

国立天文台 天文学データ解析計算センター
成果報告書 (平成17年度)

提出期限：平成18年3月20日(月)17:00 必着

応募カテゴリ (いずれかを選択) C

システム (いずれかを選択) VPP

プロジェクト ID:wha45c

研究代表者（現在のユーザ ID : arakdahd）

氏名	荒木田 英禎	
所属機関名	国立天文台天文学データ解析計算センター	
連絡先住所	〒181-8588 東京都三鷹市大沢 2-21-1	
電話番号	0422-34-3562	
E-mail	h.arakida@nao.ac.jp	
職または学年	研究支援員	
研究代表者が学生の場合には指導教官の氏名		

研究課題名

(和文)	Picard-Chebyshev 法の天体の長期間軌道数値積分への応用とそのベクトル化/並列化
(英文)	Application of Picard-Chebyshev method to long-term orbital integration and its vectorization/parallelization

研究分担者

[illegible]

成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

(1) このプロジェクト（同様の過去のプロジェクトも含む）での成果

- 荒木田英禎, Picard-Chebyshev 法の軌道力学への応用, 天体力学N体力学研究会, 2006 年 3 月 1 日～4 日, 茨城県潮来
- 荒木田英禎, Picard-Chebyshev 法の軌道力学への応用とそのベクトル化・並列化, 日本天文学会春季年会, 2006 年 3 月 27 日～29 日, 和歌山大学

成果の概要

1 始めに

天体力学において数値積分は重要なツールであり, 高速・高精度な方法を求めて多くの研究がなされてきた. その代表的な方法として Runge-Kutta 法, 線形多段法, 外挿法, シンプレクティック法等数多くの方法がある (例えば Hairer *et al.* 1993 参照). これらの方法はある初期値 (x_0, t_0) から時間間隔 dt で時間を進めていき, 時刻 $t_n = t_0 + ndt$ での値 x_n を求める. したがって従来の方法は刻幅 dt の数値テーブルを求める事になる. これら従来の Step-by-step な数値積分法に基づく天体力学の計算は, 系の自由度が多くないため, VPP5000 のようなベクトル・並列計算機に向けた方法ではない.

ここに取り上げる Picard-Chebyshev 法は数値積分の 1 つの方法であるが, 従来の Step-by-step の方法とは全く異なるアプローチに基づく. この方法はある区間 $[a, b]$ において, 近似解が分かっている場合にその近似解から出発して, Picard 反復法により解を求めていくある種の数値的摂動論である. 例えば, 惑星運動であればその近似解として Kepler 問題 (無摂動 2 体問題) から出発する. 一般の天体力学の問題は解析的に解けないため, 摂動部分を展開し解析的に求積出来る形にするが, この展開に Taylor 展開ではなく, より性質の良い Chebyshev 多項式を用いて展開するため Picard-Chebyshev 法と呼ばれる. この方法では各時間ごとの数値テーブルを求めるのではなく, Chebyshev 多項式の係数が最終的に求めるべきものであり, ある区間で真の解を最もよく近似する関数形を決めるという事になる. 図 1 に従来の数値積分法と Picard-Chebyshev 法の概念図を示す. この方法は Fukushima 1997a,b で提案され, 数値実験として摂動調和振動子問題へ応用され, 従来型の数値積分に比べて高速・高精度な方法であること, さらにベクトル計算機を用いる事でさらなる高速化が可能であることが検証された. しかしながら, 我々の興味ある実際の天体の軌道・回転運動へは応用されていなかった.

そこで我々は, Picard-Chebyshev 法を実際の軌道計算に応用した天体力学の軌道数値計算コードの開発に取り組んで来た. その第 1 段階として最も基本となる Kepler 問題を計算するコードを開発し, VPP5000 のようなベクトル・並列計算機を用いる事で, 十分高

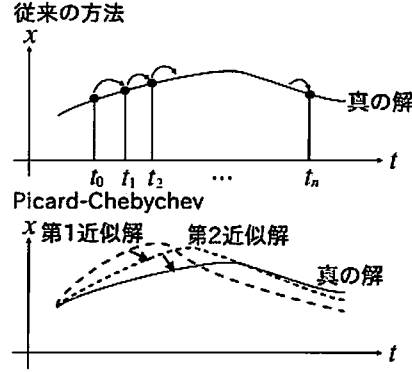


図 1: 従来の数値積分法と Picard-Chebyshev 法の概念図.

