地球惑星科学特別講義V 補足資料

平成14年2月13日

伊藤孝士 (文部科学省 国立天文台 データ解析センター)

この資料は、平成14年1月9日から1月11日にかけて東京工業大学にて実施された集中講義『地球惑星科学特別講義V—微小摂動系での天体力学概論』に於いて説明不足だった事項、或るいは十分納得する答を与えられなかった質問に対して再度の補足的回答を与えるためのもので、以下の内容から構成されています。(1) いわゆるPoisson方程式の導出について、(2) 摂動関数の展開に現れた $O(\gamma^2)$ の項について、(3) 微小正準変換の曖昧でない証明について、(4) 『積分可能』の定義について、(5) 第一積分と階数の低下、(6) 一次元振動子の (q,p) とPoincaré変換、(7) 一次元非線型振動子ハミルトニアンの展開について、(8) Lieの展開定理の略証、(9) t^* の意味を再び考える、(10) 平均化による等エネルギー曲線の描画、(11) 参考文献の追加。この資料を読んで更に疑問がある場合には電子メールで講師 (tito@cc.nao.ac.jp) に問い合わせて貰えれば、出来る限りの範囲で回答します。また、この資料自体に誤記があればそれも併せてお知らせください。

1. いわゆるPoisson方程式の導出について

(山田耕さんからの質問より) 摂動がある場合でも無い場合でも、積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ が同じ微分方程式を満たすということの意味がはっきりしない。摂動系に現れる $\boldsymbol{\sigma}$ と無摂動系に現れる $\boldsymbol{\sigma}$ を同じように扱うのはどういうわけか？

摂動が与えられた場合の微分方程式の積分定数の時間変化を与えるPoisson方程式の導出に関して講義で行った方法は、解 $\boldsymbol{x}$ に含まれる積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ について解いた形、即ち $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x};t)$ から出発するものであった。無摂動系の場合には $\boldsymbol{\sigma}$ は文字通りの定数、つまり時間に対して一定であるが、摂動が加わった系では $\boldsymbol{\sigma}$ は定数ではなく、時間変化する。但し、たとえ時間変化したとしても各時刻に於ける $\boldsymbol{\sigma}$ は上記の関数形で定義できるわけで、その意味では「摂動がある場合でも無い場合でも、積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ が同じ方程式を満たす」という命題は事実である。けれども確かにこの説明は慣れないとわかりにくいものなので、以下では $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x};t)$ の逆、即ち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\sigma};t)$ から出発した説明を試みる。本質的には何ら違いはないのだが、こちらの方がわかりやすいという人も居るであろう。世にある教科書での説明は半々くらいのように見えるが、いずれにしてもここで述べている方法は線形微分方程式の一般的解法として知られる定数変化法の典型である。

以下の微分方程式系は解が知られている (積分可能) とする。即ち無摂動系を記述する系である。但し変数 $\boldsymbol{x}$ と関数 $\boldsymbol{f}$ は共に n 次元であるとする。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};t) \tag{1}$$

無摂動系 (1) の解は、n 個の積分定数 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\sigma};t) \tag{2}$$

と表わせる。

系 (1) の右辺に摂動 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};t)$ が加わったとしよう。即ち微分方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};t)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};t) \tag{3}$$

となる。この系の解も式 (2) のように $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\sigma}; t)$ と表されるが、異なるのは積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ が時間に対して定数ではなく、摂動が加えられたために時間変化を持ち始めることである。要するに、摂動系 (3) でも無摂動系 (1) でも解の表式 (2) の関数形は共通であり、異なるのは摂動系に於いて積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ が時間依存し出すという事実[1] である。

無摂動系の場合、$\boldsymbol{x}$ は微分方程式 (1) を満たす。即ち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_j} \frac{d\sigma_j}{dt} = \boldsymbol{f}. \tag{4}$$

無摂動系であれば $\boldsymbol{\sigma}$ は定数なので、結局のところ以下のようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{f}. \tag{5}$$

無摂動系での積分定数 $\boldsymbol{\sigma}$ が時間変化するという状況の下、$\boldsymbol{x}$ は摂動系の微分方程式 (3) をも満たす。即ち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_j} \frac{d\sigma_j}{dt} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}. \tag{6}$$

今度は $d\sigma_j/dt$ の項が 0 になることはないが、式 (5) の結果を用いれば式 (6) は結局

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_j} \frac{d\sigma_j}{dt} = \boldsymbol{g} \tag{7}$$

となる。これを行列的に書けば

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{g} \tag{8}$$

となり、偏微分係数行列 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ の逆行列が存在すると仮定すれば (大概の問題には存在する)、結局

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{g} \tag{9}$$

となり、講義で出て来た形の Poisson 方程式を得る。

2. 摂動関数の展開に現れた $O(\gamma^2)$ の項について

(松下友紀さんからの質問より)　太陽の摂動を受けた月の摂動関数の最低次 R_2 の展開式が以下のように記されていた。

$$\begin{aligned} R_2 &= m^2 n^2 a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(\cos\alpha) \\ &= m^2 n^2 a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2\psi - 2\psi_1)\right) + O(\gamma^2). \end{aligned} \tag{10}$$

ここでは $O(\gamma^2)$ 以上の項を省略したものだと思っていたが、最終的な R_2 の展開式には γ^2 を係数に持つ cos の項が現れている。これはどういうことか？

[1] これは事実と言うより、仮定あるいは要請と言った方が良いかもしれない。ここで述べられているような「定数変化法」は、このように積分定数が時間変化するものとして微分方程式を解くという人工的な方便だからである。方便とは言えそれで正しい解が求まるのであるから、まず習うよりは慣れてしまうのが早かろう。

これは単純な書き忘れであった。式 (10) で $O(\gamma^2)$ 部分を省略せずに書くと以下のようになる。

$$R_2 = m^2n^2a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2\psi-2\psi_1)\right.$$
$$\left.-\frac{3\gamma^2}{8}\left(1+\cos(2\psi-2\psi_1)-\cos(2\psi-2\Omega)-\cos(2\psi_1-2\Omega)\right)\right]. \tag{11}$$

