

国立天文台 天文学データ解析計算センター
成果報告書 (平成 17 年度)

提出期限：平成18年3月20日(月)17:00 必着

応募カテゴリ（いずれかを選択） B
システム（いずれかを選択） GRAPE

プロジェクト ID: g05b01

研究代表者 (現在のユーザ ID : tatekwtk)

氏名	立川 崇之	
所属機関名	早稲田大学理工学部物理学科	
連絡先住所	〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1	
電話番号	03-5286-3442	
E-mail	tatekawa@gravity.phys.waseda.ac.jp	
職または学年	客員講師	
研究代表者が学生の場合には指導教官の氏名		

研究課題名

(和文)	一次元自己重力リングモデルの熱力学と緩和過程
(英文)	Thermodynamics and relaxation process of a self-gravitating ring model

研究分担者

[illegible]

成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

(1) このプロジェクト（同様の過去のプロジェクトも含む）での成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

”Thermodynamics of the self-gravitating ring model”

Takayuki Tatekawa, Freddy Bouchet, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo
Phys. Rev. **E71**, 056111 (2005).

”Thermodynamics of the self-gravitating ring model: Analyses with new iterative method” Takayuki Tatekawa, Freddy Bouchet, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo
Proceedings of The Third 21COE Symposium : Astrophysics as Interdisciplinary Science (Institute of Physics) 印刷中

”Thermodynamics of the self-gravitating ring model: Analyses with new iterative method”

Takayuki Tatekawa, Freddy Bouchet, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo
The Third 21COE Symposium : Astrophysics as Interdisciplinary Science (@ Waseda Univ., 2005.9)

「一次元自己重力リングモデルの熱力学：新たな逐次近似法による平衡状態の解析」

立川 崇之, Freddy Bouchet, Thierry Dauxois, Stefano Ruffo
日本物理学会（@同志社大京田辺キャンパス，2005.9）

「新たな逐次近似法による平衡状態の分布関数の導出」

立川 崇之
第 14 回 非平衡系の統計物理シンポジウム（@筑波大，2006.1）

「1次元自己重力リングモデルにおける相転移と力学的進化」

立川 崇之
天体力学N体力学研究会（@潮来，2006.3）

(2) これまでのプロジェクトの今年度中の成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

評価資料として利用いたしますので、様式・順序は任意ですが、学術論文については題名、著者、発行年月、雑誌名、巻、ページが記載されていること。

成果の概要

1 Introduction

昨年度のプロジェクトに引き続き本年度のプロジェクトで我々は、Newton 重力によって互いに相互作用を及ぼす粒子が一次元リングに拘束されているモデルの解析を行った。このモデルはソフトニングを加えているためにエントロピーの最大が存在するので、純粋な Newton 重力の性質を解析する事は出来ないが、平均場による近似で熱力学的性質を解析する事が出来る。本モデルは重力系のモデルであるので、ミクロカノニカル分布による解析では広いエネルギースケールに渡り負の比熱が現れる。本研究ではモデルの性質はソフトニングの大きさに依存し、ソフトニングの大きさを徐々に変えると、ポテンシャルの影響を受けるエネルギースケールと、自由粒子のように振る舞うエネルギースケールの境で、相転移の次数が二次から一次に変化する事が分かった。

そこで本年度は、相転移の次数の違いが系の力学的進化にどのように関係づいているかを調べるため、GRAPE を用いたシミュレーションによる解析を中心に調査を進めた。この結果、ポテンシャルに拘束されている core 粒子の周囲を運動する、halo 粒子の運動に特異な性質が見られた。halo 粒子が core から飛び出して、再び戻ってくるまでの時間（再帰時間）の頻度分布を調べると、一次相転移の場合にはベキ的な分布になるのに対し、二次相転移の場合には短時間の再帰運動の頻度は大きく落ち込み、ベキ的な分布から外れる事が分かった。

2 一次元自己重力リングモデル

ここでまず、一次元自己重力リング (SGR) モデルについて手短かに説明を行う [1]。一次元リングモデルは三次元 Newton ポテンシャルによってリングに拘束された粒子が互いに相互作用を及ぼすモデルである (図 1)。