速化可能な方法である事を確認した. 今回は, Picard-Chebyshev 法の概要と, 実際に関発した数値計算コードによる数値実験の結果, 今後の研究目標や課題について報告する.

2 Picard-Chebyshev 法の概要

話を簡単にするために, 以下のような 1 次元の常微分方程式,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x_0 = x(t_0) \quad (1)$$

を考える. x_0, t_0 は初期値である. Picard-Chebyshev 法ではこの常微分方程式を Picard 反復法,

$$x^n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^{n-1}(t'), t') dt' \quad (2)$$

による逐次近似により真の解に近づけて行く. ここで n は反復回数を表す. この Picard 反復に表れる積分部分は一般に解析的に計算できない. そこでこの部分を展開し, 解析的に求積可能な形にすることを考える. 最も Naive な展開は Taylor 展開であるが, この展開は展開した点近傍では関数を良く近似するものの, 展開点から離れるにしたがってその近似精度は劣化する. したがって, 区間全体に渡って均等に誤差が分散するように, Picard 反復の積分部分を Chebyshev 多項式,

$$T_j(x) = \cos(j \arccos x), \quad T_{j+1} = 2xT_j - T_{j-1}(x), \quad T_0 = 1 \quad (3)$$

を用いて展開する. この関数形は三角関数に近いものであり, 解析的な求積が可能である. すなわち,

$$\underbrace{f(x, t)}_{\text{積分不可}} \Rightarrow \underbrace{F_0T_0(t) + F_1T_1(t) + F_2T_2(t) + \cdots + F_NT_N(t) + \cdots}_{\text{積分可}} \quad (4)$$

となり, 積分部分を解析的に評価できるようになる (Chebyshev 多項式についての詳しい解説は, 例えば, Rivlin 1973, Press *et al.* 1992).

Chebyshev 多項式を用いる理由としては、この多項式がもっとも理想的な近似多項式である Mini-Max 多項式に非常に近い性質を持ち、Mini-Max 多項式の代替多項式として利用できるという事がある。次に、Chebyshev 多項式は三角関数のような周期的な (厳密な周期性ではないが) を持つ事である。図 2 に示すように、Chebyshev 多項式は定義域 $-1 \leq t \leq 1$ に対して値域 $-1 \leq T_i \leq 1$ で定義される点も三角関数に非常に酷似している。したがって、最終的に求めたい解 $x(t)$ は、

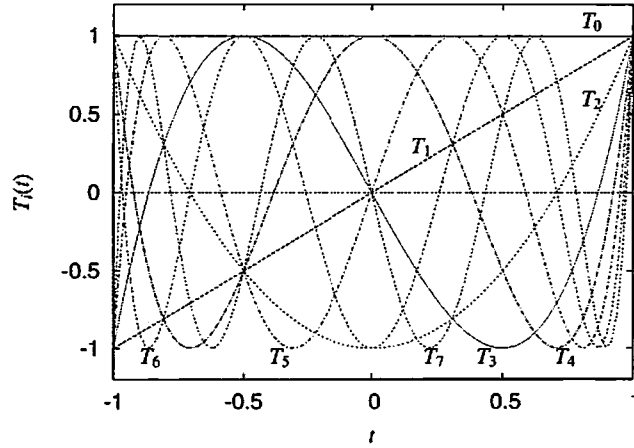


図 2: Chebyshev 多項式.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i T_i(t) = X_0 T_0(t) + X_1 T_1(t) + X_2 T_2(t) + \cdots + X_N T_N(t) + \cdots \quad (5)$$

という形に書き表せる。実際の計算では、解が要求精度に達したところで多項式を打ち切るが、例えば N 個の多項式で展開を打ち切ったとしても、残りの誤差の部分は、

$$\delta x(t) = \sum_{i=N+1}^{\infty} X_i T_i(t) \quad (6)$$

と、やはり Chebyshev 多項式で表される。したがって、この事からある場所で近似を打ち切ったとしても、区間全体の誤差もまた準周期的関数で表され、従来の数値積分法とは事なり誤差が時間とともに単調増加せず、区間全体に渡ってまんべんなく分布するのではないかと期待できる。

