微小摂動系での天体力学概論

平成 14 年 1 月 9 日–1 月 11 日 東京工業大学

伊藤孝士 (文部科学省 国立天文台 データ解析センター)

1. イントロダクション

1.1 太陽系は微小摂動系である

1.2 何でこんなに面倒臭いのか？

- 物理ではなく応用数学：『習うより慣れろ』
- 『わかる』とはどういうことか？

2. ケプラー運動と古典的摂動論

2.1 楕円と二体問題

2.2 軌道要素同志のヤコビ行列

2.3 楕円展開

2.4 要素変化の方程式

2.5 摂動関数の展開

2.6 永年摂動

3. 正準変換による摂動論

3.1 ハミルトン形式の概要

3.2 正準変換摂動論 (1) von Zeipel の方法

3.3 正準変換摂動論 (2) 堀源一郎の方法

3.4 正準変換摂動論に関連する話題

- 試験天体の等エネルギー面描画
- シンプレクティク数値積分法

単位認定—レポート提出による

講義の最中に幾つかの簡単な$\boxed{\text{問題}}$を書き出す。そのうちから**最低二問**以上を選んで回答し、A4 版の用紙 (片面) に記して提出せよ。締切および提出先は講義中に広報する。

今回の講義に含まれない主要な事項群

- 各種の共鳴、制限三体問題、ケプラー方程式の求解、ガウス型の惑星方程式、相対論的効果、非重力効果、歳差・章動 (自転運動)
- 各種の正準変数と座標系、Hamilton–Jacobi 理論、摂動展開の収束と積分可能性、KAM, 断熱不変量、周期軌道、カオス理論
- 具体的な問題—惑星・衛星の運動、人工衛星の軌道、地球の日射量変動
- シンプレクティク数値積分法以外の数値解法、数値解析、正則化

必要となる数式の幾つか

2.4 要素変化の方程式

定数でない σ を用いて書き直した運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= 0, &(1)\\
\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_2}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= 0, &(2)\\
\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_3}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= 0, &(3)\\
\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_4}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial x_1}, &(4)\\
\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_5}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial x_2}, &(5)\\
\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1+\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2+\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3+\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4+\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_5}\dot{\sigma}_5+\frac{\partial x_6}{\partial \sigma_6}\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial x_3}. &(6)
\end{aligned}
$$

Lagrange 括弧を用いた書き直し

$$
\begin{aligned}
[\sigma_1,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_1,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_1,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_1,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_1,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_1,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_1}, &(7)\\
[\sigma_2,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_2,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_2,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_2,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_2,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_2,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_2}, &(8)\\
[\sigma_3,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_3,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_3,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_3,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_3,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_3,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_3}, &(9)\\
[\sigma_4,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_4,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_4,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_4,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_4,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_4,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_4}, &(10)\\
[\sigma_5,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_5,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_5,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_5,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_5,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_5,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_5}, &(11)\\
[\sigma_6,\sigma_1]\,\dot{\sigma}_1+[\sigma_6,\sigma_2]\,\dot{\sigma}_2+[\sigma_6,\sigma_3]\,\dot{\sigma}_3+[\sigma_6,\sigma_4]\,\dot{\sigma}_4+[\sigma_6,\sigma_5]\,\dot{\sigma}_5+[\sigma_6,\sigma_6]\,\dot{\sigma}_6 &= \frac{\partial R}{\partial \sigma_6}. &(12)
\end{aligned}
$$

0 でない Lagrange 括弧

$$
\begin{aligned}
[\epsilon, a] &= -[a, \epsilon] = \frac{na}{2}, & (13)\\
[\varpi, a] &= -[a, \varpi] = -\frac{na}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), & (14)\\
[\Omega, a] &= -[a, \Omega] = -\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}(1-\cos I), & (15)\\
[\varpi, e] &= -[e, \varpi] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} & (16)\\
[\Omega, e] &= -[e, \Omega] = \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}(1-\cos I) & (17)\\
[\Omega, I] &= -[I, \Omega] = -na^2\sqrt{1-e^2}\sin I. & (18)
\end{aligned}
$$

$(a, e, I, \varpi, \Omega, \epsilon)$ を用いた要素変化方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}, & (19)\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \varpi}, & (20)\\
\frac{dI}{dt} &= -\frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon}+\frac{\partial R}{\partial \varpi}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial \Omega}, & (21)\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I}, & (22)\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial I}, & (23)\\
\frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I}. & (24)
\end{aligned}
$$