式 (11) で係数 $-3\gamma^2/8$ を持つ項が、$(r/a)^2$ および $(a_1/r_1)^3$ の展開式の最低次すなわち $1\times 1=1$ と掛け合わされ、配布資料に記載されている最終的な R_2 の展開式[2] の $O(\gamma^2)$ の項が得られる。

3. 微小正準変換の曖昧でない証明について

(山田耕さんからの質問より)　微小 (接触) 正準変換の説明、即ちハミルトン系の時間発展が正準変換になっていることの証明は、微小量の一次までしか成り立たないような気がする。この証明は厳密なものなのか？

指摘の通り、厳密なものではない。実のところ、ハミルトン系の時間発展が正準変換になっていることの厳密かつわかりやすい証明が記載されている書物には殆どお目に掛からないと言って良い。以下の説明はシンプレクティク行列 J を用いたものであるが、数少ない厳密なものであると言うことができると思うので、参考にしていただきたい。以下では、変数変換 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\to(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ が正準変換であるということと、シンプレクティク行列 J, 変数変換のヤコビ行列 $M\equiv\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})/\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ が $MJM^T=J$ あるいは $M^TJM=J$ という関係を満たすことが同値であるという事実を利用している。このことは講義で説明した[3] 。

$2n\times 2n$ のシンプレクティク行列 J は以下のように定義される。

$$J=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & & 0 & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & & \end{array}\right). \tag{12}$$

但し $\mathbf{0}$ は成分がすべて 0 の行列、$\mathbf{1}$ は単位行列を表す。シンプレクティク行列 J はその成分から明らかなように

$$J^2=-\mathbf{1},\quad \det J=1, \tag{13}$$

$$J^TJ=\mathbf{1},\quad \therefore J^T=-J=J^{-1}, \tag{14}$$

[2]配布資料では誤って R_1 と記載されていた。

[3]証明はしていないが、こちらの証明は各種の教科書に掲載されている。なお講義内でハミルトン形式 minimum としてシンプレクティク行列の話をしたのは以下の説明を試みるための準備であったのだが、時間的な制約のために省いてしまった。

という性質があることも述べた。

さて、$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を $2n$ 個の正準変数セットとする。$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ の任意関数とし、以下の方程式によりパラメータ τ を導入する。関数 S を用いて τ を定義すると言い換えても良い。

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = -\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}. \tag{15}$$

ここで $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ と置くと ($\boldsymbol{z}$ ひとつで $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ を代表させる)、式 (15) は一本に纏まり、以下のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{d\tau} = J\frac{\partial S(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}. \tag{16}$$

方程式 (16) の解は $2n$ 個の積分定数 $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ を含む。ところで、式 (16) のような自励系の解が $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ である時、c を定数として $\boldsymbol{z}(t+c)$ も解であることが一般的に言える。これより、$2n$ 個の積分定数のうちどれかはパラメータ τ に対する付加定数であるということになる。従って、積分定数 c_1 がこの付加定数に相当するとすると、方程式 (16) の解は以下のように書くことができる。

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\tau + c_1, c_2, \ldots, c_{2n}). \tag{17}$$

ここで初期値に相当する量、つまり $\tau = 0$ での $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{z}^{(0)}$ と書くことにする。即ち以下である。

$$\boldsymbol{z}^{(0)} = \boldsymbol{z}(c_1, c_2, \ldots, c_{2n}). \tag{18}$$

式 (18) を c_1 から c_{2n} に関する連立方程式と看做して各 c_j について解き、それを $\boldsymbol{z}$ の式 (17) に代入すると、形式的に以下の結果を得る。

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}; \tau). \tag{19}$$

以下では、上記のようにして得られた変換 $\boldsymbol{z}^{(0)} \to \boldsymbol{z}$ が正準変換になっていることを示す。まず、形式解 (19) を方程式 (16) に代入する。

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}; \tau) = J\frac{\partial S(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}. \tag{20}$$

次に、式 (20) の両辺を $\boldsymbol{z}^{(0)}$ で偏微分する。変数変換 $\boldsymbol{z}^{(0)} \to \boldsymbol{z}$ のヤコビ行列 M

$$M \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial z_1^{(0)}} & \frac{\partial z_2}{\partial z_1^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial z_1^{(0)}} \\ \frac{\partial z_1}{\partial z_2^{(0)}} & \frac{\partial z_2}{\partial z_2^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial z_2^{(0)}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial z_{2n}^{(0)}} & \frac{\partial z_2}{\partial z_{2n}^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial z_{2n}^{(0)}} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

を考えると、式 (20) の左辺を $\boldsymbol{z}^{(0)}$ で偏微分した結果は行列 $dM/d\tau$ となる。

次に右辺だが、偏微分する前の式 (20) の右辺は列ベクトル

$$J \times \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial z_1} \\ \frac{\partial S}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} \tag{22}$$

になっている。ここで出て来るベクトル $\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(\mathbf{0})})}$ をベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)}$ で偏微分して出来上がる $2n\times 2n$ の行列を考える。この行列の (i,j) 成分は以下のようになるはずである。

$$\frac{\partial}{\partial z_j^{(0)}}\left(\frac{\partial S(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}))}{\partial z_i}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial S(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}))}{\partial z_i}\right)\frac{\partial z_k}{\partial z_j^{(0)}}. \tag{23}$$