SGR モデルのハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

$$V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}}, \quad (2)$$

ε はソフトニングパラメーターで、近距離での発散を防ぐ。 ε を大きく取った極限では、ポテンシャルが

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\frac{1 - \cos(\theta_i - \theta_j)}{2\varepsilon} - 1 \right] + O(\varepsilon^{-2}), \quad (3)$$

となり、HMF モデル [2] のポテンシャルに近づく。モデルの熱力学的性質を示すグラフとして、温度曲線と呼ばれるものがある。これは一粒子あたりの運動エネルギーを二倍したもの $T \equiv \beta^{-1} = 2 \langle K \rangle / N$ を温度として、一粒子あたりの全エネルギーとの関係を示したものである。HMF モデルに近づく $\varepsilon = 10$ の条件のもとでは、温度曲線は図 2(a) のよう

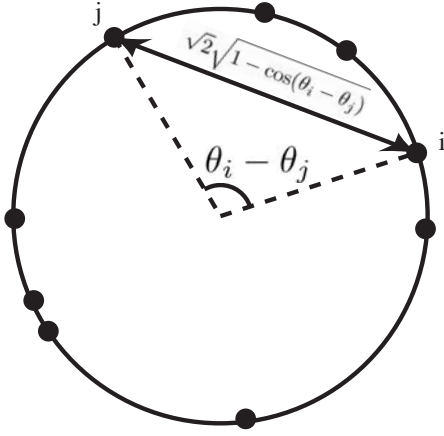


図 1: 半径を 1 とした一次元自己重力リング．粒子はリングに固定されており，その位置は角度によって識別される． θ_i と θ_j に存在する粒子対は，三次元重力と同じ逆二乗則で力を及ぼしあう．この際の距離は，粒子対がなす弧の長さである．

になる．一様分布の相 $U > U_c(\varepsilon)$ では，曲線はほぼ線形関係になり，一方でクラスターを形成する相 $U < U_c(\varepsilon)$ では折れ曲がる．この場合には，温度はエネルギー増加により上昇し，負の比熱は現れない．一方でソフトニングを小さく取ると，三次元重力のように，負の比熱の相が現れる．図 2(b) では，二つの異なる値の ε に対して曲線を描いた [1]．この場合，相は三つに分類される．

- 低エネルギーでクラスターを形成する相 $U < U_{top}(\varepsilon)$ ． U_{top} は比熱が 0 になるエネルギー $\partial T / \partial U = 0$ である．
- 中間状態の相 $U_{top}(\varepsilon) < U < U_c(\varepsilon)$ ．この相で負の比熱が現れる．
- 高エネルギーのガス状の相 $U_c(\varepsilon) < U$ ．

低エネルギーの相は ε の存在によって現れる．一方，高エネルギーの相では粒子はポテンシャルの影響をほとんど受けず，自由粒子のように振る舞う．中間状態の相が重力の特徴をよく示していると考えられ， ε を小さくする事により相のエネルギースケールが広がる．

3 SGR モデルの熱力学的性質

我々の開発した手法 [3] により，SGR モデルの解析を行う．まずエントロピーを考えると， $U_c(\varepsilon)$ より高いエネルギーでは物質分布は一様になるので，

$$S = \frac{1}{2} (3 \log(2\pi) + 1 - \log \beta), \quad (4)$$

となる．図 3 は SGR モデルについて，エネルギー U の関数として温度 $T = \beta^{-1}$ とエントロピーを示している．注目すべきは $U_{top} \leq U \leq U_c$ において負の比熱が存在する事で

