成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

このプロジェクト(同様の過去のプロジェクトも含む)での成果

学会発表

- 1. 田代 徹, 立川 崇之
 「長距離力が生み出すブラウン運動」(口頭)
 日本物理学会年次大会(2008年3月,近畿大学)
- 2. 立川 崇之,田代 徹
 「中質量ブラックホールの揺動と周辺天体への効果」(ポスター)
 日本天文学会春季年会(2008年3月,国立オリンピック記念青少年総合センター)
- 3. 立川 崇之,祖谷 元
 「中質量ブラックホールを伴う系の進化とその性質」(ポスター)
 日本天文学会春季年会(2008年3月,国立オリンピック記念青少年総合センター)

研究会発表

1. Takayuki Tatekawa

「Equilibrium and quasi-equilibrium state in long-range interacting systems」(\square 頭)

Slovenia-Japan AICS Mini-Symposium "Nonlinear Phenomena in Complex Systems" (2007年11月,早稲田大学)

本年度は中質量ブラックホールを持つ球状星団の簡単なモデルとして,大質量天体を含む重力多体系を取り扱い,その統計的性質を考察した.全てを Newton 重力として取り扱った場合と,中心天体を Schwarzschild ブラックホールとして取り扱い,周囲の天体間の相互作用は Newton 重力で影響を及ぼしあうモデルの二つを考えた.

0.1 全て Newton 重力で考えた場合の運動

まず,全ての天体間の相互作用が Newton 重力で記述される場合を考えた.等質量の多数の天体に取り囲まれて,大質量の天体が内部に存在する系である.将来的には観測との 比較から,周囲の天体の分布の統計量を解析する必要があるが,まずは大質量天体の挙動 に注目した.

軽い天体の質量を m, その数を N = 10000 とし, 軽い天体の空間分布は r < 1 の一様 分布, および Plummer model

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} (1 + r^2)^{-5/2} , \qquad (1)$$

を仮定した.この中に重い天体を置くわけだが,ここでは中心r=0に静止させた場合の結果を報告する.重い天体の質量は

M = 10m, 100m, 500m, 700m, 1000m, 5000m,

とした.また,系においては初期ビリアル比が進化に多大な影響を及ぼす.今回は

$$\frac{2K}{|\Phi|} = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0,$$

とした.その他,単位系はNm = 1, G = 1とした.

時間発展に際しては,重力相互作用には Plummer softening を与え, softening parameter は $\varepsilon = 0.001$ とし, 6 次の Symplectic 積分法 (Yoshida (1991))を用いた.相互作用は国 立天文台の GRAPE-7 を使用した.GRAPE=7 は無衝突系専用であるため,二体緩和の 影響が顕著に表れる長時間の発展には用いるべきではないので,ここでは t = 20 までに 発展をとどめた.

重い質量の天体の運動は,周囲の天体によって揺さぶりを受ける.もしこの揺さぶりが Brown 運動的であれば,

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \xi(t), \qquad (2)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \qquad (3)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t'),$$
(4)

と記述される.

軽い天体の分布を問わず全体の傾向として, M が増加するに従いその挙動は不規則な ものになり, Brown 運動することが明らかになった.更に軽い天体の分布や質量を変え ることによって多様な Brown 運動をすることが,位置や速度のパワースペクトルの冪的 な振る舞いから明らかになった.特筆すべき結果を初期ビリアル比別に以下に列挙する. 各々の図で r(t) は原点からの距離を, I_x , I_y , I_z , I_r はそれぞれ x,y,z,r のパワース ペクトルを意味している.またパワースペクトルに示した直線は,赤色が ω^{-2} ,黄緑色が ω^{-3} ,緑色が ω^{-4} である.

