$$\begin{aligned}
\{H_0(q^*, p^*), S_i(q^*, p^*)\}_{(q^*, p^*)} &= \frac{\partial H_0(q^*, p^*)}{\partial q^*}\frac{\partial S_i(q^*, p^*)}{\partial p^*} - \frac{\partial H_0(q^*, p^*)}{\partial p^*}\frac{\partial S_i(q^*, p^*)}{\partial q^*} \\
&\quad \text{(412) を使って } t^* \text{を導入} \\
&= -\left(\frac{\partial S_i(q^*, p^*)}{\partial p^*}\frac{dp^*}{dt^*} + \frac{\partial S_i(q^*, p^*)}{\partial q^*}\frac{dq^*}{dt^*}\right) \\
&\quad \text{全微分の定義より} \\
&= -\frac{dS_i(q^*, p^*)}{dt^*},
\end{aligned} \tag{413}$$

となることがわかる。これはどの S_i でも成り立つから、(410) は結局以下のようになる。

$$H_1^*(q^*, p^*) = -\frac{dS_1(q^*, p^*)}{dt^*} + H_1(q^*, p^*). \tag{414}$$

要請「H_1^* が t^* を含まないように平均化する」より、(411) と同様に

$$H_1^*(q^*, p^*) = \langle H_1(q^*, p^*)\rangle_{t^*}, \tag{415}$$

で、周期成分を引き受ける母関数 S_1 については

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1(q^*, p^*)}{dt^*} &= H_1(q^*, p^*) - H_1^*(q^*, p^*) \\
&= H_1(q^*, p^*) - \langle H_1^*(q^*, p^*)\rangle_{t^*},
\end{aligned} \tag{416}$$

$$\therefore \ S_1(q^*, p^*) = \int \left(H_1(q^*, p^*) - \langle H_1^*(q^*, p^*)\rangle_{t^*}\right) dt^*. \tag{417}$$

$O(\varepsilon^2)$ についても同様にする。ε^2 項の比較より

$$H_2^*(q^*, p^*) = \{H_0, S_2\} + \{H_1, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_0, S_1\}, S_1\} + H_2, \tag{418}$$

である。(413) で $i = 2$ とすれば

$$\{H_0(q^*, p^*), S_2(q^*, p^*)\} = -\frac{dS_2(q^*, p^*)}{dt^*}, \tag{419}$$

なので、私達が要請する H_2^* の形は結局

$$H_2^*(q^*, p^*) = \left\langle -\frac{dS_2(q^*, p^*)}{dt^*} + \{H_1, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_0, S_1\}, S_1\} + H_2 \right\rangle_{t^*}, \tag{420}$$

となる。便宜のために

$$F_2 \equiv \{H_1, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_0, S_1\}, S_1\} + H_2, \tag{421}$$

などと置けば、二次の永年項部分は

$$H_2^*(q^*,p^*) = \langle F_2 \rangle_{t^*}, \tag{422}$$

周期成分については

$$S_2(q^*,p^*) = \int (F_2 - \langle F_2 \rangle_{t^*})\, dt^*, \tag{423}$$

となる。より高次の項についても同様である。

新しい変数 q^*, p^* で記述されるハミルトニアンと母関数の表現が求まれば、あとは Lie の展開定理の定義式とも言える (402) まで戻って新旧変数の関係を書き下せば良い。(402) に於ける $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を q あるいは p、$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ を q^* あるいは p^* として

$$\begin{aligned} q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(q^*) = e^{\varepsilon D_s} q^* \\ &= q^* + \varepsilon \{q^*, S(q^*,p^*)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{q^*, S(q^*,p^*)\}, S(q^*,p^*)\} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{424}$$

$$\begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(p^*) = e^{\varepsilon D_s} p^* \\ &= p^* + \varepsilon \{p^*, S(q^*,p^*)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{p^*, S(q^*,p^*)\}, S(q^*,p^*)\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{425}$$

新旧変数の関係式 (424)(425) に於いては右辺がすべて新変数のみで構成されているので、旧変数についてあらためて式を解き直す必要がない。これは高次の摂動解を得る上で極めて重要な利点であり、堀源一郎型の摂動論の最大の長所と言える。