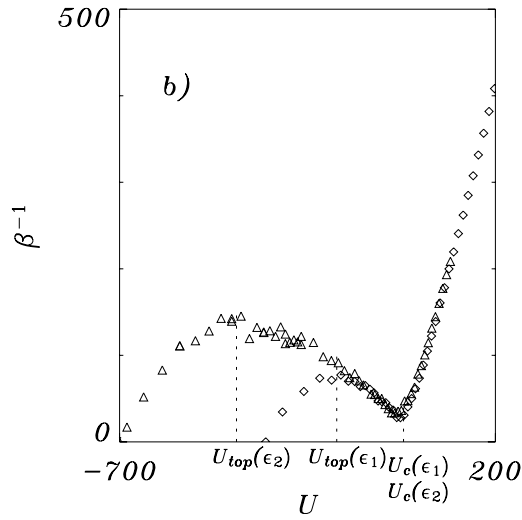
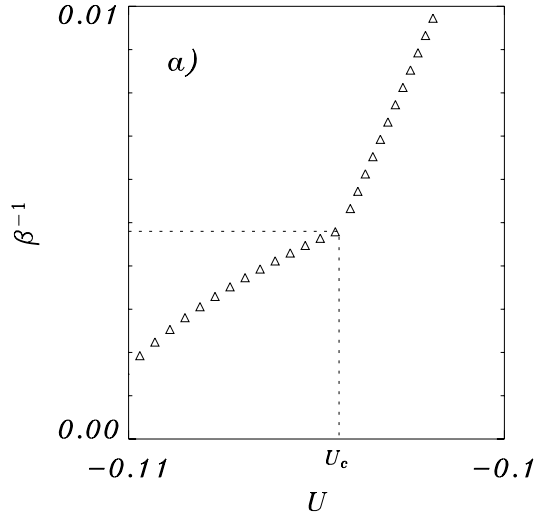


図 2: 数値計算によって得られた SGR モデルの温度曲線．いずれも粒子数は $N = 100$ である．(a) は $\varepsilon = 10$ とした場合で， U_c で系は二次相転移を起こす．この時は負の比熱は現れない．(b) は $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\varepsilon_2 = 2.5 \times 10^{-7}$ の場合．相転移はミクロカノニカル分布で一次相転移となる．二つのエネルギー $U_c(\varepsilon_1)$ と $U_c(\varepsilon_2)$ は非常に近い値となり，相転移エネルギーは ε にあまり依存しないようである．一方， $U_{top}(\varepsilon_1)$ は明らかに $U_{top}(\varepsilon_2)$ より小さく， ε を小さくすると減少する．負の比熱は $U_{top} < U < U_c$ で現れ，ソフトニングを小さくするとエネルギースケールが広がる．

ある．また， $U_{low} \leq U \leq U_{high}$ ではエントロピーは凸の部分をつなげた破線とはずれている．これはカノニカル分布とミクロカノニカル分布が与える平衡状態が同一でない事を示している．つまりミクロカノニカル分布では食い違いが生じるエネルギースケールは安定であるが，カノニカル分布では準安定，あるいは不安定である．

ソフトニングパラメーターを大きくしていった場合をしてみる．まずパラメーターを $\varepsilon = 10^{-2}$ とした場合を考える．ミクロカノニカル分布では，図 4 で示したように $U_{top} \simeq -0.8$ で比熱の符号の変化が起き， $U = U_c \simeq -0.3$ で相転移を起こす．しかし温度はエネルギーの関数として， $U = U_c$ で微分不可能ではあるが連続になるので，相転移は二次である．また，秩序パラメーター『磁化』の対称性の破れと相転移の次数が関連している事が，図 4 (b) から見て取れる．温度曲線は，この二次相転移が凸凹型である事を示している．ミクロカノニカル分布で二次相転移がこのタイプのものである [4] ためには，相転移点で比熱のジャンプを見る必要がある．

$\varepsilon = 10^{-5}$ から $\varepsilon = 10^{-2}$ の間で，ミクロカノニカル分布の三重臨界点が存在する．この三重臨界点では次の二つの性質が現れる．

- 温度曲線は U_c より低いエネルギー側から見て， $U = U_c$ で水平になる．
- 準安定の非一様相が存在するエネルギーの上限が U_{in} から U_c に向かって落ちる．一方で一様相は U_c より低いエネルギーで連続的に不安定相として存在する．

図 5 で，我々はミクロカノニカル分布における臨界エネルギー U_c ，エネルギーの境界 U_{in} および U_{hom} の ε 依存性を示す．ミクロカノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で，この点が準安定な非一様相の存在の境界で，このエネルギーの上限は臨界エネルギーに一致するようになる．これが対称性の破れを伴う三重臨界点の一般的な様相である ([4] の図 6 を参照) ．