ビリアル比=0.5

初期ビリアル比が 0.5 の場合を Fig.1 に載せた. 質量と初期分布は (a): Plummer 分布, $m_t = 500m_f$, (b): Plummer 分布, $m_t = 700m_f$, (c): Plummer 分布, $m_t = 5000m_f$, (d): 一様球, $m_t = 700m_f$ である. Plummer 分布で $500m_f$, $700m_f$ の場合は, 各パ ワースペクトルは ω^{-3} (黄緑色)に比例して減少しているが, $5000m_f$ の場合は ω^{-2} (赤色)で減衰している.また一様球で $700m_f$ の場合は, 各パワースペクトルの冪 が, ある ω で -2 (赤色) から -4 (緑色) に変わっている.

ビリアル比=0.1

初期ビリアル比が 0.1 で $m_t = 5000m_f$ の場合を Fig.2 に載せた.実空間分布は (a): 一様球, (b): Plummer 分布である.どちらの場合もパワースペクトルは ω^{-3} (黄色)に比例して減少している.

ビリアル比=0

初期ビリアル比が 0, すなわち場の粒子たちは初期時刻で静止していて, 実空間分布 が Plummer の場合を Fig.3 に載せた. 質量は (a): $m_t = 100m_f$, (b): $m_t = 5000m_f$ である. $1000m_f$ の場合は, パワースペクトルは ω^{-3} (黄緑色)に比例して減少して いるが, $5000m_f$ の場合は ω^{-2} (赤色)で減衰している.

以上の様に初期の軽い天体の分布や質量によってパワースペクトルの挙動が敏感に変化 することが明らかになった.通常の Brown 運動はパワースペクトルの冪は –2 であるが, これらの結果の様に –2 以外の冪をとるような Brown 運動は Fractional Brown 運動と 呼ばれている.このいわば特殊な Brown 運動は,通常の Brown 運動の数学的な拡張と して得られたもので,実在の現象の例は殆ど報告されていない.しかし今回の研究によっ て,重力による Brown 運動はその好例として位置づけられる可能性が示唆された.さら に Brown 運動に着目した発展として,重力多体系における Brown 運動の定式化に向け て,周囲の軽い天体から重い天体に及ぼされる揺動力,散逸項の効果を定式化できる手法 を確立できるという可能性が考えられる.

本研究の今後の発展として,球状星団の中心付近に大質量天体が存在するかどうかを, 観測と理論予想から考えていく事が必要である.本研究から,大質量天体の特異な挙動は 重力波にも現れることが予想されるが,その周期は重力波干渉計の対象よりもずっと長い ために直接検証は不可能である.そこで,周囲の天体の統計的性質にも今後は注目してい くべきである.今後は周囲の天体の分布に着目する際,現在は等質量だが,mass function に従う分布にすることや,連星の効果を取り入れた場合も考察する事を考えている.

(a) Plummer 分布 , $m_{ m t}=500m_{ m f}$



(b) Plummer 分布 , $m_{ m t}=700m_{ m f}$



(c) Plummer 分布 , $m_{ m t}=5000m_{ m f}$



(d) 一様球 , $m_{
m t}=700m_{
m f}$



図 1: ブラウン粒子の変位の時間発展とそのパワースペクトル:ビリアル比=0.5



(b) Plummer 分布, $m_{
m t}=5000m_{
m f}$



図 2: ブラウン粒子の変位の時間発展とそのパワースペクトル:ビリアル比=0.1

 (a) 一様球, $m_\mathrm{t}=5000m_\mathrm{f}$

(a) $m_{\rm t} = 1000 m_{\rm f}$



(b) $m_{\rm t} = 5000 m_{\rm f}$



図 3: ブラウン粒子の変位の時間発展とそのパワースペクトル:ビリアル比=0, Plummer 分布

0.2 Schwarzschild 計量中の多体系の運動

次に Schwarzschild 計量中の多体系の運動を考える.Schwarzschild 計量は静的球対称 の時空を仮定しているため,解は極座標で記述される事が多い.ここではシミュレーショ ンのコードを取り扱いやすくするため,Cartesian 座標で定式化する.