なお、一般の多自由度系では $S_1, S_2, \ldots$ は t^* の類の多重周期関数になっている。要するに短周期成分が複数種類あるということだが、それらすべてを一度の正準変換 $(q,p) \to (q^*,p^*)$ で消去することは出来ない。この場合には、複数回の正準変換 $(q,p) \to (q^*,p^*) \to (q^{**},p^{**}) \to (q^{***},p^{***}) \to \cdots$ を繰り返して行く必要がある。

以上で一般論の記載が終わったので、問題にある非線型振り子の求解を実演してみる。与えられたハミルトニアンを (328)(343) から以下のように置く。

$$\begin{aligned} K(\theta,J) &= K(J) + \varepsilon K_1(\theta,J) + \varepsilon^2 K_2(\theta,J) + \ldots \\ &= \omega_0 J - \frac{\varepsilon}{6} J_2 \sin^4\theta + \frac{\varepsilon^2}{90} \frac{J^3}{\omega_0} \sin^6\theta + \cdots . \end{aligned} \tag{426}$$

以下では適当な正準変換により $(\theta,J) \to (\theta^*,J^*)$ という変換を行う。そのための母関数 S は (404) と同様にして以下となる。S_i の添字番号と ε の次数がひとつずれていることに注意する。

$$S(\theta^*,J^*) = S_1(\theta^*,J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*,J^*) + \varepsilon^2 S_3(\theta^*,J^*) + \varepsilon^3 S_4(\theta^*,J^*) + \ldots . \tag{427}$$

(405) と同様に、ハミルトニアン $K(\theta,J)$ に Lie の展開定理を適用する。

$$K(\theta,J) = K(\theta^*,J^*) + \varepsilon \{K(\theta^*,J^*), S(\theta^*,J^*)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{K(\theta^*,J^*), S(\theta^*,J^*)\}, S(\theta^*,J^*)\} + \ldots . \tag{428}$$

(406) と同様に、(428) 内のハミルトニアン $K(\theta^*, J^*)$ および母関数 $S(\theta^*, J^*)$ に、それぞれの ε での展開結果 (426)(427) を代入する。以下の右辺はすべて (θ^*, J^*) の関数になっていることを常に頭に置いておく。

$$\begin{aligned}
K(\theta, J) &= K_0(\theta^*, J^*) + \varepsilon K_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon^2 K_2(\theta^*, J^*) + \varepsilon^3 K_3(\theta^*, J^*) + \ldots \\
&\quad + \varepsilon \left\{ K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots \right\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \left\{ K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots \right\}, S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots \right\} + \ldots \\
&= K_0(\theta^*, J^*) + \varepsilon K_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon^2 K_2(\theta^*, J^*) \\
&\quad + \varepsilon \{K_0, S_1\} + \varepsilon^2 (\{K_0, S_2\} + \{K_1, S_1\}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{K_0, S_1\}, S_1\} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{429}$$

(407) と同様に、正準変換後のハミルトニアン $K^*(\theta^*, J^*)$ も ε の冪乗で展開されるとする。

$$K^*(\theta^*, J^*) = K_0^*(\theta^*, J^*) + \varepsilon K_1^*(\theta^*, J^*) + \varepsilon^2 K_2^*(\theta^*, J^*) + \varepsilon^3 K_3^*(\theta^*, J^*) + \ldots. \tag{430}$$

ここではハミルトニアン K が時刻 t を陽に含まないので、

$$K^*(\theta^*, J^*) = K(\theta, J), \tag{431}$$

となる。(431) の両辺に (429) と (430) を代入し、ε に関する同次項を比較する。$O(\varepsilon^0)$ については

$$K_0^*(\theta^*, J^*) = K_0(\theta^*, J^*) = \omega_0 J^*, \tag{432}$$

$O(\varepsilon^1)$ については

$$K_1^*(\theta^*, J^*) = \{K_0(\theta^*, J^*), S_1(\theta^*, J^*)\} + H_1(\theta^*, J^*), \tag{433}$$

となる。ここで一般論記載の際に述べたように無摂動系ハミルトニアン $K_0(\theta^*, J^*)$ が満たすべき正準方程式を考える。それは

$$\frac{d\theta^*}{dt^*} = \frac{\partial K_0(\theta^*, J^*)}{\partial J^*}, \quad \frac{dJ^*}{dt^*} = -\frac{\partial K_0(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*}, \tag{434}$$

であり、$K_0(\theta^*, J^*) = \omega_0 J^*$ なので結局

$$J^* = \text{constant}, \quad \theta^* = \omega_0 t^* + \text{constant}, \tag{435}$$