一般に求めたい積分区間は $-1 \leq t \leq 1$ の間にあるとは限らないため、

$$\tau = \frac{2t - (a + b)}{H}, \quad H = b - a$$

によって任意の区間 $[a, b]$ を $[-1, 1]$ へ変換する。

3 Picard-Chebyshev 法の計算手順

具体的に Picard-Chebyshev 法での計算手順を簡単に述べる。まず、 n 回目の反復での多項式の項数を $N^{(n)}$ とすると、 $f^{(n)}(x, t), x^{(n)}(t)$ は、

$$f^{(n)}(x^{(n)}(t), t) = \sum_{j=0}^{N^{(n)}-1} F_j T_j(\tau), \quad x^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{N^{(n)}} X_j T_j(\tau) \quad (7)$$

となる。 $N^{(n)}$ の決定については後で述べる。求めたい Chebyshev 多項式の係数 F_i, X_i は Chebyshev 多項式のゼロ点に対する離散的な直交性、

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{N^{(n)}}{2} & i = j \neq 0 \\ N^{(n)} & i = j = 0 \end{cases} \quad (8)$$

を用いて求める。Chebyshev 多項式のゼロ点は、

$$\tau_k^{(n)} = \frac{a+b}{2} - \frac{H}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N^{(n)}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N^{(n)}, \quad H = b-a \quad (9)$$

で与えられる。各ゼロ点に対応する x の値 $x_k^{(n)}$ は、

$$x_k^{(n)} \equiv x^{(n-1)}(\tau_k^{(n)}) = \sum_{j=0}^{N^{(n-1)}} c_{jk}^{(n)} X_j^{(n-1)} \quad (10)$$

であり、ここで、

$$c_{jk}^{(n)} = \cos\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2N^{(n)}}\right) \quad (11)$$

である。この $x_k^{(n)}, \tau_k^{(n)}$ を用いて $f(x, t)$ を

$$f_k^{(n)} = f(x_k^{(n)}, \tau_k^{(n)}) \quad (12)$$

で評価すると、まず $f(x, t)$ の展開係数 F_i が Chebyshev 多項式の直交性より、

$$F_0^{(n)} = \frac{1}{N^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} f_k, \quad F_j^{(n)} = \frac{2}{N^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} c_{jk}^{(n)} f_k, \quad j = 1, 2, \dots, N^{(n)} - 1 \quad (13)$$

と求まる。この係数が分かれば Picard 反復の積分部分は解析的に評価できる事になる。 F_j から $X^{(n)}$ を求めるには、Chebyshev 多項式の積分公式、

$$\int T_n(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} \right) + C, \quad n \geq 2 \quad (14)$$

を用いて,

$$X_{N^{(n)}}^{(n)} = \frac{HF_{N^{(n)}-1}^n}{4N^{(n)}}, \quad (15)$$

$$X_{N^{(n)}-1}^n = \frac{HF_{N^{(n)}-1}^n}{4(N^{(n)}-1)} \quad (16)$$

$$X_j^{(n)} = \frac{H(F_{j-1}^{(n)} - F_{j+1}^{(n)})}{4j}, \quad j = 2, \dots, N^{(n)} - 2 \quad (17)$$

$$X_1^{(n)} = \frac{H}{2} \left(F_0^{(n)} - \frac{F_2^{(n)}}{2} \right) \quad (18)$$

$$X_0^n = x_0 - \sum_{j=1}^{N^{(n)}} Y_j^{(n)} T_j(t'_0) \quad (19)$$

となる. しかしこの表現では $X_j^{(n)}$ の $F_{j-1}^{(n)} - F_{j+1}^{(n)}$ の計算で丸め誤差が生じる恐れがあるので,

$$X_j^{(n)} = \frac{H}{jN^{(n)}} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} s_{jk}^{(n)} g_k^{(n)}, \quad j = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (20)$$

$$s_{jk}^{(n)} = \sin \left(\frac{j(2k-1)\pi}{2N^{(n)}} \right), \quad g_k^{(n)} = f_k^{(n)} s_{1k}^{(n)} \quad (21)$$

