

2001 年度大規模シミュレーションプロジェクト成果報告書

グループ	hko06a
研究課題名	連星中性子星の合体の3次元一般相対論的シミュレーション
研究代表者	新潟大学理学部 大原謙一

1 はじめに

TAMA300, LIGO, VIRGO, GEO600 など、レーザー干渉計を用いた重力波観測装置に対する有力な重力波源のひとつである連星中性子星の合体とその際に放射される重力波の性質を明らかにするために、一般相対論的な数値シミュレーションによる研究を行った。

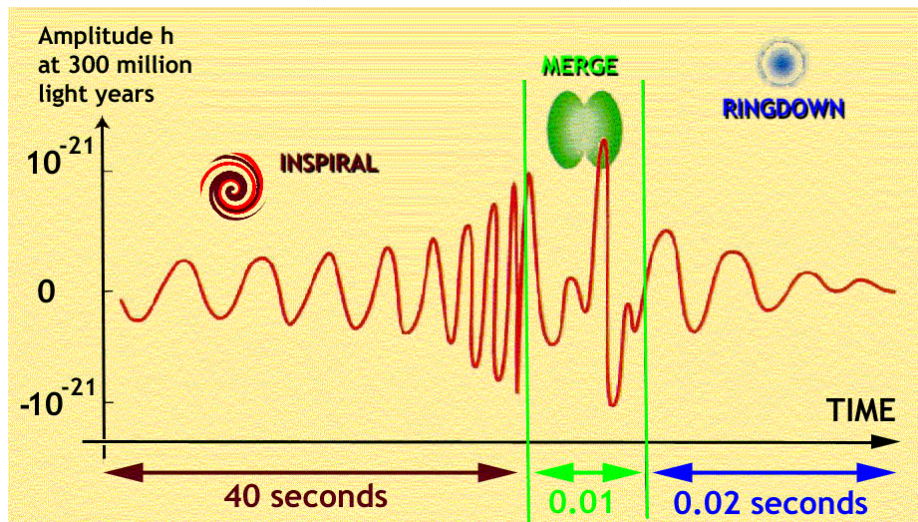


図 1: 連星中性子星/ブラックホールからの重力波

連星中性子星/ブラックホールの合体で放射される重力波は、図3のように、(1) inspiral phase, (2) merging phase, (3) ringdown phase に分けることができる。inspiral phase では、2つの星が十分離れていて、それぞれを点粒子と見なすことが可能で、準定常に2つの星が徐々に接近する。この重力波は、チャープ・シグナルと呼ばれ、ポスト・ニュートニアン近似による計算で重力波の波形を精密に予測することができる。しかし、mergin phase では、2つの星を質点と見なすことはできず、また、完全に一般相対論的に取り扱うことが必要である。したがって、この段階の様子を知るためには一般相対論的な数値シミュレーションを行うことが必要である。ringdown phase での重力波は、合体後にできるブラック

ホール (あるいは中性子星) の準固有振動によるものであり、その質量や角運動量がわかれば波形を予測することができるが、どのようなブラックホールや中性子星ができるかを知るためには数値シミュレーションが必要になってくる。

本研究の目的は、2つの中性子星が合体する直前を初期条件とし、mergin phase 以降の連星中性子星の進化を明らかにすることである。

2 基礎方程式と計算法概略

まず、Einstein 方程式を Cauchy 問題として解くために、(3+1) 次元形式を用いる。ここでは、4次元時空の計量テンソルは以下のように書くことができる。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (1)$$

ここで、 $\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}$ は、それぞれ、ラプス関数、シフトベクトルおよび3次元空間の計量テンソルである。

流体と計量の時間発展を記述する方程式は、次のように書き下すことができる。
(一般相対論的流体方程式)

$$\partial_t \rho_N + \partial_\ell (\rho_N V^\ell) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_N u_i^N) + \partial_\ell (\rho_N u_i^N V^\ell) = & -\sqrt{\gamma} \alpha \partial_i p - \sqrt{\gamma} (p + \rho_H) \partial_i \alpha \\ & + \frac{\sqrt{\gamma} \alpha J^k J^\ell}{2(p + \rho_H)} \partial_i \gamma_{k\ell} + \sqrt{\gamma} J_\ell \partial_i \beta^\ell. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_t (\rho_N \varepsilon) + \partial_\ell (\rho_N \varepsilon V^\ell) = -p \partial_\nu (\sqrt{\gamma} \alpha u^\nu). \quad (4)$$