まず極座標で Schwarzschild 計量を考えると,

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}\left(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2}\right), \qquad (5)$$

から Christoffel 記号を計算するとゼロでない成分は以下の通り.

$$\begin{split} \Gamma_{rt}^t &= \frac{GM}{r(r-2GM)}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{GM(r-2GM)}{r^3}, \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{GM}{r(r-2GM)}, \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= 2GM - r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = (2GM - r)\sin^2\theta, \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{1}{\tan\theta}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\cos\theta\sin\theta. \end{split}$$

これらを用いて測地線方程式を解く.

$$\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \tau} = 0.$$
(6)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial \tau} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} + \frac{GM(r - 2GM)}{r^3} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 - \frac{GM}{r(r - 2GM)} \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 + (2GM - r) \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)^2\right] = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)^2 = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0.$$
(10)

これらを Cartesian 座標で考える.

極座標との関係は

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad (11)$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad (12)$$

$$z = r\cos\theta, \tag{13}$$

である.計量テンソルの変換則

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} , \qquad (14)$$

を用いて書き換えを行う. つまり,

$$g_{rr} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 g_{yy} + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 g_{zz} + 2\left[\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}g_{xy} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r}g_{yz} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r}g_{zx}\right], \qquad (15)$$

$$g_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 g_{yy} + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 g_{zz} + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}g_{xy} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \theta}g_{yz} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}g_{zx}\right], \qquad (16)$$

$$g_{\phi\phi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 g_{yy} + 2\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \phi}g_{xy}, \qquad (17)$$

$$g_{r\theta} = 0$$

$$= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} g_{yy} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} g_{zz}$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta}\right) g_{xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) g_{yz}$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) g_{zx}, \qquad (18)$$

$$g_{r\phi} = 0$$

$$= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \phi} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \phi} g_{yy}$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right) g_{xy} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \phi} g_{yz} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \phi} g_{zx}, \qquad (19)$$

$$g_{\theta\phi} = 0$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} g_{yy} + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi}\right) g_{xy} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} g_{yz} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} g_{zx}, \qquad (20)$$

を $g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx}$ について解く .

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} x,$$
(21)

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} x,$$
 (22)

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} y,$$
 (23)

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta = -\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (24)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = -r\sin\theta\sin\phi = -y,$$
 (25)

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi = -y,$$
(25)
$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi = x,$$
(26)

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0, \qquad (27)$$

これを解くと,

$$g_{xx} = \frac{r^3 - 2GM(y^2 + z^2)}{r^2(r - 2GM)}, \qquad (28)$$

$$g_{yy} = \frac{r^3 - 2GM(z^2 + x^2)}{r^2(r - 2GM)}, \qquad (29)$$

$$g_{zz} = \frac{r^3 - 2GM(x^2 + y^2)}{r^2(r - 2GM)},$$
(30)

$$g_{xy} = \frac{2GMxy}{r^2(r-2GM)}, \qquad (31)$$

$$g_{yz} = \frac{2GMyz}{r^2(r-2GM)},$$
(32)

$$g_{zx} = \frac{2GMzx}{r^2(r-2GM)},$$
 (33)

となる.ここからさらに,

$$\Gamma_{tt}^{i} = \frac{GM(r - 2GM)}{r^{4}} x^{i}, \qquad (34)$$

$$\Gamma_{ti}^t = \frac{GM}{r^2(r-2GM)} \,\delta_{ij} x^j \,, \tag{35}$$

$$\Gamma^{i}_{xx} = \frac{GM\left(2r^{3} - 4GMr^{2} - 3x^{2}r + 4GMx^{2}\right)}{r^{5}(r - 2GM)} x^{i}, \qquad (36)$$

$$\Gamma_{yy}^{i} = \frac{GM\left(2r^{3} - 4GMr^{2} - 3y^{2}r + 4GMy^{2}\right)}{r^{5}(r - 2GM)} x^{i}, \qquad (37)$$

$$\Gamma_{zz}^{i} = \frac{GM \left(2r^{3} - 4GMr^{2} - 3z^{2}r + 4GMz^{2}\right)}{r^{5}(r - 2GM)} x^{i}, \qquad (38)$$

$$\Gamma_{xy}^{x} = -\frac{x^{2}yGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (39)$$

$$\Gamma_{xy}^{y} = -\frac{xy^2 GM(3r - 4GM)}{r^5(r - 2GM)}, \qquad (40)$$

$$\Gamma_{xy}^{z} = -\frac{xyzGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (41)$$

$$\Gamma_{yz}^{x} = -\frac{xyzGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (42)$$

$$\Gamma_{yz}^{y} = -\frac{y^{2}zGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)},$$
(43)

$$\Gamma_{yz}^{z} = -\frac{yz^{2}GM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (44)$$

$$\Gamma_{zx}^{x} = -\frac{x^{2}zGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (45)$$

$$\Gamma_{zx}^{y} = -\frac{xyzGM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (46)$$

$$\Gamma_{zx}^{z} = -\frac{xz^{2}GM(3r - 4GM)}{r^{5}(r - 2GM)}, \qquad (47)$$

が得られる.ここで,

$$x^1 = x, \ x^2 = y, \ x^3 = z,$$
 (48)

とし, *i*,*j* = 1,2,3 とした. 結局,測地線方程式は

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + 2 \left[\Gamma^t_{tx} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \Gamma^t_{ty} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \Gamma^t_{tz} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right] = 0, \qquad (49)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \Gamma_{tt}^x \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{xx}^x \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{yy}^x \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{zz}^x \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 \\
+ 2 \left[\Gamma_{xy}^x \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \Gamma_{yz}^x \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \Gamma_{zx}^x \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau}\right] = 0,$$
(50)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \Gamma_{tt}^x \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{xx}^y \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{yy}^y \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{zz}^y \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 + 2\left[\Gamma_{xy}^y \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \Gamma_{yz}^y \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \Gamma_{zx}^y \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau}\right] = 0, \qquad (51)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \Gamma_{tt}^z \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{xx}^z \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{yy}^z \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \Gamma_{zz}^z \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 + 2\left[\Gamma_{xy}^z \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \Gamma_{yz}^z \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \Gamma_{zx}^z \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau}\right] = 0, \qquad (52)$$

となる.

Schwarzschild 時空中での多体系を考える.中心天体を除く粒子同士の相互作用はNewton 重力で考えるとしても,時間が各粒子で異なるので注意が必要.

粒子 a の時刻を $t_a(\tau)$, 位置を $(x_a(\tau), y_a(\tau), z_a(\tau))$ とする.この時, 粒子 a に働く Newton 重力は

$$F_{a}^{i} = -Gm_{a} \sum_{b \neq a} \frac{m_{b}}{|\mathbf{r}_{a} - \mathbf{r}_{b}|^{3}} (r_{a}^{i} - r_{b}^{i}), \qquad (53)$$

である.ここで, b は中心天体を除く粒子である.ここで, 中心天体の周りを運動する粒子 a が外力 F_a^{μ} を受ける場合, 測地線方程式はテスト粒子に関するエネルギー保存の式より次のように記述される.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_a^\mu}{\mathrm{d}\tau_a^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x_a^\sigma}{\mathrm{d}\tau_a} \frac{\mathrm{d}x_a^\rho}{\mathrm{d}\tau_a} = \frac{F_a^\mu}{m_a}\,,\tag{54}$$

ただし, Newton 極限で $F_a^0 = 0$ とする. 以上より, 解くべき式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau_a^2} + \Gamma^0_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x_a^\sigma}{\mathrm{d}\tau_a} \frac{\mathrm{d}x_a^\rho}{\mathrm{d}\tau_a} = 0, \qquad (55)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_a^i}{\mathrm{d}\tau_a^2} + \Gamma^i_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x_a^\sigma}{\mathrm{d}\tau_a} \frac{\mathrm{d}x_a^\rho}{\mathrm{d}\tau_a} = -G \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{|\mathbf{r}_{\mathbf{a}} - \mathbf{r}_{\mathbf{b}}|^3} \left(r_a^i - r_b^i \right)$$
(56)

である.実際の数値計算においては,無限遠での観測者に対する時間 t をそろえて解く必要がある.そのため,まず式 (55) から,各粒子に対して Δt が一定となる $\Delta \tau$ を求め,その時間だけ式 (56) を発展させる.このようにして

$$t_a(\tau), x_a(\tau), y_a(\tau), z_a(\tau)$$

$$\rightarrow t_a(\tau + \Delta \tau), x_a(\tau + \Delta \tau), y_a(\tau + \Delta \tau), z_a(\tau + \Delta \tau), \qquad (57)$$

を得る.

また,シミュレーションを行う際には,Horizon に近づいた粒子は動きが非常にゆっく りになり,地平線を超えることが出来ない.一方で Newton 重力では近接しすぎると力が 発散してしまうため,適当なソフトニングパラメーターの導入が必要である.

以下,シミュレーションの手順を示す.

$$u_a^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x_a^{\mu}}{\mathrm{d}\tau_a}\,,\tag{58}$$

と置く.

まず, (55) から

$$\frac{\mathrm{d}u_a^0}{\mathrm{d}\tau_a} = -\Gamma^0_{\sigma\rho} u_a^\sigma u_a^\rho \,, \tag{59}$$

である.大ざっぱに書くと 1 ,

$$u_a^0(\tau_a + \Delta \tau_a) = u_a^0(\tau_a) + \frac{\mathrm{d}u_a^0}{\mathrm{d}\tau_a} \Delta \tau_a \,, \tag{60}$$

$$x_a^0(\tau_a + \Delta \tau_a) = x_a^0(\tau_a) + u_a^0 \Delta \tau_a , \qquad (61)$$

であり,

$$x_a^0(\tau_a) = t, (62)$$

$$x_a^0(\tau_a + \Delta \tau_a) = t + \Delta t, \qquad (63)$$

を満たさなければならない. つまり,

$$u_a^0 \Delta \tau_a = \Delta t \,, \tag{64}$$

として, $\Delta \tau_a$ について解く必要がある.

ここで Δau_a について決定した後に ,

$$u_a^i(\tau_a + \Delta \tau_a) = u_a^i(\tau_a) + \frac{\mathrm{d}u_a^i}{\mathrm{d}\tau_a} \Delta \tau_a \,, \tag{65}$$

$$x_a^i(\tau_a + \Delta \tau_a) = x_a^i(\tau_a) + u_a^i \Delta \tau_a , \qquad (66)$$

を解く.

もう一つ考えなければならないのは,初期条件の置き方である.周囲の粒子の運動の 初期条件を Newton 的に与えるとする.ここでの値は無限遠の観測者から見た値である. $(\mathbf{x}_a, \mathbf{v}_a)$ を与えた後で, \mathbf{v}_a から u^{μ}_a に変換する必要がある. $\mu = 1, 2, 3$ についてはその まま

$$u_a^i = v_a^i \,, \tag{67}$$

とする . $\mu = 0$ の場合には四元速度の定義

$$u_{\mu}u^{\mu} = -1\,, \tag{68}$$

¹実際は四次の Runge-Kutta 公式を使っているが,ここでは分かりやすいように Euler の一次の公式で説明する.

から,

$$g_{00} \left(u^0 \right)^2 = -\left(1 + u_i u^i \right) \,, \tag{69}$$

を用いて,

$$u^{0} = \sqrt{\frac{-(1+u_{i}u^{i})}{g_{00}}},$$
(70)

として与える.ここで時間は正の向きに進む事から, u⁰ は正の値を取った.

現在,この定式化による系の進化をテストしている段階である.中心の Schwarzschild ブラックホールの質量をMとすると,G = c = 1の単位系ではSchwarzschild 半径は 2Mとなる.無限遠の観測者から見た場合,Schwarzschild ブラックホールの地平線に近づ いた粒子は時間の進みが遅くなる,また,半径6M以下では安定な円軌道が存在しない. さらに,Newton 重力とは異なり近日点移動が起きるために軌道が閉じない.これらの効 果に依り,Newton 重力だけで系を考えた場合とは異なる結果が得られると期待される.