となる。また、K_0 と S_i の Poisson 括弧を考えると

$$\begin{aligned}
\{H_0(\theta^*, J^*), S_i(\theta^*, J^*)\}_{(\theta^*, J^*)} &= \frac{\partial K_0(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} \frac{\partial S_i(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} - \frac{\partial K_0(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} \frac{\partial S_i(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} \\
&\quad \text{(434) を使って } t^* \text{ を導入} \\
&= -\left(\frac{\partial S_i(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} \frac{dJ^*}{dt^*} + \frac{\partial S_i(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} \frac{d\theta^*}{dt^*} \right) \\
&\quad \text{全微分の定義より} \\
&= -\frac{dS_i(\theta^*, J^*)}{dt^*}.
\end{aligned} \tag{436}$$

ここで K_0 の周期 T とは何かを考えると、(435) を見るまでもなく θ^* の周期に等しく、$T=2\pi/\omega_0$ である。また (435) の第二式より

$$\frac{dt^*}{d\theta}=\frac{1}{\omega_0}, \tag{437}$$

である。この事実を踏まえて要請「K_1^* が t^* を含まないように平均化する」を行うと、(415) と同様にして以下のようになる。

$$\begin{aligned} K_1^*(J^*) &= \langle K_1(\theta^*,J^*)\rangle_{t^*} \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T K_1(\theta^*,J^*)dt^* \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(-\frac{J^{*2}}{6}\sin^4\theta^*\right)dt^* \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{J^{*2}}{48}\left(3-4\cos 2\theta^*+\cos 4\theta^*\right)\right]\frac{dt^*}{d\theta^*}d\theta^* \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{J^{*2}}{48}\cdot 3\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{J^{*2}}{16}. \end{aligned} \tag{438}$$

周期成分を引き受ける母関数 S_1 については (416) と同様にして

$$\begin{aligned} S_1(\theta^*,J^*) &= \int\left(K_1(\theta^*,J^*)-K_1^*(\theta^*,J^*)\right)dt^* \\ &= \int\left(K_1(\theta^*,J^*)-K_1^*(\theta^*,J^*)\right)\frac{dt^*}{d\theta^*}d\theta^* \\ &= \int\frac{J^{*2}}{12}\left(\cos 2\theta^*-\frac{1}{4}\cos 4\theta^*\right)\frac{d\theta^*}{\omega_0} \\ &= \frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right). \end{aligned} \tag{439}$$

$O(\varepsilon^2)$ についても同様に計算できる。(418)(419)(420) より永年成分については

$$K_2^*(q^*,p^*)=\left\langle\{K_1,S_1\}+\frac{1}{2}\{\{K_0,S_1\},S_1\}+K_2\right\rangle_{t^*}, \tag{440}$$

である。(440) に必要な量を順次計算して行く。(439) より

$$\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}=\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^*-\frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right), \tag{441}$$

$$\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*}=\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right), \tag{442}$$

$$\frac{\partial^2 S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^{*2}}=\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(-4\sin 2\theta^*+2\sin 4\theta^*\right), \tag{443}$$

$$\frac{\partial^2 S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*\partial\theta^*}=\frac{J^*}{12\omega_0}\left(2\cos 2\theta^*-\frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right), \tag{444}$$

$$\frac{\partial^2 S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^{*2}}=\frac{1}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right), \tag{445}$$

および (361)(362)(363) などより

$$\frac{\partial K_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*} = \frac{J^{*2}}{12}\left(-2\sin 2\theta^* + \sin 4\theta^*\right), \tag{446}$$

$$\frac{\partial K_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*} = -\frac{J^*}{24}\left(3 - 4\cos 2\theta^* + \cos 4\theta^*\right). \tag{447}$$

(441)(442)(446)(447) らを用いて Poisson 括弧を計算する。

$$\begin{aligned}\{K_1(\theta^*,J^*),S_1(\theta^*,J^*)\} &= \frac{\partial K_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*} - \frac{\partial K_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}\\ &= \frac{J^{*2}}{12}\left(-2\sin 2\theta^* + \sin 4\theta^*\right)\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^* - \frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)\\ &\quad + \frac{J^*}{24}\left(3 - 4\cos 2\theta^* + \cos 4\theta^*\right)\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)\\ &= \frac{J^{*3}}{1152\omega_0}\left(-17 + 21\cos 2\theta^* - 3\cos 4\theta^* - \cos 6\theta^*\right).\end{aligned} \tag{448}$$