式 (23) は $\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial S(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}))}{\partial z_i}\right)$ を (i,k) 成分とする行列 (これを S_{zz} と書く) と $\frac{\partial z_k}{\partial z_j^{(0)}}$ を (j,k) 成分とする行列 (これは M そのもの) の積の (i,j) 要素を表している。従って、式 (20) の右辺を $\boldsymbol{z}^{(0)}$ で偏微分した結果は行列 $JS_{zz}M$ となる。ということで結局

$$\frac{d}{d\tau}M=JS_{zz}M \tag{24}$$

となるが、式 (24) の両辺を転置すると

$$\frac{d}{d\tau}M^T=-M^TS_{zz}J \tag{25}$$

となる。これは $J^T=-J$ という事実より明らかである。

ここで唐突だが、行列 M^TJM を τ で微分してみよう。J は定数行列なので

$$\frac{d}{d\tau}\left(M^TJM\right)=\left(\frac{d}{d\tau}M^T\right)JM+M^TJ\left(\frac{d}{d\tau}M\right), \tag{26}$$

となる。この式 (26) の右辺に出て来る $\frac{dM}{d\tau}$ と $\frac{dM^T}{d\tau}$ に、上で得られた結果である (24) と (25) を代入する。シンプレクティク行列 J の性質 (13)(14) より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(M^TJM\right) &= -M^TS_{zz}J\cdot JM+M^TJ\cdot JS_{zz}M\\ &= M^TS_{zz}M-M^TS_{zz}M\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{27}$$

τ による微分が 0 になるのであるから、式 (27) を τ で一回積分すると

$$M^TJM=(\text{定数行列}), \tag{28}$$

となる。式 (28) はヤコビ行列 M の中にパラメータ τ への依存性を含んでいる。定数行列が何であるかを求めるために $\tau=0$ すなわち $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^{(0)}$ と置くと、M の定義から

$$M_{\tau=0}=\mathbf{1}, \tag{29}$$

となるので、式 (28) の定数行列は

$$(\text{定数行列})=\mathbf{1}^TJ\mathbf{1}=J, \tag{30}$$

であることがわかる。故に結局

$$M^TJM=J, \tag{31}$$

となる。M は変数変換 $\boldsymbol{z}^{(0)}\to\boldsymbol{z}$ のヤコビ行列であるから、これとシンプレクティク行列 J の間に式 (31) という関係が成り立つということは、即ち変数変換 $\boldsymbol{z}^{(0)}\to\boldsymbol{z}$ が正準変換であることを意味している。もちろんその逆変換、$\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{z}^{(0)}$ も正準変換となる。

ここまでは $S(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}^{(0)}))$ を $\boldsymbol{z}$ の任意関数、τ を式 (15) で導入されるパラメータとして来た。ここに至って S をハミルトニアン $H(\boldsymbol{z}) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ と置けば、方程式 (15) は正準変数セット $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ とハミルトニアン H が支配する系の正準方程式を表し、τ は時刻変数 t の意味を持つ。となれば、上述した $\boldsymbol{z}^{(0)} \to \boldsymbol{z}$ が正準変換であるとは、ハミルトニアン H が支配する系の時間発展 ($t = 0$ から $t = \tau$ まで) が正準変換であることを示しているに他ならない。上記の説明では τ の大きさに関しては何らの制約も与えておらず、無限小から有限の値までの τ について同等な議論が成立する。

4.　『積分可能』の定義について

(松下友紀さんからの質問より)　与えられた微分方程式が積分可能であることを定義するに際し、不定積分や逆関数を実際に求めるのが困難である場合もあるであろう。その場合にも当該微分方程式は「解ける」と言うのか？

これはひとえに『積分可能』の定義に依存する。講義に於いて『積分可能』あるいは『求積可能』の定義として述べた記述はおよそ以下のようなものであった。

変数 $\boldsymbol{x}$ に関する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{32}$$

が積分可能 (or 求積可能 or 可積分 or 『解ける』) とは、関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ に対して四則演算・微分操作・不定積分操作・逆関数演算・代数方程式 (多項式の他、三角関数なども含む) の求解操作、およびこれらの有限回の反復を施して、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ という形に持って行けることである。

上記の記述には「不定積分操作」や「逆関数演算」が登場しているが、これは飽くまで形式的なものである。例えば講義でも述べた一階の自励系 (時刻を陽に含まない)

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{33}$$

を考える。この微分方程式が常に求積可能とされるのは、

$$\frac{dx}{F(x)} = dt \tag{34}$$

からすぐ

$$\int \frac{dx}{F(x)} = t - t_0 \tag{35}$$

の形に持って行くことができ (不定積分操作)、上式の左辺を $G(x)$ とでも置けば逆関数演算により

$$x = G^{-1}(t - t_0) \tag{36}$$

として最終的な解の形に必ず持って行けるからである。ここで、式 (35) の不定積分や式 (36) の逆関数演算が具体的に実行出来るか出来ないかという事実は「積分可能」の定義に含まれていない。即ち、問題によっては具体的に $x = x(t)$ の形の解を得るのが困難な場合も存在する。この事情は微分方程式の理論一般に於いてそうである。微分方程式の教科書によく載っている次のような一階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{37}$$

の一般解は

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \text{定数}\right] \tag{38}$$

とされているが、式 (38) 内の不定積分 $\int p(x)dx$ が数学公式集に載っているような積分であろうとなかろうと、式 (38) の解をもって微分方程式 (37) は「解けた」と称する。

5. 第一積分と階数の低下

(講義内容への補足) N 階の微分方程式系に対して一個の第一積分があると、系の階数をひとつ下げて $N-1$ にすることができる。

講義後半の正準変換摂動論の根幹は、正準変換を繰り返すことによって第一積分を多く持つような系に物事を持ち込み、系の階数をひとつでも下げることであった。そのために上記の事実は非常に重要である。

N 階の微分方程式系が第一積分

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \text{一定} = a, \tag{39}$$

を持つとする。これから x_N を $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ およびパラメータ a の関数として表すことができるはずなので、これを $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ それぞれに関する微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; a)) \\ &\equiv \tilde{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; a), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{40}$$

という $N-1$ 階の連立微分方程式系が得られる[4]。要するに系の階数が形式的にひとつ低下したのである。更に多くの第一積分が存在する場合、つまり

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= a_1, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= a_2, \\ &\cdots \\ \Phi_{N-2}(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= a_{N-2}, \\ \Phi_{N-1}(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= a_{N-1}, \end{aligned} \tag{41}$$