カノニカル分布での三重臨界点を調べるには，二つの曲線 U_{low} および U_{high} が合流する ε の値を見る必要がある．この値の大まかな見積りは $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ である．カノニカル分布での三重臨界点は， U_{top} が前述の二つの曲線に合流するところでもあり，負の比熱を持つエネルギースケールが消えるところである．従って，エントロピー曲線での変曲点 U_{top} が消える事により，アンサンブルの違いはカノニカル分布での三重臨界点においてなくなる．相転移の分類を示した論文 [4] の表 1 でも確認できるように，アンサンブルの違いが消えるのは，三重臨界点に関わる時だけである．

結論として， ε の変化による SGR モデルの相転移ダイアグラムの重要な変更は，ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布の三重臨界点の存在によるものである． $\varepsilon \leq \varepsilon_T^c$ において，アンサンブルの非等価性を示すエネルギースケールが存在する．このような状況は既に今までの論文 [5, 6] で知られている．

4 core への halo 粒子の再帰運動

それでは相転移の次数は系の力学的進化にどのように関わっているのだろうか．我々は過去の論文 [1] で調べられた量のうちのいくつかを再検討した．ここでは相転移の次数の違いによって大きな違いが現れた，halo 粒子の core への再帰運動について述べる．

SGR モデルを構成する粒子は、そのエネルギーにより三相に分類される事は既に述べた。この三相のうち、最も低エネルギーの相が core の相で、ソフトニングのために存在する相である。この相に含まれる粒子はポテンシャルの底に存在し、まさに core を形成する。この相よりも高いエネルギーにあり、重力の特徴を良く表していると考えられるのが halo の相である。halo の相の粒子は過去の論文で特異な性質をいくつか示していた。例えば、速度分布は Maxwell 分布よりもむしろ Lorentz 分布の方がうまくあう事である。

ここでこれから解析する再帰運動とは次のようなものである。高いエネルギーを持つ halo 粒子は core から飛び出すが、ポテンシャルの影響を受けているためにいずれは引き戻される。この運動に着目する。core からの飛び出しから引き戻されるまでの時間を測定し、頻度分布を求める。厳密には core の重心を横切ってから、再び横切るまでの時間を測定する。

今回は $N=100$ とし、シミュレーションの時間は $t = 10^3 t_{dyn}$ 程度とした。また、ソフトニングパラメーターは一次相転移を示す $\varepsilon = 10^{-5}$ 、二次相転移を示す $\varepsilon = 10^{-3}$ 、および境界の $\varepsilon = 10^{-4}$ を選んだ。全エネルギーは負の比熱が現れる、臨界エネルギーよりやや下のエネルギーに設定した。ここでは

- $\varepsilon = 10^{-5} : U = -20$
- $\varepsilon = 10^{-4} : U = -1$
- $\varepsilon = 10^{-3} : U = -0.5$

とした結果を示す。

図 7 は halo 粒子の core への再帰運動を調べたもので、再帰時間の頻度分布を表している。この図では、二次相転移を示す $\varepsilon = 10^{-3}$ の場合に際立った違いが見られる。一次相転移を示す場合には、再帰時間の頻度分布はほぼベキの形になるのだが、二次相転移の場合には短時間の頻度分布がベキから大きくずれてしまう事が示されている。この分布の違いは、相転移点に向けてエネルギーを徐々に上げて行った時の振る舞いと関連すると推測される。一次相転移の場合には、クラスターが存在する状況から一気に一様分布へと転移が起きるが、二次相転移の場合には徐々にクラスターが緩んで一様分布に近づいて行く。このクラスターの密集の度合いが再帰時間の頻度分布に影響を与えているのではないかとと思われる。

再帰時間以外にも三相の組成比の違いや halo 粒子の速度分布、halo 粒子の異常拡散なども解析してみたが、こちらは相転移の次数に依存するような明確な違いが現れなかった。系の相転移の次数と力学的進化との対応を考察するため、さらに SGR モデルなどを用いて、重力系の力学的進化における様々な統計的性質を調べていく予定である。

参考文献

- [1] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, T. Tatekawa, K. Maeda, Phys. Rev. E **64**, 056133 (2001).
- [2] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 2361 (1995).

- [3] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, Phys. Rev. **E71**, 056111 (2005).
- [4] F. Bouchet, J. Barré, J. Stat. Phys. **118**, 1073 (2005).
- [5] J. Barré, D. Mukamel, S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **87**, 030601 (2001).
- [6] M. Antoni, S. Ruffo, A. Torcini, Phys. Rev. E **66**, 025103 (2002).

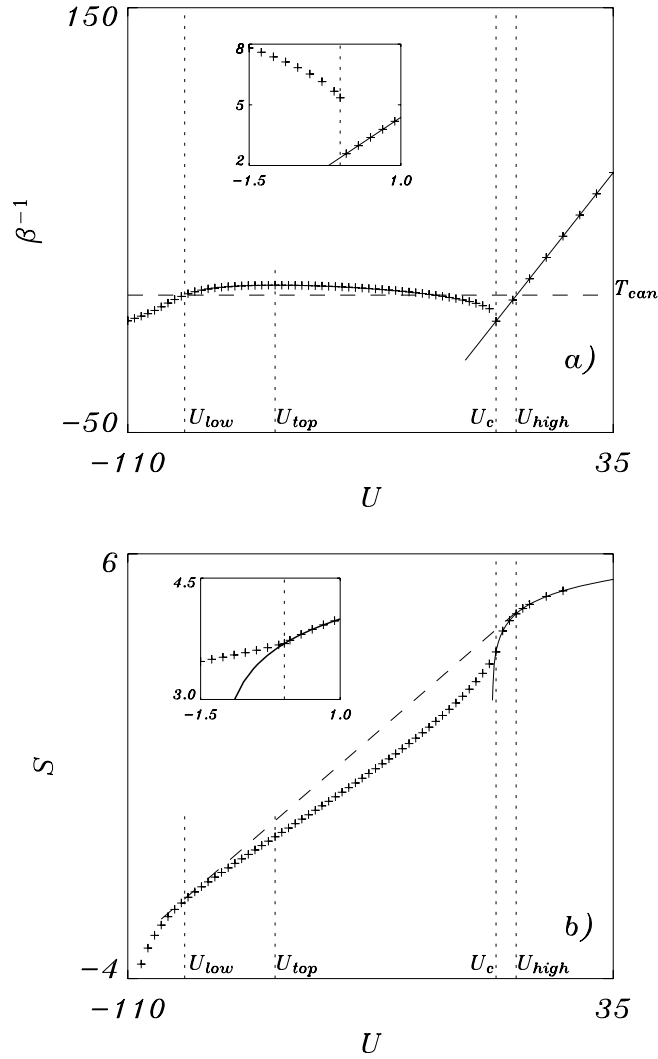


図 3: 温度 (図 (a)) とエントロピー (図 (b)) を U の関数として見た図．ここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．四つのエネルギースケールは以下の通り． $U_{low} \simeq -93$, $U_{high} \simeq 6$ はアンサンブル間の食い違いが生じるエネルギー． $U_c \simeq 0$ はミクロカノニカル分布の相転移点． $U_{top} \simeq -66$ は負の比熱が現れる下限である． $T_{can} \simeq 15$ はカノニカル分布での相転移温度を示す．次に (b) で実線は一様分布の解析解である．この解は準安定状態として U_c まで伸びている．(a) と (b) には相転移点 U_c 付近の拡大図を載せており、温度は U_c で不連続であり、エントロピーは傾きの異なるスロープに移る．明らかに一次相転移の性質を示している．

