Smoothed Particle Magnetohydrodynamics

岩崎一成

国立天文台 天文シミュレーションプロジェクト

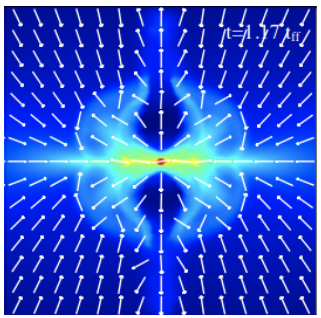
SPMHD の歴史

- 黎明期
  - Gingold & Monaghan (1977)
    Lucy (1977) とともに SPH の初めの論文。既に磁場が入っている。
    ポリトロープ星モデルに適応。
- **強磁場環境下で数値的に不安定であることが判明** (Phillips & Monaghan 1985)
  数値不安定を押さえる手法の提案 (Borve et al. 2001) → 現在はこの手法が標準
  ただ現実問題への応用はまだ進まず。
- **$\nabla \cdot B \neq 0$ 問題**
  格子法で使われている $\nabla \cdot B$ エラーの除去法の SPH への応用
  ただ，当初の実装では，SPH 離散化が適切ではなく，エラーがうまく除去できなかった。
  - Tricco et al. 2012, 2016 (新しい定式化)
  - Iwasaki & Inutsuka 2013 (Godunov 法の適用)

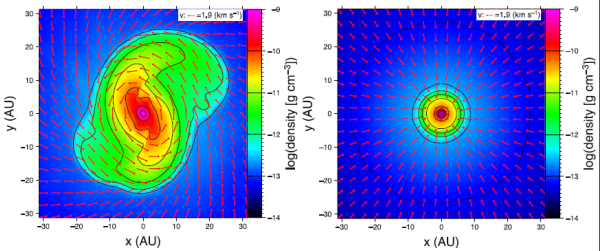
2010 年代から天文現象への積極的な応用が始まった。

SPMHD を使った研究例

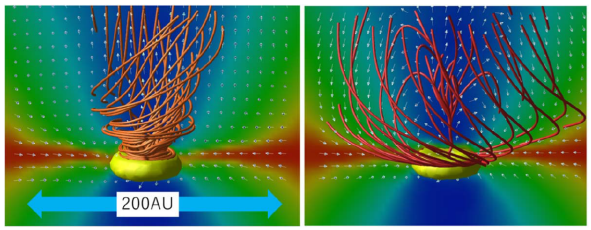
原始星アウトフローを計算
(Bürzle+2011)



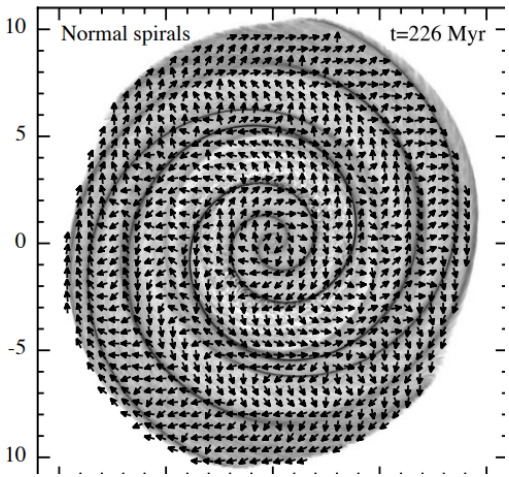
全ての非理想 MHD 効果+輻射輸送を考慮して分子雲コアの重力崩壊計算
(**塚本さん**+2015,2017)



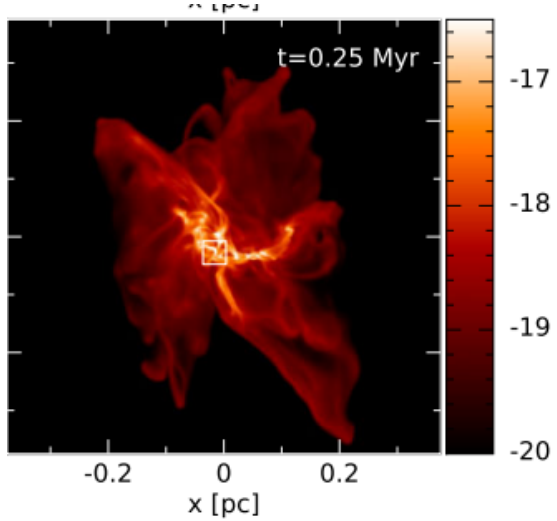
オーム抵抗・両極性拡散+ダスト進化を考慮して分子雲コアの重力崩壊計算
(**塚本さん**+2021,2023)



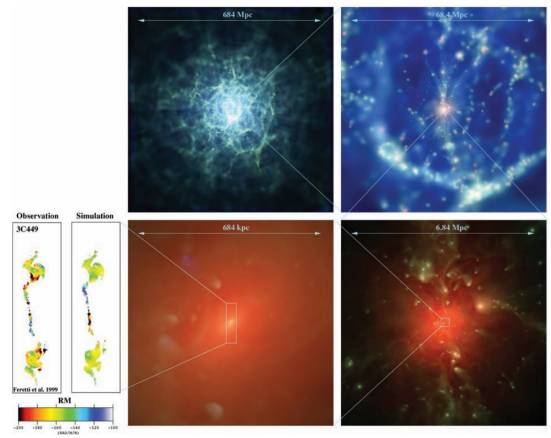
磁場入り銀河円盤シミュレーション
(Dobbs+ 2016)



乱流＋磁場を考慮した分子雲クランプ ($50M_\odot$) での星団形成計算
(Würster+2023)



磁場入り宇宙論的 Zoom-in シミュレーション
(Dolag & Stasyszyn 2011)



SPH の復習

Lagrange 描像での保存式

$$\frac{D\rho^{-1}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \quad \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P, \quad \frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(P\boldsymbol{v}), \quad E = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2$$

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \right\}$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \sum_j m_j \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\right) \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i},$$

$$P_i = (\gamma - 1)\rho_i e_i$$

対応するエネルギー方程式は

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \boldsymbol{v}_j \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j \rho_j^2} \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \right\}$$

SPMHD へ (誘導方程式)

磁気流体では磁場の時間発展を解く必要がある。Euler 形式では，

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

となる。

誘導方程式を Lagrange 形式にすると

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{B}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}$$

あるいは，

$$\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{B} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

となる。

- 前者の方が，磁場と速度勾配が垂直の場合に性質がよい ($D(\boldsymbol{B}/\rho)/Dt = 0$ となり，$|\boldsymbol{B}|$ と ρ が厳密に比例するので)。
- 逆に後者の方は，磁場と速度勾配が平行な場合に性質がよい。

誘導方程式の SPH 離散化法は自明ではない。

SPMHD へ (誘導方程式)

凍結定理 → 磁場の時間発展は密度の時間発展と整合的でなければならない。

- 多くの SPH 法では，密度は連続の式を使って時間発展させずに，和公式を使って粒子配置から直接密度を導出する。
- しかし磁場は密度のように和公式で表現できない。
  $\Longrightarrow$ 和公式と整合的な $D\rho_i/Dt$ をまず考える。

和公式

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)$$

を Lagrange 時間微分する。

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j \left(\underbrace{\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt}}_{\boldsymbol{v}_i} - \underbrace{\frac{D\boldsymbol{x}_j}{Dt}}_{=\boldsymbol{v}_j} \right) \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

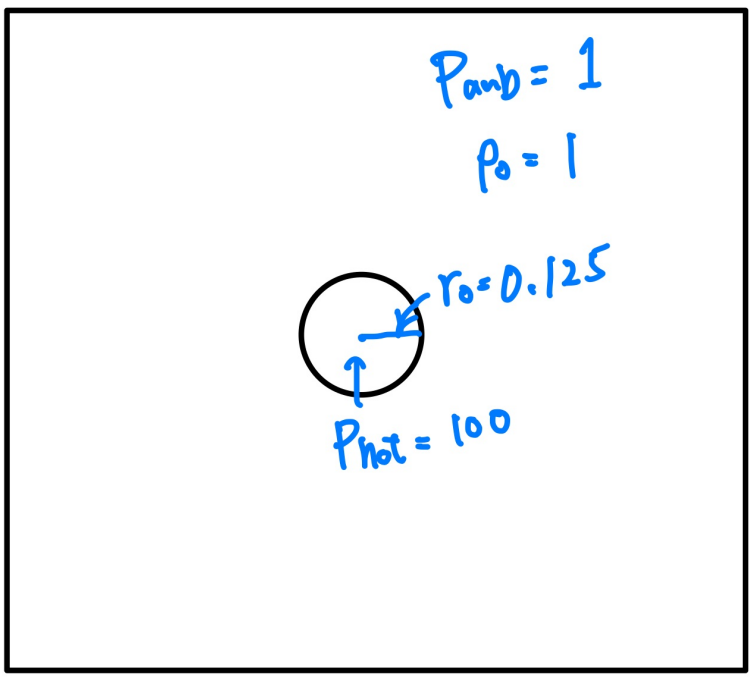
$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \right) \cdot \frac{W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

密度和公式と整合的な密度の時間発展方程式

Blast wave テスト

和公式で求めた ρ_i と，時間発展方程式で求めた密度 ρ_i' を比較しよう。

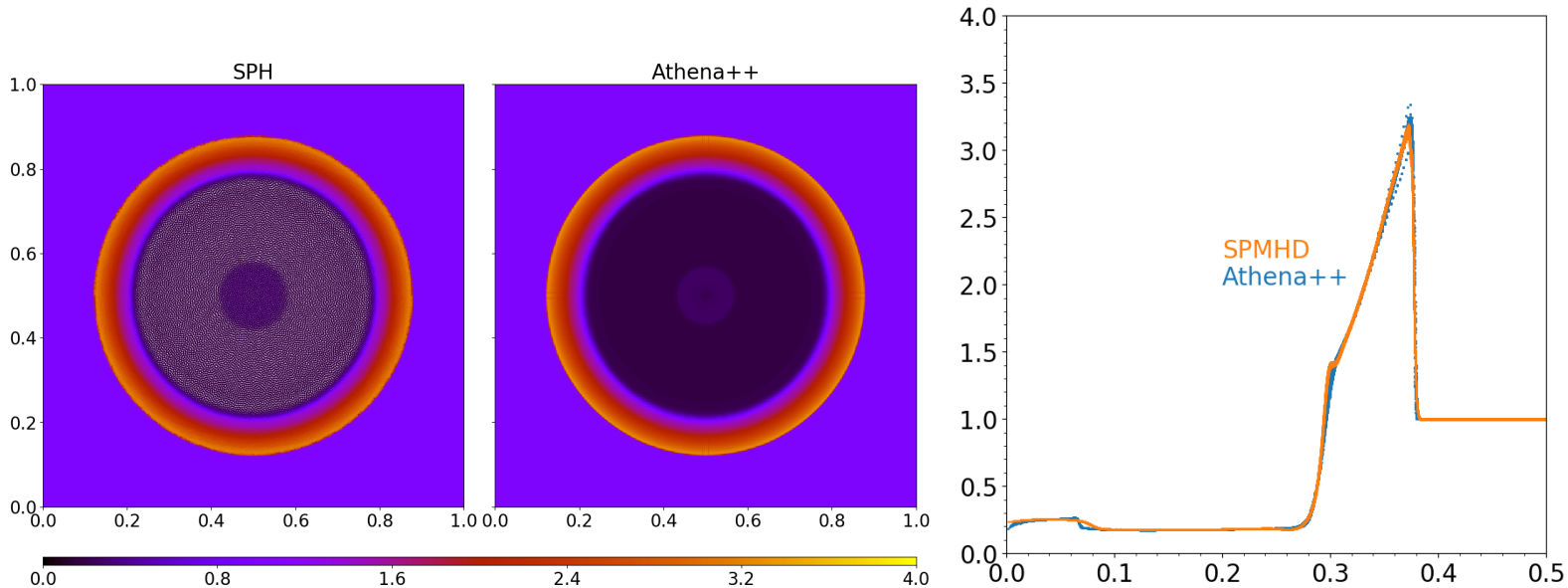
Blast wave テスト：中心の小さな領域にのみ高い熱エネルギーをもつガスを置いて，手を放す。→ 衝撃波が四方八方に伝播する。