(448) には $\sin 8\theta^*$ の項が存在しないが、これを産出し得る項を二行目から拾い集めてみると

$$\begin{aligned}&\frac{J^{*2}}{48}\cdot 4\sin 4\theta^*\cdot\frac{J^*}{12\omega_0}\left(-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right) + \frac{J^{*2}}{24}\cos 4\theta^*\cdot\left(-\frac{J^{*2}}{48\omega_0}\right)\cos 4\theta^*\\ &\qquad = \frac{J^{*3}}{1152\omega_0}\sin 4\theta^*\sin 4\theta^* - \frac{J^{*3}}{1152\omega_0}\cos 4\theta^*\cos 4\theta^*\\ &\qquad = -\frac{J^{*3}}{1152\omega_0}\sin(4\theta^* - 4\theta^*)\\ &\qquad = 0,\end{aligned} \tag{449}$$

となり、$\sin 8\theta^*$ の項が消えてしまうことがわかる。

次の Poisson 括弧 $\{K_0(\theta^*,J^*),S_1(\theta^*,J^*)\}$ だが、K_0 の定義 (361) より

$$\frac{\partial K_0(J^*)}{\partial\theta^*} = 0, \quad \frac{\partial K_0(J^*)}{\partial J^*} = \omega_0, \tag{450}$$

なので、

$$\begin{aligned}\{K_0(J^*),S_1(\theta^*,J^*)\} &= \frac{\partial K_0(J^*)}{\partial\theta^*}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*} - \frac{\partial K_0(J^*)}{\partial J^*}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}\\ &= -\omega_0\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}.\end{aligned} \tag{451}$$

(451)(443)(444) より以下を得る。

$$\begin{aligned}\{\{K_0(J^*),S_1(\theta^*,J^*)\},S_1(\theta^*,J^*)\} &= \frac{\partial}{\partial\theta^*}\left(-\omega_0\frac{\partial S_1}{\partial\theta^*}\right)\frac{\partial S_1}{\partial J^*} - \frac{\partial}{\partial J^*}\left(-\omega_0\frac{\partial S_1}{\partial\theta^*}\right)\frac{\partial S_1}{\partial\theta^*}\\ &= -\omega_0\frac{\partial^2 S_1}{\partial\theta^{*2}}\frac{\partial S_1}{\partial J^*} + \omega_0\frac{\partial^2 S_1}{\partial J^*\partial\theta^*}\frac{\partial S_1}{\partial\theta^*}\\ &= -\omega_0\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(-4\sin 2\theta^* + 2\sin 4\theta^*\right)\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^* - \frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)\\ &\quad + \omega_0\frac{J^*}{12\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)\\ &= \frac{J^{*3}}{1152\omega_0}\left(17 - 9\cos 2\theta^* + \cos 6\theta^*\right).\end{aligned} \tag{452}$$

(452) に於いては $\cos 8\theta^*$ の項のみならず $\cos 4\theta^*$ の項も上手い具合に消える。以上の結果を用いて (440) の $\langle\rangle$ の中味を計算すると

$$
\begin{aligned}
\{K_1, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{K_0, S_1\}, S_1\} + K_2 = &\frac{J^{*3}}{1152\omega_0}(-17 + 21\cos 2\theta^* - 3\cos 4\theta^* - \cos 6\theta^*) \\
&+\frac{1}{2}\cdot\frac{J^3}{1152\omega_0}(17 - 9\cos 2\theta^* + \cos 6\theta^*) \\
&+\frac{J^{*3}}{2880\omega_0}(10 - 15\cos 2\theta^* + 6\cos 4\theta^* - \cos 6\theta^*) \\
&= \frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(-15 + 35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*)\,. \qquad (453)
\end{aligned}
$$

(453) の結果を用いれば二次のハミルトニアン K_2^* は

$$
\begin{aligned}
K_2^*(J^*) &= \left\langle \{K_1, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{K_0, S_1\}, S_1\} + K_2 \right\rangle_{t^*} \\
&= \left\langle \frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(-15 + 35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*) \right\rangle_{t^*} \\
&= -\frac{J^{*3}}{256\omega_0}. \qquad (454)
\end{aligned}
$$