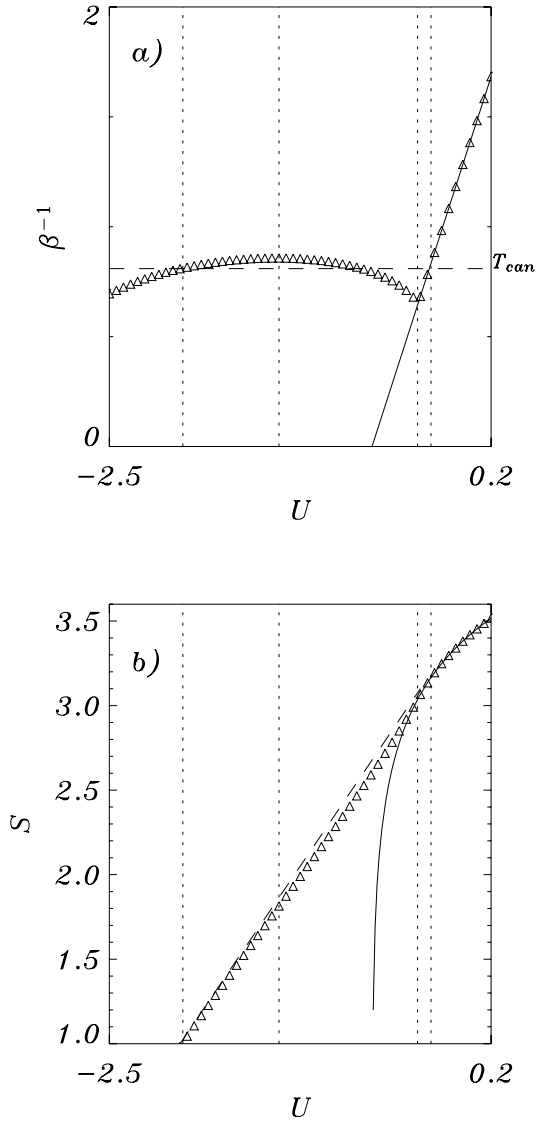


図 4: (a): $\varepsilon = 10^{-2}$ での温度曲線 (白い三角) . 垂直の破線は左から $U_{low} \simeq -1.98$, $U_{top} \simeq -1.3$, $U_c \simeq -0.32$, $U_{high} \simeq -0.225$ を示す . 解析的に得られる一様相の曲線は連続である . 図 . 3 との大きな違いは , U_c での温度のジャンプが見られない事である . 相転移はミクロカノニカル分布で二次である . 一方で , カノニカル分布では $T_{can} \simeq 0.8$ で一次相転移を起こす . (b): $\varepsilon = 10^{-2}$ でのエネルギーとエントロピーの関係 (白い三角) . エントロピー曲線は非一様相から一様相 (実線) に滑らかに接続する . エントロピー曲線の U_{low} および U_{high} における共通接線となる破線は , アンサンブルによる相転移の違いを示す .

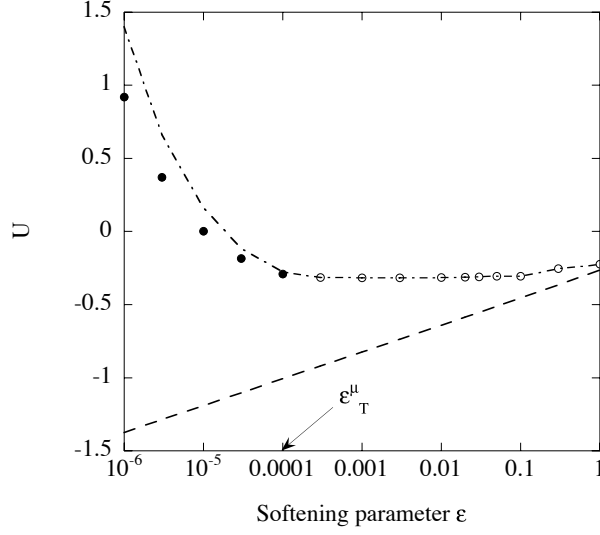


図 5: 一点破線は $U_{in}(\varepsilon)$ を，破線は $U_{hom} = \overline{E}_p(\varepsilon)$ を示す．黒丸はミクロカノニカル分布の一次相転移の臨界エネルギーを，白丸は二次相転移の臨界エネルギーを示す．ミクロカノニカル分布での三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で，相転移はここで一次から二次に変化し，同時に準安定の非一様相がなくなる．