密度和公式と整合的な密度の時間発展方程式

Blast wave テスト

まずは和公式で密度を計算する SPH 法 (Godunov SPH, Inutsuka 2002) と格子法 (Athena++, Stone et al. 2020) で計算した結果を比較。分解能 (粒子数と格子数) は 512^2。

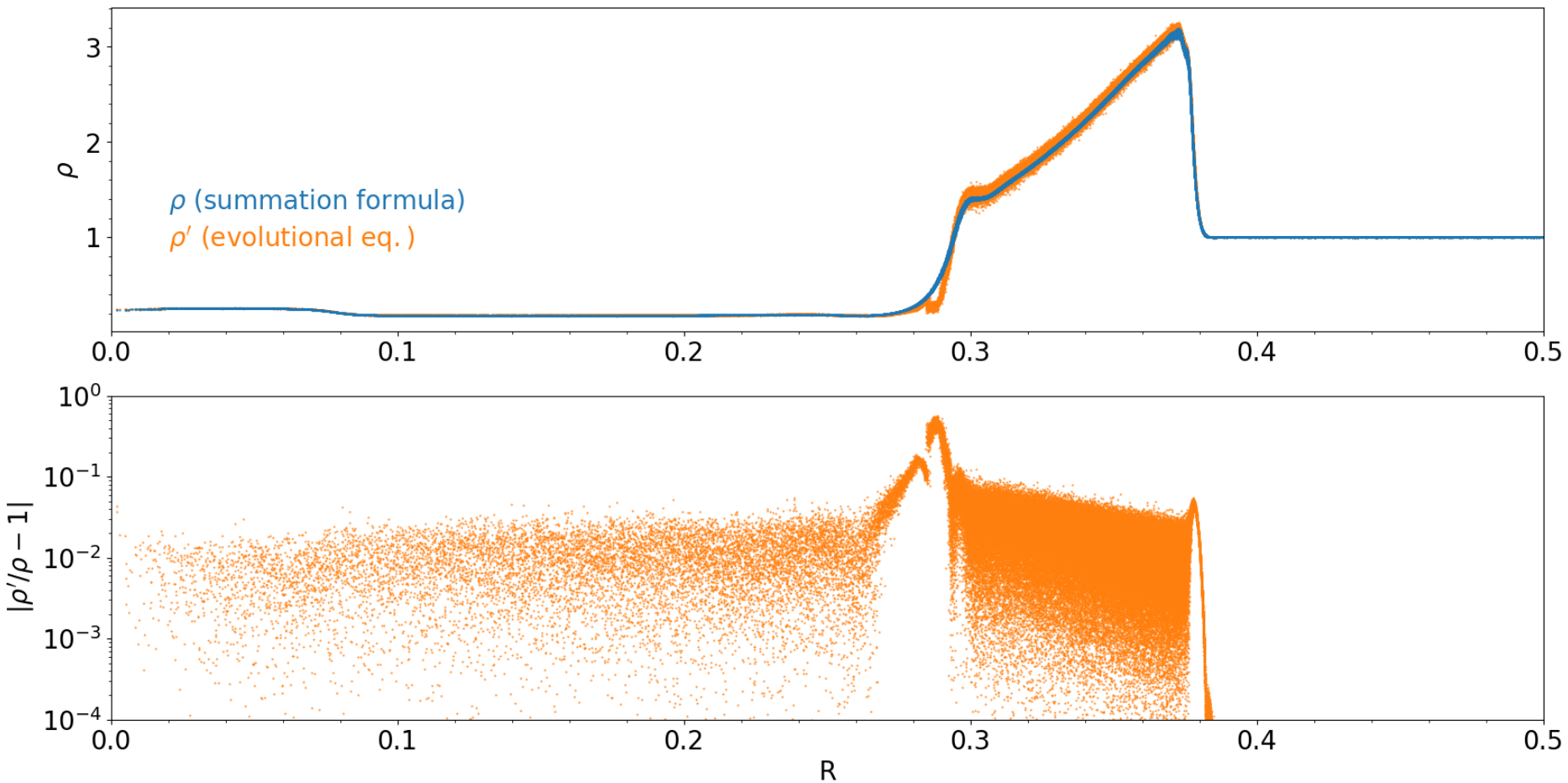


- 1 次元動径分布での Athena++の点がシェル内でばらついているのは，衝撃波進行方向に沿ったセル。
- SPH と格子法の結果は非常によく合っている。
- 衝撃波付近は，SPH の方が Lagrange 法で分解能が高いが，格子法の方が衝撃波をシャープにとらえている (密度ジャンプが 3 倍なので，粒子間距離が初期の値の $3^{-1/2} = 0.7$ にしかなっていない)。

密度和公式と整合的な密度の時間発展方程式

Blast wave テスト

和公式で求めた ρ を使って SPH 計算。別途 ρ' という変数を導入して ($t = 0$ で $\rho' = \rho$)，時間発展方程式を使って ρ' の時間進化を計算 (※ ρ' は SPH 計算には影響しない)。



特に接触不連続面付近 (h が大きく変わる場所,$R \sim 0.29$) で誤差が大きい。
ρ' は ρ に比べ数値的な分散が大きい。

密度和公式と整合的な密度の時間発展方程式

∇h の寄与

和公式を時間微分した際に，smoothing 長の空間変化を無視していた。

$$\begin{aligned}\frac{D\rho_i}{Dt} &= \frac{D}{Dt}\left\{\sum_j m_j W\left(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i(\rho_i)\right)\right\} \\ &= \sum_j m_j \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\right) \cdot \frac{W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \sum_j m_j \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial h_i} \underbrace{\frac{Dh_i}{Dt}}_{=\frac{\partial h_i}{\partial \rho_i}\frac{D\rho_i}{Dt}}\end{aligned}$$

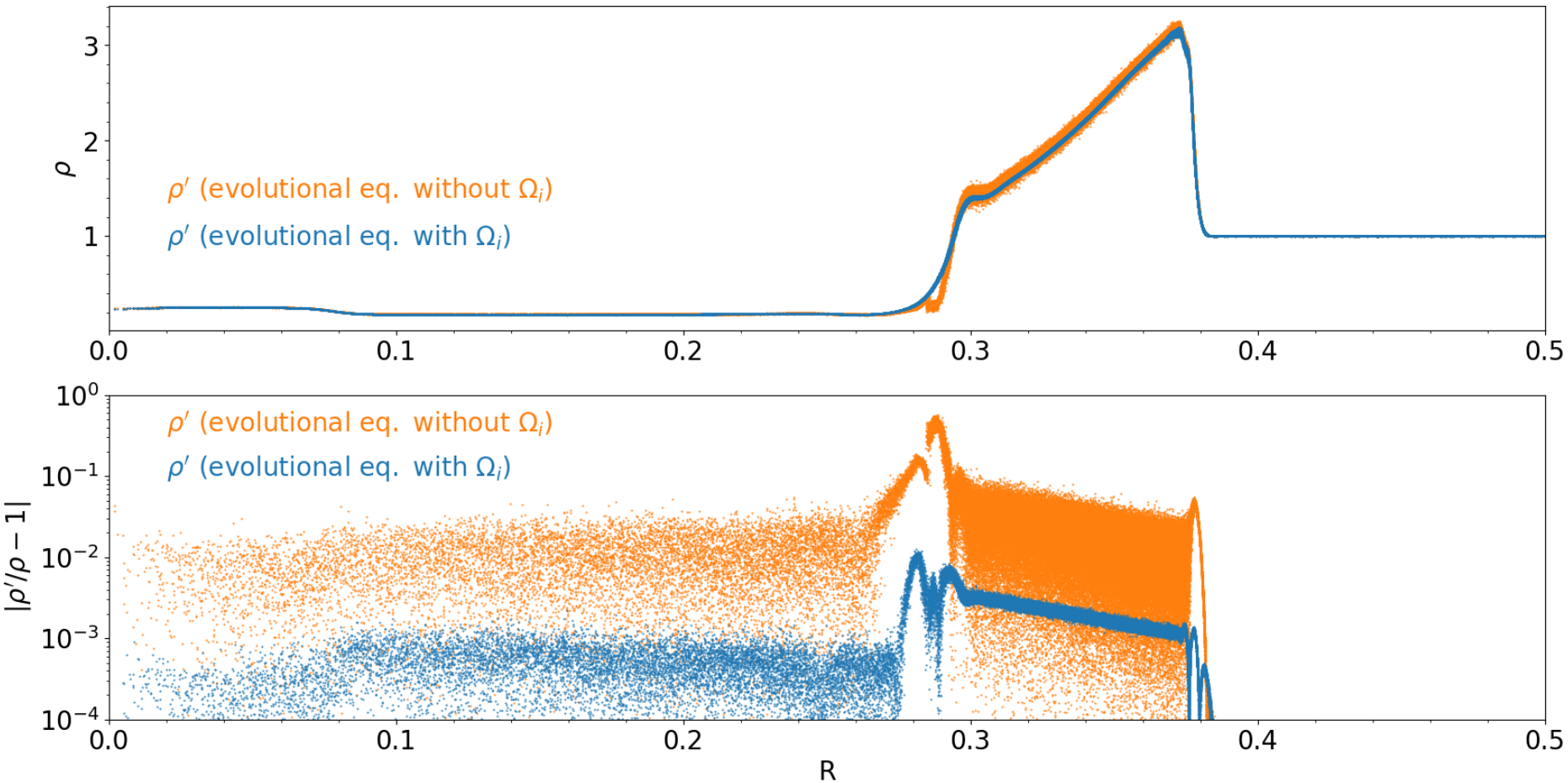
$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \frac{1}{\Omega_i}\sum_j m_j(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

$$\Omega_i^{-1} = 1 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial \rho_i}\right)\sum_j m_j \frac{\partial W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j, h)}{\partial h}$$