によって計算する方が望ましい. しがって,

$$X_j^{(n-1)} \Rightarrow x_k^{(n)} \Rightarrow f_k^{(n)} \rightarrow X_j^{(n)} \quad (22)$$

を要求精度まで繰り返す事になる. Picard 反復を抜ける条件は, $\|\Delta x^{(n)}\| \equiv \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ が要求精度に達した場合であり, この評価は係数 X_j から,

$$\|\Delta x^{(n)}\| = \sum_{j=0}^{N^{(n-1)}} |X_j^{(n)} - X_j^{(n-1)}| + \sum_{j=N^{(n-1)}+1}^{N^{(n)}} |X_j^n| \quad (23)$$

で与えられる. 第2項目の和は $n-1 \rightarrow n$ で $X_j^{(n)}$ の計算により増加した次数分の加算である.

n 次反復の際の Chebyshev 多項式の項数の決定であるが, この評価は Picard-Chebyshev 法のパフォーマンスを大きく左右する. $N^{(n)}$ が少な過ぎると精度が足りず反復を繰り返す事になり, 逆に不必要に多過ぎる場合は無駄な計算を行ってしまう事になる. したがって適切な $N^{(n)}$ を選ぶ必要がある. Fukushima 1997a の数値実験によれば,

$$N_{\text{opt}} \sim CH(-\log_{10} \delta) \quad (24)$$

である. ここで H は積分期間, δ は必要精度, C は離心率 e と共に単調増加し, 円軌道では $C \sim 1$ である. 現在のところ解析的な $N^{(n)}$ の決定公式は存在しないため, 今回の数

値計算では, n 回目の反復での $N^{(n)}$ を,

$$N^{(n)} = \min \left(\frac{nH}{\pi}, N_{\text{opt}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad N_{\text{opt}} = \min M, \quad \sum_{j=M+1}^N \leq \delta \quad (25)$$

で評価した.

4 Picard-Chebyshev 法の軌道運動への応用

それでは実際に Picard-Chebyshev 法を軌道運動へ応用する. 一般の小数体問題を扱う前に, まずは無摂動 Kepler 問題 (2 体問題) を扱う事を考える. Fukusima 1997a,b では摂動調和振動子問題のみ扱っているため, 実際の天体のもっとも簡単な場合が扱えるかどうかを検証する意味でも意味はある. Picard-Chebyshev 法は近似解から出発して修正していく修正子的方法であるため, 予測子に相当する第 1 近似解を与える必要がある. 一般の天体の軌道は楕円軌道であるが, その第 1 近似解として円軌道から計算を開始する事にする. まず, 軌道長半径 $a = 1$, 軌道離心率 $e = 0.1$, 軌道傾斜角 $i = 0$ の軌道を 100 周期

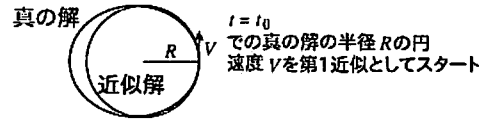


図 3: Kepler 問題の近似解.

計算する場合の数値解と解析解の差を図 4, 5 に示す. この例では 7 回目の反復で解が収

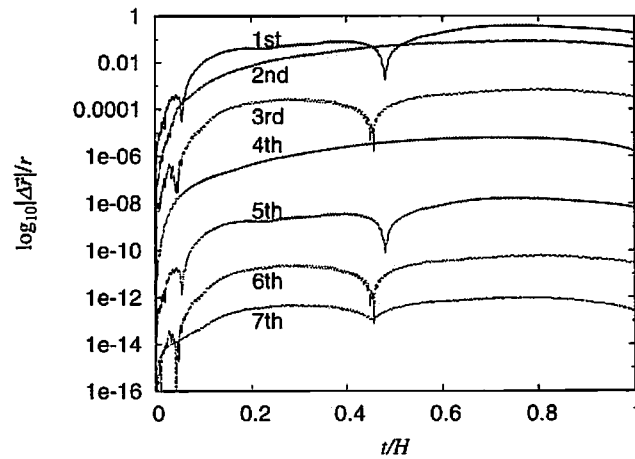


図 4: 近似の段数と誤差の推移.