(451)(452)(454) を (423) に適用すれば、母関数 S_2 は

$$
\begin{aligned}
S_2(\theta^*, J^*) =&\int\left(\{K_1, S_1\} + \frac{\{\{K_0, S_1\}, S_1\}}{2} + K_2 - \left\langle \{K_1, S_1\} + \frac{\{\{K_0, S_1\}, S_1\}}{2} + K_2 \right\rangle_{t^*}\right) d\theta^* \\
&= \int\Bigg[\frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(-15 + 35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*) \\
&\qquad - \left\langle \frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(-15 + 35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*) \right\rangle_{t^*}\Bigg] dt^*, \\
&= \int \frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*)\, dt^*, \\
&= \int \frac{J^{*3}}{3840\omega_0}(35\cos 2\theta^* - 2\cos 4\theta^* - 3\cos 6\theta^*)\, \frac{d\theta^*}{dt^*} dt^*, \\
&= \frac{J^{*3}}{7680\omega_0^2}(35\sin 2\theta^* - \sin 4\theta^* - \sin 6\theta^*)\,. \qquad (455)
\end{aligned}
$$

と言うことで新しい系でのハミルトニアンと正準周波数を書き下すと、(432)(438)(454) より

$$
K^*(J^*) = \omega_0 J^* - \varepsilon\frac{J^{*2}}{16} - \varepsilon^2\frac{J^{*3}}{256\omega_0} + O(\varepsilon^3), \qquad (456)
$$

$$
\omega(J^*) \equiv \frac{\partial K(J^*)}{\partial J^*} = \omega_0 - \varepsilon\frac{J^*}{8} - \varepsilon^2\frac{3J^{*2}}{256\omega_0} + O(\varepsilon^3). \qquad (457)
$$

となる。これは von Zeipel 法により得られる結果の (380)(381) と全く等しい。正準変換の母関数 $S(\theta^*, J^*)$ は (427)(439)(455) により

$$
\begin{aligned}
S(\theta^*, J^*) &= S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*) + \varepsilon^2 S_3(\theta^*, J^*) + \varepsilon^3 S_4(\theta^*, J^*) + \dots \qquad (458) \\
&= \frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(\sin 2\theta^* - \frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right) + \varepsilon\frac{J^{*3}}{7680\omega_0^2}(35\sin 2\theta^* - \sin 4\theta^* - \sin 6\theta^*) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

この系での正準方程式は以下のようになる。

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{\partial K^*(J^*)}{\partial J^*}, \quad \frac{dJ^*}{dt} = -\frac{\partial K^*(J^*)}{\partial \theta^*}. \tag{459}$$

上記 (459) の第二式の右辺には θ^* が含まれていないので、明らかに 0 になる。即ち J^* は時間変化しない。J^* が時間変化しないように正準変換を行ったのだから、これは当然である。第一式の右辺は J^* のみの関数 $\omega(J^*)$ で、これは正準振動数である。J^* が定数であることから、$\omega(J^*)$ も定数となる。ということで結局、(459) から以下が導かれる。

$$\theta^* = \omega(J^*)t + \text{constant}, \quad J^* = \text{constant}. \tag{460}$$

新旧変数の関係は (424)(425) あるいは Lie の展開定理 (402) まで戻り、$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の代わりに θ あるいは J, また $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ の代わりに θ^* あるいは J^* と置けば良い。

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n \theta^* = e^{\varepsilon D_s} \theta^* \\ &= \theta^* + \varepsilon \{\theta^*, S(\theta^*, J^*)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{\theta^*, S(\theta^*, J^*)\}, S(\theta^*, J^*)\} + \cdots. \end{aligned} \tag{461}$$

(458) の母関数 $S(\theta^*, J^*)$ を用いて (461) に現れる Poisson 括弧を計算する。まず

$$\frac{\partial S_2(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} = \frac{{J^*}^3}{7680\omega_0^2} (70 \cos 2\theta^* - 4 \cos 4\theta^* - 6 \cos 6\theta^*), \tag{462}$$

$$\frac{\partial S_2(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} = \frac{{J^*}^2}{7680\omega_0^2} (105 \sin 2\theta^* - 3 \sin 4\theta^* - 3 \sin 6\theta^*), \tag{463}$$