$h_i \propto (m_i/\rho_i)^{1/d}$ の場合は，$\partial h_i/\partial \rho_i = h_i/(\rho_i d)$

密度和公式と整合的な密度の時間発展方程式

∇h の寄与



- Ω_i を考慮すると，ρ' は ρ にほぼ一致するので，上のパネルには ρ を載せていない。
- Ω_i を考慮すると，$|\rho'/\rho - 1|$ が一桁以上小さくなる！

密度和公式と整合的な磁場の時間発展方程式

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \frac{1}{\Omega_i}\sum_j m_j(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\cdot\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

と，$D\rho_i/Dt = -(\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}))_i$ を比較すると，

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{v})_i = \frac{1}{\Omega_i\rho_i}\sum_j m_j(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\cdot\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

この式を応用すると，磁場の発展方程式は，

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}_i}{\rho_i}\right) = \frac{\boldsymbol{B}_i}{\rho_i}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})_i = \frac{1}{\Omega_i\rho_i}\sum_j m_j(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{B}_i\cdot\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

となる。

- $\boldsymbol{B}$ が一様で，全粒子の速度が $\boldsymbol{B}$ を向いている場合，
  上記の磁場の時間発展方程式は，密度の時間発展方程式を使って書き換えると，$D\boldsymbol{B}_i/Dt = 0$ が導ける (ただし，実際は時間方向の離散化誤差がはいる)。
- $\boldsymbol{B}$ が一方向を向いていて，全粒子の速度が磁場に垂直な場合。
  $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ が垂直なので，$D(\boldsymbol{B}_i/\rho)/Dt = 0$ となる。

SPMHD へ (磁気流体の Lagrange 形式の保存式)

磁気流体の運動方程式とエネルギー方程式を Lagrange 形式で書き下すと以下になる。

$$\frac{Dv_\mu}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_\nu \mathcal{T}_{\mu\nu},$$

$$\frac{De_{\rm tot}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_\nu (\mathcal{T}_{\mu\nu} v_\mu), \quad e_{\rm tot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + e + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi\rho}$$

圧力が Maxwell 応力を加えた応力テンソルに変わる

$$P \Longrightarrow \mathcal{T}_{\mu\nu} = \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right)\delta_{\mu\nu} - \frac{B_\mu B_\nu}{4\pi}$$

※この資料では，ベクトルおよびテンソル成分を表すときにギリシャ文字の上付き添字を使う。粒子の添字 (アルファベット) と区別するためであって，相対論とは関係ない。

SPMHD へ (磁気流体の Lagrange 形式の保存式)

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \right\}$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \boldsymbol{v}_j \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j \rho_j^2} \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \right\}$$

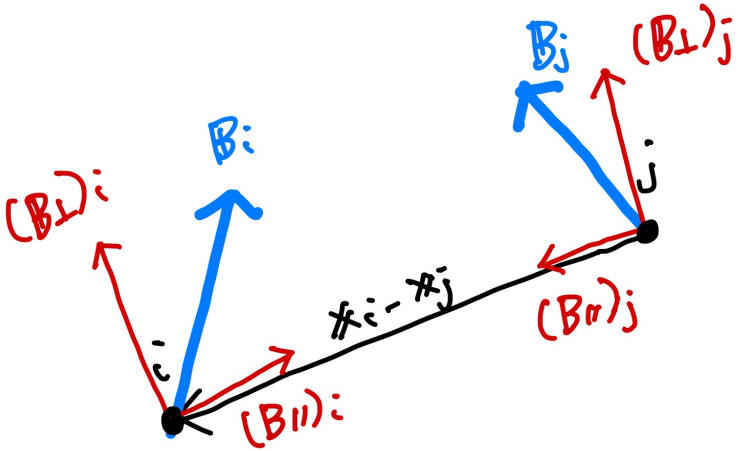
$\Longrightarrow$ 磁気流体へ。圧力を応力テンソルに置き換えるだけ。

$$\frac{d(v_i)_\mu}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu}}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu}, \right\}$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}}{\Omega_i \rho_i^2} (v_j)_\mu \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu}}{\Omega_j \rho_j^2} (v_i)_\mu \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu}, \right\}$$

粒子間ベクトルに基づいた磁場ベクトルの分解

$$\frac{d(v_i)_\mu}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}}{\Omega_i \rho_i^2} \underbrace{\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu}}_{\propto (x_i)_\nu - (x_j)_\nu} + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu}}{\Omega_j \rho_j^2} \underbrace{\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu}}_{\propto (x_i)_\nu - (x_j)_\nu} \right\}$$



粒子間単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{ij}$ に平行な磁場成分 ($B_\parallel$) と垂直な磁場成分 ($\boldsymbol{B}_\perp$) に分解

- $B_{\parallel,i} = \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{e}_{ij}$
- $\boldsymbol{B}_{\perp,i} = \boldsymbol{B}_i - B_{\parallel,i} \boldsymbol{e}_{ij}$

$$(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu} (e_{ij})_\nu = \underbrace{\left(P_i + \frac{(\boldsymbol{B}_{\perp,i})^2}{8\pi} - \frac{(B_{\parallel,i})^2}{8\pi} \right) (e_{ij})_\nu}_{\boldsymbol{e}_{ij} \text{ に沿った方向}} - \underbrace{\frac{B_{\parallel,i} (B_{\perp,i})_\mu}{4\pi}}_{\boldsymbol{e}_{ij} \text{ に垂直な方向}}$$

強磁場環境下で数値的に不安定：

Tensile 不安定性 (Swegle et al. 1994)

粒子 i と粒子 j の相互作用計算で登場する粒子 i の実効的な応力

$$(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}(e_{ij})_\nu = \underbrace{\left(P_i + \frac{(\boldsymbol{B}_{\perp,i})^2}{8\pi} - \frac{(B_{\parallel,i})^2}{8\pi}\right)(e_{ij})_\nu}_{\boldsymbol{e}_{ij} \text{ に沿った方向}} - \underbrace{\frac{(B_{\parallel,i})(B_{\perp,i})_\mu}{4\pi}}_{\boldsymbol{e}_{ij} \text{ に垂直な方向}}$$

強磁場環境下 (磁気圧 $\gg$ 熱圧) では，磁場 ($\boldsymbol{B}_i$) が $\boldsymbol{e}_{ij}$ がほぼ揃った粒子間 ($(B_i)_\parallel \gg |(\boldsymbol{B}_\perp)_i|$) 相互作用において，$\boldsymbol{e}_{ij}$ に沿った応力が負になる。

$$\left(P_i + \frac{(\boldsymbol{B}_{\perp,i})^2}{8\pi} - \frac{(B_{\parallel,i})^2}{8\pi}\right) < 0$$

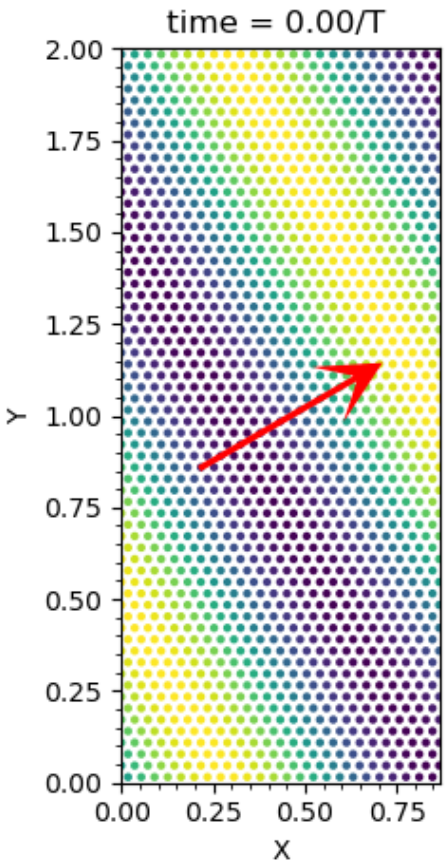
圧力値が負になる場合，Tensile(引張) 不安定性が起こることがよく知られている (Swegle et al. 1994)。Tensile 不安定性は磁気流体だけでなく，弱圧縮性 SPH 法や弾性体 SPH 法で知られている数値不安定性。

- 通常の SPH では，圧力が正なので，粒子同士が押しのけ合う。
- 粒子間ベクトルに沿った応力値が負になる場合，粒子間に引き合う力が生じる。その結果，粒子の数値的なクランピングがおこる。(本当は W'' と応力の積が重要)

Tensile 不安定性の実演

円偏光した Alfvén 波の伝播

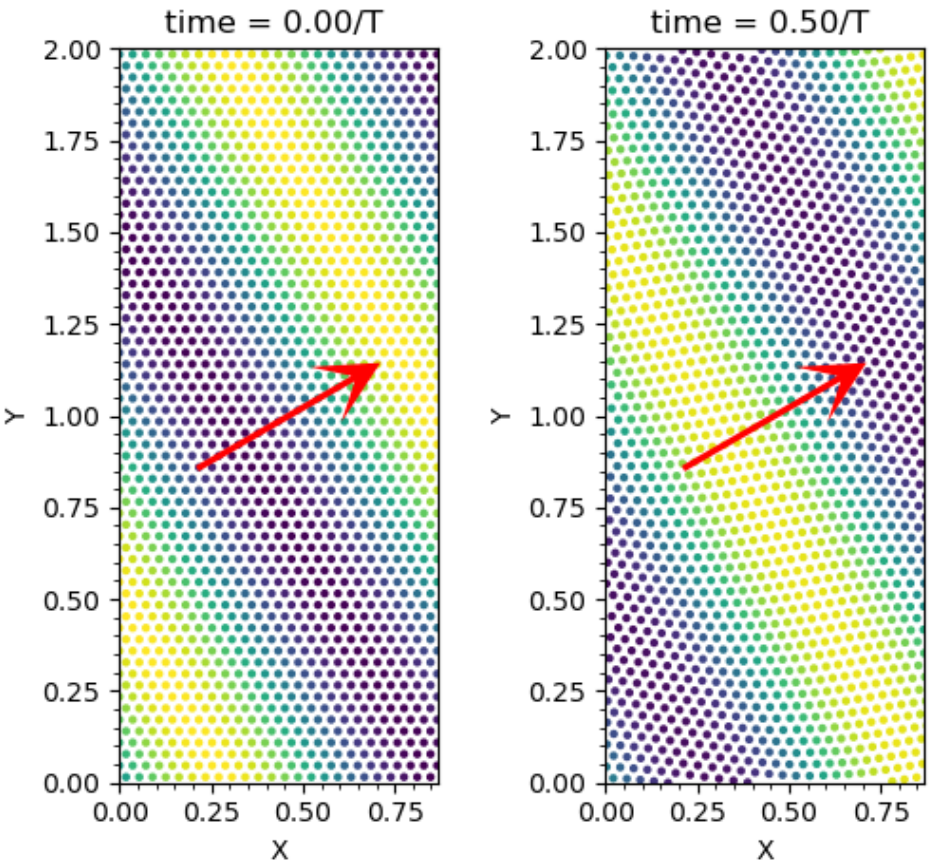
x 軸に対して 30° の角度 (赤矢印) 方向に伝播する Alfvén 波 (詳しくは実習資料を参照)。点が SPH 粒子を表し，色が B_z を表す。