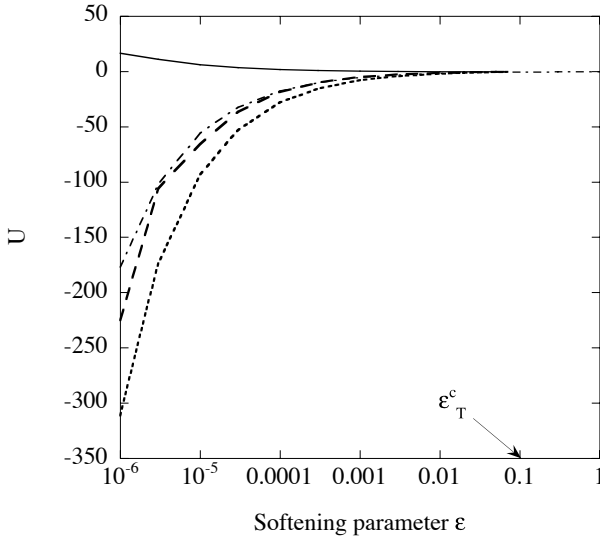


図 6: U_{low} (破線)， U_{high} (実線)，および U_{top} (一点破線) の ε 依存性．カノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ で，ここで三つの曲線が合流する．また，このソフトニングパラメータは，ミクロカノニカル分布で負の比熱がなくなり，カノニカル分布で相転移が二次に変化するところである．この図で我々は太い破線で曲線を描いているが，これは以前の論文 [1] で見積もられた $U_{top}^{th} \simeq -1/(4\sqrt{2\varepsilon})$ である．

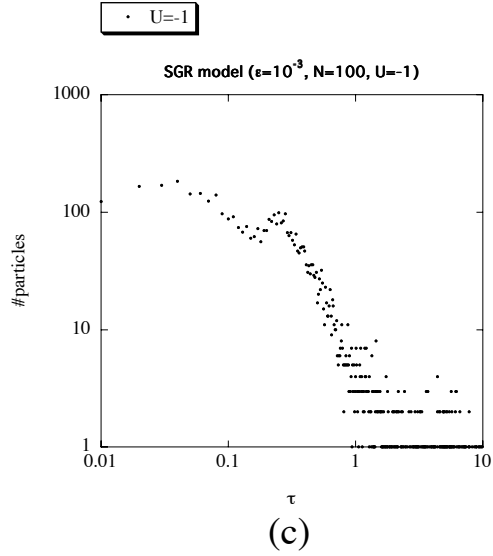
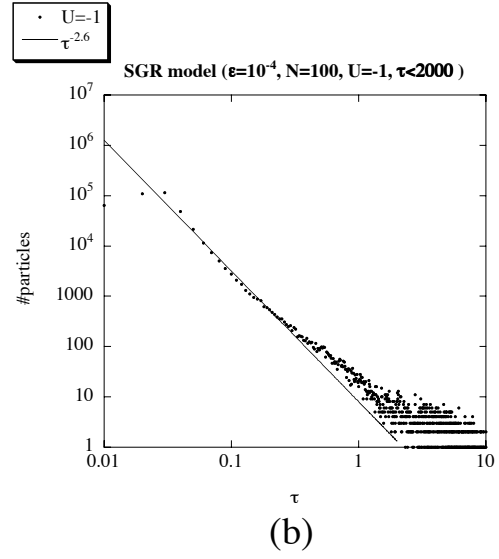
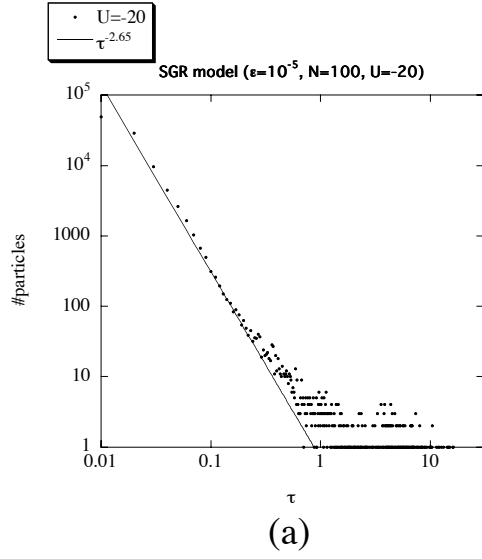


図 7: SGR モデルでの, halo 粒子の core への再帰時間の頻度分布. 図中の τ は t_{dyn} を示す. (a) $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合. $t < t_{dyn}$ では頻度は再帰時間のおよそ -2.65 乗になる. (b) $\varepsilon = 10^{-4}$ の場合. $t < t_{dyn}$ では頻度は再帰時間のおよそ -2.6 乗になる. (c) $\varepsilon = 10^{-3}$ の場合. この場合には $t < 0.3t_{dyn}$ で頻度が時間のべきからずれてしまう.