束している. また, 図 5 に示されているように, 一般の常微分方程式では誤差は時間と

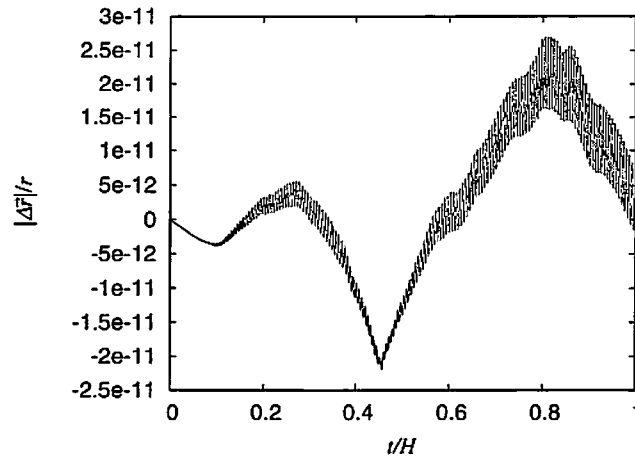


図 5: 最終反復での解析解との誤差.

ともに t または t^2 に比例して単調増加するが、この方法ではそのような誤差の増加が見られない。解析解との誤差が中央付近で大きくなっている原因は、Chebyshev 多項式のゼロ点が中心部分よりも端点側に多い事に起因している (図 2)。次に、積分期間 H と最終反復での $N^{(n)}$ をプロットしたものが図 6 である。積分間隔の増加に伴って必要となる多

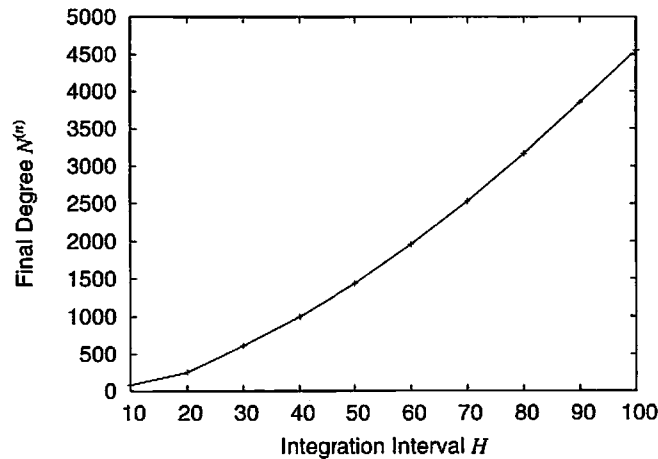


図 6: 積分間隔と最終反復の $N^{(n)}$ との関係.

項式の項数も増加するが、この比例関係は $H^{3/2}$ より大きく H^2 よりも小さい。軌道離心率と最終反復の $N^{(n)}$ の関係をプロットしたものが図 7 である。これから離心率の増加により必要となる近似多項式の項数 $N^{(n)}$ はリニアな増加にはなっていない。さらに、数値実験によれば、円軌道から出発して Kepler 問題を解く場合、離心率が 0.6 よりも大きくなると解が収束しない。この点についてはさらに調べる必要があるが、この解法で用いている Picard 反復は 1 次の精度であり、一般に Kepler 方程式を 1 次の精度で解いた際に、反復が収束出来る上限値が $e < 0.7$ の場合である事に対応しているように思われる。

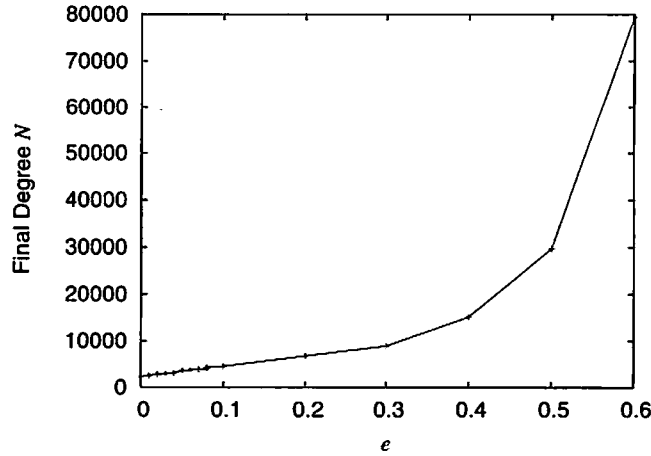


図 7: 離心率と最終反復の $N^{(n)}$ との関係.