Tensile 不安定性の実演

円偏光した Alfvén 波の伝播

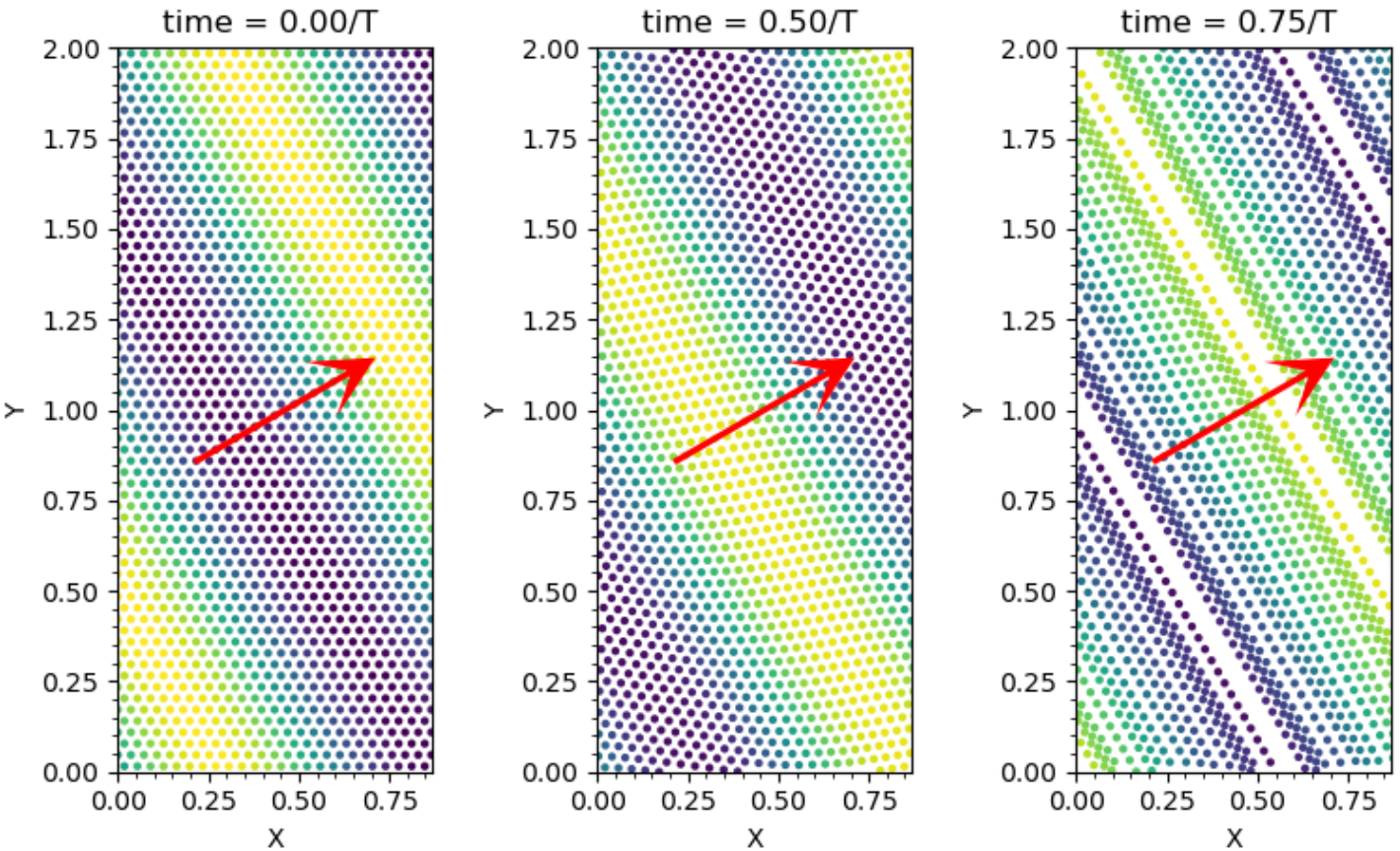
x 軸に対して 30° の角度 (赤矢印) 方向に伝播する Alfvén 波 (詳しくは実習資料を参照)。点が SPH 粒子を表し，色が B_z を表す。



Tensile 不安定性の実演

円偏光した Alfvén 波の伝播

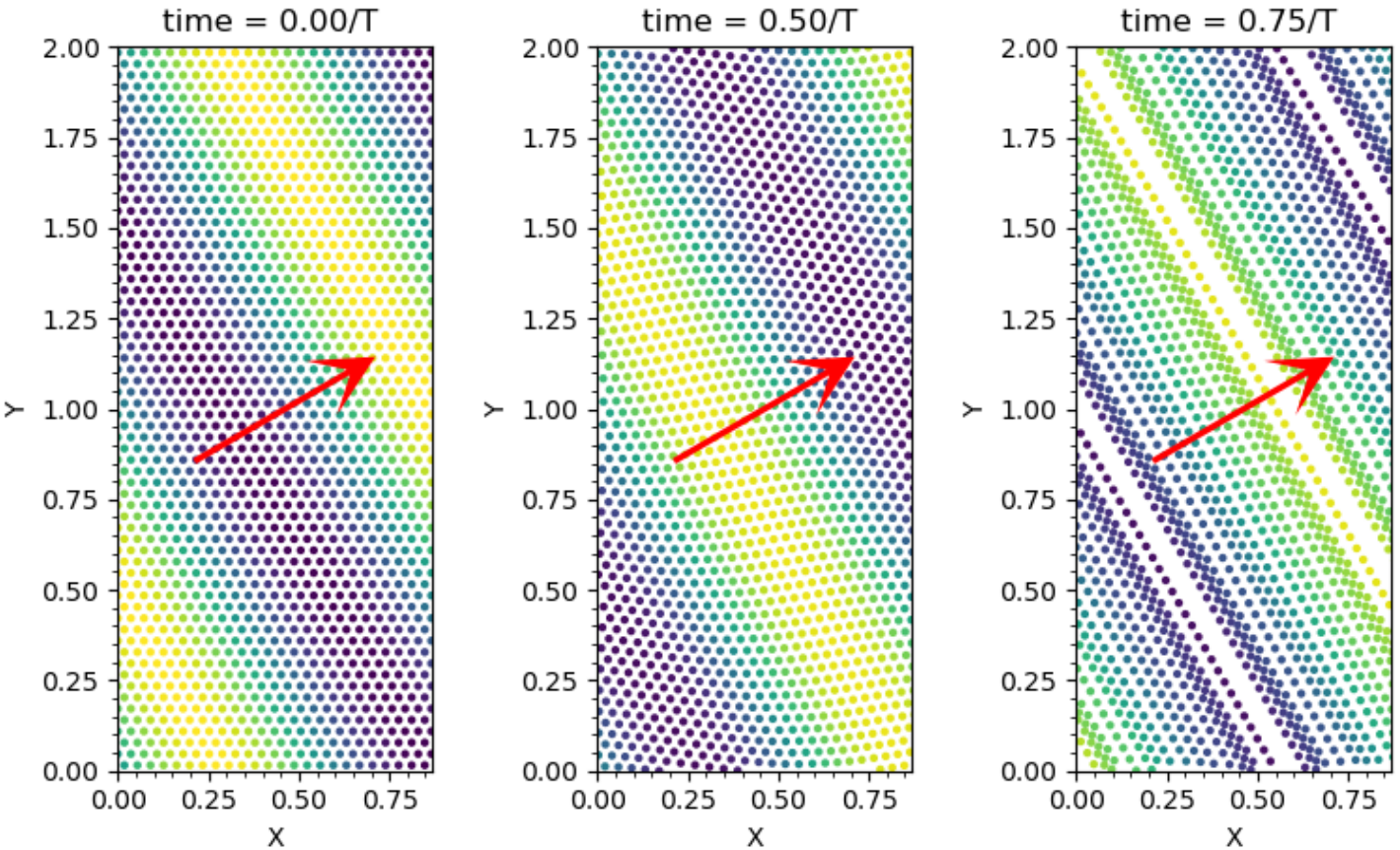
x 軸に対して $30°$ の角度 (赤矢印) 方向に伝播する Alfvén 波 (詳しくは実習資料を参照)。点が SPH 粒子を表し，色が B_z を表す。



Tensile 不安定性の実演

円偏光した Alfvén 波の伝播

x 軸に対して $30°$ の角度 (赤矢印) 方向に伝播する Alfvén 波 (詳しくは実習資料を参照)。点が SPH 粒子を表し，色が B_z を表す。



磁場に沿った方向 ($\boldsymbol{e}_{ij}$ に沿った応力が負) に粒子がクランピングを起こす (不安定性)。

SPMHD において Tensile 不安定性を消す手法

- 粒子が接近しすぎた場合，人工斥力を加える (Monaghan 2000。@弱圧縮性 SPH)。
- $\boldsymbol{e}_{ij}$ に沿った応力が負にならないように，応力に一定値 (T_0，例えば計算領域内での最大の応力値) を加えて嵩上げする (Phillip and Monaghan 1985)。
  - T_0 より応力が非常に小さい場所では，SPH 離散化誤差による影響が強く出る。
- **$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ に比例する項を運動方程式とエネルギー方程式に加える (Brøve et al. 2001)。**

$$\frac{Dv_\mu}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_\nu \mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{\xi}{\rho} B_\mu \nabla \cdot \boldsymbol{B},$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_\nu \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} v_\mu\right) - \frac{\xi}{\rho}(\boldsymbol{B}\cdot v)\nabla \cdot \boldsymbol{B},$$

  - $\xi = 1$ の場合，右辺はローレンツ力 $-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ に一致する。

現在使われている SPMHD は，この方法を採用している。
ただし運動量と全エネルギーが丸め誤差で保存しないという欠点がある。

SPMHD において Tensile 不安定性を消す手法

$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ に比例する項を加えた SPMHD の運動方程式とエネルギー方程式

$$\frac{d(v_i)_\mu}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu} + \xi (B_i)_\mu (B_j)_\nu}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu} + \xi (B_i)_\mu (B_j)_\nu}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right\}$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{ \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu} (v_j)_\mu + \xi \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{v}_i (B_i)_\nu}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu} (v_i)_\mu + \xi \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{v}_i (B_j)_\nu}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right\}$$