2.5 摂動関数の展開 (1)

$$
\cos\alpha = \left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)\cos(\psi-\psi_1) + \frac{\gamma^2}{4}\cos(\psi+\psi_1-2\Omega) \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\cos^2(\psi-\psi_1) + \frac{\gamma^2}{2}\cos(\psi-\psi_1)\cos(\psi+\psi_1-2\Omega)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{\gamma^2}{4} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma^2}{4}\right)\cos(2\psi-2\psi_1) + \frac{\gamma^2}{4}\cos(2\psi-2\Omega) + \frac{\gamma^2}{4}\cos(2\psi_1-2\Omega), \quad (26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^3\alpha &= \left(\frac{3}{4}-\frac{9\gamma^2}{16}\right)\cos(\psi-\psi_1) + \left(\frac{1}{4}-\frac{3\gamma^2}{16}\right)\cos(3\psi-3\psi_1)\\
&+\frac{3\gamma^2}{8}\cos(\psi+\psi_1-2\Omega) + \frac{3\gamma^2}{16}\cos(3\psi-3\psi_1-2\Omega) + \frac{3\gamma^2}{16}\cos(\psi-3\psi_1+2\Omega), \quad (27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2}\frac{a_1^3}{r_1^3} &= 1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{3e_1^2}{2} - 2e\cos l + 3e_1\cos l_1 \\
&-\frac{e^2}{2}\cos 2l + \frac{9e_1^2}{2}\cos 2l_1 - 3ee_1\cos(l-l_1) - 3ee_1\cos(l+l_1),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2}\frac{a_1^3}{r_1^3}\cos(2\psi-2\psi_1) &= \left(1-\frac{5e^2}{2}-\frac{5e_1^2}{2}\right)\cos(2l-2l_1+2\varpi-2\varpi_1) \\
&-3e\cos(l-2l_1+2\varpi-2\varpi_1) + e\cos(3l-2l_1+2\varpi-2\varpi_1) - \frac{e_1}{2}\cos(2l-l_1+2\varpi-2\varpi_1) \\
&+\frac{7e_1}{2}\cos(2l-3l_1+2\varpi-2\varpi_1) + \frac{5e^2}{2}\cos(2l-2\varpi+2\varpi_1) + e^2\cos(4l-2l_1+2\varpi-2\varpi_1) \\
&+\frac{3ee_1}{2}\cos(l-l_1+2\varpi-2\varpi_1) - \frac{21ee_1}{2}\cos(l-3l_1+2\varpi-2\varpi_1) \\
&-\frac{ee_1}{2}\cos(3l-l_1+2\varpi-2\varpi_1) + \frac{7ee_1}{2}\cos(3l-3l_1+2\varpi-2\varpi_1) \\
&+\frac{17e_1^2}{2}\cos(2l-4l_1+2\varpi-2\varpi_1).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 &= m^2n^2a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2\psi-2\psi_1)\right. \\
&\qquad \left.-\frac{3\gamma^2}{8}\left(1+\cos(2\psi-2\psi_1)-\cos(2\psi-2\Omega)-\cos(2\psi_1-2\Omega)\right)\right] \\
&= n_1^2a^2\left[\frac{1}{4}+\frac{3e^2}{8}+\frac{3e_1^2}{8}-\frac{3\gamma^2}{8}+\left(\frac{3}{4}-\frac{15e^2}{8}-\frac{15e_1^2}{8}-\frac{3\gamma^2}{8}\right)\cos(2\lambda-2\lambda_1)\right. \\
&-\frac{e}{2}\cos(\lambda-\varpi) - \frac{9e}{4}\cos(\lambda-2\lambda_1+\varpi) + \frac{3e}{4}\cos(3\lambda-2\lambda_1-\varpi) \\
&+\frac{3e_1}{4}\cos(\lambda_1-\varpi_1) - \frac{3e_1}{8}\cos(2\lambda-\lambda_1-\varpi_1) + \frac{21e_1}{8}\cos(2\lambda-3\lambda_1+\varpi_1) \\
&-\frac{e^2}{8}\cos(2\lambda-2\varpi) + \frac{15e^2}{8}\cos(2\lambda_1-2\varpi_1) + \frac{3e^2}{4}\cos(4\lambda-2\lambda_1-2\varpi) \\
&-\frac{3ee_1}{4}\cos(\lambda-\lambda_1-\varpi+\varpi_1) + \frac{9ee_1}{8}\cos(\lambda-\lambda_1+\varpi-\varpi_1) - \frac{3ee_1}{4}\cos(\lambda+\lambda_1-\varpi-\varpi_1) \\
&-\frac{3ee_1}{8}\cos(3\lambda-\lambda_1-\varpi-\varpi_1) - \frac{63ee_1}{8}\cos(\lambda-3\lambda_1+\varpi+\varpi_1) \\
&+\frac{21ee_1}{8}\cos(3\lambda-3\lambda_1-\varpi+\varpi_1) + \frac{9e_1^2}{8}\cos(2\lambda_1-2\varpi_1) + \frac{51e_1^2}{8}\cos(2\lambda-4\lambda_1+2\varpi_1) \\
&\left.+\frac{3\gamma^2}{8}\cos(2\lambda-2\Omega) + \frac{3\gamma^2}{8}\cos(2\lambda_1-2\Omega)\right].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

摂動関数の展開 (2)

回転行列の積

$R_z(\varpi)R_x(i)R_z(\Omega)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varpi\cos\Omega - \sin\varpi\cos i\sin\Omega & \cos\varpi\sin\Omega + \sin\varpi\cos i\cos\Omega & \sin\varpi\sin i \\ -\sin\varpi\cos\Omega - \cos\varpi\cos i\sin\Omega & -\sin\varpi\sin\Omega + \cos\varpi\cos i\cos\Omega & \cos\varpi\sin i \\ \sin i\sin\Omega & -\sin i\cos\Omega & \cos i \end{pmatrix} \quad (31)$$

再び $\cos S$

$$\begin{aligned} \cos S \;=\;& \cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\cos(\Omega-\Omega'+\omega+\omega'+f+f') \\ &+\sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{i'}{2}\cos(\Omega-\Omega'-\omega-\omega'-f-f') \\ &+\cos^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{i'}{2}\cos(\Omega-\Omega'+\omega-\omega'+f-f') \\ &+\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\cos(\Omega-\Omega'-\omega+\omega'-f+f') \\ &-2\cos\frac{i}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i'}{2}\sin\frac{i'}{2}\cos(\omega+\omega'+f+f') \\ &+2\cos\frac{i}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i'}{2}\sin\frac{i'}{2}\cos(\omega-\omega'+f-f'). \end{aligned} \quad (32)$$

またもや $\cos S$

$$\begin{aligned} \cos S &= s'^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega') + s^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega) + \left(1-s^2-s'^2\right)\cos(\Lambda-\Lambda') \\ &-2ss'\left(\cos(\Lambda+\Lambda'-\Omega-\Omega') - \cos(\Lambda-\Lambda'-\Omega+\Omega')\right) \\ &= \cos(\Lambda-\Lambda') - \left(s^2+s'^2\right)\cos(\Lambda-\Lambda') \\ &+s^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega) + s'^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega') \\ &-2ss'\left(\cos(\Lambda+\Lambda'-\Omega-\Omega') - \cos(\Lambda-\Lambda'-\Omega+\Omega')\right) \quad (33) \\ &\equiv \cos(\Lambda-\Lambda') - \sigma_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_* &= \left(s^2+s'^2\right)\cos(\Lambda-\Lambda') - s^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega) - s'^2\cos(\Lambda+\Lambda'-2\Omega') \\ &+2ss'\left(\cos(\Lambda+\Lambda'-\Omega-\Omega') - \cos(\Lambda-\Lambda'-\Omega+\Omega')\right) \end{aligned} \quad (34)$$

円軌道の場合 $(\Lambda \to \lambda)$

$$\begin{aligned} \sigma_* &= \left(s^2+s'^2\right)\cos(\lambda-\lambda') - s^2\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega) - s'^2\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega') \\ &+2ss'\left(\cos(\lambda+\lambda'-\Omega-\Omega') - \cos(\lambda-\lambda'-\Omega+\Omega')\right) \end{aligned} \quad (35)$$

σ_* **と** $\cos j(\lambda-\lambda')$ **の無限和**

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sigma_*\cos j(\lambda-\lambda') &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(s^2+s'^2\right)\cos j(\lambda-\lambda')\cos(\lambda-\lambda') \\ &- \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s^2\cos j(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s'^2\cos j(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega') \end{aligned}$$

$$
+\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2ss' \cos j(\lambda-\lambda') \cos(\lambda+\lambda'-\Omega-\Omega')
$$

$$
-\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2ss' \cos j(\lambda-\lambda') \cos(\lambda-\lambda'-\Omega+\Omega') \tag{36}
$$

主な Laplace 係数の漸化式

$$
\begin{aligned}
b_{1/2}^{(2)} &= \frac{(2-1)\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)b_{1/2}^{(1)}-\left(2+\frac{1}{2}-2\right)b_{1/2}^{(0)}}{2-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\left(2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)b_{1/2}^{(1)}-b_{1/2}^{(0)}\right), \qquad (37)\\
b_{3/2}^{(1)} &= \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+\alpha^2)\,b_{1/2}^{(1)}+2\left(1+\frac{1}{2}-1\right)\alpha b_{1/2}^{(0)}}{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^2} \\
&= \frac{2}{(1-\alpha^2)^2}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\alpha^2\right)b_{1/2}^{(1)}+\alpha b_{1/2}^{(0)}\right), \qquad (38)\\
b_{3/2}^{(2)} &= \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\alpha^2)\,b_{1/2}^{(2)}+2\left(2+\frac{1}{2}-1\right)\alpha b_{1/2}^{(1)}}{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^2} \\
&= \frac{2}{(1-\alpha^2)^2}\left(-\frac{3}{2}\left(1+\alpha^2\right)b_{1/2}^{(2)}+3\alpha b_{1/2}^{(1)}\right), \qquad (39)
\end{aligned}
$$

円軌道の場合の主要部

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_0} &= \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(A^{(j)}-\left(s^2+{s'}^2\right)B^{(j-1)}\right)\cos j(\lambda-\lambda') \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}B^{(j)}\Big[s^2\cos\left((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-2\Omega\right)+{s'}^2\cos\left((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-2\Omega'\right) \\
&+2ss'\left(\cos\left((j+1)\lambda-(j+1)\lambda'-\Omega+\Omega'\right)-\cos\left((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-\Omega-\Omega'\right)\right)\Big] \qquad (40)
\end{aligned}
$$

楕円軌道の場合の主要部

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{1+x'}\frac{1}{\Delta_0}+\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-x'}{(1+x')^2}A_1^{(j)}+\frac{(x-x')^2}{(1+x')^3}A_2^{(j)}\right)\cos j(\lambda-\lambda') \\
&-\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y-y'}{1+x'}A^{(j)}+\frac{(x-x')(y-y')}{(1+x')^2}A_1^{(j)}\right)j\sin j(\lambda-\lambda') \\
&-\frac{1}{4}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(y-y')^2}{1+x'}A^{(j)}\right)j^2\cos j(\lambda-\lambda') \qquad (41)
\end{aligned}
$$

主要部の展開

$$
R = Gm'\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}A^{(j)}-\frac{s^2+{s'}^2}{2}B^{(j-1)}+\frac{e^2+{e'}^2}{4}\left(A_1^{(j)}+A_2^{(j)}-2j^2A^{(j)}\right)\right)\cos(j\lambda-j\lambda')\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e}{2}\left(2jA^{(j)}+A_1^{(j)}\right)\cos((j-1)\lambda-j\lambda'+\varpi)\\
&-\frac{e'}{2}\left((2j-1)A^{(j)}-A_1^{(j)}\right)\cos((j-1)\lambda-j\lambda'+\varpi')\\
&+\frac{e^2}{8}\left((4j^2+5j)A^{(j)}-(4j+2)A_1^{(j)}+2A_2^{(j)}\right)\cos((j+2)\lambda-j\lambda'+2\varpi)\\
&-\frac{ee'}{2}\left((2j^2-j)A^{(j)}-(2j-1)A_1^{(j)}+A_2^{(j)}\right)\cos((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-\varpi-\varpi')\\
&+\frac{ee'}{2}\left((2j^2+j)A^{(j)}-A_1^{(j)}-A_2^{(j)}\right)\cos((j+1)\lambda-(j+1)\lambda'-\varpi+\varpi')\\
&+\frac{e'^2}{8}\left((4j^2-9j+4)A^{(j)}-(4j-6)A_1^{(j)}+2A_2^{(j)}\right)\cos(j\lambda-(j-2)\lambda'-2\varpi')\\
&+\frac{s^2}{2}B^{(j)}\cos((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-2\Omega)+\frac{s'^2}{2}B^{(j)}\cos((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-2\Omega')\\
&\left.+ss'B^{(j)}\left(\cos((j+1)\lambda-(j+1)\lambda'-\Omega+\Omega')-\cos((j+1)\lambda-(j-1)\lambda'-\Omega-\Omega')\right)\right] \qquad (42)
\end{aligned}
$$

残余部の展開 (1)

$$
\begin{aligned}
-Gm'\frac{r}{r'^2}\cos S &= -Gm'\frac{\alpha}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)\\
&= \left(-1+\frac{e^2}{2}+\frac{e'^2}{2}+s^2+s'^2\right)\cos(\lambda-\lambda')\\
&\quad -ee'\cos(2\lambda-2\lambda'-\varpi+\varpi')-2ss'\cos(\lambda-\lambda'-\Omega+\Omega')\\
&\quad -\frac{e}{2}\cos(2\lambda-\lambda'-\varpi)+\frac{3e}{2}\cos(\lambda'-\varpi)-2e'\cos(\lambda-2\lambda'+\varpi')\\
&\quad -\frac{3e^2}{8}\cos(3\lambda-\lambda'-2\varpi)-\frac{e^2}{8}\cos(\lambda+\lambda'-2\varpi)\\
&\quad +3ee'\cos(2\lambda-\varpi-\varpi')-\frac{e'^2}{8}\cos(\lambda+\lambda'-2\varpi')\\
&\quad -\frac{27e'^2}{8}\cos(\lambda-3\lambda'+2\varpi')-s^2\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega)\\
&\quad +2ss'\cos(\lambda+\lambda'-\Omega-\Omega')-s'^2\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega'). \qquad (43)
\end{aligned}
$$

残余部の展開 (2)

$$
\begin{aligned}
-Gm\frac{r'}{r^2}\cos S &= -Gm\frac{1}{a'\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{a'}\right)\\
&= \left(-1+\frac{e^2}{2}+\frac{e'^2}{2}+s^2+s'^2\right)\cos(\lambda-\lambda')\\
&\quad -ee'\cos(2\lambda-2\lambda'-\varpi+\varpi')-2ss'\cos(\lambda-\lambda'-\Omega+\Omega')\\
&\quad -2e\cos(2\lambda-\lambda'-\varpi)+\frac{3e'}{2}\cos(\lambda'-\varpi)-\frac{e'}{2}\cos(\lambda-2\lambda'+\varpi')\\
&\quad -\frac{27e^2}{8}\cos(3\lambda-\lambda'-2\varpi)-\frac{e^2}{8}\cos(\lambda+\lambda'-2\varpi)\\
&\quad +3ee'\cos(2\lambda-\varpi-\varpi')-\frac{e'^2}{8}\cos(\lambda+\lambda'-2\varpi')
\end{aligned}
$$

$$-\frac{3e'^2}{8}\cos(\lambda - 3\lambda' + 2\varpi') - s^2\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega)$$
$$+2ss'\cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - s'^2\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega'). \qquad (44)$$

参考文献

天体力学に関する標準的な教科書

Brouwer, D. and Clemence, G.M. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, 1961. (40 年近く読まれて来た非常に有名な教科書。応用数学 (解析学) の教科書のように見えるほど数式で埋め尽くされている。但し多くの記載はもはや out of date)

Battin, R.H. *An Introduction to The Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., New York, 1987. (非常に実際的。天体力学と言うより軌道力学あるいは軌道制御に関する教科書)

Danby, J.M.A. *Fundamentals of Celestial Mechanics (second edition, third printing)*, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, 1992. (入門編に位置付けられるわかりやすいテキスト。数式に埋め尽くされることなく、直感的理解に努めようとしている)

Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1992. (古典的天体力学から最近のカオス的運動への繋ぎを果たす教科書。正準変換摂動論周辺の記載や数値実験の結果なども充実している)

Szebehely, V.G. and Mark, H. *Adventures in Celestial Mechanics* (second edition), John Wiley & Sons, 1989. (国際標準の入門書として有名。冒頭にある歴史的解説がわかりやすい)

Murray, C.D. and Dermott, S.F. *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. (BC1961 に代わる現代の標準的教科書。太陽系天体の力学的研究に必要な実際的知識が網羅されている。誤植を訂正した新刷が最近出た模様)

長沢工 『天体力学入門（上・下）』, 地人書館. 1983. (日本語での数少ない入門的な教科書。計算の過程が非常に詳しく記してある)

堀源一郎 『天体力学講義』, 東京大学出版会. 1988. (著者の長年の講義を纏めたものであるが、ハミルトンの四元数を駆使した理論展開はお世辞にも簡単とは言えない。相当なマニア向け)

木下宙 『天体と軌道の力学』, 東京大学出版会, 1998. (日本語での標準的かつ代表的な教科書。多くの誤植を訂正した第二刷が最近発売になった)

天体力学に関する古典 (現在でも通用する)

Laplace, P.S. *Mécanique Céleste*, 1799–1825 (Tome 1–5). (1966 年に英語訳が出版されている)

Poincaré, H. *Les Méthode Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier–Villars, 1892 (Tome 1, 2, 3) (英語訳が出版されている)

Poincaré, H. *Leçons de Mécanique Céleste*, Gauthier–Villars, Tome 1 (1905), 2.1 (1907), 2.2 (1909), 3 (1910).

Tisserland, F. *Traité de la Mécanique Céleste*, Gauthier–Villars, Paris, Tome 1 (1889), 2 (1891), 3 (1894), 4 (1896). (天体力学のあらゆる研究者が常に立ち帰る古典中の古典。今回の講義の大半も未だにこの書物の掌から大きく出てはいない)

Moulton, F.R. *An Introduction to Celestial Mechanics*, The MacMillan Company, London, 1914. (BC1961 の出版まで非常に長い間読み継がれて来た名著)

Plummer, P. *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Cambridge University Press, 1918. (1960 年に再版されている。古典と言うほど内容は古くない)

Hagihara, Y. *Celestial Mechanics I–V*, I (1970, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 689), II (1972, MIT Press, pp. 929), III (1974, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo, pp. 1160), IV (1975,, JSPS pp. 1243) V (1976,, JSPS pp. 1560). (堀源一郎氏をして「天体力学の究極の書」と言わしめた大著。辞書としての活用価値が高いか。第 I 巻のみは日本語版が出ている: 萩原雄祐 『天体力学の基礎』, 生産技術センター, 1976)

S. チャンドラセカール 『チャンドラセカールの「プリンキピア講義 —一般読者のために」』, 中村誠太郎 監訳, 講談社, 1998. (チャンドラセカールがニュートンの「プリンキピア」を改めて読み解き、独自の平易な証明と詳しい解説を付加した貴重な書物の邦訳)

力学一般に関する教科書

Lagrange, J.L. *Mécanique Analytique*, 1788. (いわゆる「解析力学」と言う名称はこの書籍から始まったらしい)

Goldstein, H. *Classical Mechanics* (second edition), Addison-Wesley, Massachusetts. 1980. (50 年にわたって読まれている名著中の名著。昨年になり第三版が出た。広く読まれている第二版の邦訳は 瀬川富士・矢野忠・江沢康生 訳『新版 古典力学 (上・下)』, 吉岡書店, 1984)

大貫義郎・吉田春夫 『力学』, 岩波講座 現代の物理学 No. 1, 岩波書店, 1994. (前半は形式的かつ抽象的で退屈。後半は現代的なトピックに満ち、興味深い)

大貫義郎 『解析力学』, 物理テキストシリーズ No.2, 岩波書店, 1987. (学部学生用の講義では比較的参照されている模様)

山内恭彦 『一般力学』(増補 第三版), 岩波書店, 1959. (古い教科書だが中味は今だに通用する)

戸田盛和 『一般力学 30 講』 物理学 30 講シリーズ (1), 朝倉書店. 1994. (初等的な証明が多く、わかりやすい)

山本義隆 『古典力学の形成』—ニュートンからラグランジュへ, 日本評論社, 1997. (「ニュートンの力学」から「ニュートン力学」への理論体系の整備についての大著)

正準変換摂動論に関する文献[1]

von Zeipel, H., Recherches sur le mouvement des petites planetès, *Ark. Mat. Astron. Fysik,* Stockholm **11**, no. 1, 1–58; no. 7, 1–62 (1916); ibid. **12**, no. 9, 1–89; **13**, no. 3, 1–93 (1917). (いわゆる von Zeipel 法として知られている摂動理論の原論文)

Garfinkel, B. (1959) The orbit of a satellite of an oblate planet, *Astron. J.*, **64**, 353–367. (摂動の主要項を取り入れたものを中間軌道に採用した。摂動論は von Zeipel 法)

Kozai, Y. (1959) The motion of a close Earth satellite, *Astron. J.*, **64**, 367–377. (ラグランジュの惑星方程式を元にした人工衛星についての古典的摂動論)

Brouwer, D. (1959) Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, *Astron. J.*, **64**, 378–397. (von Zeipel 法を採用した人工衛星の摂動理論。上記三論文は、短周期摂動と長周期摂動については一次、永年摂動については二次まで計算した)

Kozai, Y. (1962) Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, *Astron. J.*, **67**, 446–461. (von ZeipIe 法を採用。短周期項と長周期項は二次まで、永年摂動は三次まで計算した)

[1]註解の多くは国立天文台位置天文天体力学研究系の木下宙教授による。

Hori, G. (1966) Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 287–296. (Lie 変換を用いて von Zeipel による摂動論を再構成した。新旧変数が混じらない摂動理論を提供した歴史に残る名論文)

Hori, G. (1967) Non-linear coupling of two harmonic oscillations, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **19**, 229–241. (Hori (1966) の摂動理論を二個の調和振動子 + 非線形項の問題に適用)

Deprit, A. (1969) Canonical transformations depending on a small parameter, *Celes. Mech.*, **1**, 12–30. (Lie 変換に基付く摂動論。一見すると Hori 摂動論と異なるが、その結果は Hori 理論から導かれるものと等価)

Hori, G. (1970) Comparison of two perturbation theories based on the canonical transformation, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **22**, 191–198. (Hori 摂動論と von Zeipel 摂動論とが二次までは等価であることを示す)

Shniad, H. (1970) The equivalence of von Zeipel mapping and Lie transforms, *Celes. Mech.*, **2**, 114–120. (von Zeipel 理論と Deprit 理論の正準変換の母関数の関係式を与えた)

Yuasa, M. (1971) The comparison of Hori's perturbation theory and von Zeipel's theory, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **23**, 399–403. (Hori 摂動論と von Zeipel 摂動論とが三次までは等価であることを示す)

Hori, G. (1971) Theory of general perturbations for non-canonical systems, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **23**, 567–587. (Hori 摂動論を非ハミルトン系に適用できるように拡張した。但しこれを用いて実際の天体の運動を計算した例は未だ無い)

Henrard, J. and Roels, J. (1974) Equivalence for Lie transforms, *Celes. Mech.*, **10**, 497–512. (Hori 摂動理論と Deprit 摂動理論が等価であることの厳密な証明を与えた。両摂動理論での母関数の関係を具体的に書き下している。この論文以前の両摂動論の比較に関する論文では、微小パラメータに関する有限次数までの母関数の関係式を具体的に与えていたに過ぎない)

Kinoshita, H. (1977) Theory of the rotation of the rigid earth, *Celes. Mech.*, **15**, 277–326. (Hori 摂動論を用い、剛体地球の章動を精密に計算した。振幅 0.0001 秒角以上の項はすべて計算されている。ここでの計算結果は、30 年以上にわたって国際天文学連合 (IAU) で標準として採用され続けている)

氷期・間氷期サイクルおよび地球の歳差運動に関する文献

Milankovitch, M. (1941) *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitproblem*, Vol. 133 of *Königlich Serbische Academie Publication*, Königlich Serbische Academie. (いわゆる "ミランコビッチサイクル" の原著作。邦訳は『ミランコビッチ気候変動の天文学理論と氷河時代』(柏谷健二・山本淳之・大村誠・福山薫・安成哲三 訳, 古今書院, 1992) だが、67000 円もする)

Шараф, Ш.Г. и Будникова, Н.А. (1969a) О вековых изменениеых элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прощлого, БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ, **11**, 231–261. (ミランコビッチ理論の基礎となった永年的地球自転運動の基礎理論)

Шараф, Ш.Г. и Будникова, Н.А. (1969b) ВЕКОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ЗЕМЛИ И АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА, ТРУДЫ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ, **14**, 48–84. (ミランコビッチ理論そのものである地球入射の太陽放射量の精密計算)

Dehant, V., Loutre, M-F., and Berger, A. (1987) Les variations à court et à long terme de la rotation de la Terre et de la précession astronomique, in *Sci. Rep.*, 1987/12, Inst d'Astron et de Géophys, G. Lemaître, Univ. Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve. (Berger 一派の日射量変動計算の基礎論文)

Berger, A.L. and Loutre, M.F. (1987) Origine des fréquences des éléments astronomiques intervenant dans le calcul de l'insolation, in *Sci. Rep.*, 1987/13, Inst Astron Géophys G. Lemaître, Univ. Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 45–106. (Berger 一派の日射量変動計算の基礎論文)

増田耕一 (1993) 氷期・間氷期サイクルと地球軌道要素, 気象研究ノート, **177**, 223–248. (氷期・間氷期サイクルと地球の歳差運動や気候変動に関するまとまった解説)

熊澤峰夫・吉田茂生・伊藤孝士 編, 『全地球史解読』, 東京大学出版会, 2002. (天体力学の初歩を含め、氷期・間氷期サイクルに代表される地球の古気候変動に関する記載も多く記載されている。平成 14 年 5 月発売予定)

シンプレクティク数値積分法に関する文献

Yoshida, H. (1990) Construction of higher order symplectic integrators, *Phys. Lett. A*, **150**, 262–268. (高次のシンプレクティク数値積分法に構築に関する論文。引用頻度が非常に高い)

Kinoshita, H., Yoshida, H., and Nakai, H. (1991) Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **50**, 59–71. (天体力学にシンプレクティク数値積分法が持ち込まれた黎明期の論文。後述の Wisdom-Holman map のアイディア的な記載もある)

Wisdom, J. and Holman, M. (1991) Symplectic maps for the N-body problem, *Astron. J.*, **102**, 1528–1538. (ハミルトニアンをケプラー運動部分と摂動部分に分割して高速化する、いわゆる Wisdom-Holman map として名高い論文。異様に高い引用頻度を誇る)

Yoshida, H. (1993) Recent progress in the theory and application of symplectic integrators, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **56**, 27–43. (シンプレクティク数値積分法のわかりやすいレビュー)

吉田春夫 (1995) シンプレクティク数値解法, 数理科学, **384**, 37–46. (シンプレクティク数値積分法のわかりやすいレビュー)

伊藤孝士 (2001) シンプレクティク数値積分法の天体力学的応用, 天体力学 N 体力学研究会集録, 国立天文台, 小久保英一郎・編, 19–90, 平成 13 年 3 月 16 日–18 日, 草津セミナーハウス. (天体力学的応用に関するシンプレクティク数値積分法のレビュー)

Sanz-Serna, J.M. and Calvo, M.P. (1994) *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman & Hall, London. (ハミルトン系の数値解法に関する数少ないまとまった教科書)

試験天体の等エネルギー曲線に関する論文

Kozai, Y. (1962) Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity, *Astron. J.*, **67**, 591–598. (いわゆる古在メカニズムを最初に提唱した歴史的論文。平均化による等エネルギー曲線の描画の草分けでもある。20 世紀の天文学を代表する論文として The Astronomical Journal から選ばれた僅か 4 篇の論文のうちの一篇としても知られる)

Nakai, H. and Kinoshita, H. (1985) Secular perturbations of asteroids in secular resonance, *Celes. Mech.*, **36**, 391–407. (永年共鳴にある小惑星の離心率の進化を等エネルギー曲線と数値積分との比較によって解説している)

Yoshikawa, M. (1989) A survey of the motions of asteroids in the commensurabilities with Jupiter, *Astron. Astrophys.*, **213**, 436–458. (木星との様々な平均運動共鳴にある小惑星の軌道進化を等エネルギー曲線によって解説した。現在でも頻繁に引用されるわかりやすい論文)

摂動関数展開の現状

Kamel, O.M. and Soliman, A.S. (1989) Expansion of the first-order planetary disturbing function by Smart's method (Part I: Principal Part), *Earth, Moon, and Planets*, **47**, 241–263. (一般の N 惑星系摂動関数の展開への一歩。あまりの数式の長さに目が眩む)

Kamel, O.M. and Soliman, A.S. (1990) The expansion of negative powers of mutual distance between two planets (Part II: Formula for Δ^{-s}), *Earth, Moon, and Planets*, **49**, 25–56. (一般の N 惑星系摂動関数の展開への一歩。いい加減にしろと言いたいほどの数式の長さ)

この文書には平成15 年 3 月 1 日までの修正を取り込んであります。