

一次元自己重力リングモデルにおける構造形成と緩和過程

立川崇之

e-mail: tatekawa@gravity.phys.waseda.ac.jp

早稲田大学理工学部物理学科

本年度のプロジェクトで我々は、Newton 重力によって互いに相互作用を及ぼす粒子が一次元リングに拘束されているモデルの解析を行った。このモデルはソフトニングを加えているためにエントロピーの最大が存在するので、純粋な Newton 重力の性質を解析する事は出来ないが、平均場による近似で熱力学的性質を解析する事が出来る。本モデルは重力系のモデルであるので、ミクロカノニカル分布による解析では広いエネルギースケールに渡り負の比熱が現れる。本研究ではモデルの性質はソフトニングの大きさに依存し、ソフトニングの大きさを徐々に変えると、ポテンシャルの影響を受けるエネルギースケールと、自由粒子のように振る舞うエネルギースケールの境で、相転移の次数が二次から一次に変化する事が分かった。熱平衡状態の安定分布を示す分布関数を導出する際、我々は新たな逐次近似を考案した。この方法はエントロピーを徐々に増大させて平衡状態に系を収束させるもので、従来のものに比べて高速で、相転移点付近でも十分に使えるものである。この方法で得た平衡状態は、GRAPE-5 を用いた大規模シミュレーションとの比較でもよく一致し、系の安定な平衡状態を求める際に非常に有用な方法である事も確かめられた。

1 Introduction

宇宙には球状星団、銀河、銀河団や分子雲のように、自己重力が自身の振る舞いに大きな寄与を及ぼしている天体が存在する [1]。今までに様々な理論的なアプローチが、自己重力系の特異な統計的性質の解析のために提案されてきた。だが系の困難な点として、自己重力系ではポテンシャルが近距離で発散する事、および蒸発現象が見られる事が挙げられる。たとえ系を断熱壁で覆って蒸発を防いだとしても、重力熱不安定としてよく知られている現象を引き起こす [2, 3, 4]。ポテンシャルに対して短距離でのソフトニングを導入すると、熱不安定を回避でき、自己重力系は平衡状態に到達する事が出来る。しかし、この状況でも負の比熱は存在する。さらに、粒子が自由粒子のように振る舞う高エネルギー状態から、クラスターを形成する低エネルギー状態の間で、一次相転移を起こす。

三次元自己重力系の計算を直接行くと、相互作用の計算が膨大なものとなる [5]。そこで対称性を課したり、空間次元を下げたりして相互作用の計算を軽減する事を考える。自己重力系に対称性を課した簡単なモデルとして、一次元自己重力シート系の解析がなされており [6]、興味深い振る舞いを示す事が報告されているが [7, 8]、系の比熱は常に正であり相転移を起こさない。

我々はかつて、相互作用は Newton 重力で与えられ、粒子はリングに拘束されているという、一次元モデルを提案した [9]。短距離ではソフトニングを導入してあるため、時間発展を追う事も可能である。このモデルは一次元自己重力リング (SGR) モデルと名付けられている。100 体の粒子を用いた過去の解析では、ソフトニングが十分に小さければ負の比熱や相転移といった、三次元重力ポテンシャルの特異な性質を SGR モデルでも示す事が分かった。また、ソフトニングを非常に大きく取った極限では、長距離力の簡単なモデルとして盛んに研究されている、Hamiltonian Mean-Field (HMF) モデル [10] に近く、HMF モデルでは系は二次相転移を起こし、負の比熱は現れない。

本プロジェクトではまず、SGR モデルの熱力学的平衡状態を、カノニカル分布とミクロカノニカル分布の両方で導出した。我々が解析したソフトニングパラメーターの範囲では、モデルは常に熱平衡状態を持つ。しかしソフトニングが十分に小さければ、ミクロカノニカル分布で SGR モデルは負の比熱を示し、一