SPMHD において Tensile 不安定性を消す手法

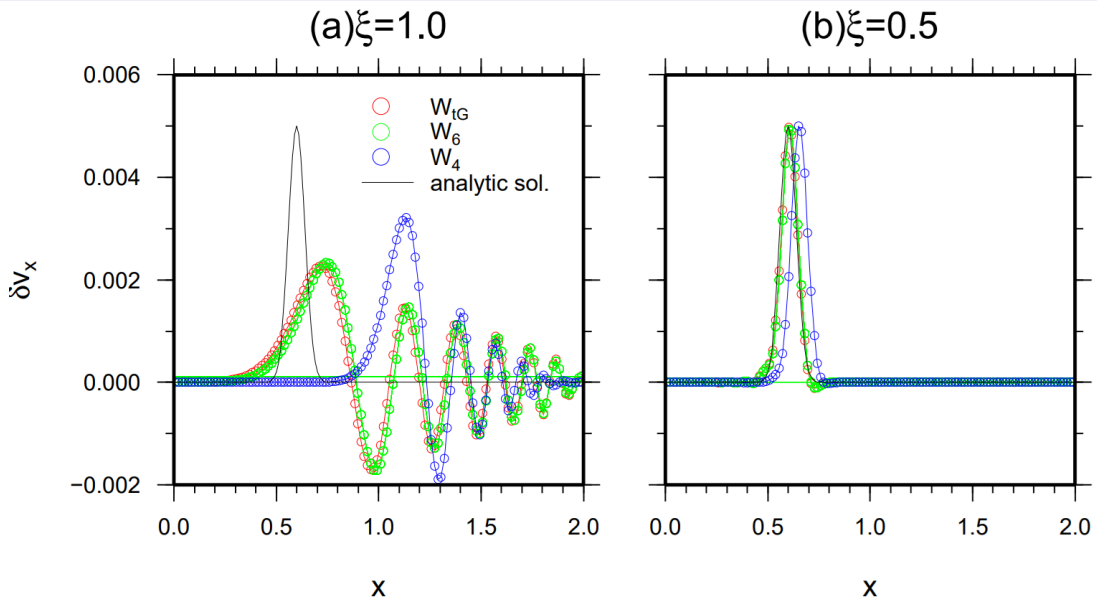
最適の ξ は？

Iwasaki (2015) では，von Neumann 安定性解析を用いて，

$$\xi \geq \frac{1}{2}$$

であれば，安定であることを示した (Brørve et al. 2001 も参照)。

一様磁場に沿って伝播する孤立波



孤立波は磁場の影響を受けずに波形不変のまま音速で伝播するはずだが，$c_{\mathrm{A}} \gg c_{\mathrm{S}}$ であるため，離散化誤差によって孤立波の運動に磁場が影響しうる。

- $\xi = 1$ (Lorentz 力と一致): 細かい波が超音速で伝播
- $\xi = 1/2$ 伝播速度のエラーが消える。

経験的には β が 0.01 よりも低くなると，$\xi = 1/2$ だと数値不安定になりがち。
→ β が非常に低い場所では $\xi \sim 1$ に。(実習で確認できる)

数値散逸の導入：人工散逸

衝撃波を適切に捉えるためには散逸が必要。SPMHD では大きく分けて 2 つの方法が使われている。**人工散逸**と **Godunov 法**

人工散逸

最近の SPH では Monaghan 1999 によって提案された人工散逸が使われる。運動方程式に導入される人工粘性の例は以下となる。

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right)_{\mathrm{diss}} = \sum_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} \underbrace{\alpha v_{\mathrm{sig}} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|}_{D} \underbrace{\frac{(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\cdot \boldsymbol{e}_{ij}}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|}}_{\nabla\cdot v} \boldsymbol{e}_{ij} \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{e}_{ij} \cdot \frac{\partial W(h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \boldsymbol{e}_{ij} \cdot \frac{\partial W(h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right)$$

連続の極限では，拡散係数 $D = \alpha v_{\mathrm{sig}} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$ とする粘性項 $\sim \nabla(D\nabla \cdot v)$

同様に，エネルギー方程式と誘導方程式にも人工散逸 (熱伝導と電気抵抗) を入れる。

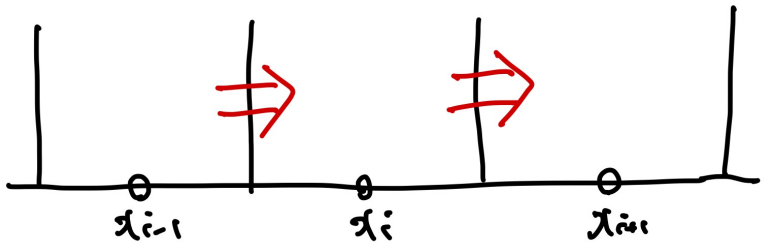
必要な場所でだけ最低限の人工散逸が効いて，不必要な場所では人工散逸が効かないようにするために，様々な手法が提案されている (斎藤さんの資料を参照のこと)。

数値散逸の導入：Godunov 法

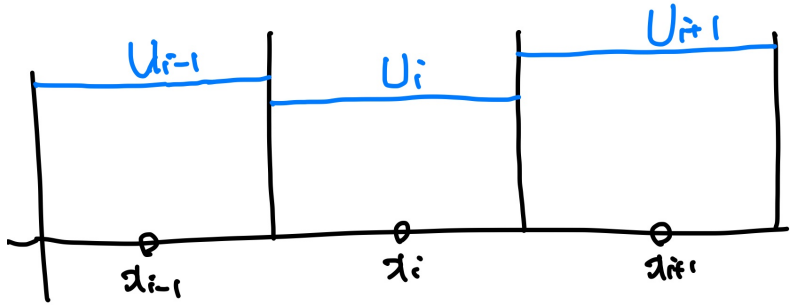
格子法を用いた天文シミュレーションでは人工粘性はほとんど使われておらず，Godunov 法と呼ばれる手法から発展した手法が標準

Godunov 法 (Godunov 1959)

有限体積法では，空間を有限の大きさのセルで区切り，セル間を仕切る壁を通して流れる流束の差し引きで，セル内の物理量の時間変化を計算する手法である。



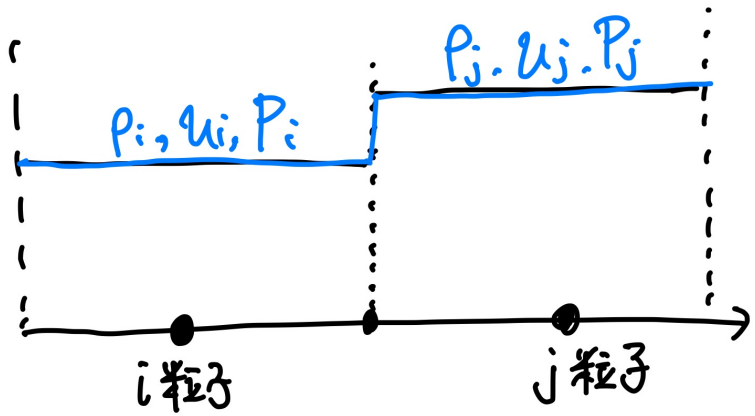
Riemann 問題とは，壁で仕切られた異なる物理量をもつ一様な 2 種類のガスを初期条件とする初期値問題。この問題は非線形問題であるが厳密解が存在する。この厳密解を使って壁を通過する流束を計算。



Godunov SPH (Inutsuka 2002)

Godunov SPH (Inutsuka 2002) の 2 つの改善

- i 粒子と j 粒子の相互作用において，Riemann 問題の解を使う。



  ラグランジュ法なので，場合分けは不要。

  空間精度を上げるため，壁の位置の初期値を線形内挿によって求める (Inutsuka 2002, Iwasaki and Inutsuka 2011)。

- 積分を残した形で SPH 法を再定式化。最後に積分を線形補間または三次スプライン補間で近似。ただし，2 次元と 3 次元では三次スプライン補間による実装は数値不安定 (Sugiura and Inutsuka 2016, $P > 0$ のとき)。

Iwasaki & Inustuka (2011) は，Godunov 法を SPMHD 法に適用した。

二日目の実習では Godunov SPMHD を使う。詳しい式は実習資料に記載。

$\nabla \cdot B = 0$ の維持

誘導方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

に $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させると，

$$\frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \{\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\} = 0$$

となり (回転の発散は常にゼロ)，$t = 0$ で $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が満たされていれば，その後の進化でも満たされる。しかし，SPMHD 方程式で時間発展した磁場は $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ を厳密には満たさず誤差がある。

SPMHD 法および格子法では保存形式を基に離散化するため，ローレンツ力に対応する力を Maxwell 応力テンソルの勾配で求めている。

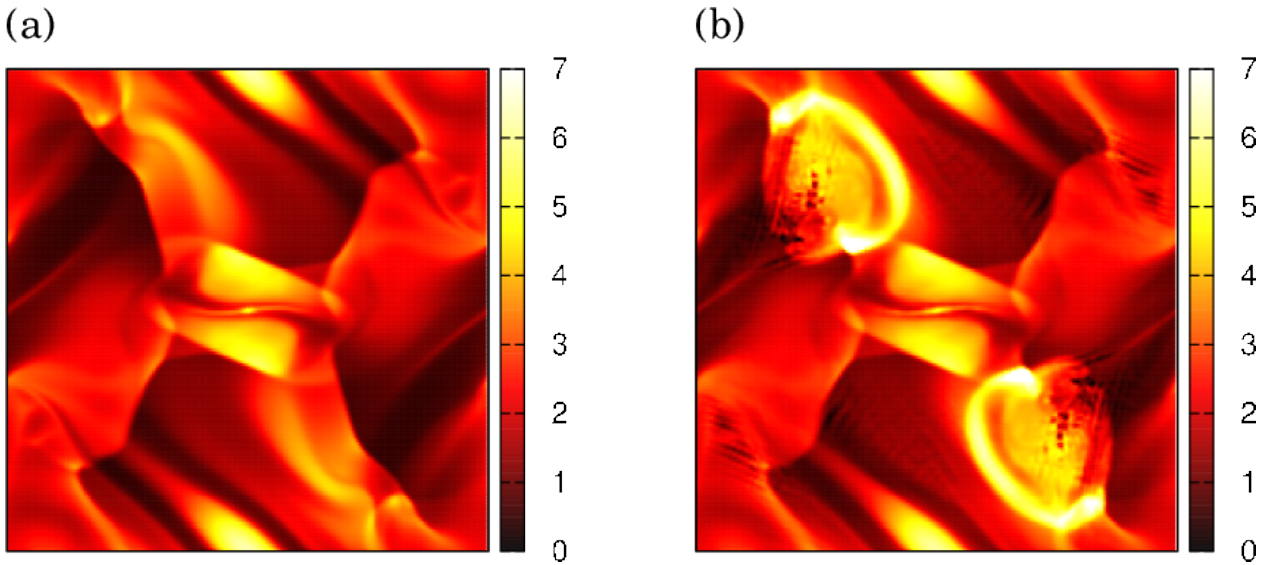
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi} \boldsymbol{\mathcal{I}} - \frac{\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}}{4\pi} \right\} = \underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}_{=\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \text{ (ローレンツ力)}} + \underbrace{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})}_{\text{non-zero if } \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \neq 0}$$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ が有限だと，磁場に沿った方向に力が働いてしまう！