を計算しておき、(441)(442)(443) (444)(445) などを使えば

$$\begin{aligned} \{\theta^*, S\} &= \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial \theta^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*} \\ &\quad \partial\theta^*/\partial\theta^* = 1,\ \ \partial\theta^*/\partial J^* = 0 \text{ より} \\ &= \frac{\partial S}{\partial J^*} \\ &= \frac{\partial}{\partial J^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\partial S_1(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} + \varepsilon \frac{\partial S_2(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^* - \frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right) + \varepsilon \frac{{J^*}^2}{7680\omega_0^2}(105 \sin 2\theta^* - 3\sin 4\theta^* - 3 \sin 6\theta^*) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{464}$$

$$\begin{aligned} \{\{\theta^*, S\}, S\} &= \frac{\partial}{\partial \theta^*}\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial \theta^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*}\right)\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial}{\partial J^*}\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial \theta^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*}\right)\frac{\partial S}{\partial \theta^*} \\ &\quad \partial\theta^*/\partial\theta^* = 1,\ \ \partial\theta^*/\partial J^* = 0 \text{ より} \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial J^* \partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial^2 S}{\partial {J^*}^2}\frac{\partial S}{\partial \theta^*} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial J^* \partial \theta^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right)\frac{\partial}{\partial J^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2}{\partial J^{*2}}\left(S_1(\theta^*,J^*)+\varepsilon S_2(\theta^*,J^*)\right)\frac{\partial}{\partial\theta^*}\left(S_1(\theta^*,J^*)+\varepsilon S_2(\theta^*,J^*)\right)+O(\varepsilon^2)\\
&=\frac{\partial^2 S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*\partial\theta^*}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^*}-\frac{\partial^2 S_1(\theta^*,J^*)}{\partial J^{*2}}\frac{\partial S_1(\theta^*,J^*)}{\partial\theta^*}+O(\varepsilon),\\
&=\frac{J^*}{12\omega_0}\left(2\cos 2\theta^*-\frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)\\
&\quad-\frac{1}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^*-\frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)+O(\varepsilon)\\
&=\frac{J^{*2}}{9216\omega_0^2}\left(4\sin 2\theta^*+32\sin 4\theta^*-12\sin 6\theta^*+\sin 8\theta^*\right)+O(\varepsilon). \qquad (465)
\end{aligned}
$$

ここで初めて $\sin 8\theta^*$ の項が現れる。とにかく (465) と (465) を (461) に代入すれば最終的に θ を θ^*, J^* の関数として表現することができ、

$$
\begin{aligned}
\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_s^n\theta^*\\
&= \theta^*+\varepsilon\left\{\theta^*, S_1+\varepsilon S_2+\ldots\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{\theta^*, S_1+\varepsilon S_2+\ldots\right\}, S_1+\varepsilon S_2+\ldots\right\}+\cdots\\
&= \theta^*+\varepsilon\left[\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)+\varepsilon\frac{J^{*2}}{7680\omega_0^2}\left(105\sin 2\theta^*-3\sin 4\theta^*-3\sin 6\theta^*\right)\right]\\
&\quad+\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{J^{*2}}{9216\omega_0^2}\left(4\sin 2\theta^*+32\sin 4\theta^*-12\sin 6\theta^*+\sin 8\theta^*\right)+O(\varepsilon^3)\\
&= \theta^*+\varepsilon\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^*-\frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right)\\
&\quad+\varepsilon^2\frac{J^{*2}}{92160\omega_0^2}\left(1280\sin 2\theta^*+124\sin 4\theta^*-96\sin 6\theta^*+5\sin 8\theta^*\right)+O(\varepsilon^3). \qquad (466)
\end{aligned}
$$

この (466) が最終的な θ の解表式である。これは von Zeipel の方法による解 (396) と完全に一致している。θ^*, J^* は (460) のように時刻 t の関数として陽に判明しているから、あとはこれを代入するだけで良い。J, J^* についても同様である。

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_s^n J^*=e^{\varepsilon D_s}J^*\\
&= J^*+\varepsilon\left\{J^*, S(\theta^*,J^*)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{J^*, S(\theta^*,J^*)\right\}, S(\theta^*,J^*)\right\}+\cdots. \qquad (467)
\end{aligned}
$$