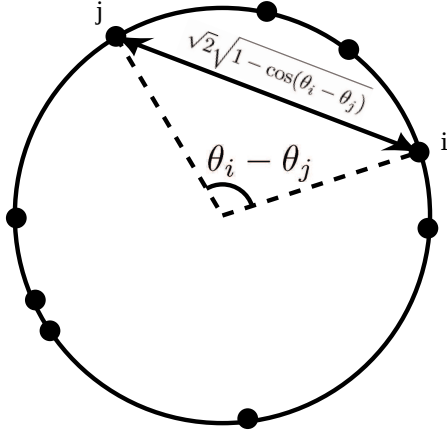


図 1: 半径を 1 とした一次元自己重力リング．粒子はリングに固定されており，その位置は角度によって識別される． θ_i と θ_j に存在する粒子対は，三次元重力と同じ逆二乗則で力を及ぼしあう．この際の距離は，粒子対がなす弧の長さである．

次相転移を起こすという，アンサンブルによる相転移の違いを示す [11, 12]．従って，SGR モデルは現実の三次元重力モデルの性質をよく示す簡単なモデルとして有用であると考えられる．

報告書ではまず 2 章で SGR モデルの性質と過去の数値計算の結果を手短に示す [9]．次に 3 章で我々が開発した平衡分布を導出する新たな逐次近似の手法を解説する．この手法は二次元乱流の極大エントロピーを導出する方法 [13] に類似した方法である．4 章では新たな逐次近似の方法を用いて導出した，SGR モデルの熱力学的性質を説明する．5 章では GRAPE-5 を用いたシミュレーションと，平衡状態の比較を行う．最後に 6 章において，今後の展望を述べる．本報告書は [14] にまとめたものを要約したものである．

2 一次元自己重力リングモデル

ここでまず，一次元自己重力リング (SGR) モデルについて手短に説明を行う [9]．一次元リングモデルは三次元 Newton ポテンシャルによってリングに拘束された粒子が互いに相互作用を及ぼすモデルである (図 1)．

SGR モデルのハミルトニアンは以下のように与えられる．

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

$$V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}}, \quad (2)$$

ε はソフトニングパラメーターで，近距離での発散を防ぐ． ε を大きく取った極限では，ポテンシャルが

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\frac{1 - \cos(\theta_i - \theta_j)}{2\varepsilon} - 1 \right] + O(\varepsilon^{-2}), \quad (3)$$

となり，HMF モデル [10] のポテンシャルに近づく．モデルの熱力学的性質を示すグラフとして，温度曲線と呼ばれるものがある．これは一粒子あたりの運動エネルギーを二倍したもの $T \equiv \beta^{-1} = 2 \langle K \rangle / N$ を温度として，一粒子あたりの全エネルギーとの関係を示したものである．HMF モデルに近づく $\varepsilon = 10$ の条件のもとでは，温度曲線は図 2(a) のようになる．一様分布の相 $U > U_c(\varepsilon)$ では，曲線はほぼ線形関係

になり，一方でクラスターを形成する相 $U < U_c(\varepsilon)$ では折れ曲がる．この場合には，温度はエネルギー増加により上昇し，負の比熱は現れない．一方でソフトニングを小さく取ると，三次元重力のように，負の比熱の相が現れる．図 2(b) では，二つの異なる値の ε に対して曲線を描いた [9]．この場合，相は三つに分類される．

- 低エネルギーでクラスターを形成する相 $U < U_{top}(\varepsilon)$ ． U_{top} は比熱が 0 になるエネルギー $\partial T / \partial U = 0$ である．
- 中間状態の相 $U_{top}(\varepsilon) < U < U_c(\varepsilon)$ ．この相で負の比熱が現れる．
- 高エネルギーのガス状の相 $U_c(\varepsilon) < U$ ．

低エネルギーの相は ε の存在によって現れる．一方，高エネルギーの相では粒子はポテンシャルの影響をほとんど受けず，自由粒子のように振る舞う．中間状態の相が重力の特徴をよく示していると考えられ， ε を小さくする事により相のエネルギースケールが広がる．

3 逐次近似の方法

Boltzmann-Gibbs エントロピーのもとでミクロカノニカル分布での平衡分布を求める．エントロピー最大の条件から SGR モデルに対しては，分布関数は

$$f(p, \theta) = A \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2} + W(\theta) \right) \right], \quad (4)$$