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 問題

以下は格子法による Orszag-Tang 渦問題の結果 (詳細は実習資料を参照)。

- 右図 (b) は，$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ のエラーに対し何も対処しなかった場合の結果。磁場に沿った人工的な力が働き計算が破綻する。
- 左図 (a) は，とある対処をした場合の結果。



CANS+のマニュアルより: https://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html

※ ちなみに SPMHD の場合は，$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ に比例する源泉項を付け加えたことで計算が破綻することはないが，$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ のエラーが蓄積する。

$\nabla \cdot B = 0$ 問題への対処法 (格子法)

先に磁気流体力学の数値解法が発展した格子法では，様々な $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ エラーを除去する手法が提案されている。

- 8-wave formulation (Powell 1999)
  保存形式で解くことを諦める。$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ に比例する項を運動方程式とエネルギー方程式・誘導方程式に加える。この手法は源泉項入りの SPMHD と似ている。
- **Hyperbolic Divergence Cleaning (HDC 法，双曲型発散除去法) (Deadner 2002)**
  実装が簡単で，空間高次精度化も容易なので広く使われている (あとで詳細を説明)。

  いくつか流派があり，Sfumato (Matsumoto, T. 2008) と CANS+ (Matsumoto, Y.+ 2019) では異なる定式化が使われている。

- **Constrained Transport(CT) 法 (Evans & Hawley 1995)**
  格子内の体積成分 $\oint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} dV$ は，Gauss の定理から，$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ と変形できる。磁場を格子の表面で定義して，誘導方程式をうまく離散化することで，$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ を常に丸め誤差で時間的に一定にできる。

  SPH では「面」を定義することができないため，CT 法の SPMHD への適応は困難。

$\nabla \cdot B = 0$ 問題への対処法 (格子法)

先に磁気流体力学の数値解法が発展した格子法では，様々な $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ エラーを除去する手法が提案されている。

- 8-wave formulation (Powell 1999)
  保存形式で解くことを諦める。$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ に比例する項を運動方程式とエネルギー方程式・誘導方程式に加える。この手法は源泉項入りの SPMHD と似ている。
- **Hyperbolic Divergence Cleaning (HDC 法，双曲型発散除去法) (Deadner 2002)**
  実装が簡単で，空間高次精度化も容易なので広く使われている (あとで詳細を説明)。

  いくつか流派があり，Sfumato (Matsumoto, T. 2008) と CANS+ (Matsumoto, Y.+ 2019) では異なる定式化が使われている。
  $\Rightarrow$ SPMHD ではこの手法が用いられる。
- **Constrained Transport(CT) 法 (Evans & Hawley 1995)**
  格子内の体積成分 $\oint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} dV$ は，Gauss の定理から，$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ と変形できる。磁場を格子の表面で定義して，誘導方程式をうまく離散化することで，$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ を常に丸め誤差で時間的に一定にできる。

  SPH では「面」を定義することができないため，CT 法の SPMHD への適応は困難。

双曲型発散除去法 (Dedner et al. 2002)

スカラー場 ψ を導入する。$\mathcal{D}$ をある線型演算子として，

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\psi) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\psi = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \end{cases}$$

を考える。赤字の部分は本来無い項である。

(第 1 式) $\xrightarrow{\partial/\partial t}$ $\partial \mathcal{D}\psi/\partial t + \partial(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})/\partial t = 0$

(第 2 式) $\xrightarrow{\boldsymbol{\nabla}\cdot}$ $\partial(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})/\partial t + \nabla^2\psi = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{D}\psi) - \nabla^2\psi = 0$$

(第 2 式) $\xrightarrow{\boldsymbol{\nabla}\cdot}$ $\partial(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})/\partial t + \nabla^2\psi = 0 \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial \mathcal{D}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})/\partial t + \mathcal{D}\nabla^2\psi = 0$

(第 1 式) $\xrightarrow{\nabla^2}$ $\nabla^2 \mathcal{D}\psi + \nabla^2(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\mathcal{D}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})\} - \nabla^2(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) = 0$$

どんな線型演算子 $\mathcal{D}$ を採用しても，ψ と $(\nabla \cdot B)$ は全く同じ方程式に従う。

双曲型発散除去法 (Dedner et al. 2002)

Dedner+ (2002) は線型演算子として，以下の形を提案した。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{c_{\rm h}^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c_{\rm p}^2}$$

この演算子を使うと，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$ が従う方程式は，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) + \underbrace{\frac{c_{\rm h}^2}{c_{\rm p}^2}}_{\equiv\tau^{-1}}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - c_{\rm h}^2\nabla^2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) = 0$$

となる (ψ も同じ方程式に従う)。この式は電信方程式と呼ばれる種類の偏微分方程式である。

$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})$ エラーが速度 $c_{\rm h}$ で伝播し，時間スケール τ で減衰する。

$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})$ エラーが同じ場所で留まらないように波動として伝わるようにつつ，減衰して小さくしたい，という気持ちが入っている。

双曲型発散除去法のパラメータ

c_h と τ(あるいは c_p) はパラメータである。

$\nabla \cdot B$ の伝播速度 c_h

CFL 条件が許す最大の速度に設定する (Δt 以内に，最小の格子幅 Δx_min 横切る速度)。

$$c_\mathrm{h} = C_\mathrm{CFL} \frac{\min_i(\Delta x_i)}{\Delta t}$$

$\nabla \cdot B$ の減衰率 $\tau^{-1} = c_\mathrm{h}^2/c_\mathrm{p}^2$

原論文 (Dedner+2002) では，$\tau^{-1} = c_\mathrm{h}/0.18$ が格子幅によらず最適な値といっている。

しかし，(時間次元の量)=(速度次元の逆数) になっていて，気持ち悪い！

Mignone & Tzeferacos (2010) は，以下を提案

$$\tau^{-1} = \alpha \frac{c_\mathrm{h}}{\min_i(\Delta x_i)} = \frac{\alpha C_\mathrm{CFL}}{\Delta t}$$

α は小さすぎず ($\alpha \gtrsim 0.02$)，大きすぎなければ，
$\boldsymbol{\nabla \cdot B}$ 除去の性能は α にほとんど依存しない。

双曲型発散除去 (HDC) 法の SPMHD への実装

HDC 法の SPMHD への実装は複数のグループで行われている。

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)\right]_{\mathrm{HDC}} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\psi$$
$$\frac{D\psi}{Dt} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + c_{\mathrm{h}}^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} - \frac{\psi}{\tau}$$
$$\left[\frac{DE_{\mathrm{tot}}}{Dt}\right]_{\mathrm{HDC}} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi$$

Iwasaki & Inutsuka (2013), Iwasaki & Inutsuka (unpublished)

- HDC 法の元々の精神に則り，空間依存しない一定の c_{h} と α を使う。
- $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$ と ψ の伝播を適切に解けるように特性曲線法を使用。

Tricco+ (2012, 2016)

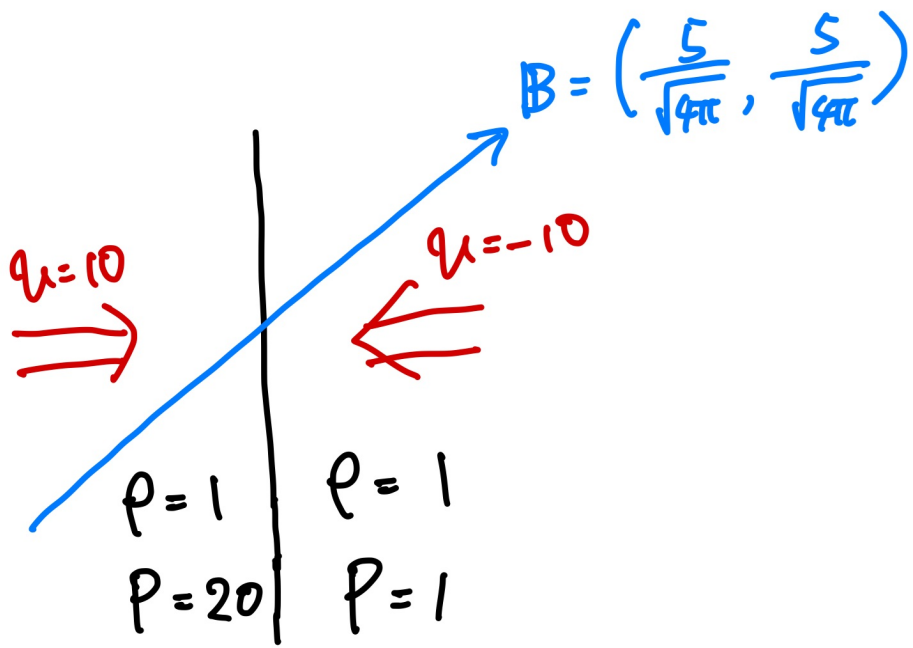
粒子毎に異なる c_{h} と α を使う。元々の HDC 法の定式化は両者を一定値とすることで成り立っているので，空間依存させて非線形にして良いのか不安だが，テスト計算はうまくいっているよう。私は試したことがないので比較はしたことがない。

Colliding Flow テスト

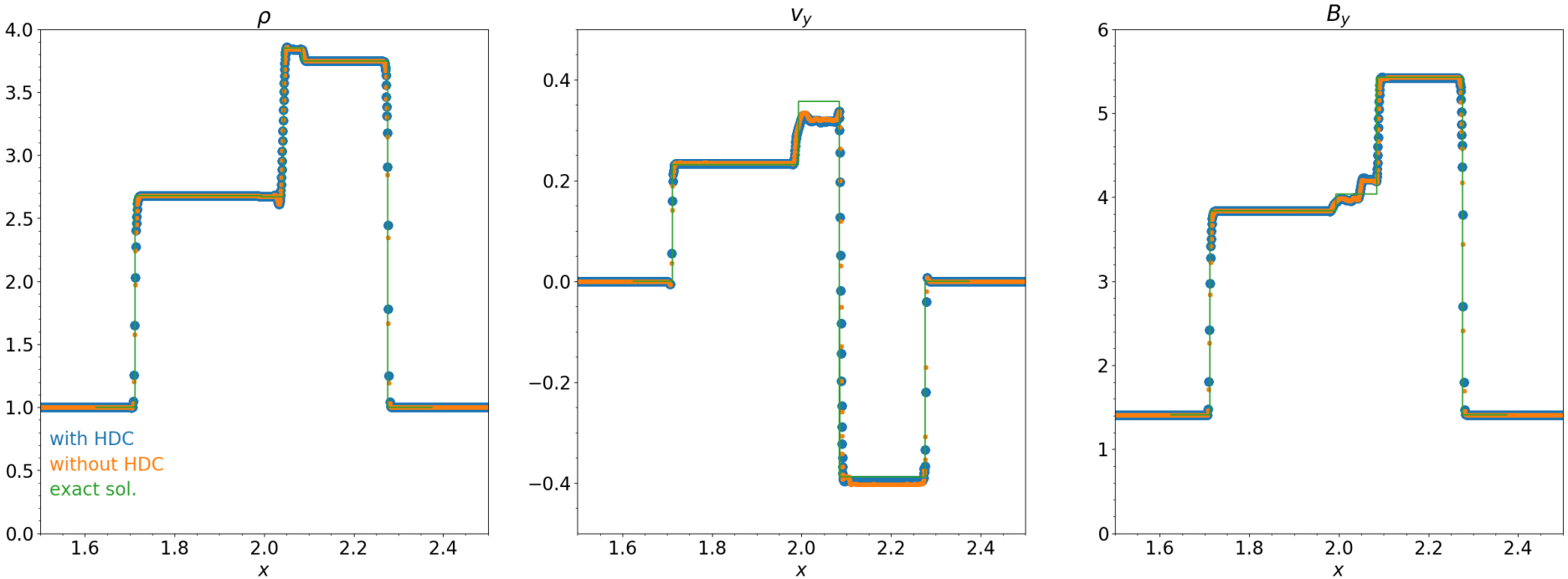
ある不連続面 (壁) を介して，２つのガス (全ての物理量が一定) が存在する状況を考える。これを初期状態とする初期値問題を Riemann 問題という。

Riemann 問題には厳密解が知られているので，数値計算法のテスト問題としてよく使われる。

下に示しているのは，強い衝撃波が生じる Riemann 問題。



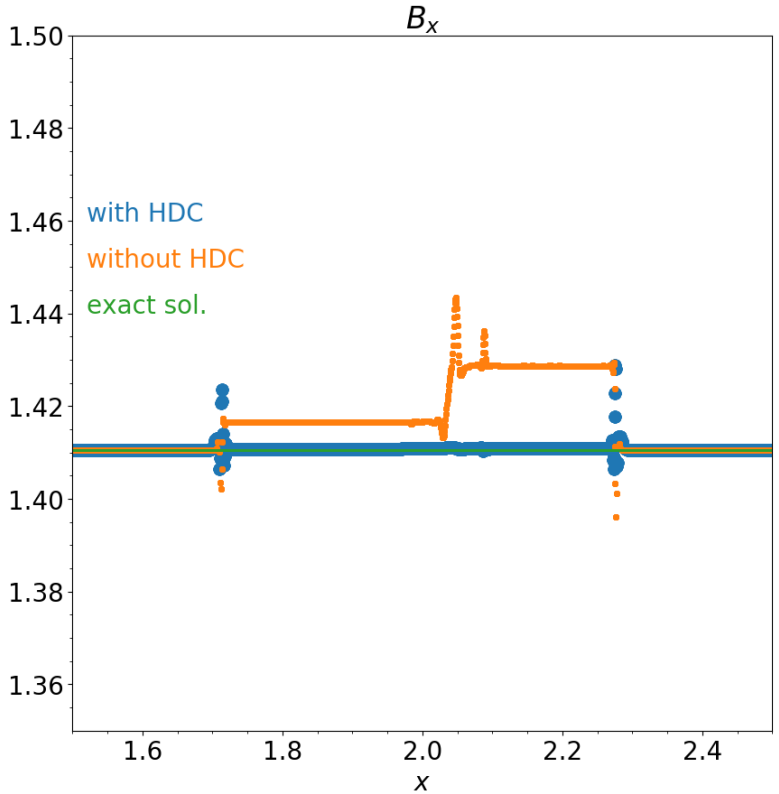
Colliding Flowテスト



- 全体的に厳密解と比較的よくあっている。ただし，v_y が厳密解からずれる。これは解いている方程式が保存系ではないため。
- HDC 法を加えるかどうかで，ρ と B_y の分布はあまり変わらない。
- v_y 分布は，HDC 法を加えたことで，右に伝播する fast 衝撃波後面の値が少しだけ厳密解に近づく。

Colliding Flow テスト

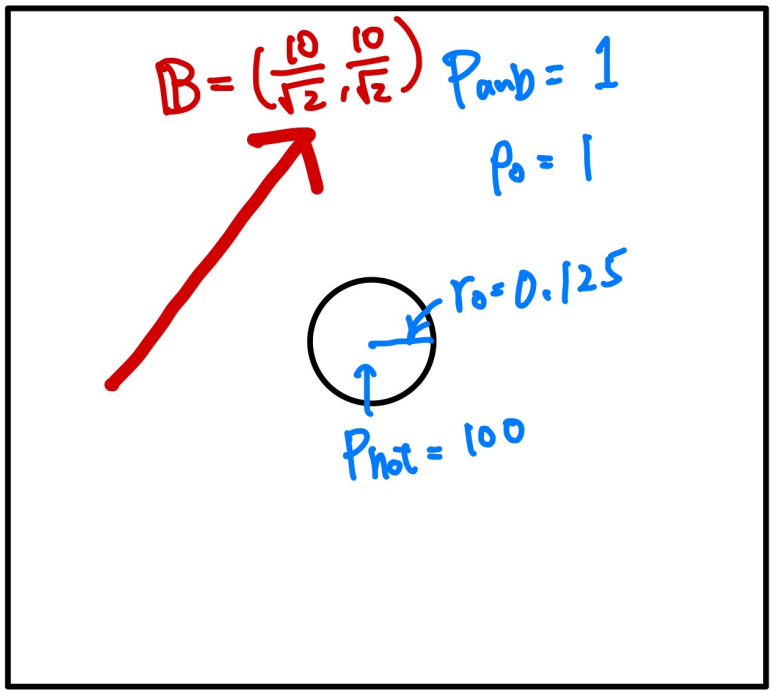
一次元問題では，$\partial B_x/\partial x = 0$ でなければならない。



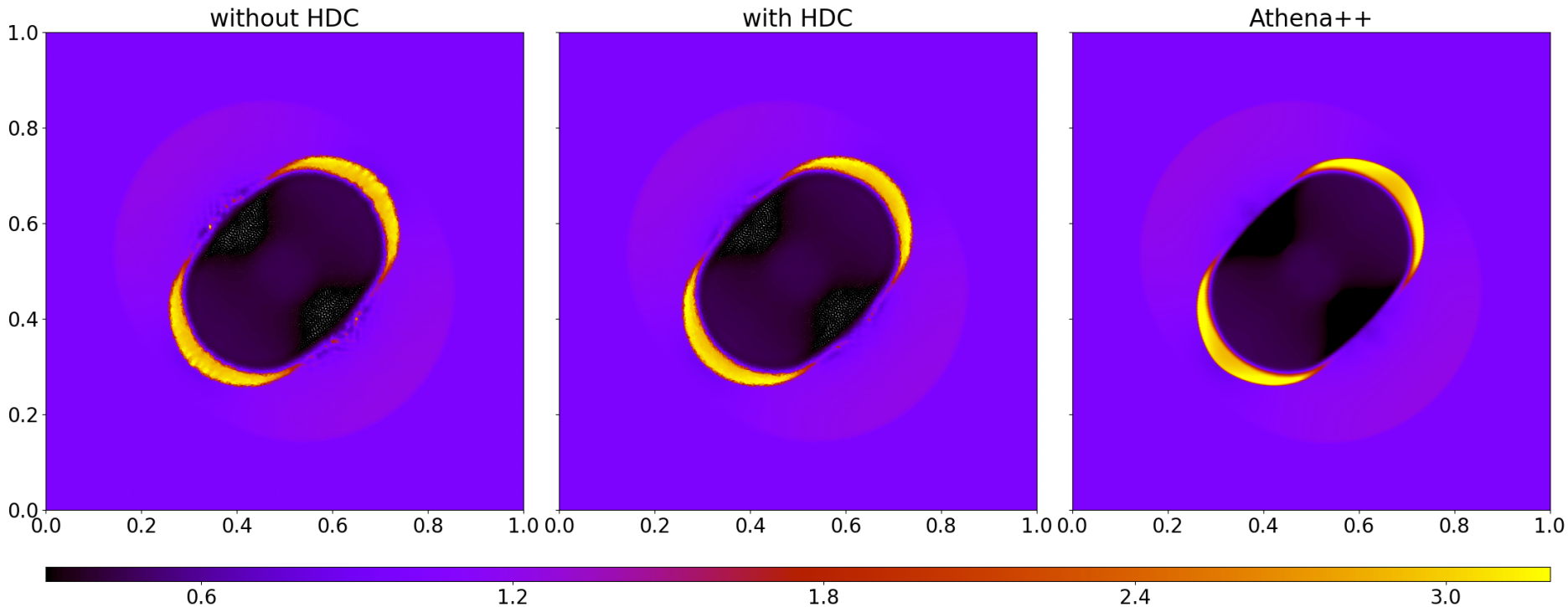
- HDC 法を使わない場合，衝撃波面後面で B_x がジャンプしている。
  磁気単極子が生成。
- **HDC 法によって，$\nabla \cdot B$ 生成が大きく抑えられる。**