(458) の母関数 $S(\theta^*, J^*)$ を用いて (467) に現れる Poisson 括弧を計算する。θ^* の場合と同様に (441)(442)(443) (444)(445) などを使えば

$$
\begin{aligned}
&\{J^*, S\}=\frac{\partial J^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*}-\frac{\partial J^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial\theta^*}\\
&\quad \partial J^*/\partial\theta^*=0,\ \ \partial J^*/\partial J^*=1 \text{ より}\\
&\quad =-\frac{\partial S}{\partial\theta^*}\\
&\quad =-\frac{\partial}{\partial\theta^*}\left(S_1(\theta^*,J^*)+\varepsilon S_2(\theta^*,J^*)\right)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\partial S_1(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} - \varepsilon \frac{\partial S_2(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} + O(\varepsilon^2) \\
&= -\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right) - \varepsilon \frac{J^{*3}}{7680\omega_0^2}\left(70\cos 2\theta^* - 4\cos 4\theta^* - 6\cos 6\theta^*\right) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{468}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\{J^*, S\}, S\} &= \frac{\partial}{\partial \theta^*}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial J^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*}\right)\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial}{\partial J^*}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial J^*} - \frac{\partial J^*}{\partial J^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*}\right)\frac{\partial S}{\partial \theta^*} \\
& \partial J^*/\partial \theta^* = 0,\ \ \partial J^*/\partial J^* = 1 \text{ より} \\
&= -\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^{*2}}\frac{\partial S}{\partial J^*} + \frac{\partial^2 S}{\partial J^* \partial \theta^*}\frac{\partial S}{\partial \theta^*} \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right)\frac{\partial}{\partial J^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial J^* \partial \theta^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right)\frac{\partial}{\partial \theta^*}\left(S_1(\theta^*, J^*) + \varepsilon S_2(\theta^*, J^*)\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= -\frac{\partial^2 S_1(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^{*2}}\frac{\partial S_1(\theta^*, J^*)}{\partial J^*} + \frac{\partial^2 S_1(\theta^*, J^*)}{\partial J^* \partial \theta^*}\frac{\partial S_1(\theta^*, J^*)}{\partial \theta^*} + O(\varepsilon), \\
&= -\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(-4\sin 2\theta^* + 2\sin 4\theta^*\right)\frac{J^*}{12\omega_0}\left(\sin 2\theta^* - \frac{1}{8}\sin 4\theta^*\right) \\
&\quad + \frac{J^*}{12\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right)\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right) + O(\varepsilon) \\
&= \frac{J^{*3}}{1152\omega_0^2}\left(17 - 9\cos 2\theta^* + \cos 6\theta^*\right) + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{469}
$$

(469) と (469) を (467) に代入すれば最終的に J を θ^*, J^* の関数として表現でき、

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n J^* \\
&= J^* + \varepsilon\left\{J^*, S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots\right\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left\{J^*, S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots\right\}, S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots\right\} + \cdots \\
&= J^* + \varepsilon\left[-\frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right) - \varepsilon \frac{J^{*3}}{7680\omega_0^2}\left(70\cos 2\theta^* - 4\cos 4\theta^* - 6\cos 6\theta^*\right)\right] \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{J^{*3}}{2304\omega_0^2}\left(17 - 9\cos 2\theta^* + \cos 6\theta^*\right) + O(\varepsilon) \\
&= J^* - \varepsilon \frac{J^{*2}}{24\omega_0}\left(2\cos 2\theta^* - \frac{1}{2}\cos 4\theta^*\right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{J^{*3}}{11520\omega_0^2}\left(85 - 150\cos 2\theta^* + 6\cos 4\theta^* + 14\cos 6\theta^*\right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{470}
$$

この (470) が最終的な J の解表式である。これは von Zeipel の方法による解 (400) と完全に一致している。θ^*, J^* は (460) のように時刻 t の関数として陽に判明しているから、あとはこれを代入するだけで良い。

繰り返しになるが、堀源一郎の方法による摂動解 (466)(470) は左辺が旧変数、右辺が新変数と最初から分離された形になっている。これは von Zeipel の方法による摂動解 (396)(400) との最大の違いである。von Zeipel の方法で高次の摂動解を求めるには (386) と (387) を θ_0, J_0 についての連立方程式と看做して $\theta_0 = \theta_0(\theta, J)$, $J_0 = J_0(\theta, J)$ という形に解き直す必要があった。ここで

扱った例題のような低自由度系の場合には、二次程度の近似までなら比較的容易に摂動解を求めることが出来た。しかし自由度の高い系や高次の摂動解の場合には一般には大変な計算量になる。堀源一郎の方法では Poisson 括弧の偏微分係数を数多く計算しなければならないので一見面倒であるが、計算は原理的に単純かつ系統的であり、計算機上の数式処理アプリケーションへの実装も von Zeipel 法に比べると容易である。

この文書には平成 15 年 3 月 4 日までの修正を取り込んであります。