

平成 13 年度国立天文台データ解析計算センター 大規模シミュレーションプロジェクト 成果報告書

回転球殻中の熱対流の研究～天体内部流体運動の基礎として

竹広 真一 (九大・理)

1 はじめに

回転球殻中の熱対流および磁気流体対流は、恒星・木星型惑星大気・あるいは惑星流体核の流体運動と、天体固有磁場生成の理想的なモデルとしてこれまでに研究されてきている。この問題は支配方程式系と幾何学的形状がそれほど単純ではないために解析的に研究することが困難であったが、近年ようやく計算機能力の向上によって数値計算による研究が可能になってきた。しかしながら、系に登場するパラメーターが多くいまだ対流の性質がよく知られ理解されているとはいえない。そこで本研究では 3 次元回転球殻ブシネスク対流の数値モデルを用いて、出現する対流や磁場の性質を調べることを行っている。理想的なモデルから見出される天体の内部流体運動の性質と実際の太陽や惑星の外側からの観測結果とを比較することで、観測では直接明らかにすることのできない天体内部の流体運動やそれに起因する天体固有磁場生成維持に関しての議論や推察ができると期待している。今年度は、球殻中の上部に安定成層を持つような基本場の温度分布を考えて、下層の不安定成層中に発生する対流の性質を調べた。その動機のひとつは以下に述べるような最近のガリレオ探査機による木星大気の観測である。

木星型惑星の表面では縞状構造とそれに伴う平均帯状流が観測されている。この縞状の帯状流分布の成因として考えられているメカニズムの一つに、木星大気深部のテイラーカラム型対流による説明がある (Busse 1983)。回転軸方向に伸びた 2 次元的な対流運動が外側境界の影響で傾くことにより、動径方向への運動量輸送が生じるというものである。ガリレオ衛星の観測ではこの平均帯状流が表面付近から 24 bar まではほぼ一様に分布していることが示された。内部にまで深く一様な平均帯状流の存在はこの平均帯状流が深部の対流により引き起こされていることを示唆している (Atkinson *et al.*, 1996)。ところが一方ではガリレオの観測により、5 bar から 16 bar にかけて安定成層が存在することが示されている (Seiff *et al.*, 1996)。このような安定成層が存在すると、そこでは対流運動が抑えられるために上記のような運動量輸送による平均帯状流の生成が説明できなくなる可能性がある。

この問題に対して Zhang and Schubert (1996,1997) は (以後 ZS と呼ぶ)、上層に安定成層を持つような基本場に対しての回転球殻内の臨界対流の構造を求め、テイラーカラム型の対流が安定成層をたやすくつき抜けることを示した。安定成層が存在しても対流の運動量輸送でもって平均流を作ることが出来ると主張した。

しかしながら、ZS で扱った基本場の外側安定成層はそれほど強くない。安定成層と回転の効果の相対的な強さを表す量としてプラントバイサラ振動数 N と慣性振動数 2Ω の比が目安となるだろう。この量は ZS の用いたモデルでは

$$\frac{N}{2\Omega} = \sqrt{\frac{Rd\Theta/dr}{PT}} \quad (1)$$

と見積もられる。ここで R はレイリー数、 T はテイラー数、 P はプランドル数、 $d\Theta/dr$ は基本場の安定層内での温度傾度である。彼らが用いた基本場の温度分布は穏やかなものであり、安定成層中の温度傾度の大きさはほぼ $O(1)$ である。その上 $P = 1$ での臨界状態を調べているのでレイリー数は大まかに $R \sim T^{2/3}$ の関係にしたがっている。したがって彼らの計算では $N/2\Omega < 1$ であり、安定成層の効果が回転の効果より弱い状況となっている。一方で、ガリレオ衛星による観測での木星大気 5 bar から 20 bar での温度傾度を用いると (Seiff *et al.*, 1996) $N \sim 2\pi/30$ であり、 $N/2\Omega$ は十分大きい。したがって ZS の解は木星大気の力学を考える上では適当でないかも知れない。

回転球殻内の対流と安定成層の問題は、地球外核内の流体運動と地球磁場変動と関連しても興味深い問題である。外核の最も外側部分での安定成層の存在が古くから示唆されている。その生成の仕組みは、内核の固化に伴う軽成分が上昇し堆積するといった組成的な要因と (e.g. Fearn and Loper, 1981; Braginsky, 1984) 核からマントルへ流れる熱流量の見積もりが小さいことによる熱的な要因 (Gubbins *et al.*, 1982; Labrosse *et al.*, 1997; Lister and Buffett, 1998) が主なものである。このような安定成層の内部での流体運動が、地球磁場の永年変動の起源になっているのではないかと提唱されている (Braginsky, 1993; Yokoyama and Yukutake, 1993)。しかしながら安定成層下の対流運動が安定成層に貫入する可能性を考えると、成層内の流体運動は下の層の流体運動から必ずしも完全に独立しているわけではない。下部の対流運動がどの程度安定成層に貫入するかは、永年変動の起源だけでなく地球磁場ダイナモにも関連するであろう安定成層内の流体運動を考える上でひとつの鍵となる点である。

そこで本研究では、より強い安定成層が外側に存在する状況での回転球殻内の対流の貫入を調べてみた (Takehiro and Lister 2001)。以下では、まず回転球殻内上層の安定成層の局所的なモデルを考え、安定成層への渦の貫入の特徴的な距離の解析的な表現の導出を行う。次に上層に安定成層が存在する場合の回転球殻内の臨界対流を計算し、解析的なモデルと結果を比較する。その結果、木星大気のパワーストリーク生成に関して得られる示唆を述べる。

2 テイラー柱型対流の貫入距離

回転球殻内の上層の安定成層の境界面より上側を局所的に扱って、図 1 のような、半無限遠領域のブシネスク流体を考える。 $z = 0$ が安定成層と不安定成層の境界面

に相当する。鉛直上向きを z 軸, 回転軸と重力がなす面内に y 軸, それらと直行する向きに x 軸をとる。ブシネスク流体の式を静止状態に対して線形化すると,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \alpha g \theta \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Gamma w = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

ここで $\mathbf{v}$ は速度, $w = \mathbf{v}_z$ は速度の鉛直成分, θ は温度擾乱, p は圧力である。 α は体膨張率, g は重力加速度, $\Gamma = d\Theta/dz$ は基本場の温度傾度, $\mathbf{e}_z$ は鉛直上向きの単位ベクトル, $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi)$ は系の回転角速度ベクトルである。

回転が強い状況を考えるため粘性, 熱拡散は無視している。

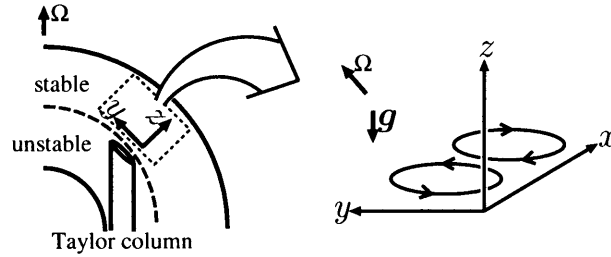


図 1: 局所平面モデルの模式図

圧力を消去するために (2) に $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times, \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla w = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \zeta = \alpha g \nabla_H^2 \theta. \quad (6)$$

ただし $\nabla_H^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$ である。

対流層内のテイラーコラム型対流を想定して, $z = 0$ にて $\zeta = \zeta_0 e^{i(kx + ily - \omega t)}$ の渦を与えよう。このとき安定成層内の応答は, $(\zeta, w, \theta) \propto e^{i(kx + ily - \omega t)}$ として (3), (5), (6) を解くことにより,

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(kx + ily - \omega t)} e^{imz} \quad (7)$$

となる。ただし m は分散関係 $\omega^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + (\bar{f}l + fm)^2}{k^2 + l^2 + m^2}$ の解のうち虚部が正のものであり,

$$m = \frac{-f\bar{f}l + i\sqrt{(f^2 - \omega^2)(N^2 - \omega^2)(k^2 + l^2) - \bar{f}^2\omega^2 l^2}}{f^2 - \omega^2}, \quad (8)$$

ここで $N = \sqrt{\alpha g \Gamma}$ はブラントバイサラ振動数であり, $f = 2\Omega \sin \phi$, $\bar{f} = 2\Omega \cos \phi$ はコリオリパラメータである. 上を解く際に, $z \rightarrow \infty$ にて解が発散しないことを境界条件として用いた.

今, 下面の渦はテイラーコラム型対流を想定しているのので, その振動数はロスビー波の力学で定まる. したがって $f, \bar{f} \gg \omega$ なので,

$$m \sim \frac{-f\bar{f}l + \sqrt{\omega\bar{f}^2l^2 - f^2(N^2 - \omega^2)(k^2 + l^2)}}{f^2}. \quad (9)$$

さらに $N \gg \omega$ であれば

$$m \sim \frac{-f\bar{f}l + \sqrt{-f^2N^2(k^2 + l^2)}}{f^2} = -\frac{l}{\tan \phi} + i\frac{N}{f}\sqrt{k^2 + l^2}. \quad (10)$$

等位相線は回転軸方向に平行でありつつ z の正方向へ指数的に減衰する解である. その特徴的な厚さ δ_z は

$$\delta_z \sim \frac{f}{N} \frac{1}{\sqrt{k^2 + l^2}}, \quad (11)$$

したがって回転軸方向への貫入距離 δ_Ω が

$$\delta_\Omega \sim \frac{2\Omega}{N} \frac{1}{\sqrt{k^2 + l^2}}, \quad (12)$$

と得られる. すなわち, 貫入距離は系の回転角速度と渦の水平スケールに比例し, 安定成層内のブラントバイサラ振動数に逆比例する. 特に $N \rightarrow 0$ の極限では回転軸方向に無限に伸びる構造となり, Taylor-Proudman の定理の述べることに一致する (図 2).

この表現は, いわゆる大気・海洋の静水圧近似の元でのロスビーの厚さ (Gill, 1982) の非静水圧状況への拡張となっている.

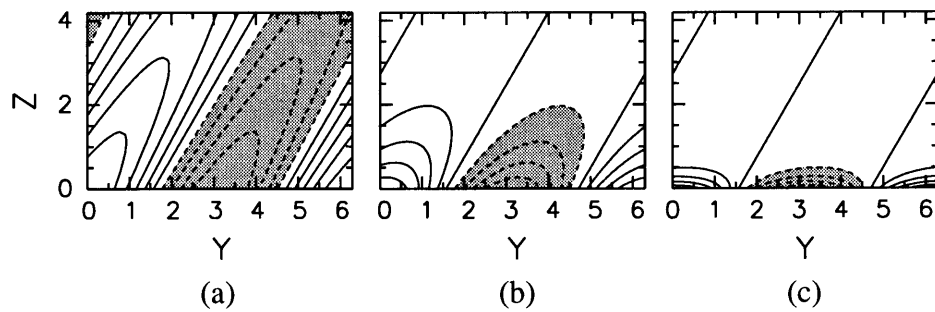


図 2: 局所平面モデルの解. $k = l = 1.0$, 緯度 60 度. (a) $N/2\Omega = 0.1$, (b) $N/2\Omega = 0.5$, (c) $N/2\Omega = 2$.

3 3次元回転球殻対流の計算

3.1 定式化

第2節で得られた貫入距離の解析的な表現を確認するために、回転球殻内の臨界対流を計算する。支配方程式は

$$P^{-1} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi + R\theta \mathbf{r} + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (13)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \nabla^2 \theta, \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (15)$$

ここで $\mathbf{v}, \pi, \theta$ は無次元化された速度、圧力、温度擾乱を表す。 $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ はラグランジュ微分である。 R はレイリー数、 τ はテイラー数 T の平方根、 P はプラントル数であり、以下のように定義される。

$$R \equiv \frac{\alpha \beta \gamma d^6}{\kappa \nu}, \quad \tau \equiv \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P \equiv \frac{\nu}{\kappa}. \quad (16)$$

考える基本場の温度傾度分布は、内側は一様内部熱源による不安定成層、外側は温度傾度一定の安定成層となるように遷移層で連続的につなげたものである。その無次元化された表現は

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{2}(r + \Gamma_0) \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_b}{a} \right) \right] + \Gamma_0 \quad (17)$$

ここで r は動径座標、 Γ_0 が外側安定成層の温度傾度、 r_b が遷移層中間の動径座標、 a が遷移層の幅である。

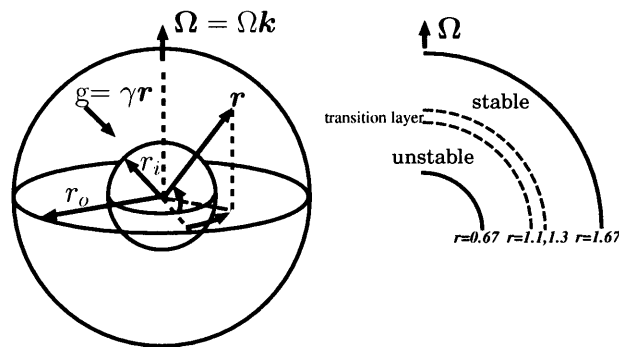


図 3: 系と基本場の安定度の模式図.

実際の数値計算には非圧縮速度場をトロイダル、ポロイダルポテンシャル ψ, ϕ を用いて $\mathbf{v} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r})$ と表し、圧力を消去した方程式系を用いてい

る. 運動方程式に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times, \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させることによりトロイダル, ポロイダルポテンシャルの式が導かれる.

$$\left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \tau Q \phi = P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \tau Q \psi - R L_2 \theta \\ &= -P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta + L_2 \phi = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, \quad (20)$$

ここで L_2 は単位球面上の水平ラプラシアン逆符号であり, Q は

$$Q \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2), \quad (21)$$

と表される演算子である.

境界条件は簡単のため free-slip, 温度固定境界条件を用いることにする.

$$\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = \theta = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (22)$$

(18),(19),(20), (22) を解くために, さらに変数を水平方向に球面調和関数で展開し, 動径方向はチェビシェフ関数で微分を評価すべく格子点を選んでいる.

臨界状態での対流の様子を調べるために, (18), (19), (20) の右辺非線形項を無視し, 各変数が e^{st} に比例するとして変数分離する. 与えられた T, P , に対して固有値 s の実部の最大値が 0 となるような m と R の組合せを繰り返し計算で求める. このようにして求めた R の最小値とそれを与える東西波数 m が臨界レイリー数と臨界波数である.

数値計算を行う際のパラメータは次のように選んだ. プランドル数は $P = 1$ に固定し, テイラー数は $T = 10^8$ と $T = 10^{10}$ の 2 通りを計算した. 内外半径比は $\eta = 0.4$ ($r_i = 0.667, r_o = 1.667$) に固定し, 遷移層の位置と幅は $r_b = 1.2, a = 0.05$ とした. 安定成層の強さ Γ_0 は 1 から 50 まで変化させた. 解像度は計算する最大南北波数を $(l - m) = 49$, 動径格子点数を 31 とした.

図 4 には安定成層での安定度をさまざまに変えたときの臨界対流の速度の経度成分の子午面分布を示している. $\Gamma_0 = 1$ の場合には対流柱がほとんど減衰せずに安定成層を貫いている. この場合は Zhang and Schubert (1997) の結果と整合的である. しかしながら Γ_0 を増加させると貫入の程度が弱くなることが明らかである. $\Gamma_0 = 50$ の場合には対流柱は縮まってほとんど下部不安定成層内に留まっている. 柱状構造が縮まる様子はテイラー数が小さい場合にも同様に見ることができる (図 5).

図 6 では臨界対流の数値計算結果から読みとった貫入距離と, 理論的な貫入距離 (12) を比較したものである. (12) を用いる際には緯度経度方向の波数を単純に等

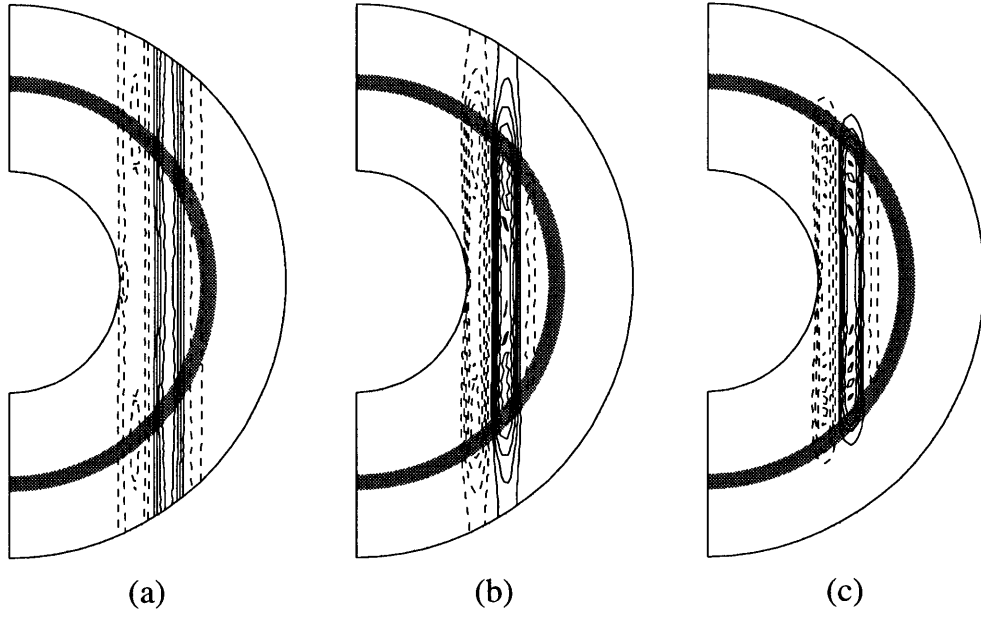


図 4: 安定成層での安定度をさまざまに変えたときの臨界対流の構造. 速度の経度成分の子午面分布を示している. $T = 10^{10}$ の場合. (a) $\Gamma_0 = 1, m = 18$. (b) $\Gamma_0 = 10, m = 18$. (c) $\Gamma_0 = 50, m = 20$.

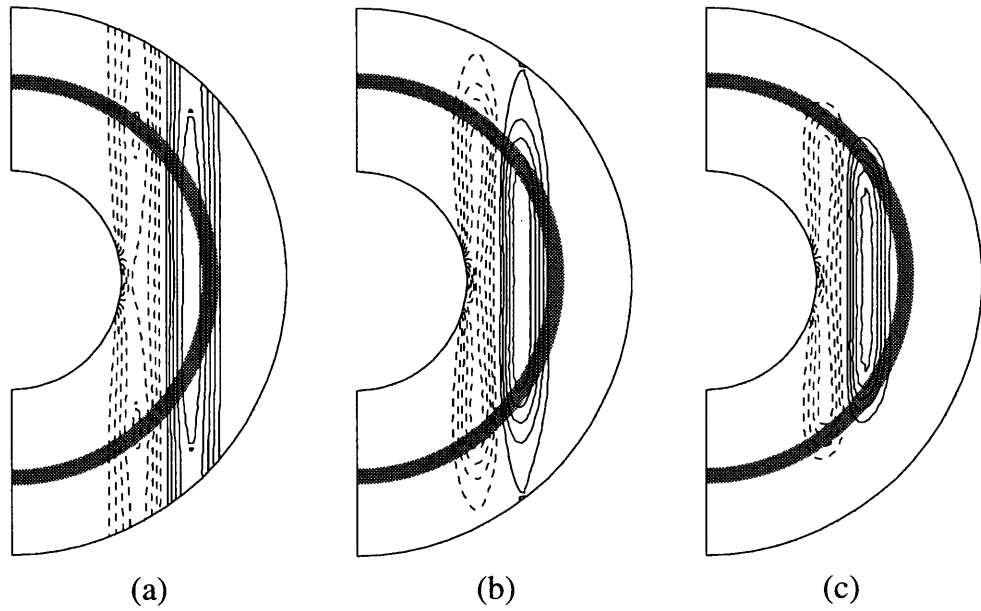


図 5: $T = 10^8$ を除いて図 4 と同じ. (a) $\Gamma_0 = 1, m = 9$. (b) $\Gamma_0 = 10, m = 9$. (c) $\Gamma_0 = 50, m = 10$.

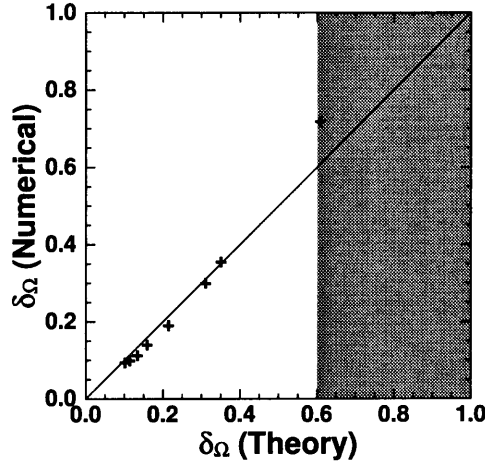


図 6: 貫入距離の比較. 縦軸と横軸がそれぞれ数値計算から得られた貫入距離と理論的な表現 (12) による貫入距離である. 貫入距離が安定成層の厚さを越える領域をハッチしている.

しいとして $\sqrt{k^2 + l^2} \sim \sqrt{2m/s}$ とした. ここで s は観測点の回転軸からの距離である. 数値的に得られた貫入距離と理論的な見積もりは良くあっていると言えるだろう.

4 まとめ

本研究の重要な結論は, 回転球殻内のテイラーコラム型対流は必ずしも上層の安定成層に深く貫入するとは限らないということである. 安定成層が強いほど, あるいは対流渦の水平スケールが小さいほど貫入距離は短くなる. このことは, 安定成層が下面の渦運動に対して low-pass フィルターの如く作用することを意味している. すなわち, 水平波数が大きい (スケールが小さい) 運動が効果的に減衰させられてしまう. したがってもしも深部のカラム状対流が広い水平スケールにわたって存在している場合には, 水平スケールの大きい運動のみが貫入し, 水平スケールの小さな運動は安定成層下にトラップされるだろう. さらにこのことは, 安定成層より上側の平均帯状流を生成するために必ずしもテイラー柱型対流が安定成層を貫入する必要がないことを意味している. 平均帯状流は水平スケールが大きいので, その貫入距離がテイラー柱型対流よりも大きい. したがって, 安定成層下にトラップされた小スケールのカラム状対流運動により生成された深部の平均帯状流が安定成層を貫入することで, 安定成層上部の平均帯状流を遠隔的に生成することができる.

貫入距離の表現 (12) を用いて, 安定成層下にトラップされてしまう渦運動の水平スケールの最大値を見積もることができるだろう. ガリレオ観測にて見出された安定成層は 5 bar から 16 bar の範囲に存在しており, 100 km 程度の厚さである

(Seiff *et al.*, 1996). したがって $\delta_z \ll O(100\text{km})$ が条件となる. これより安定成層を貫くことのできない運動の水平スケール L は $L \ll O(1000\text{km})$ と制限される. 木星の表面に見られる帯状流の幅は $O(10000\text{km})$ であるから, 木星表面の帯状流が深部から安定成層を貫いて表面にまで達していると考えerことは可能である.

文献

- Atkinson, D. H., Pollack, J. B., Seiff, A., 1996 : Galileo doppler measurements of the deep zonal winds at Jupiter. *Science*, **272**, 842-843
- Braginsky, S. I., 1984 : Short-period geomagnetic secular variation, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **30**, 1-78.
- Braginsky, S. I., 1993 : MAC-Oscillations of the hidden ocean of the core, *J. Geomagn. Geoelectr.*, **45**, 1517-1538.
- Busse, F. H., 1983 : A model of mean zonal flows in the major planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **23**, 153-74
- Busse, F. H., 1983 : Convection-driven zonal flows in the major planets. *PA-GEOPH*, **121**, 375-90
- Fearn, D. R., Loper, D. E., 1981 : Compositional convection and stratification of earth's core, *Nature*, **289**, 393-394.
- Gill, A. E., 1982 : Atmosphere and Ocean Dynamics. *Academic Press*, New York, 662pp.
- Gubbins, D., Thomson, C. J., Whaler, K. A., 1982 : Stable regions in the earth's liquid core, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **68**, 241-251.
- Labrosse, S., Poirier, J.-P., Le Mouel, J.-L., 1997 : On cooling of the Earth's core, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **99** 1-17.
- Lister, J. R., Buffett, B. A., 1998 : Stratification of the outer core at the core-mantle boundary, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **105**, 5-19.
- Seiff, A., Kirk, D. B., Knight, T. C. D., Mihalov, J. D., Blanchard, R. C., Young, R. E., Schubert, G., Zhang, U., Lehmacher, G., Milos, F. S., Wang, J., 1996 : Structure of the atmospheric of Jupiter: Galileo probe measurements. *Science*, **272**, 844-845

- Takehiro, S., Lister, J. R., 2001 : Penetration of columnar convection into an outer stably stratified layer in rapidly rotating spherical fluid shells. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **187**, 357–366
- Yokoyama, Y., Yukutake, T., 1993 : A model of the geomagnetic 60-year variation. *J. Geophys. Res.*, **98**, 13787–13798
- Zhang, K., Schubert, G., 1996 : Penetrative convection and zonal flow on Jupiter. *Science*, **273**, 941-943
- Zhang, K., Schubert, G., 1997 : Linear penetrative spherical rotating convection. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 2509-2518