(計量テンソルの時間発展)

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{K}_{ij} - \beta^\ell \partial_\ell \widehat{K}_{ij} = & \phi^{-4} [\text{STF} \{ \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij}) - D_i D_j \alpha \}] \\ & + \alpha (K \widehat{K}_{ij} - 2 \widehat{K}_{i\ell} \widehat{K}^\ell_j) \\ & + \widehat{K}_{i\ell} \partial_j \beta^\ell + \widehat{K}_{j\ell} \partial_i \beta^\ell - \frac{2}{3} \widehat{K}_{ij} \partial_\ell \beta^\ell, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\partial_t K - \beta^\ell \partial_\ell K = \alpha \left[\widehat{K}_{ij} \widehat{K}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 + 4\pi (\rho_H + S^i_i) \right] - D^i D_i \alpha, \quad (6)$$

$$\partial_t \widetilde{\gamma}_{ij} - \beta^\ell \partial_\ell \widetilde{\gamma}_{ij} = -2 \left[\alpha \widehat{K}_{ij} - \text{STF} (\widetilde{\gamma}_{i\ell} \partial_j \beta^\ell) \right]. \quad (7)$$

$$\widetilde{\Delta} \phi = -\frac{\phi^5}{8} (16\pi \rho_H + K_{ij} K^{ij} - K^2 - \phi^{-4} \widetilde{R}). \quad (8)$$

ここで,

$$\phi = (\det(\gamma_{ij}))^{\frac{1}{12}}, \quad \tilde{\gamma}_{ij} = \phi^{-4} \gamma_{ij}, \quad \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}_{kj} = \delta^i_j, \quad (9)$$

$$\widehat{K}_{ij} = \text{STF}(\phi^{-4} K_{ij}), \quad \widehat{K}^i_j = \tilde{\gamma}^{ik} \widehat{K}_{kj}, \quad \widehat{K}^{ij} = \tilde{\gamma}^{jk} \widehat{K}^i_k, \quad (10)$$

$$\text{STF}(A_{ij}) \equiv \frac{1}{2} \left(A_{ij} + A_{ji} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}^{kl} A_{kl} \right), \quad (11)$$

一般相対論的シミュレーションでは、時間と空間の座標条件を定めることが重要である。これは、ラプス関数 α とシフトベクトル β^i を定めることである。われわれは、それぞれ、maximal slicing 条件と pseudo-minimal distortion 条件を用いた。これらにより、次のような楕円型の方程式が導かれる。

$$D^m D_m \alpha = \alpha \left(\widehat{K}_{ij} \widehat{K}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 + 4\pi (\rho_H + S) \right) \quad (12)$$

ここで、 D_m は γ_{ij} に対する共変微分、および

$$\nabla^2 \beta^i + \frac{1}{3} \partial_i (\partial_\ell \beta^\ell) = \partial_j (2\alpha \widehat{K}^i_j) - \partial_j \left[\tilde{\gamma}_{j\ell} \partial_i \beta^\ell + \tilde{\gamma}_{i\ell} \partial_j \beta^\ell - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_\ell \beta^\ell + \beta^\ell \partial_\ell \tilde{\gamma}_{ij} \right], \quad (13)$$

ここで、 ∇^2 は平坦な 3 次元空間でのラプラシアンである。

一般相対論的流体方程式 (2)~(4) 式は、van Leer スキーム+TVD を用いて、計量の時間発展方程式 (5)~(7) 式は CIP(Cubic-Interpolated Propagation) 法を用いて解いた。また、楕円型の方程式は、Neumann 型の前処理付きの共役勾配法を用いた。いずれも、完全にベクトル化、並列化が可能である。

この方程式系は数値的に不安定な性質を持っているため、シミュレーションコードの作成には、いくつかの工夫が必要である。例えば、(13) 式の右辺には計量テンソル $\tilde{\gamma}_{ij}$ の高階微分が含まれている。また、(5) 式の右辺に含まれるリッチテンソル R_{ij} を求めるにも計量テンソルの 2 階微分が必要である。特に、 $\partial^2 \tilde{\gamma}_{ij} / \partial x \partial y$ のような量を有限差分で求める際に数値誤差が比較的大きくなる。pseudo-minimal distortion 条件では、

$$\sum_j \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (14)$$

である。したがって、 R_{ij} の計算に出てくる $\frac{\partial^2 \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial x^j \partial x^k}$ はゼロとすることができる。われわれのコードではこれを用いることにより、安定化が達成されている。

3 Gauge-Invariant Wave Extraction

時間に対する座標条件として maximal slicing 条件を用いているが、この座標条件では、中心の星からの距離 r が大きいところで、計量テンソルの non-wave parts は $O(r^{-1})$ で減少

していく。したがって、計量テンソルを

$$\gamma_{ij} = \phi^4(\delta_{ij} + h_{ij}) \quad (15)$$

と書いたとき、 h_{ij} にはゲージモードが含まれており、単純に重力波と見なすことができない。そこで、われわれは、ゲージ不変な重力モードの取り出しを行った。

まず、 r が大きなところで、バックグラウンドを球対称時空とみなし、その摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}^{(e)} + h_{\mu\nu}^{(o)}, \quad (16)$$

ここで、 $g_{\mu\nu}^{(B)}$ で、

$$g_{\mu\nu}^{(B)} = \begin{pmatrix} -N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

と与えられる。また、even-parity と odd-parity の摂動 $h_{\mu\nu}^{(e)}$, $h_{\mu\nu}^{(o)}$ は次のように書くことができる。

$$h_{\mu\nu}^{(e)} = \sum_{lm} \begin{pmatrix} N^2 H_{0lm} Y_{lm} & H_{1lm} Y_{lm} & h_{0lm}^{(e)} Y_{lm,\theta} & h_{0lm}^{(e)} Y_{lm,\phi} \\ * & A^2 H_{2lm} Y_{lm} & h_{1lm}^{(e)} Y_{lm,\theta} & h_{1lm}^{(e)} Y_{lm,\phi} \\ * & * & r^2 [K_{lm} + G_{lm} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}] Y_{lm} & r^2 G_{lm} X_{lm} \\ * & * & * & h_{33}^{(e)} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$h_{33}^{(e)} = r^2 \sin^2 \theta \left[K_{lm} Y_{lm} + G_{lm} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Y_{lm} - W_{lm} \right) \right] \quad (19)$$

$$h_{\mu\nu}^{(o)} = \sum_{lm} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_{0lm}^{(o)} \frac{1}{\sin \theta} Y_{lm,\phi} & h_{0lm}^{(o)} \sin \theta Y_{lm,\theta} \\ 0 & 0 & -h_{1lm}^{(o)} \sin \theta Y_{lm,\phi} & h_{1lm}^{(o)} \sin \theta Y_{lm,\theta} \\ * & * & \frac{1}{2} h_{2lm}^{(o)} \frac{1}{\sin \theta} X_{lm} & -\frac{1}{2} h_{2lm}^{(o)} \sin \theta W_{lm} \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_{2lm}^{(o)} \sin \theta X_{lm} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

ここで、 N^2 , A^2 , R^2 , H_{1lm} , $h_{0lm}^{(e)}$, $h_{1lm}^{(e)}$, K_{lm} , G_{km} , $h_{0lm}^{(o)}$, $h_{1lm}^{(o)}$, $h_{2lm}^{(o)}$ は、 t と r の関数で、 Y_{lm} は球面調和関数、および

$$X_{lm} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}, \quad (21)$$

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{lm}. \quad (22)$$

である。シュバルツシルド時空の摂動の線形理論よりゲージ不変な量 $\Psi^{(o)}$ と $\Psi^{(e)}$ が次のように定義される。

$$\Psi_{lm}^{(o)}(t, r) = \sqrt{2l(l+1)(l-1)(l+2)} N^2 \frac{1}{r} \left(h_{1lm}^{(o)} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_{2lm}^{(o)}}{r^2} \right) \right), \quad (23)$$

$$\Psi_{lm}^{(e)}(t, r) = -\sqrt{\frac{2(l-1)(l+2)}{l(l+1)}} \frac{4rN^2 k_{2lm} + l(l+1)rk_{1lm}}{(l(l+1)+1-3N^2)}, \quad (24)$$

$$k_{1lm} = K_{lm} + N^2 r G_{lm,r} - 2 \frac{N^2}{r} h_{1lm}^{(o)}, \quad (25)$$

$$k_{2lm} = \frac{H_{2lm}}{2N^2} - \frac{1}{\sqrt{N^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{N^2} K_{lm} \right). \quad (26)$$

これらを用いて、重力波の2つの polarization h_+ と $h_\times$ は

$$h_+ - ih_\times = \frac{1}{\sqrt{2}r} \sum_{l,m} (\Psi_{lm}^{(e)}(t, r) + \Psi_{lm}^{(o)}(t, r)) {}_{-2}Y_{lm}, \quad (27)$$

ここで

$${}_{-2}Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)(l-1)(l+2)}} \left(W_{lm} - \frac{i}{\sin \theta} X_{lm} \right) \quad (28)$$

で与えることができる。

われわれは、数値的に求められた計量テンソルから次のような量を計算することにより、放射される重力波を求めた。

$$N^2(t, r) = -\frac{1}{4\pi} \int \gamma_{tt} d\Omega, \quad (29)$$

$$A^2(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int \gamma_{rr} d\Omega, \quad (30)$$

$$R^2(t, r) = \frac{1}{8\pi} \int \left(\gamma_{\theta\theta} + \frac{\gamma_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) d\Omega. \quad (31)$$

$$H_{2lm}(t, r) = \frac{1}{A^2} \int \gamma_{rr} Y_{lm}^* d\Omega, \quad (32)$$

$$G_{lm}(t, r) = \frac{1}{l(l-1)(l+1)(l+2)} \frac{1}{R^2} \int \left[\left(\gamma_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) W_{lm}^* + \frac{2\gamma_{\theta\phi}}{\sin \theta} \frac{X_{lm}^*}{\sin \theta} \right] d\Omega, \quad (33)$$

$$K_{lm}(t, r) = \frac{1}{2} l(l+1) G_{lm} + \frac{1}{2R^2} \int \left(\gamma_{\theta\theta} + \frac{\gamma_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) Y_{lm}^* d\Omega, \quad (34)$$

$$h_{1lm}^{(e)}(t, r) = \frac{1}{l(l+1)} \int \left(\gamma_{r\theta} Y_{lm,\theta}^* + \frac{\gamma_{r\phi}}{\sin \theta} \frac{Y_{lm,\phi}^*}{\sin \theta} \right) d\Omega, \quad (35)$$

$$h_{1lm}^{(o)}(t, r) = -\frac{1}{l(l+1)} \int \left(\gamma_{r\theta} \frac{Y_{lm,\phi}^*}{\sin \theta} - \frac{\gamma_{r\phi}}{\sin \theta} Y_{lm,\theta}^* \right) d\Omega, \quad (36)$$

$$h_{2lm}^{(o)}(t, r) = \frac{1}{l(l-1)(l+1)(l+2)} \int \left[\left(\gamma_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) \frac{X_{lm}^*}{\sin \theta} - \frac{2\gamma_{\theta\phi}}{\sin \phi} W_{lm}^* \right] d\Omega. \quad (37)$$

なお、実際のシミュレーションはデカルト座標系を用いて行っており、ここで現れる球座標系での計量テンソル $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}$ などは γ_{xx}, γ_{yy} などから、例えば次のように計算した。

$$\begin{aligned} g_{rr} = & \sin^2 \theta (g_{xx} \cos^2 \phi + 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \sin^2 \phi) \\ & + g_{zz} \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta (g_{yz} \sin \phi + g_{zx} \cos \phi). \end{aligned} \quad (38)$$

4 計算結果

以上に述べたようなフォーマリズムによりシミュレーションコードを開発してきた。本年度は、数値境界での境界条件を含めた、コーディング方法の見直しを行い、最終的に十分安定なコードを作成することができた。

以下にその計算結果の典型的な例を示す。 x, y, z 方向にそれぞれ $251 \times 251 \times 126$ のグリッドを用いた。初期条件として、質量 $1.5M_\odot$ 、半径 $7.7M_\odot = 11.6\text{km}$ の球対称な星を置いた。2つの星の中心間の距離は $30.2M_\odot = 46.2\text{km}$ である。なお、状態方程式は、 $\gamma = 2$ のポリトロップとした。また、初期の回転速度として

$$\vec{V}_a(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (39)$$

を与えた。ここで、 $\vec{\Omega}$ は軌道角速度で、 $\Omega = 0.010/M_\odot$ である。このとき、システムの角運動量 J は $J = 6.7M_\odot^2$ で、全重力質量 M_g は $M_g = 2.76M_\odot$ であった。

図2は、 x - y 平面の密度 ρ_n の時間発展を示したものである。このとき放射される重力波の波形を (27) 式を用いて求めたものを図3に示した。ここでは、横軸は遅延時間 $t - r$ で、重力波は z 軸上の $r = 70M_\odot \sim 100M_\odot$ でモニターしている。これらが線が重なっていることは、光速で重力波が伝播していることを示している。また、図4では、(27) 式を用いて計算したもの (実線) と単純に

$$\hat{h}_+ = \frac{1}{2}(h_{xx} - h_{yy}), \quad (40)$$

$$\hat{h}_\times = h_{xy}, \quad (41)$$

より計算したもの (破線) を比較している。後者には、ゲージ依存のモードが含まれているが、定性的には (27) 式で求めた波形と一致し、ゲージ依存のモードの影響はそれほど大きくないことがわかる。

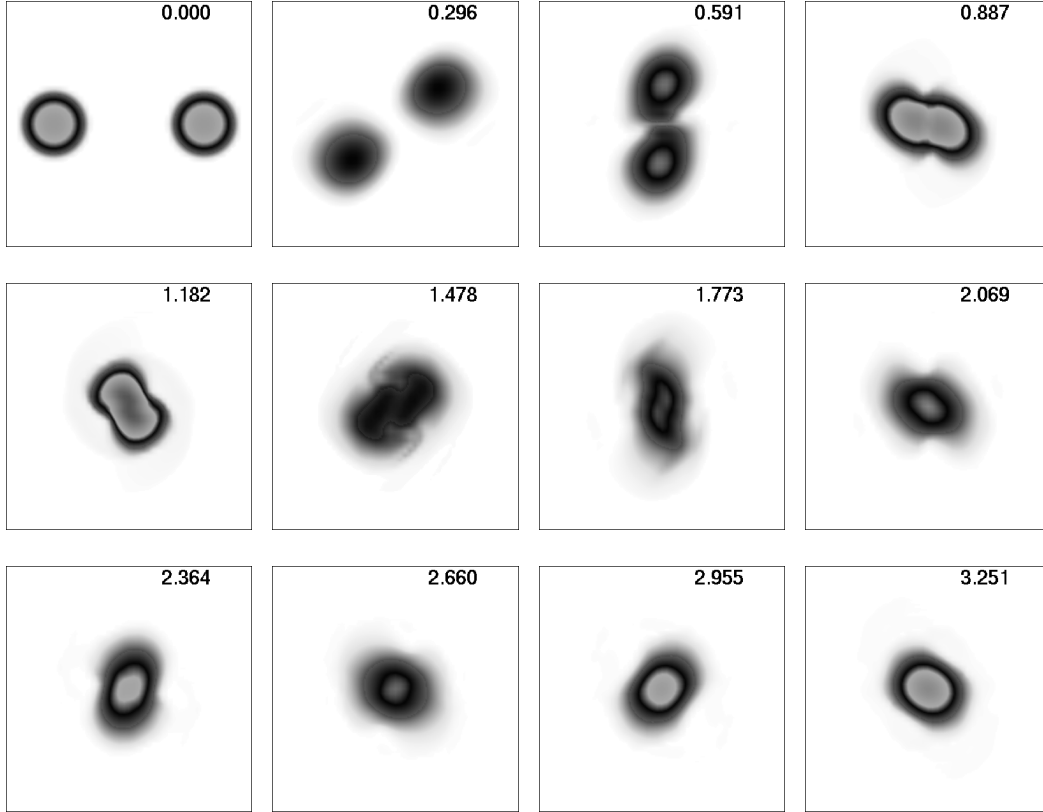


Fig 2: Mass density ρ_n on the x - y plane. The density profiles are shown as gray scale figures.

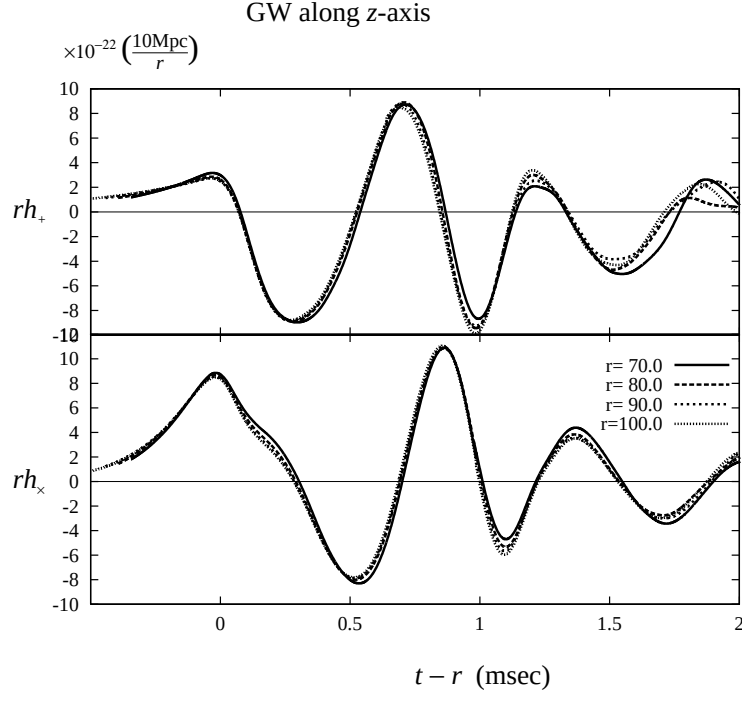


Figure 3: Wave forms h_+ and h_x along z -axis.

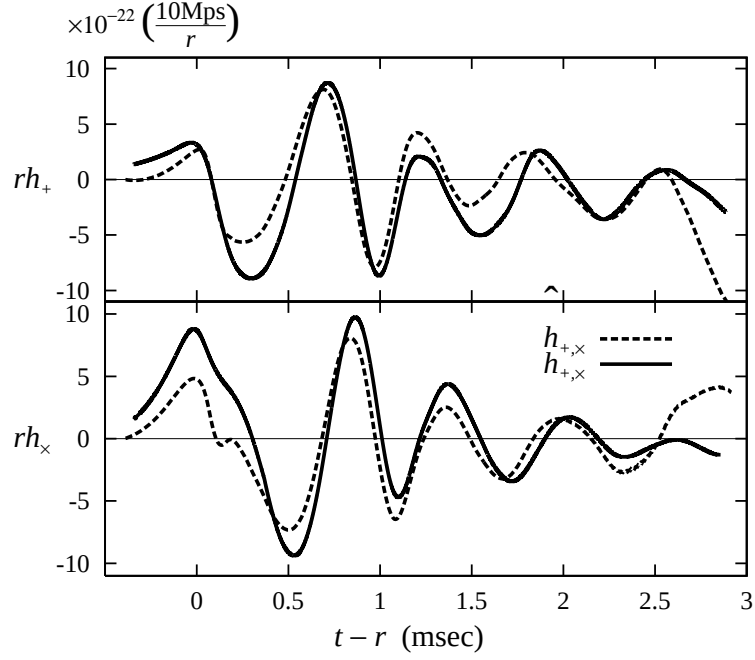


Figure 4: Comparison of 'wave forms' $h_{+,x}$ and $\hat{h}_{+,x}$ along z -axis at $r = 100M_\odot$.

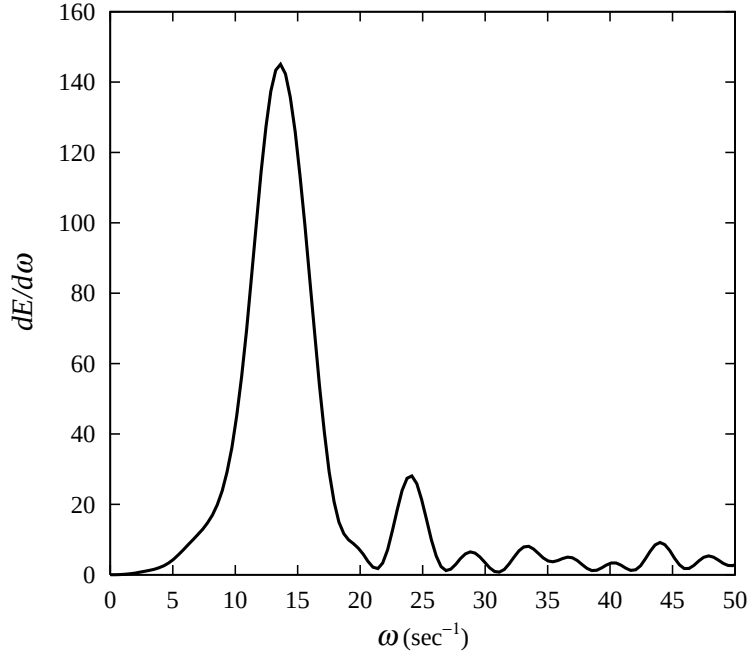


図 5: The energy spectrum of the gravitational waves.

2つの中性子星が合体した後は、ブラックホールが形成されるものと予想される。それを調べるためには、事象の地平面 (event horizon) あるいは見かけの地平面 (apparent horizon) ができているかどうかを調べる必要がある。horizon の探索はまだ行っていないが、もし、ブラックホールができれば、図 1 で示したように、ブラックホールの準固有振動に由来する ringdown mode の重力波が見られるはずである。図 4 の波形にその成分があるかどうかを調べるために、放射される重力波のエネルギースペクトルを求めた。エネルギースペクトルは、(23), (24) 式の $\Psi^{(o)}, \Psi^{(e)}$ のフーリエ分解

$$\Psi_{lm\omega}^{(I)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi_{lm}^{(I)}(t, r) e^{-i\omega t} dt, \quad (I = o, e) \quad (42)$$

を用いて

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{d\omega} = \frac{1}{16} \sum_{l,m} \omega^2 \left(\left| \Psi_{lm\omega}^{(e)}(r) \right|^2 + \left| \Psi_{lm\omega}^{(o)}(r) \right|^2 \right), \quad (43)$$

で与えられる。その結果を図 5 に示す。ブラックホールの準固有振動の振動数はブラックホールの角運動量に依存するが、質量 $M = 2.8M_{\odot}$ のシュバルツシルド・ブラックホールの $l = 2$ の基本振動数は $\omega = 25 \text{ msec}^{-1}$ である。図 5 で、その振動数の近くにピークが現れている。しかし、合体後の星の自転角振動数は $12 \sim 15 \text{ msec}^{-1}$ 程度で、それによる重力波の角振動数も $\omega = 25 \text{ msec}^{-1}$ 程度となり、スペクトルのこのピークがブラックホールの準固有振動に由来するものかどうかは明らかではない。

5 まとめ

本年度は、座標条件として maximal slicing 条件と pseudo-minimal distortion 条件を用いて安定なコードを作成し、その際に放射される重力波を求めることができた。現在の数値境界は、重力波源である中心の星からの距離が小さいところにあり、wave zone に達していない。それでも、重力波が光速で伝わる波として捉えられていることがわかった。しかし、数値境界が近いため、境界で重力波が多少反射することが認められた。また、ここまでは、かなり荒いグリッドを用いているため、合体後の星の中心から表面まで5つ程度のグリッドポイントしか含まれておらず、計算精度が悪くなっている。そのため、最終的に形成されるものがブラックホールかどうかの判定は困難であると思われる。これらの問題を解決するためには、ここで作成したコードで、さらにグリッドサイズを大きく、グリッド間隔を細かくしてシミュレーションを実行する必要がある。