Picard-Chebyshev 法で最も計算時間のかかる部分は F_i から X_i を求める計算部分である。これは丁度 Picard 反復の積分計算に対応している。この部分は数値的に Chebyshev 多項式によって非常に長い配列の形になっており、この解法で最も計算時間のかかる手続きである。さらにこの部分は回帰参照を含まないのでベクトル化が可能であり、さらに並列化を実装出来る部分である。実際にこの部分を並列化した際の計算時間は、用いる PE 数に反比例の関係にある。

PE 数 n	1	4
T_{1PE}/T_{nPE}	1	0.274

表 1: PE 数と計算時

5 まとめと課題

Picard-Chebyshev 法を天体の軌道計算へ応用するコード開発を行って来た。実際の軌道計算を行う第 1 段階として Kepler 問題を実際に検証し、Picard-Chebyshev 法を用いてこの問題が解ける事を数値実験により確認した。Kepler 問題の第 1 近似として円軌道から出発したが、離心率が大きくなると、概ね $e \sim 0.6$ よりも大きい場合には計算が収束しない。この原因は初期値としての円軌道を用いる事の限界であると考えられ、解決策としてはある程度の離心率軌道まで計算したら、それをもう一度初期値に取り直して再計算するよう改良する事で克服出来ると考えている。また、各反復時に用いる項数 N の決定公式は経験則により、円軌道を仮定して得られたものであったため、一般に離心率を持つ軌道を扱う場合の適切な決定公式を用いる事でも改善が見込まれる。

現在、Picard-Chebyshev 法を実際の惑星の軌道運動へ応用した計算コードの開発に着

手している。実際の惑星の軌道運動を扱う定式化としては、見慣れたニュートンの運動方程式に基づく方法と、Gauss 型の惑星方程式のように軌道要素を解く方法の2つが考えられる。したがって、まず双方の計算コードを開発し、その精度評価や解の収束性等について吟味する。

Picard-Chebyshev 法を実装する際に最も重要なのは、各反復においてどれだけの Chebyshev 多項式の項数を用意するかである。現在開発している計算コードでは、Fukushima 1997a において経験的に与えられた Chebyshev 多項式の項数の決定公式を用いているが、軌道運動、回転運動、調和振動子といったいくつかの典型的な場合に対して、各反復時の適切な Chebyshev 多項式の項数を与える解析的な決定公式の導出にも着手し、Picard-Chebyshev 法をさらに効率化出来るように努めたい。

超長期間数値積分に Picard-Chebyshev 法を応用する際には、1つの Chebyshev 多項式で全区間を近似するのではなく、区間分割を行い、その区間ごとに Chebyshev 多項式を割り当てるのが望ましいと考えられる。計算コードが完成した次の段階の課題の1つとして、長期間積分を行う際に、効率的に区間分割を行う方法についての検討と実装による検証を行いたい。

さらに余力があれば、KS 正則化 (Stiefel and Scheifele 1974) を応用した計算コードの実装にも取り組みたい。現在までに行ってきた Picard-Chebyshev 法の数値実験や、従来の数値積分からの経験から、天体の軌道離心率が大きくなるにしたがって計算コストが増大する。KS 正則化は離心率に依存せず軌道計算出来る方法であり、この方法を Picard-Chebyshev 法に応用する事により、天体軌道の離心率を気にせず、高精度な数値積分を実行する事が可能になると期待できる。

参考文献

- [1] Fukushima, T., 1997a, AJ., 113, 1909,
- [2] Fukushima, T., 1997b, AJ., 113, 2325,
- [3] Hairer, E., Nørsett, S. P., and Wanner, G., 1993, Solving Ordinary Differential Equations 1, Springer-Verlag
- [4] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., 1992, Numerical Recipes in C: The art of scientific computing 2nd ed., Cambridge University Press
- [5] Rivlin, T. J., 1974, The Chebyshev Polynomials, Wiley
- [6] Stiefel, E., L., and Scheifele, G., 1971, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer