

成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

(1) このプロジェクト（同様の過去のプロジェクトも含む）での成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

(2) これまでのプロジェクトの今年度中の成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

評価資料として利用いたしますので、様式・順序は任意ですが、学术论文については題名、著者、発行年月、雑誌名、巻、ページが記載されていること。

• 論文

1. O. Iguchi, Y. Sota, A. Nakamichi, and M. Morikawa
Local virial relation for self-gravitating system
astro-ph/0512518 (accepted for publication in PRE).
2. Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, and A. Nakamichi
Democratic temperature distribution and Local virial relation: Two hypotheses for self-gravitating systems
astro-ph/0403411 (submitted to PRE).

• 研究発表

1. Y. Sota
Local virial relation and velocity anisotropy in self-gravitating system
第3回 21COE 自己組織系物理 シンポジウム 早稲田大学 2005年9月
2. O. Iguchi
Local virial relation for self-gravitating system
天体力学N体力学研究会 鹿島宇宙通信研究センター 2006年3月

成果の概要

重力相互作用を行う多体系の進化を、専用機を用いてシミュレーションすることにより、長距離相互作用系の緩和過程およびその後実現される準平衡状態を理解することが目的である。自己重力系での球対称の崩壊過程や二つの塊の衝突などの激しい崩壊過程で現れる準平衡状態について N 体計算を用いて調べた。特に、この準平衡状態を特徴づける位相空間の関係として、局所ビリアル関係に着目し、静水圧平衡を満たす解の中での役割について解析した。

局所ビリアル関係

自己重力系での球対称の崩壊過程 (SC) や二つの塊の衝突 (CC) などの激しい崩壊過程で現れる準平衡状態において、次の 2 つの関係が成り立っていることが数値的に得られた [1, 2]。

(a) 温度が中心からの質量に線形に比例 (TM 関係)

(b) 局所的にビリアル平衡 (LV 関係)

(a) の TM 関係を用いることで、速度分布がガウス分布の特別な足し合わせで表すことができる [1]。また、(b) の LV 関係は、通常重力的にバウンドされている系全体で成り立つ関係が、局所的に成り立つことを表している。重力的にバウンドされた粒子に対して、塊のポテンシャルの一番低いところを中心として、中心から同じ粒子数 (質量) を持ついくつかのシェルに分け、各シェルでの平均値を局所的な量として定義した。また、中心からの距離の指標として、半径 r の内側の質量 M_r を用いた。局所的なビリアル比 $b(r)$ を、各シェルの速度分散 $\sigma^2(r)$ とポテンシャルエネルギー $\Phi(r)$ を用いて、

$$b(r) := -2\sigma^2(r)/\Phi(r), \quad (1)$$

と定義すると、図 1 からわかるように、各シェルごとのビリアル比は、外側を除いてほぼ 1 になっている。このように崩壊後の準平衡状態は、初期のビリアル比や密度分布によらず、局所的にビリアル関係が成り立っている。ただし、初期密度分布が中心集中している場合である $(\bar{b}_t, a) = (0, 2)$ の時は、中心で LV 比が小さくなっている。

局所ビリアル関係と Jeans 方程式

Cold collapse の後に現れる準平衡状態を特徴づける LV 関係の役割を調べる。球対称の定常解は、次の Jeans 方程式の解として表される。

$$\frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta}{r}\rho\sigma_r^2 = \rho\frac{d\phi}{dr}, \quad (2)$$

ここで、 $\phi := -\Phi$ 、速度空間の非等方性パラメータ β は、

$$\beta := 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}. \quad (3)$$

この Jeans 方程式 (2) と Poisson 方程式を満たす定常解の中で、LV 関係がどのような役割を果たすのかを見るために、一般化した LV 関係

$$\frac{2\sigma^2(r)}{\phi(r)} = b, \quad (4)$$

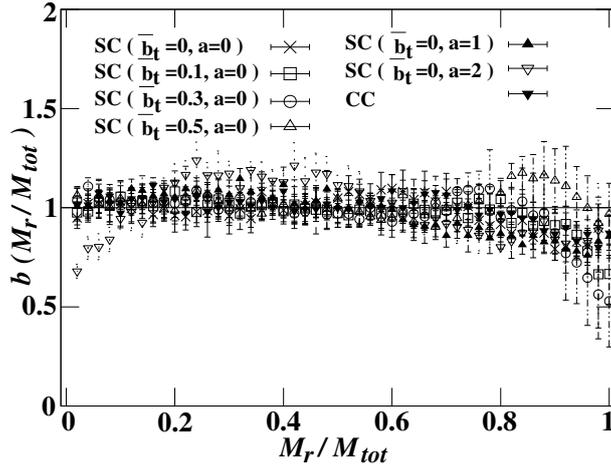


図 1: 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの LV 比。SC と CC は、それぞれ球対称崩壊と 2 つの塊の衝突の場合。SC の場合は、5000 個の粒子を半径 R の球内にべき的な密度分布 ($\rho \propto r^{-a}$) で分布させ、初期に小さいビリアル比 (\bar{b}_t) で計算を行った。CC の場合は、2 つの塊それぞれ 2500 個の粒子を半径 R の球の中に一様に分布させ、初期のビリアル比を小さくした塊を x 軸方向に $6R$ だけ離しておいた。全てのシミュレーションにおいては、カットオフを $\epsilon = 2^{-8}R$ の大きさにとった。LV 比は時間平均しており、SC に対しては、時刻 $t = 5t_{ff}$ から $t = 10t_{ff}$ まで $1t_{ff}$ の間隔で、CC に対しては、時刻 $t = 500t_{ff}$ から $t = 550t_{ff}$ まで $10t_{ff}$ の間隔で平均した。

を持つ場合を考える (b は定数)。Jeans 方程式 (2) と Poisson 方程式と一般化した LV 関係 (4) を満たす解を調べることで、LV 関係 ($b = 1$) を持つ解の性質や役割を見ていく。また、一般には非等方パラメータ β は空間の関数であるが、ここでは簡単化のために、定数の場合を考える。

(2) 式から (4) 式を使って σ_r^2 を消去して積分すると、

$$\phi = \phi_0 x^{2\beta/\alpha} y^{1/\alpha}, \quad (5)$$

ここで、 $x := r/r_0$ 、 $y := \rho/\rho_0$ 、 $\alpha := (6 - 4\beta - b)/b$ 、 $\phi_0 := \phi(r_0)$ である。(5) 式を Poisson 方程式に代入すると、

$$\gamma' - \frac{1}{\alpha}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b) = \alpha\kappa x^{2-2\beta/\alpha} y^{1-1/\alpha}, \quad (6)$$

ここで、プライムは $\ln x$ による微分で、 $\gamma := -d \ln y / d \ln x$ 、 $\kappa := 4\pi G r_0^2 \rho_0 / \phi_0$ 、

$$\gamma_a := 2\beta, \quad \gamma_b := 2\beta + \alpha. \quad (7)$$

また、物理的に興味のある場合として、 $\beta \leq 1$ と $0 < b < 2$ の場合を考える。

位相空間 (γ, γ) の構造は、次の 3 つの場合に分けられ、その漸近的な振る舞いは表 1 のようになる。

- (A) $\gamma_1 < \gamma_a < \gamma_b$ $((3 - b)/2 < \beta < 1, 1 < b < 2)$ 、
- (B) $\gamma_a < \gamma_1 < \gamma_b$ $(\beta < 1, 0 < b \leq 1)$ or $(\beta < (3 - 2b)/(2 - b), 1 < b < 2)$ 、
- (C) $\gamma_a < \gamma_b < \gamma_1$ $((3 - 2b)/(2 - b) < \beta < (3 - b)/2, 1 < b < 2)$ 。

表 1: (6) 式を満たす解の漸近的な振る舞い。

case	$r \rightarrow 0$	$r \rightarrow \infty$
A	$\gamma \rightarrow \gamma_a, \gamma_b, \text{ or } -\infty$	$\gamma \rightarrow \infty$
B	$\gamma \rightarrow \gamma_a, \gamma_1, \text{ or } -\infty$	$\gamma \rightarrow \gamma_b, \gamma_1, \text{ or } \infty$
C	$\gamma \rightarrow \gamma_a, \gamma_b, \text{ or } -\infty$	$\gamma \rightarrow \infty$

ここで、 $\gamma_1 := 2(\alpha - \beta)/(\alpha - 1)$ 。

(6) 式を $\ln x$ で微分すると、 γ について閉じた二階微分方程式にすることができる。

$$\gamma'' - \frac{3-\alpha}{\alpha}\gamma' \left[\gamma - \frac{1}{3-\alpha}(\gamma_a + \gamma_b - (\alpha-1)\gamma_1) \right] = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b)(\gamma - \gamma_1). \quad (8)$$

この (8) 式を用いて、上の 3 つの場合の位相空間 (γ', γ) の解の流れを調べることができる。また、 $\kappa > 0$ と $\alpha > 0$ から、(6) 式の左辺は非負となるので、物理的に意味のある解は、

$$\gamma' \geq \frac{1}{\alpha}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b). \quad (9)$$

の領域に限られる。

Case A と Case C の場合には、物理的に面白い解がないので、以下では Case B の場合について示す。この場合、(8) の解の振る舞いは、ビリアル比 b が critical な値 $b_{\text{crit}} = 1$ より小さいか、大きい、または等しいかによって変わる。特に、 $b = b_{\text{crit}}$ の場合は、 $\gamma_1 = (\gamma_a + \gamma_b)/2$ の関係が成り立ち、LV 関係が満たされている場合に対応している。

$b < b_{\text{crit}}$ の場合、解の流れは図 2 のようになる。この場合は、1 つの解を除いて密度分布が r の小さいところでゼロになるために、物理的な解が存在していない。唯一の例外は、 $\gamma = \gamma_a (r \rightarrow 0)$ から $\gamma = \gamma_1 (r \rightarrow \infty)$ を結ぶ解であるが、 $\rho \propto r^{-\gamma_1}$ の周りで減衰振動するために $\gamma' < 0$ となり、やはり不安定な解になっている。

$b > b_{\text{crit}}$ の場合、解の流れは図 3 のようになる。この場合は、 $b < b_{\text{crit}}$ の場合の鏡像になっており、 $b < b_{\text{crit}}$ の場合で $r = 0$ と $r = \infty$ をひっくり返した振る舞いになっている。得られる解としては、 r の大きいところで密度がゼロになるか、または、 $r = 0$ の近くで $\gamma' < 0$ となるような解である。数値シミュレーションで得られるような $r \rightarrow \infty$ でべき的な振る舞いをする解には対応していない。

$b = b_{\text{crit}}$ の場合、解の流れは図 4 のようになる。この場合の位相空間 (γ', γ) の構造は、 $\gamma \rightarrow 2\gamma_1 - \gamma$ と $r \rightarrow r^{-1}$ の入れ換えに対して対称になっており、次の保存量 K が存在する。

$$K = \left[\gamma' + \frac{2(1-\beta)}{5-4\beta}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b) \right]^{2(1-\beta)} \times \left[\gamma' - \frac{1}{5-4\beta}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b) \right]. \quad (10)$$

特に $K = 0$ の時には、(9) 式の等号が成り立つ場合と

$$\gamma' = -\frac{2(1-\beta)}{5-4\beta}(\gamma - \gamma_a)(\gamma - \gamma_b), \quad (11)$$

となる場合がある。この (11) 式は、図 4 の実線で書いた解に対応しており、この解を critical solution と呼ぶ事にする。この critical solution の上にある解は、 $r \rightarrow 0$ の時に密度がゼロになり、下にある解は $\gamma' < 0$ となり、どちらも不安定な解になっている。物理的に意味のある解は、

critical solution だけであり、 $r \rightarrow 0$ で $\gamma = \gamma_a$ となり、 $r \rightarrow \infty$ で $\gamma = \gamma_b$ となる、漸近的に密度分布がべき的に振る舞う解に対応している。

(11) 式から、critical solution は簡単に求めることができ、次のようにかける。

$$\gamma = \frac{\gamma_a + \gamma_b x^{2(1-\beta)}}{1 + x^{2(1-\beta)}} \quad (12)$$

ここで、 $\gamma(1) = \gamma_1$ とした。この場合のいろいろな物理量は、次のように求まる。

$$\rho = \frac{1+s}{4\pi r_0^3} M_{tot} x^{2-s} (1+x^s)^{-(1+1/s)}, \quad (13)$$

$$M = M_{tot} (1+x^{-s})^{-(1+1/s)}, \quad (14)$$

$$\phi = \frac{GM_{tot}}{r_0} (1+x^s)^{-1/s}, \quad (15)$$

$$\sigma^2 = \frac{GM_{tot}}{2r_0} (1+x^s)^{-1/s}, \quad (16)$$

$$\rho/\sigma^3 = \frac{1+s}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M_{tot}}{Gr_0} \right)^{3/2} x^{2-s} (1+x^s)^{-(2-1/2s)}, \quad (17)$$

ここで、 $s := 2(1-\beta)$ 、 $M := \int_0^x 4\pi u^2 \rho du$ 、 M_{tot} は全質量 $(4\pi r_0^3 \rho_0)/(1+s)$ である。この critical solution は、Ü.-I.K. Veltmann [5] によって初めて求められ、N.W.Evans と J.An によって LV 関係を仮定して導かれたものと一致している [6]。

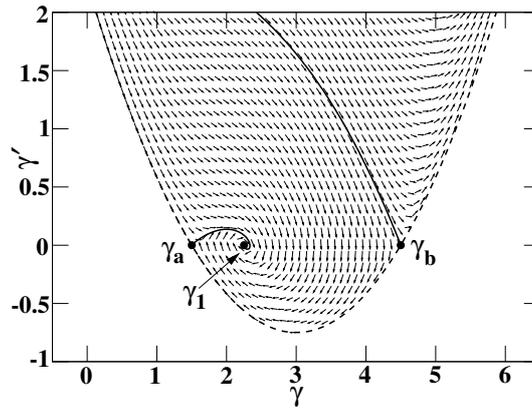


図 2: Case B ($0 < b < 1$) の場合の位相空間 (γ', γ) での解の流れの図。パラメータが $(\beta, b) = (3/4, 3/4)$ の場合。黒丸は固定点を表し、左から順に γ_a 、 γ_1 、 γ_b に対応している。

数値計算との比較

ここでは、critical solution がどのくらい、数値シミュレーションの結果を説明できるか見てみる。まず、数値シミュレーションの結果を、非等方性パラメータ β の振る舞いによって、2つのクラスに分類する。最初のクラスは、図 5 のように、中心では等方 ($\beta = 0$) で、外側で非等方になるもので、これを class I と呼ぶ。class I は、初期に一様に分布させた場合で、激しく潰れた場合である。もう一方のクラスは、図 6 のように、中心から非等方性が現れる場合で、これを class

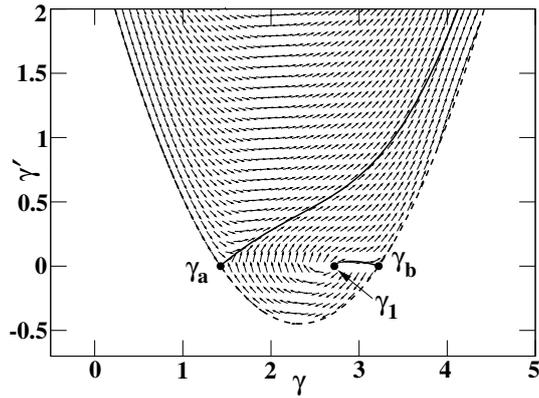


図 3: 図 2 と同じで、Case B ($1 < b < 2$) の場合で、パラメータは $(\beta, b) = (5/7, 9/8)$ 。

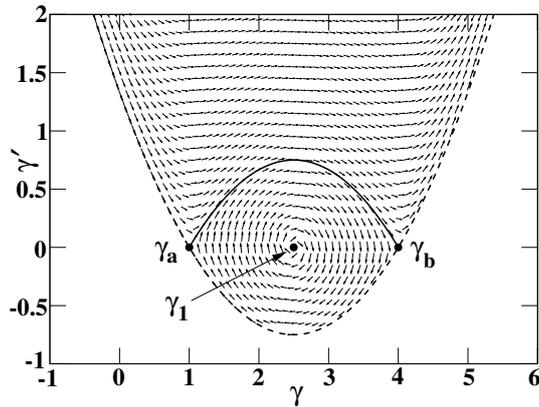


図 4: 図 2 と同じで、Case B ($b = 1$) の場合で、パラメータは $(\beta, b) = (1/2, 1)$ 。2 つの固定点 γ_a と γ_b を結んでいる実線は、critical solution を表す。

II と呼ぶ。このクラスは、初期の中心密度が高い場合や 2 つの塊をぶつけた場合で、比較的マイルドに潰れた場合に相当している。

class I の数値計算と critical solution の比較を、図 7 と図 8 に示した。内側では、等方な場合である Plummer 解、外側では、 $\beta = 0.5$ の critical solution で良く合っている。

class II の数値計算と critical solution の比較を、図 9 と図 10 に示した。この場合は、内側から非等方性が現れているが、 $\beta = 0.5 \sim 0.75$ の critical solution で良く合わせることができる。ただし、 $(\bar{b}_t, a) = (0, 2)$ のシミュレーションは、内側で合わすことができず、これは図 1 で、LV 比が 1 よりも小さくなっていたためだと思われる。

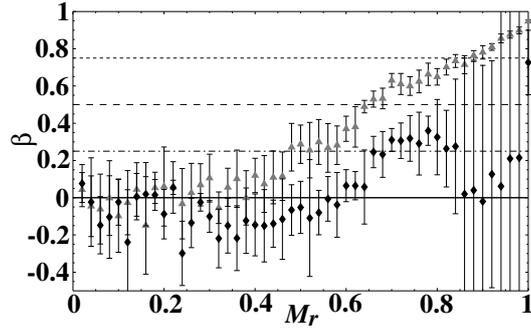


図 5: class I のシミュレーションの非等方パラメータ $\beta(r)$ の分布。灰色三角と黒菱形はそれぞれ図 1 の $SC(\bar{b}_t, a) = (0, 0)$ と $(0.5, 0)$ の数値データ。水平線は critical solution (13)-(17) に対応しており、 $\beta = 0$ (実線)、0.25 (点一破線)、0.5 (破線)、0.75 (点線)。

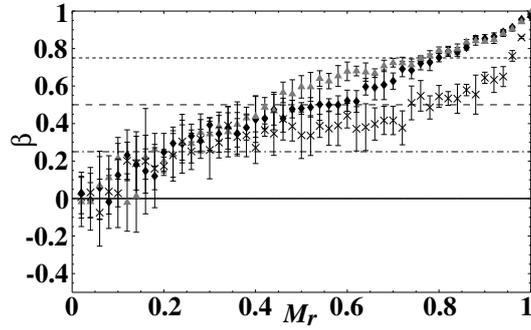


図 6: 図 5 と同じで、class II のシミュレーション。黒菱形と灰色三角はそれぞれ、球対称崩壊の $(\bar{b}_t, a) = (0, 1)$ と $(0, 2)$ の場合で、クロスは、2 つの塊の衝突の場合。

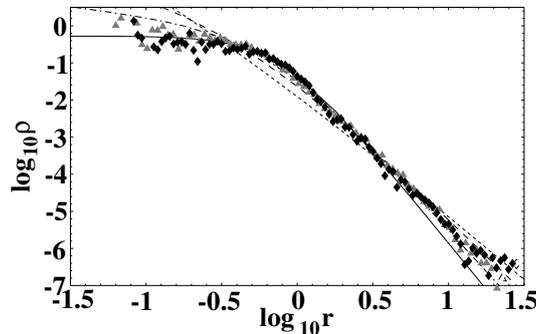


図 7: class I の密度分布の対数プロット。単位は、 $r_h = M_{tot} = G = 1$ で、 r_h はバウンドした粒子全体の half-mass radius。データは、球対称崩壊 (SC) の場合の数値計算で、灰色三角は $(\bar{b}_t, a) = (0, 0)$ 、黒菱形は $(\bar{b}_t, a) = (0.5, 0)$ を表している。図中の各線は、critical solution を表しており、実線は $\beta = 0$ 、点一破線は 0.25、破線は 0.5、点線は 0.75 である。

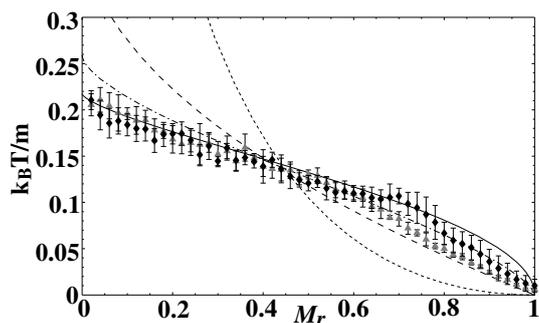


図 8: class I の温度-質量 (TM) 関係。データは、球対称崩壊 (SC) の場合の数値計算で、灰色三角は $(\bar{b}_t, a) = (0, 0)$ 、黒菱形は $(\bar{b}_t, a) = (0.5, 0)$ を表している。図中の各線は、critical solution を表しており、実線は $\beta = 0$ 、点-破線は 0.25、破線は 0.5、点線は 0.75 である。

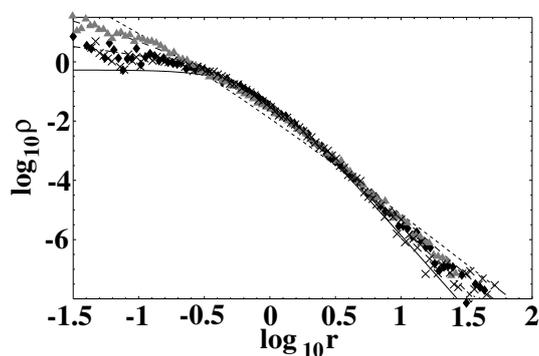


図 9: 図 7 と同じで、class II の場合。黒菱形と灰色三角はそれぞれ、球対称崩壊の $(\bar{b}_t, a) = (0, 1)$ と $(0, 2)$ の場合で、クロスは、2つの塊の衝突の場合。

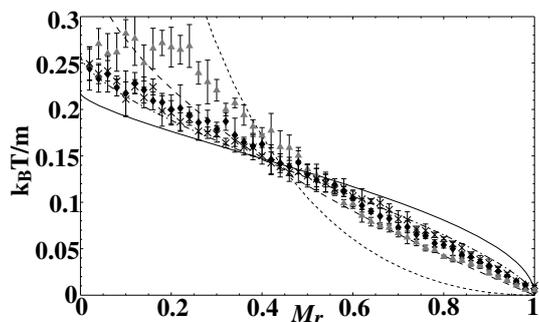


図 10: 図 8 と同じで、class II の場合。黒菱形と灰色三角はそれぞれ、球対称崩壊の $(\bar{b}_t, a) = (0, 1)$ と $(0, 2)$ の場合で、クロスは、2つの塊の衝突の場合。

まとめ

Cold collapse を起こした後に現れる準平衡状態で、数値シミュレーションから得られた 局所ビリアル (LV) 関係について、球対称定常解の中での役割について解析した。球対称定常な場合の Jeans 方程式で、非等方性パラメータ β が定数の場合について、局所ビリアル比が一定の解空間を調べた。特に、LV 関係が成り立つ時に限り、数値計算で得られるような、漸近的領域 ($r \rightarrow 0, \infty$) で、密度分布がべき的になる解が存在した。この意味において LV 関係は、解空間の中で臨界的な役割をはたしており、無衝突系の緩和過程において重要な指標になると思われる。また、LV 関係が成り立つ時には解析解も得ることができ、数値シミュレーションの結果を矛盾無く説明することができた。

今回は、非等方性パラメータが一定の場合の解析であったが、実際の数値シミュレーションでは空間に依存しているので、 β が一様でない場合にも、解空間が同じ様な構造になっているのかについて解析が必要である。

参考文献

- [1] O. Iguchi, Y. Sota, T. Tatekawa, A. Nakamichi, and M. Morikawa, *Phys. Rev. E* **71**, 016102 (2005).
- [2] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, and A. Nakamichi, astro-ph/0403411, *submitted to Phys.Rev.E*, (2005).
- [3] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, and A. Nakamichi, *Proceedings of CN-Kyoto International Workshop on Complexity and Nonextensivity*, (2005).
- [4] O. Iguchi, Y. Sota, A. Nakamichi, and M. Morikawa, astro-ph/0512518, *accepted for publication in Phys.Rev.E*, (2006).
- [5] Ü. -I. K. Veltmann, *Astron. Zh.* **56**, 976 (1979).
- [6] N. W. Evans and J. An, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **360**, 492(2005).