MHD Blast Waveテスト

最初の方に示した Blast wave テストに磁場を加える。

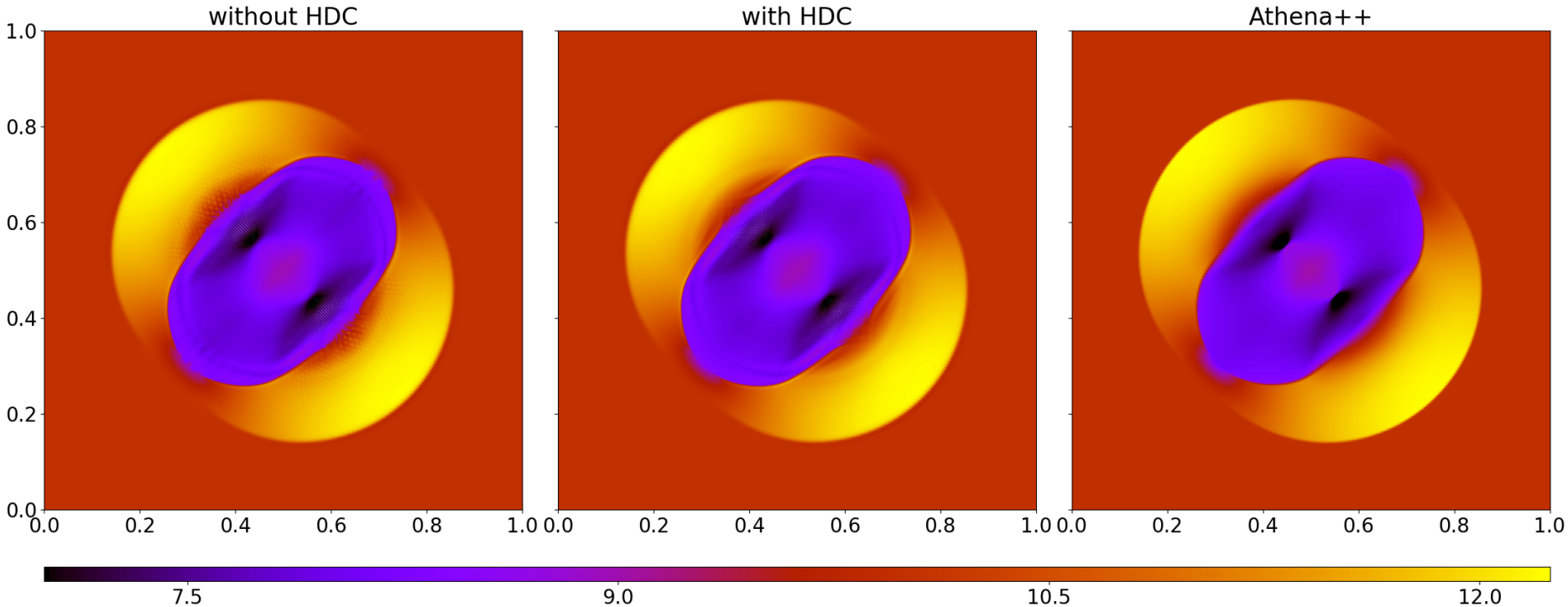


MHD Blast Waveテスト (密度分布)



- 斜め 45° 方向に向いた磁場に沿って，高密度シェル (slow 衝撃波) が伝播する。磁場に垂直方向は，磁気圧によって圧縮が妨げられ，速い fast 衝撃波が伝播する。
- HDC 無し SPMHD の場合，密度に数値的な振動が見られる (HDC 有り SPMHD にもよく見ると少し振動が残っている)。

MHD Blast Waveテスト (磁場強度分布)



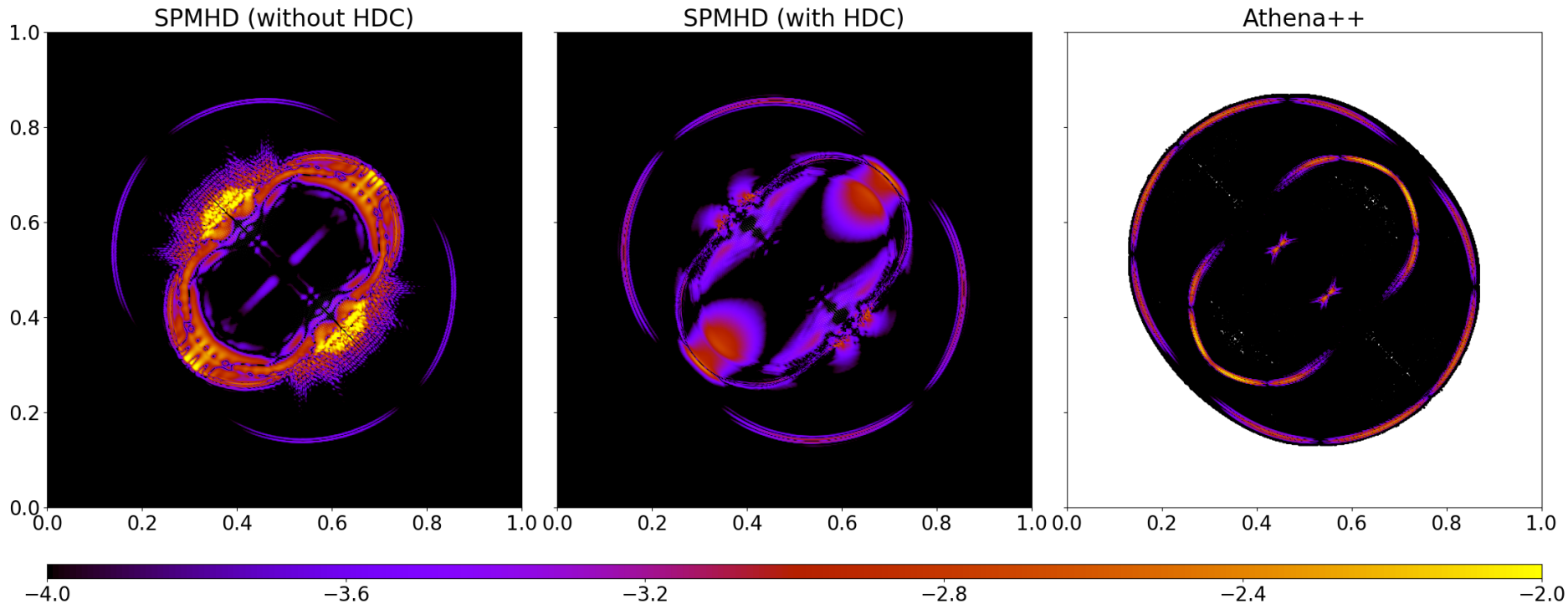
- 斜め 45° 方向に向いた磁場に沿って，高密度シェル (slow 衝撃波，磁場強度が減少) が伝播する。磁場に垂直方向は，磁気圧によって圧縮が妨げられ，速い fast 衝撃波 (磁場強度が増加) が伝播する。
- HDC 無し SPMHD の場合，密度に数値的な振動が見られる (HDC 有り SPMHD にもよく見ると少し振動が残っている)。

MHD Blast Waveテスト ($\log_{10}(\epsilon_{\nabla\cdot B})$)

$$(\epsilon_{\nabla\cdot\boldsymbol{B}})_i = \frac{h_i|(\nabla\cdot\boldsymbol{B})_i|}{|\boldsymbol{B}_i|}, \quad (\nabla\cdot\boldsymbol{B})_i = \frac{1}{\rho_i\Omega_i}\sum_j m_j(\boldsymbol{B}_j-\boldsymbol{B}_i)\cdot\frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j,h_i)}{\partial\boldsymbol{x}_i}$$

$$(\epsilon_{\nabla\cdot\boldsymbol{B}})_{i,j} = \frac{\Delta x|(\nabla\cdot\boldsymbol{B})_{i,j}|}{|\boldsymbol{B}_{i,j}|}, \quad (\nabla\cdot\boldsymbol{B})_{i,j} = \frac{B_{i+1,j}-B_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{B_{i,j+1}-B_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$B_{i,j}$: セル中心の磁場



- HDC によって，$\epsilon_{\nabla\cdot\boldsymbol{B}}$ が大きく減少。
- 格子法 (CT 法) では，衝撃波面に沿ってエラーが存在。

修正 GSPMHD 法

質量に大きな差がある粒子を扱う場合

斎藤さんの講義で説明されたように，密度が急激に変化する接触不連続面近傍では，SPH 粒子に人工的な力が働いてしまう。GSPH(Inutsuka 2002) を使えば，積分を厳密に実行すると人工力を完全にゼロにできる。ただ，現実問題では積分を近似せざるを得ないため，完全に人工的な力が 0 にできるわけでは現状ない。standard SPH よりも大分ましである (**実習で紹介**)。

粒子数密度分布を滑らかにする代わりに，粒子質量を急激に変化させても，接触不連続面を表現できる。かつ，密度が低い領域が低解像度であるという SPH の欠点も緩和できる。

修正SPH法

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right)$$

斎藤さんの講義であったように，質量の重い粒子と軽い粒子の間に人工的な力が働きギャップができる。

一つの有効な修正として，粒子の体積 m_i/ρ_i を基準に考える方法が工学の分野で提案されている (Tartakovsky & Meakin 2005, Hu & Adams 2006)。

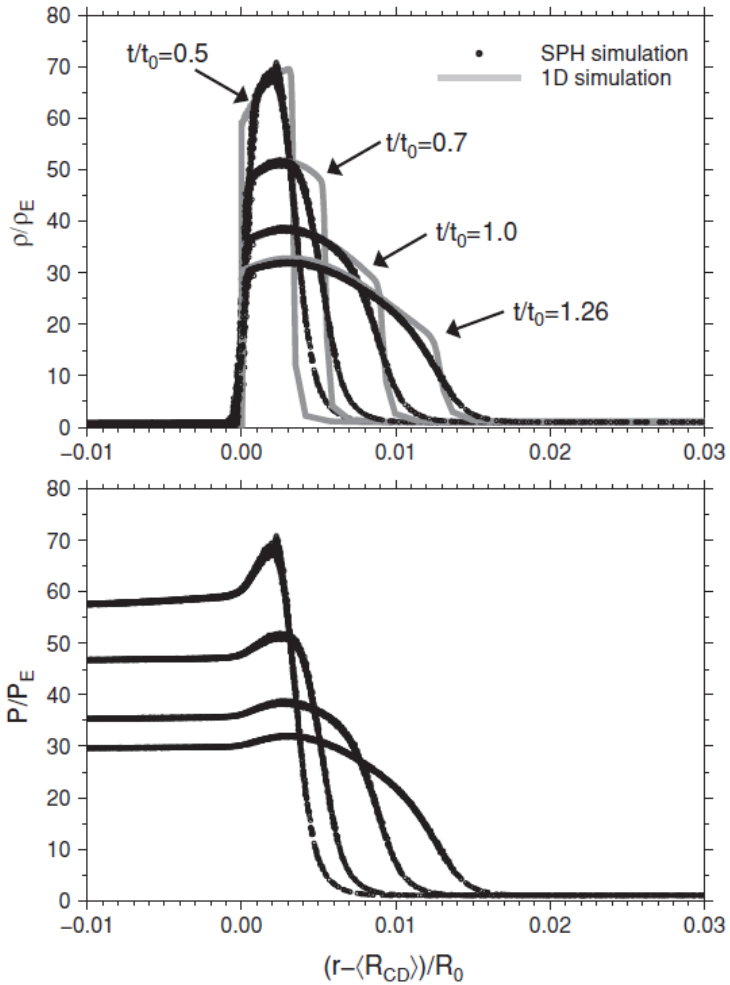
$$\rho_i = m_i \sum_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_j \left(\frac{P_i}{\Omega_i} \left(\frac{m_i}{\rho_i} \right)^2 \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_i)}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \frac{P_j}{\Omega_j} \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right)^2 \frac{\partial W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h_j)}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right)$$

ただし，接触不連続面の場所と密度ジャンプの大きさが事前に分かっている必要がある。

修正 GSPH 法: 応用例

Iwasaki, Tsuribe, and Inutsuka (2011)



- HII 領域の膨張によって広がっていく高密度シェルの時間進化を示している (横軸 0 がシェルの位置)。
- 密度が大きく変化しているが，圧力が滑らかであることが見て取れる。
- １次元の格子法のシミュレーション結果とよく一致していることもわかる。