という第一積分達が得られている場合には、式 (42) から $x_2, x_3, \ldots, x_N$ を変数 x_1 およびパラメータ $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ の関数として以下のように表す。

$$x_i = \psi_i(x_1; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}) \quad (i = 2, 3, \ldots, N) \tag{42}$$

これらをすべて x_1 についての微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) \\ &= \overline{F}_1(x_1; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}) \end{aligned} \tag{43}$$

[4] この $\tilde{F}_i$ やすぐ後にある $\overline{F}_i$ という表記は、単に F_i とは異なる関数形であるということを示しているに過ぎず、それ以上の深い意味を持つものではない

が得られる。微分方程式 (43) は一階の系として閉じているので求積可能であり、これの解

$$x_1 = \psi_1(t - t_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}) \tag{44}$$

を $x_2, x_3, \ldots, x_N$ に関する微分方程式 (42) に代入すれば、それぞれも時間の関数として解けたことになる。すなわち、$N-1$ 個の第一積分の存在によって N 解の系が求積可能となったのである。

6.　一次元振動子の (q,p) と Poincaré 変換

(講義内容への補足)　一次元振り子のハミルトニアン $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}$ から出発し、q, p を時刻 t の関数として求める。また、作用変数 J と角変数 θ との関係もより正確に記す。

これには様々な方法があるが、例えば母関数

$$W(q,Q) = \frac{\omega q^2}{2}\cot Q \tag{45}$$

を用いた正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ を使う方法がある。旧変数 (q,p) と新変数 (Q,P) の関係は

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \omega q \cot Q, \quad P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{\omega q^2}{2\sin^2 Q}, \tag{46}$$

となる。q について解くと

$$q^2 = \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \tan^2 Q = \frac{2P}{\omega}\sin^2 Q \tag{47}$$

となる。従って結局

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\sin Q, \quad p = \sqrt{2\omega P}\cos Q, \tag{48}$$

あるいは

$$\omega P = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}, \quad \tan Q = \frac{\omega q}{p}, \tag{49}$$

となる。式 (45) のような母関数 $W(q,Q)$ を用いた正準変換は Poincaré 変換と呼ばれる。

Poincaré 変換を一次元振り子に適用してみる。ハミルトニアン $H(q,p)(=E)$ を新しい変数 Q, P で書いたものを $K(Q,P)$ とすると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \\ &= \omega P \\ &= K(Q,P) \end{aligned} \tag{50}$$

となる。Q, P, K が構成する正準方程式は

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \tag{51}$$

従って

$$Q = \omega t + \delta, \quad P = \text{定数} = \frac{E}{\omega}, \tag{52}$$

となる。δ は積分定数である。よって (q,p) は式 (48) より

$$q=\sqrt{\frac{2E}{\omega^2}}\sin(\omega t+\delta),\quad p=\sqrt{2E}\cos(\omega t+\delta), \tag{53}$$

となる。

作用変数 J との関係は、その定義より

$$J=\oint pdq \quad = \quad \oint\sqrt{2E-\omega^2q^2}dq. \tag{54}$$

ここで $\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}=\sin\Theta$ と変数変換すると、

$$\frac{dq}{d\Theta}=\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\Theta, \tag{55}$$

である。また、可積分系の有界な運動はすべて周期運動になるので[5]、q に関する一周積分は Θ を 0 から 2π まで回すことに相当する。よって積分 (54) は

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{2E}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2\Theta}\frac{dq}{d\Theta}d\Theta \\ &= \sqrt{2E}\int_0^{2\pi}\cos\Theta\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\Theta d\Theta \\ &= \frac{2E}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\Theta d\Theta \\ &= \frac{2\pi E}{\omega}. \end{aligned} \tag{56}$$

これより直ちに

$$J=2\pi P,\quad \tilde{H}=E=\frac{\omega J}{2\pi}, \tag{57}$$

となる。$\tilde{H}$ は新しいハミルトニアンである。よって角変数 θ が満たす正準運動方程式は

$$\dot{\theta}=\frac{\partial\tilde{H}(J)}{\partial J}=\frac{\omega}{2\pi}, \tag{58}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\omega}{2\pi}t+\frac{\delta}{2\pi}, \tag{59}$$

但し $\delta/2\pi$ は積分定数とする。式 (57)(59) と式 (53) を比較することで、

$$q=\sqrt{\frac{J}{\pi\omega}}\sin 2\pi\theta,\quad p=\sqrt{\frac{\omega J}{\pi}}\cos 2\pi\theta, \tag{60}$$

という (q,p) と (θ,J) の関係式が得られる。

さて作用変数 J の定義には、式 (54) の右辺を 2π で割った形、即ち

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint pdq \tag{61}$$

とする流儀もある。こうすると、θ, J, q, p, および新しいハミルトニアンの関係式は

$$q=\sqrt{\frac{2J}{\omega}}\sin\theta,\quad p=\sqrt{2\omega J}\cos\theta,\quad \tilde{H}=\omega J, \tag{62}$$

という簡潔な形になる。故にこちらの流儀を採用している教科書も多いようである。

[5] このあたりは参考文献として挙げた山内恭彦『一般力学』に詳しい解説が載っている。

7.　一次元非線型振動子ハミルトニアンの展開について

(山田耕さんからの質問より)　von Zeipel 法の例題として出て来た一次元非線型振動子のハミルトニアンについて、$H = \frac{p^2}{2} - b\cos q$ がいつの間にか $H = \omega_0 J_0 - \frac{\varepsilon}{6} J_0^2 \sin^4\theta_0 + \frac{\varepsilon^2}{90}\frac{J_0^3}{\omega_0}\sin^6\theta_0 - \cdots$ と展開されている。これは辻褄の合った展開なのか？

講義の最中にも言ったが、合っていない。時間の関係で途中を省略してしまったために話の筋道が飛んでしまったことをお詫びしたい。ここで例題にした一次元の非線型振動子は、そのハミルトニアンが

$$H = \frac{p^2}{2} - b\cos q \tag{63}$$

と表されるものとする。振幅 q が小さいとして $\cos q$ を展開すると

$$H = \frac{p^2}{2} - b\left(1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots\right) \tag{64}$$

となる。ここから b の意味を各項毎に恣意的に解釈して行く。ハミルトニアンの定数部分 $(-b)$ は話の筋と関係ないので省略する。すると

$$H = \frac{p^2 + bq^2}{2} - b\left(\frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots\right) \tag{65}$$

となる。左辺第一項は無摂動部分のハミルトニアンなので、これを H_0 として書き直す。H_0 内では $b = \omega_0^2$ と置く。

$$H = H_0 - b\left(\frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \cdots\right), \tag{66}$$

$$H_0 = \frac{p^2 + \omega_0^2 q^2}{2}. \tag{67}$$

次に、式 (66) の右辺第二項以降では各項毎に b が ε, ε^2, ε^3, $\cdots$ という意味を持っていると解釈する。すると

$$H = H_0 - \left(\frac{\varepsilon}{4!}q^4 - \frac{\varepsilon^2}{6!}q^6 + \cdots\right), \tag{68}$$

となる。無摂動の調和振動子に於ける q, p と θ_0, J_0, ω_0 の関係式として式 (62) を用いると、ハミルトニアンは以下のようになる。

$$H = \omega_0 J_0 - \frac{\varepsilon}{6} J_0^2 \sin^4\theta_0 + \frac{\varepsilon^2}{90}\frac{J_0^3}{\omega_0}\sin^6\theta_0 - \cdots. \tag{69}$$

講義で説明した例題のハミルトニアンは式 (63) の形から出発していきなり式 (69) まで話が飛んでしまったので、混乱を招いた可能性が高い。

8.　Lie の展開定理の略証

(講義内容の補足)　Hori (1966) の正準摂動論の根幹となっている Lie 級数による展開定理の補足説明。Lie 級数展開による変数変換は本当に正準変換になっているのか？

講義では展開定理による変換が正準変数であることを a priori に与えて話を進めてしまった。以下では Hori (1966) の原論文に準拠して、Lie 級数による変換が正準変換になっていることを示

す。以下の内容は、本質的には本資料第 3 節に記したハミルトン系の時間発展が微小正準変換になっていることの証明と同一である。但し、以下の説明はいかにも騙されたような気がする証明であり、真に数学的な意味で厳密であるかどうかについては疑問を持つ人も多いようである。

$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ を $2n$ 個の正準変数のセットとし、$f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ の任意函数とする。今、演算子 D_S^n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を以下のように定義する。

$$D_S^0 f = f, \quad D_S^1 f = \{f, S\} \quad D_S^n f = D_S^{n-1}(D_S^1 f), \quad (n \geq 2) \tag{70}$$

ここで $\{,\}$ はポアソン括弧を表わす。この時、以下の定理が Lie (1888) によって示されている。

以下の関係式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \tag{71}$$

により定義される $2n$ 個の変数セット $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は、ε を $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ とは独立な微小定数とする時、右辺の級数が収束すれば正準となる。

実際のところ、以下の微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} = -\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \tag{72}$$

によってパラメータ τ を導入し、$\boldsymbol{\xi}(\tau), \boldsymbol{\eta}(\tau)$ を (72) の解とする。ここで f に D_S を作用させてみると

$$\begin{aligned} D_S^1 f &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} - \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial S}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \tau} \right) \quad (\because (72)) \\ &= \frac{df}{d\tau}, \end{aligned} \tag{73}$$

同様にして

$$\begin{aligned} D_S^2 f &= D_S^1 (D_S^1 f) \\ &= D_S^1 \left(\frac{df}{d\tau} \right) \quad (\because (73)) \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(D_S^1 f \right) \\ &= \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \end{aligned} \tag{74}$$

以下同様にして

$$D_S^n f = \frac{d^n f}{d\tau^n}, \tag{75}$$

となる。すると式 (71) は以下のようになる。

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}). \tag{76}$$

式 (76) の右辺の無限級数は、関数 $f(\boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon),\boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon))$ に関する或る点 $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ の周りでのテイラー展開による表現そのものである。即ち

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon),\boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon)), \tag{77}$$

である。ここで、$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ として $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ そのものを考えると、式 (77) は以下のようになる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon), \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon). \tag{78}$$

式 (78) の意味する所は要するに、「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は、パラメータ τ が ε だけ増えた際の $\boldsymbol{\xi}(\tau),\boldsymbol{\eta}(\tau)$ そのものの値を持つ」ということである。もしも $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ が正準変数であり、更に母関数 S をハミルトニアン、パラメータ τ を時刻変数だと思うことにすれば、前述したように $\boldsymbol{\xi}(\tau),\boldsymbol{\eta}(\tau)$ から $\boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon),\boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon)$ への時間発展は正準変換になっている。要するに $\boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon)$ と $\boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon)$ も正準変数のセットとなっている。これより直ちに、もし $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\eta}$ が正準変数であれば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}(\tau+\varepsilon)$ と $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\eta}(\tau+\varepsilon)$ も正準変数であると言える。

このような正準変換によって規定される新変数セット $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と旧変数セット $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ の関係は、式 (71) に $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\xi}$ あるいは $\boldsymbol{\eta}$ を代入することで以下のように得られる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \tag{79}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\xi}}. \tag{80}$$

9. t^* の意味を再び考える

(生駒大洋さんからの質問より) Lie 変換による正準摂動論の平均操作の際に現れるパラメータ t^* の意味が判然としない。t^* の導入と平均操作の関係に関して、より具体的な説明はないのか？

t^* の直感的理解はなかなか難しい。生駒さんから指摘があったように、無摂動ハミルトニアン $H_0(\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)$ が支配する力学系の正準方程式

$$\frac{d\boldsymbol{q}^*}{dt^*} = \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{p}^*}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}^*}{dt^*} = -\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{q}^*}, \tag{81}$$

が t^* の定義だと考えた方がすっきりするであろう。t^* は H_0 が支配する系の時刻に相当するが、H_0 が支配する系と元のハミルトニアン H が支配する系は無関係 (あるいは独立) であるから、t^* は t とは無関係なパラメータであることになる。

H_0 と正準変換の母関数 S (の i 次項) のポアソン括弧を取ると、式 (73) などと同様にして

$$\begin{aligned} \{H_0, S_i\}_{(\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_j^*}\frac{\partial S_i}{\partial p_j^*} - \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*}\frac{\partial S_i}{\partial q_j^*} \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial S_i}{\partial p_j^*}\frac{dp_j^*}{dt^*} + \frac{\partial S_i}{\partial q_j^*}\frac{dq_j^*}{dt^*} \right) \\ &= \frac{dS_i}{dt^*}, \end{aligned} \tag{82}$$

となる。ここで正準変換 $H \to H^*$ の実行方針として「変換された新しいハミルトニアン H^* がパラメータ t^* に依存しない」という条件を課すことにする。この条件は私達が課す要請であり、飽

くまで主観的なものである。但しこの要請を満たすことで正準摂動論の解の性質は望ましいものになる (i.e. 解の表現に永年項が出て来ない)。

変換された新しいハミルトニアン H^* がパラメータ t^* に依存しないとは、即ち以下のことである。

$$\frac{dH^*}{dt^*} = 0. \tag{83}$$

さて、新しいハミルトニアン H^* が満たす正準方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{q}^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^*}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}^*}, \tag{84}$$

であることより、式 (83) の左辺は以下のように変形できることがわかる。

$$\begin{aligned}
\frac{dH^*}{dt^*} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \frac{dq_j^*}{dt^*} + \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*} \frac{dp_j^*}{dt^*} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*} - \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*} \frac{\partial H_0}{\partial q_j^*} \right) \quad (\because (81)) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dp_j^*}{dt} \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*} + \frac{dq_j^*}{dt} \frac{\partial H_0}{\partial q_j^*} \right) \quad (\because (84)) \\
&= -\frac{dH_0}{dt} \\
&= -\frac{dH_0^*}{dt}.
\end{aligned} \tag{85}$$

と言うことで、(83)(85) より

$$\frac{dH_0}{dt} = 0, \quad \therefore H_0 = \text{定数}, \tag{86}$$

となる。即ち t^* による平均操作によって H_0 という新しい第一積分が作り出されたのである。第一積分の存在は系の階数を低下させ、求解に一歩近づくものであることは前節で述べた。従って、正準変換によって得られた新しいハミルトン系 $H^*(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ は、元の系 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ に比べて積分可能な系に近付いているはずである。系の階数が高い場合には、同様な正準変換を $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \to (\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*) \to (\boldsymbol{q}^{**}, \boldsymbol{p}^{**}) \to (\boldsymbol{q}^{***}, \boldsymbol{p}^{***}) \to \cdots$ と繰り返すことにより、原理的にはどんどん積分可能な系に近付くことが可能となる。その場合には、平均化に用いるパラメータも $t^* \to t^{**} \to t^{***} \to \cdots$ と移り変わって行く。もちろん、このパラメータが具体的に何であるかは各々の問題により異なる。

10. 平均化による等エネルギー曲線の描画

(講義内容への補足) 平均化したハミルトニアンによる等エネルギー曲線の描画に関する説明が準備不足のために非常に中途半端であった。特に摂動天体の近点が時間に比例して周回することの論理的説明が皆無であったので、全体を通して改めて説明する。

平均化した等ハミルトニアン面の描画方法はそれぞれの問題に応じて多くの方法が提案されている。ここではもっとも基本的なもののひとつであり、講義でも説明した Yoshikawa (1989) のやり方に沿って再度の説明を試みる。

考える系は太陽–小天体–木星の制限三体系であり、木星の軌道面を基準面とする。つまり木星は平面運動を行っていると考える。ケプラー運動を表すのに用いられる正準変数である Delauney

変数は、純然たる平面運動を記述するのには都合がよろしくない。平面運動では昇交点が定義できないので、角変数のひとつである $h = \Omega$ が不定になってしまうからである。この不都合を避けるために昇交点経度の代わりに近点経度 $\varpi = g + h$ を用いるが、その場合の正準変数セットは以下のようなものが考えられる。

$$
\begin{aligned}
&L = \sqrt{\mu a}, && l,\\
&G - H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}(1-\cos I), && \omega = g,\\
&H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos I, && \varpi = g + h.
\end{aligned}
\tag{87}
$$

なお、円軌道･平面軌道に於けるDelauney変数の特異性を避けるためには、角変数として $l+g+h$, $g+h$, h を使う Poincaré 変数が用いられることが多い (例えば Murray & Dermottt, 1999)。但しここで扱う問題では木星に関する l と g が最終的にはハミルトニアンから消えてしまうので、上記のように $g+h$ を導入するだけで話は足りる。

通常の Delauney 変数セット (l, g, h, L, G, H) からこの変数セット $(l, g, g+h, L, G-H, H)$ への変数変換は点変換、即ち座標が座標へ、運動量が運動量へ移る変換である。この変換を一般に $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \rightarrow (\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}))$ と表現することにすると、これを実現する母関数は以下のようになる。$f_i (i = 1, \cdots, n)$ は $\boldsymbol{q}$ の微分可能な任意関数とする。n は系の自由度である。

$$
S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{q}) P_j,
\tag{88}
$$

この母関数による変換での新旧変数の関係は以下のようになる。

$$
Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = f_i(\boldsymbol{q}), \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j.
\tag{89}
$$

いま $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p})$ の具体形は

$$
\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \\ h \\ L \\ G \\ H \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \\ g+h \\ L \\ G-H \\ H \end{pmatrix},
\tag{90}
$$

なので、新旧一般化座標の関係式 (89) に代入すると

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = f_1(\boldsymbol{q}) = q_1,\\
Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial P_2} = f_2(\boldsymbol{q}) = q_2,\\
Q_3 &= \frac{\partial S}{\partial P_3} = f_3(\boldsymbol{q}) = q_2 + q_3,
\end{aligned}
\tag{91}
$$

となり、母関数 S の形がわかる[6]。

$$
S = \sum_{j=1}^{3} f_j(\boldsymbol{q}) P_j = q_1 P_1 + q_2 P_2 + (q_2 + q_3) P_3.
\tag{92}
$$

[6]実際には L, l については不変なので、この部分は恒等変換で良い。

このSを用いて新旧正準運動量間の関係を求めると

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial q_1} P_j = P_1, \\ p_2 &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial q_2} P_j = P_2 + P_3, \\ p_3 &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial q_3} P_j = P_3, \end{aligned} \tag{93}$$

$$\therefore\ P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2 - p_3, \quad P_3 = p_3 \tag{94}$$

となり、式 (90) と一致する。これにより、変数セット (87) は Delauney 変数を母関数 (92) を用いて変換した正準変数セットであることがわかる。ちなみに、この二つの正準変数セットは以下の関係を満たすので、この変換がいわゆる接触変換になっていることを示している。

$$\sum_{j=1}^{n} q_j p_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j P_j. \tag{95}$$

具体的な問題に戻る。考えている制限三体系に於いては木星が唯一の摂動源であるが、木星の軌道については以下の二つの仮定を置く。(1) 軌道は固定楕円 (離心率は時間的に不変) であり、(2) 軌道傾斜角や昇交点の歳差は無い、即ち平面運動とする。

こうすると、系を記述するハミルトニアン K は以下のように書ける[7]。プライム ($'$) が付いた変数は木星に関するもの、付かない値は小天体のものである。

$$K = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\mu'^2}{2L'^2} + R. \tag{96}$$

R は摂動関数であり、今は小天体から木星への反作用を考えていないので、座標系の表現などは講義で行った通りのもので良い (小天体から木星への反作用を考えるとどちらの天体を主眼に置いているかで摂動関数の表現が異なって来るので、ハミルトニアンを作る際の話が簡単ではなくなる) 。

摂動関数 R は本来二天体のすべての軌道要素の関数、つまり

$$R = R(a, e, I, \omega, \varpi, l; a', e', I', \omega', \varpi', l'), \tag{97}$$

などと表現されるべきものであるが、木星の軌道が平面内を歳差する固定楕円であると仮定したことにより、R は a' と e' に依存しなくなる。また、$I' = 0$ と仮定することで ω' への依存性も消えてしまう。R を具体的に書き下すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} R &= R(a, e, I, \omega, \varpi, l; -, -, -, -, \varpi', l') \\ &= -Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos S \right), \end{aligned} \tag{98}$$

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S}, \tag{99}$$

[7] Delauney 変数の H と紛らわしいので、ハミルトニアンを K で表すことにする。

$$\cos S = \frac{1+\cos I}{2}\cos(f + (\varpi - \varpi') - f') + \frac{1-\cos I}{2}\cos(f - (\varpi - \varpi') + 2\omega - f'). \tag{100}$$

ここで m' は木星の質量、Δ は木星と小天体の相互距離で、r と r' は小天体と木星それぞれの日心距離、f と f' は小天体と木星それぞれの真近点離角である。R 中の符号 “$-$” は、そこにあった変数が消去されたあるいは定数になったことを示すものとする。

さて、二天体の角距離 $\cos S$ を表す式 (100) を見ると、$\varpi = q_3$ と $\varpi' = q_3'$ は $\varpi - \varpi'$ の形でしかハミルトニアンに含まれていないことがわかる。これより、更にひとつの正準変数の消去を実行できることがわかる。このために新しい変数 θ を

$$\theta = \varpi - \varpi' = q_3 - q_3', \tag{101}$$

で導入したいが、この変数の導入も正準変換であるべきなので、然るべき母関数を探す必要がある。この変換を $(q_3 = \varpi, p_3 = H)$ から $(Q_3 = \theta, P_3 = \Theta)$ への変換だと思うことにし、母関数 W を

$$W = f(q_3)P_3, \tag{102}$$

で導入する。他の変数については恒等変換で良い。小天体の座標に関する新旧変数の関係は

$$Q_3 = \frac{\partial W}{\partial P_3} = f(q_3) = \theta (= q_3 - q_3'), \tag{103}$$

であり、運動量の方も

$$p_3 = \frac{\partial W}{\partial q_3} = \frac{\partial f}{\partial q_3}P_3 = P_3, \tag{104}$$

となる。即ち

$$Q_3 = \theta = q_3 - q_3', \quad P_3 = p_3 = H, \tag{105}$$

という結果になる。$Q_3 = \theta$ を用いることで、ハミルトニアン K から $q_3 = \varpi$ と $q_3' = \varpi'$ への依存性が消える。

さて、木星の軌道は平面内の固定楕円であるとしたが、実際の木星軌道は土星などとの重力相互作用によって時刻にほぼ比例した歳差運動を行う。もしもこれをモデル化する場合には、例えば

$$\varpi' = \nu_5 t + \varpi_0', \tag{106}$$

などと置けば良い。ν_5 は木星近点の周回速度を表すパラメータである。式 (106) を仮定することでハミルトニアン K には時刻 t に陽に依存することになるが、式 (102) の母関数 $W = (\varpi - \varpi')H$ を用いた正準変換は K の ϖ' への依存性を消し去るので、時刻 t に対する K の依存性も実はこの時に消去される。別の言い方をすれば、(102) の母関数 W による正準変換は木星の近点の移動に随伴した回転座標系に乗るような座標変換を表しているものとも言える。

さて、変換後の新しいハミルトニアン $\tilde{K}$ は以下のようになる。木星に関する軌道要素のうち a', e', I', ω', ϖ' は定数になったか消去されている。

$$\tilde{K} = -\frac{\mu^2}{2L^2} + R(a, e, I, \omega, \theta, l; -, -, -, -, -, l'). \tag{107}$$

なお木星の近点経度 ϖ' が式 (106) のような時間依存性を持つ場合には、式 (107) の右辺に $-\frac{\partial W}{\partial t} = \nu_5 \Theta = \nu_5 H(a, e, I)$ という項が加わる。これは母関数が時間に陽に依存する正準変換を行った場合の一般的な性質から導かれる事柄である。

さて次は、新しいハミルトニアン $\tilde{K}$ を短周期で変化する変数で平均化する。まずは各天体の平均近点離角 (l, l') による平均化を行う[8]。

$$\begin{aligned}\tilde{K}^* &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{K}dldl' \\ &= \tilde{K}^*(-, e, I, \omega, \theta, -; -, -, -, -, -, -).\end{aligned} \tag{109}$$

言わずもがなだが $\tilde{K}^*$ は l, l' に陽に依存していないので、式 (109) 内の一周積分は以下のように f, f' を介して行う。

$$\int \tilde{K}dl = \int \tilde{K}\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}df. \tag{110}$$

平均近点離角 l と真近点離角 f の関係は以下である。

$$\frac{df}{dl} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}, \quad r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos f}. \tag{111}$$

これにより、新しいハミルトニアン $\tilde{K}^*$ が $l = q_1$ に依存しなくなるので、q_1 に共役な変数 $P_1 = L$ は定数になる。従って $a = L^2/\mu$ も定数になる。

ハミルトニアン $\tilde{K}^*$ はこの時点でまだ自由度 2 を保っている。そこで次に、$\tilde{K}^*$ を小天体の近点引数 ω で平均化することを考える。即ち小天体の近点が一様かつ速やかに周回するという前提の下で、

$$\tilde{K}^{**} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{K}^*d\omega = \tilde{K}^{**}(-, e, I, -, -, \theta; -, -, -, -, -, -), \tag{112}$$

という平均化を行うのである。式 (100) の摂動関数 R に於いて ω が 2ω の形でしか出て来ないので、ここでの数値求積 (112) については $\omega = [0:\pi]$ の範囲で行い、全体を二倍すれば良い。なお「小天体の近点が一様かつ速やかに周回する」という前提については、完全に後智恵ではあるが、小惑星の運動に関する数値積分の結果を見れば比較的妥当であることがわかっている。

平均化 (112) が完了した時点で、ハミルトニアン $\tilde{K}^{**}$ は $\omega = q_2$ を含んでいない。従ってその共役変数である $p_2 = G - H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}(1-\cos I)$ は一定になる。従って、ここに於いて新しい積分定数

$$C \equiv \sqrt{1-e^2}(1-\cos I), \tag{113}$$

を得ることができる。C の具体的な値は離心率 e と軌道傾斜角 I の初期値から得られる。関係式 (113) により、e あるいは I の一方をハミルトニアンから消去することが出来るので、ハミルトニ

[8] 式 (109) での求積は $l = [0:2\pi]$ および $l' = [0:2\pi]$ に関して数値的に行うが、これは摂動天体および被摂動天体の運動に強い平均運動共鳴が無い場合である。もし平均運動共鳴が関与する場合には、式 (109) の求積は l と l' が有する関係を損わぬように注意して行われる必要がある。具体的には、もし平均運動の間に $p+q:p$ という尽数関係があるならば、l と l' の間に

$$\begin{aligned}\sigma &= (p+q)\lambda' - p\lambda - q\varpi \\ &= (p+q)\left(l' - \left(\varpi - \varpi'\right)\right) - pl,\end{aligned} \tag{108}$$

という関係があることになる。ここで $\lambda = \varpi + l$ は平均経度、σ は平均運動共鳴の臨界引数であり、普通は 0° あるいは 180° の付近を秤動する。求積 (109) を実行する際には、l と l' の値が式 (108) の関係を満たしつつ変わるように注意する必要がある。

アンの形は以下のようになる。

$$\tilde{K}^{**} = \tilde{K}^{**}(-, e, -, -, -, \theta; -, -, -, -, -, -). \tag{114}$$

即ち系の自由度は 1 となり、可積分の形になってしまった。あとは初期値を与えれば、この系を記述する変数 (θ, e) の変化を知ることができる。このようにして作られるのが等ハミルトニアン面 $(\theta = \varpi - \varpi', e)$ である。

11. 参考文献の追加

Lie, S. (1888) *Theorie der Transformationgruppen* I, Teubner, Leipzig, § 12. (Hori (1996) で引用されている Lie の展開定理の原著)

アーノルド, V.I. 『古典力学の数学的方法』 安藤昭一・蟹江幸博・丹羽敏雄 訳, 岩波書店, 1980. (KAM 理論らで余りにも有名なロシアの数学者アーノルドの大著。力学ではなく数学の教科書であるため、定義、定理、証明、の羅列になっている。難解だが、積分可能性周辺の議論に踏み込もうとすれば避けて通れない一冊。原著は 1976 年初版)

数理科学 1995 年 6 月号, 『特集・古典力学の輝き』, サイエンス社. (太陽系の惑星運動から三体問題、可積分系、加速器の力学までに至るレビュー論文群が並ぶ貴重な特集)

数理科学 1999 年 8 月号, 『特集・ハミルトン力学系の展開』, サイエンス社. (ハミルトン系の数値解法から可積分性の必要条件までに至るレビュー論文群が並ぶ貴重な特集)

数学セミナー 1999 年 7 月号, 『特集・天体の動きを追った数学者たち』, 日本評論社. (天体力学の歴史と数学の関わりに関する興味深い記事が多く掲載されている)

この文書には平成 15 年 3 月 1 日までの修正を取り込んであります。