となる．ここで W は

$$W(\theta) \equiv \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi, \quad (5)$$

で定義される量である．質量密度は以下のように書かれる．

$$\rho(\theta) = \tilde{A} e^{-\beta W(\theta)}, \quad (6)$$

ここで $\tilde{A} = A \sqrt{2\pi/\beta}$ である．

(5) と (6) を組み合わせる事により，我々は閉じた式を得る事が出来る．

$$\rho(\theta) = \tilde{A} \exp \left[-\beta \tilde{A} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\phi) V_\varepsilon(\theta - \phi) d\phi \right]. \quad (7)$$

しかし (7) に対して逐次近似の方法を用いても，収束があまり良くない．そこで我々は Turkington and Whittaker [13] が二次元乱流での極大エントロピーを求める際に用いた方法と類似した方法を提案する．エントロピー極大での分布関数を求める際，我々は質量とエネルギーの拘束条件を課す．エネルギーは一般に分布関数に対して非線形であるので，変分問題として取り扱うには難しい．そこで非線形の拘束条件を線形化するトリックを用いる．

具体的には逐次近似において k 回目の計算によって分布関数 f_k が求まっていたとする時，以下の条件で f_{k+1} を導出する．

$$\max \left\{ S[f] \mid M[f] = 1, E[f] = E[f_k] + \int \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} (f - f_k) dp d\theta \leq U \right\}, \quad (8)$$

ここでエネルギーの変分は以下ようになる．

$$\left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} = \frac{p^2}{2} + W_k(\theta). \quad (9)$$

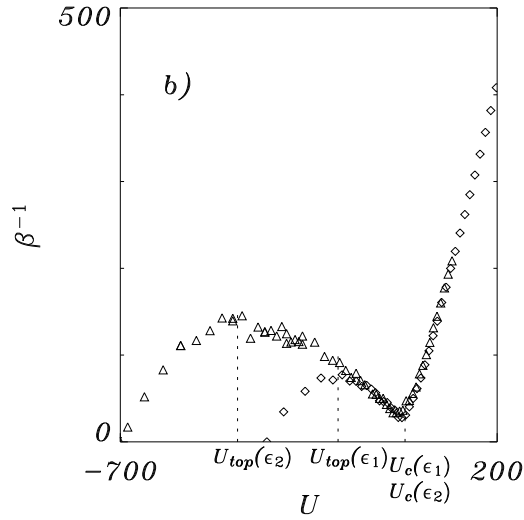
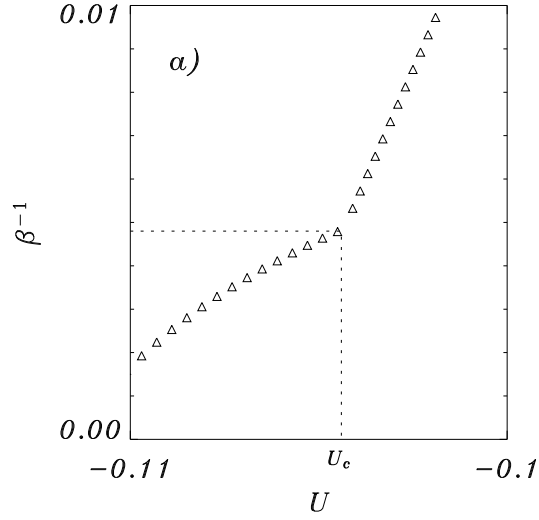


図 2: 数値計算によって得られた SGR モデルの温度曲線．いずれも粒子数は $N = 100$ である．(a) は $\varepsilon = 10$ とした場合で， U_c で系は二次相転移を起こす．この時は負の比熱は現れない．(b) は $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\varepsilon_2 = 2.5 \times 10^{-7}$ の場合．相転移はミクロカノニカル分布で一次相転移となる．二つのエネルギー $U_c(\varepsilon_1)$ と $U_c(\varepsilon_2)$ は非常に近い値となり，相転移エネルギーは ε にあまり依存しないようである．一方， $U_{top}(\varepsilon_1)$ は明らかに $U_{top}(\varepsilon_2)$ より小さく， ε を小さくすると減少する．負の比熱は $U_{top} < U < U_c$ で現れ，ソフトニングを小さくするとエネルギースケールが広がる．

逐次近似でエントロピーを収束させる事を考える．これは不等式の拘束条件に対する Lagrange の未定乗数法を用いれば示す事が出来る．

$$\left. \frac{\delta S}{\delta f} \right|_{f_{k+1}} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} \quad (10)$$

ここで，エネルギーに対する拘束条件は以下のようにする．

$$\beta_{k+1} \left[E[f^k] + \int \left. \frac{\delta E}{\delta f} \right|_{f_k} (f_{k+1} - f_k) dp d\theta - U \right] = 0, \quad (11)$$

温度は正であるため， $\beta_{k+1} \geq 0$ を課す． α_{k+1} は質量保存から与える．この方法は Kuhn-Tucker の定理 [15] を応用したものである．

ここから先の計算は [14] を参照していただくとして，最終的に我々は次の関数が極値を取るような， $\tilde{A}$ と β を求め，分布関数を逐次求めていく操作を行う．

$$\begin{aligned} F_k^*[f](\tilde{A}, \beta) &= \log \tilde{A} + \frac{1}{2} \log \beta - \beta \left(U + E_k - \frac{1}{2\beta_k} \right) \\ &\quad - \tilde{A} \int e^{-\beta W_k} d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

4 SGR モデルの熱力学的性質

我々の開発した手法により，SGR モデルの解析を行う．まずエントロピーを考えると， $U_c(\varepsilon)$ より高いエネルギーでは物質分布は一樣になるので，

$$S = \frac{1}{2} (3 \log(2\pi) + 1 - \log \beta), \quad (13)$$

となる．図 3 は SGR モデルについて，エネルギー U の関数として温度 $T = \beta^{-1}$ とエントロピーを示している．注目すべきは $U_{top} \leq U \leq U_c$ において負の比熱が存在する事である．また， $U_{low} \leq U \leq U_{high}$ ではエントロピーは凸の部分をつなぐ破線とはずれている．これはカノニカル分布とミクロカノニカル分布が与える平衡状態が同一でない事を示している．つまりミクロカノニカル分布では食い違いが生じるエネルギースケールは安定であるが，カノニカル分布では準安定，あるいは不安定である．

相転移点付近をさらに詳細に解析すると，SGR モデルは興味深い特徴を持つ事が分かる．図 3 では SGR モデルが一次相転移を起こす事を確かめたが，一次相転移は準安定状態の存在と関連している．逐次近似の方法を慎重に適用し，エネルギーを徐々に変化させていく事により，準安定状態を見いだす事が出来る．図 4 は $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合に U_c 付近でエントロピーを計算した．非一樣分布の準安定状態は $U_c \leq U \leq U_{in}$ で存在する ($U_{in} \simeq 0.16$)．一方，一樣分布の準安定状態は $U_{hom} \leq U \leq U_c$ で存在する． $U_{hom} = \bar{E}_p(\varepsilon = 10^{-5}) \simeq -1.19$ ．である．

5 平衡状態への緩和

我々が導出した平衡状態は，果たして正しいものだろうか．計算チェック及び系の力学的発展を調べるため，我々は国立天文台の GRAPE-5 システム [16] を用いてシミュレーションを行った．SGR モデルの相互作用は基本的には Newton 重力と同じ形をしているので，重力の計算をやや変形する事により，GRAPE システムでも SGR モデルの時間発展を追う事が出来る．時間発展の積分法は六次のシンプレクティック法 [17] を用いた．シミュレーションの際， $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．

まず $U = -20$ の場合を考える．粒子数は以前の論文 [9] から大幅に増やし，ここでは $N = 4000$ とした．初期に局所的に粒子を分布させ，ほぼ一様でピリアル比を 0 にした場合，まず粒子は重心に向かって落ちていく．その後拡散し，徐々に平衡状態に近づくと考えられる．だが，長距離力系では一般に，緩和は非常に長い [18]．このため，シミュレーションで可能な範囲のタイムスケールでは，系が熱平衡に達しない可能性がある．図 5 は系のピリアル比の時間変化を示している．この図では，シミュレーションから得られたピリアル比は，平衡状態での値から明らかにずれている．すなわち，系は平衡状態とは異なる『準安定状態』に収束しているとみられる．だが一方で，質量分布（図 6）を見てみると，こちらは短時間で平衡状態のものに近づくようである．つまり質量分布と速度分布で，緩和状態に至るタイムスケールが異なるようである．

緩和時間は相転移点付近では長くなる． $U = U_c$ とした場合のシミュレーションでは，エントロピーの値がほぼ同じであるため，初期条件により一様分布，非一様分布の平衡分布のいずれかに収束するかが決まる [14]．この 2 状態の間にはエントロピーの障壁が存在し，長距離力系では粒子数に対し $\exp(N)$ で増加する事が見つけられている [19, 20]．

6 まとめ

本研究では SGR モデルの熱力学的性質を，統計的手法及び数値シミュレーションにより解析した．本報告書では紙面の都合で割愛したが， ε の値により SGR モデルの性質は大きく変わる．性質の境となる三重点において，ミクロカノニカル分布での解析では相転移が一次から二次に変わり，非一様な準安定状態が消滅する．カノニカル分布での解析では，三重点で負の比熱が消える．ところが，両者の三重点は互いに一致しない [21]．

シミュレーションにおいて，我々は平衡状態への緩和には非常に長い時間がかかる事を示した．また，長距離力系にしばしば見られる準安定状態が存在する事が分かった．準安定状態に対して，HMF モデルにおいては，Vlasov 方程式を用いたアプローチで解析がなされている [18]．さらに一次相転移の起きる領域では，系が熱平衡状態とは異なる状態に緩和しうる事が示されている．

以前の論文では，速度分布に関する解析がなされている [9]．類似の解析は空間三次元の Newton 重力系で最近なされた [22]．両者ともいくつかのエネルギー領域では非ガウスの速度分布を示している．SGR モデルに関する今後の研究として，非ガウスの速度分布の発生等のメカニズムを考察する事も興味深い．この解析では，いくつかの有用な解析手法が，HMF モデルの一粒子の拡散を理解するために開発されている [23, 24]．

謝辞

本研究は，ENS Lyon での F. Bouchet 博士，T. Dauxois 博士，S. Ruffo 助教授との活発な議論をもとに始められ，論文 [14] にまとめる事が出来ました．また，早稲田大学の前田恵一教授，お茶の水女子大学の森川雅博教授，曾田康秀博士，井口修博士，ぐんま天文台の中道晶香博士との有用な議論と助言が参考になりました．本研究は国立天文台の GRAPE システムプロジェクト (g04b06) に採択され，シミュレーションは国立天文台の GRAPE-5 システムで全て行いました．また，本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金（若手研究 (B) 16740152）の補助のもとになされております．これらの方々，団体に感謝の意を表したいと思います．

参考文献

- [1] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton (1987).

- [2] V. A. Antonov, Vestnik Leningrad Univ. **7**, 135 (1962).
- [3] D. Lynden-Bell, R. Wood, Mon. Not. R. Astron. Soc. **138**, 495 (1968).
- [4] T. Padmanabhan, Astrophys. J. Supp. **71**, 651 (1989).
- [5] D. Heggie, P. Hut, *The Gravitational Million-Body Problem*, Cambridge University Press (2003).
- [6] F. Hohl, M. R. Feix, Astrophys. J. **147**, 1164 (1967).
- [7] T. Tsuchiya, T. Konishi, N. Gouda, Phys. Rev. E **50**, 2607 (1994).
- [8] H. Koyama, T. Konishi, Phys. Lett. A **279**, 226 (2001).
- [9] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, T. Tatekawa, K. Maeda, Phys. Rev. E **64**, 056133 (2001).
- [10] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 2361 (1995).
- [11] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens (Eds.), “*Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*”, *Lecture Notes in Physics* **602**, Springer (2002).
- [12] F. Bouchet, J. Barré, cond-mat/0303307; to be published in Journal of Statistical Physics (2005).
- [13] B. Turkington, N. Whitaker, SIAM J. Sci. Comp. **17**, 1414 (1996).
- [14] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, cond-mat/0501583.
- [15] 竹内啓, 岩波講座 応用数学 [対象 9] 社会科学における数理的方法, Sec 1.3, (岩波書店, 1995)
- [16] A. Kawai, T. Fukushima, J. Makino, M. Taiji, Pub. Astron. Soc. Japan **52**, 659 (2000).
- [17] H. Yoshida, Phys. Lett. A **150** 262 (1990).
- [18] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo, Physica A **337**, 36-66 (2004).
- [19] M. Antoni, S. Ruffo, A. Torcini, Europhysics Letters **66**, 645-651 (2004).
- [20] P. H. Chavanis, M. Rieutord, Astron. Astrophys. **412**, 1 (2003). P. H. Chavanis, astro-ph/0404251.
- [21] J. Barré, D. Mukamel, S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **87**, 030601 (2001).
- [22] O. Iguchi, Y. Sota, T. Tatekawa, A. Nakamichi, M. Morikawa, Phys. Rev. E **71**, 016102 (2005).
- [23] F. Bouchet, Phys. Rev. E **70**, 036113 (2004).
- [24] F. Bouchet, T. Dauxois, cond-mat/0407703.

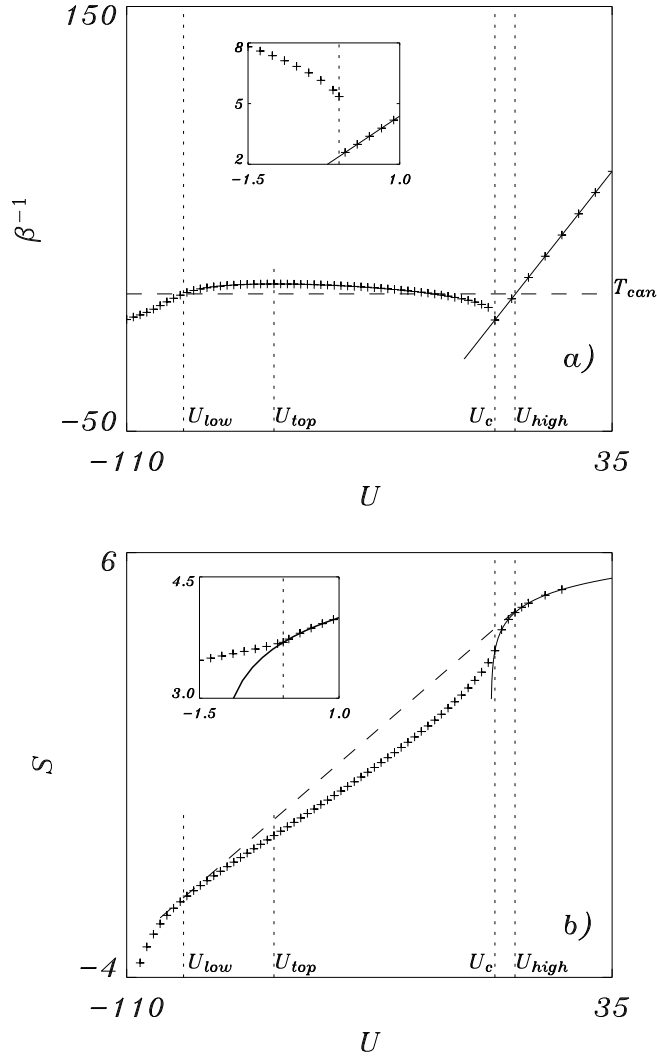


図 3: 温度 (図 (a)) とエントロピー (図 (b)) を U の関数として見た図．ここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とした．四つのエネルギースケールは以下の通り． $U_{low} \simeq -93$, $U_{high} \simeq 6$ はアンサンブル間の食い違いが生じるエネルギー． $U_c \simeq 0$ はミクロカノニカル分布の相転移点． $U_{top} \simeq -66$ は負の比熱が現れる下限である． $T_{can} \simeq 15$ はカノニカル分布での相転移温度を示す．次に (b) で実線は一様分布の解析解である．この解は準安定状態として U_c まで伸びている．(a) と (b) には相転移点 U_c 付近の拡大図を載せており、温度は U_c で不連続であり、エントロピーは傾きの異なるスロープに移る．明らかに一次相転移の性質を示している．

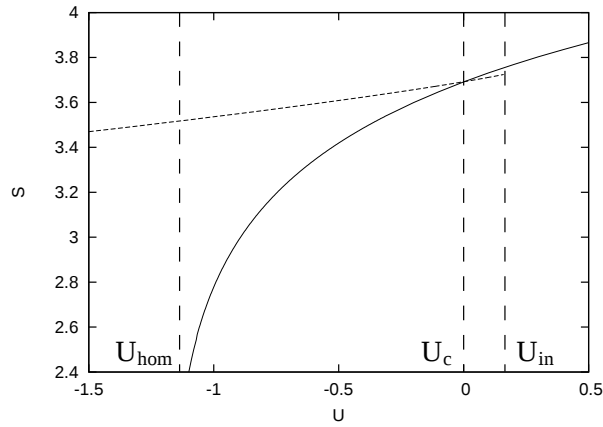


図 4: エネルギーとエントロピーの関係． $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合の一樣分布（実線）と非一樣分布（破線）でのエントロピーを示している．二つの線は $U_c \simeq 0$ で交差する．一樣分布の系列は $U_{hom} \simeq -1.19$ まで続く．一方，非一樣分布の系列は $U_{in} \simeq 0.16$ まで続く．

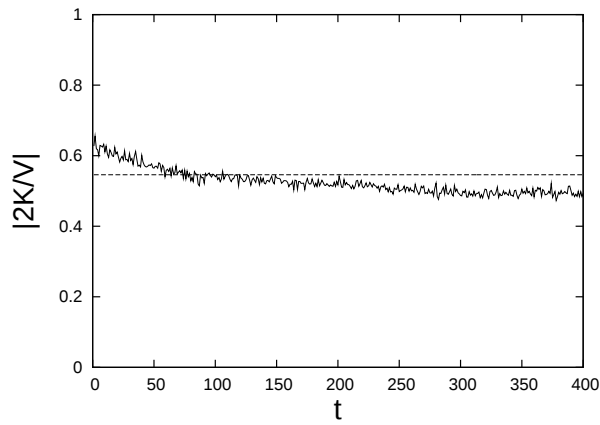


図 5: $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 4000$ の SGR モデルでの，ビリアル比 $|2K/V|$ の時間変化．初期条件として，粒子は $[0, 2\pi/75]$ の範囲に，運動エネルギー 0 で分布させた．ビリアル比は振動しながら漸近的に 0.49 に近づいているが，これは破線で示した平衡状態での値 0.55 と明らかにずれている．

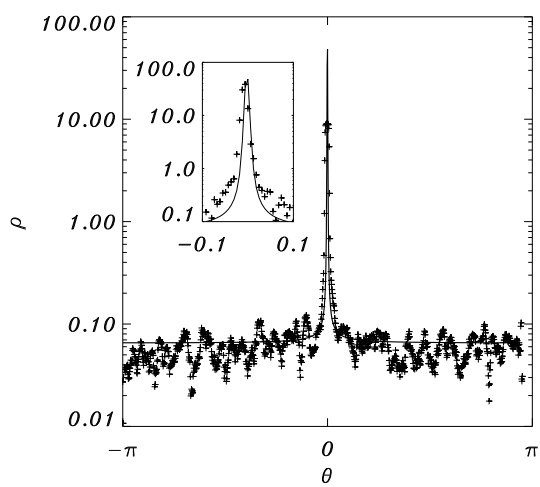


図 6: 逐次近似 (実線) と $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 4000$ のシミュレーション (+マーク) による, 質量分布の比較. 図中の拡大図は密度のピークを示している.