



## 成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

### (1) このプロジェクト（同様の過去のプロジェクトも含む）での成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

### (2) これまでのプロジェクトの今年度中の成果

今年度中に出版された論文、国際会議集録、国際会議、学会、研究会発表、その他出版物（印刷中、投稿中の場合はその旨を記載すること）

- 論文

Iguchi, O., Sota, Y., Nakamichi, A., and Morikawa, M.  
"Local virial relation for self-gravitating system",  
Phys.Rev.E73, 046112. (2006).

- 国際会議集録

Sota, Y., Iguchi, O., Morikawa, M., and Nakamichi, A.  
"Local virial relation and velocity anisotropy in self-gravitating system",  
J.Phys.Conf.Ser.31, 173. (2006).

- 研究発表

1. 井口修，曾田康秀，田代徹，森川雅博  
自己重力無衝突系での局所ビリアル関係  
天体力学N体力学研究会 木更津高専 2007年3月
2. 井口修，曾田康秀，田代徹，森川雅博  
自己重力多体系で見いだされる局所ビリアル平衡  
日本物理学会 2007年春季大会 鹿児島大学 2007年3月

## 成果の概要

重力相互作用を行う多体系の進化を、専用機を用いてシミュレーションすることにより、長距離相互作用系の緩和過程およびその後実現される準平衡状態を理解することが目的である。

自己重力系での球対称の崩壊過程や二つの塊の衝突などの激しい崩壊過程で現れる準平衡状態について  $N$  体計算を用いて調べた。特に、この準平衡状態を特徴づける位相空間の関係として、局所ビリアル関係に着目し、この関係の普遍性や安定性および静水圧平衡を満たす解の中での役割について解析した。

## 局所ビリアル (LV) 関係

自己重力系での球対称の崩壊過程 (SC) や二つの塊の衝突 (CC) などの激しい崩壊過程で現れる準平衡状態において、ビリアル関係が局所的に立っていることが数値的に得られた [1, 2, 3]。

この局所ビリアル (LV) 関係は、通常重力的にバウンドされている系全体で成り立つ関係が、局所的に成り立つことを表している。重力的にバウンドされた粒子に対して、塊のポテンシャルの一番低いところを中心として、中心から同じ粒子数 (質量) を持ついくつかのシェルに分け、各シェルでの平均値を局所的な量として定義した。また、中心からの距離の指標として、半径  $r$  の内側の質量  $M_r$  を用いた。局所的なビリアル比  $b(r)$  を、各シェルの速度分散  $\sigma^2(r)$  とポテンシャルエネルギー  $\Phi(r)$  を用いて、

$$b(r) := -2\sigma^2(r)/\Phi(r), \quad (1)$$

と定義すると、図 1 からわかるように、各シェルごとのビリアル比は、外側を除いてほぼ 1 になっている。このように崩壊後の準平衡状態は、初期のビリアル比や密度分布によらず、局所的にビリアル関係が成り立っている。ただし、初期密度分布が中心集中している場合である  $(\bar{b}_t, a) = (0, 2)$  の時は、中心で LV 比が小さくなっている。

## 局所ビリアル関係の普遍性

LV 関係が良く成り立つのは、図 1 からわかるように、次のような初期条件の場合である。

- (a) 初期ビリアル比が小さい。
- (b) 初期密度分布が中心集中しすぎない。

これは、各粒子が十分エネルギー交換をできることが、LV 関係が成り立つのに必要であるということである。また、どれくらい LV が普遍的であるかを見るために、相互作用をニュートン重力から変えたべき型の場合を調べた。図 2 からわかるように、ポテンシャルのべきが負の場合には、重力の場合と同じように、LV 関係が良く成り立っている。一方、図 3 のように、正べきのポテンシャルの場合は、LV 関係は良くない。この場合、局所的な速度分散を見ると、場所によらずほぼ一定になっており、等温状態になっている。これは粒子が逃げることが出来ず、何度も相互作用するために、等温状態になると思われる。このことから、LV 関係が見られるのは、負巾のポテンシャルのように、

- (c) 開放系である

ことが必要と思われる。

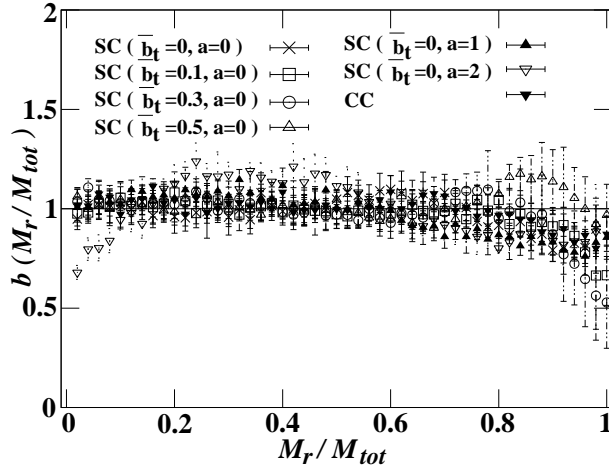


図 1: 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの LV 比。SC と CC は、それぞれ球対称崩壊と 2 つの塊の衝突の場合。SC の場合は、5000 個の粒子を半径  $R$  の球内にべき的な密度分布 ( $\rho \propto r^{-a}$ ) で分布させ、初期に小さいビリアル比 ( $\bar{b}_t$ ) で計算を行った。CC の場合は、2 つの塊それぞれ 2500 個の粒子を半径  $R$  の球の中に一様に分布させ、初期のビリアル比を小さくした塊を  $x$  軸方向に  $6R$  だけ離しておいた。全てのシミュレーションにおいては、カットオフを  $\epsilon = 2^{-8}R$  の大きさにとった。LV 比は時間平均しており、SC に対しては、時刻  $t = 5t_{ff}$  から  $t = 10t_{ff}$  まで  $1t_{ff}$  の間隔で、CC に対しては、時刻  $t = 500t_{ff}$  から  $t = 550t_{ff}$  まで  $10t_{ff}$  の間隔で平均した。

### 局所ビリアル関係の安定性

次に、LV 関係の安定性について調べた。シミュレーションで得られた LV 関係が良い状態に、数値的に摂動を与えて安定性を見た。図 5 からわかるように、各粒子の位相空間の座標を 10% ランダムにずらす摂動を与えても、数 free fall time で LV 関係が満たされる状態に戻っている。特に、図 5 の外側でビリアル比が大きくなっているのは、摂動によって高いエネルギーを獲得した粒子が外に逃げているためである。このことから、開放系である事が、LV 関係の安定性に重要な役割を果たしていることが分かる。

### 局所ビリアル関係と Jeans 方程式

Cold collapse の後に現れる準平衡状態を特徴づける LV 関係の特徴を調べる。球対称の定常解は、次の Jeans 方程式の解として表される。

$$\frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta}{r}\rho\sigma_r^2 = \rho\frac{d\phi}{dr}, \quad (2)$$

ここで、非等方性パラメータ  $\beta(r)$  は、

$$\beta(r) := 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}. \quad (3)$$

ここで、 $\phi(r)$  は、重力ポテンシャル  $\Phi(r)$  の符号を変えたもので  $\phi(r) := -\Phi(r) + \phi_*$ 。

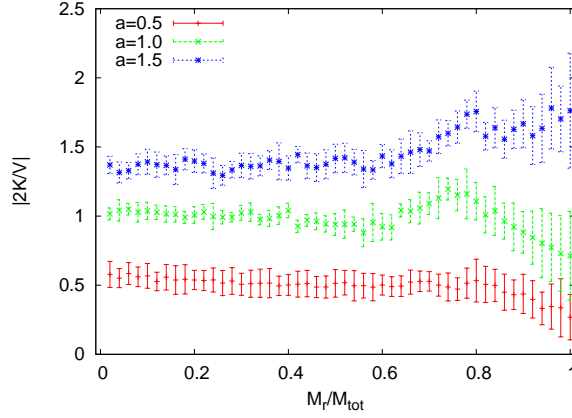


図 2: 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの LV 比。ポテンシャル ( $V(r) \propto r^{-a}$ ) のべきを変えた場合。

Poisson 方程式より、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (4)$$

$x := r/r_0$ ,  $y := \rho/\rho_0$ ,  $z := \phi/\phi_0$  として、Poisson 方程式 (4) を書き直すと、

$$\Psi' - \Psi^2 + \Psi = \kappa x^2 y/z, \quad (5)$$

prime は  $\ln x$  での微分、 $\kappa := 4\pi G r_0^2 \rho_0 / \phi_0$ 、 $\Psi := -d \ln z / d \ln x$ 。(5) 式の右辺は常に正であるので、解は

$$\Psi' - \Psi^2 + \Psi \geq 0, \quad (6)$$

の領域にある。

ここで次の一般的な LV 関係を仮定する。

$$\frac{2\sigma^2(r)}{\phi(r)} = b(\Psi), \quad (7)$$

$b$  は  $\Psi$  の任意関数 (LV なら  $b = 1$ )。  $\Psi$  は単調関数なので、この仮定は一般性を失わない。

さらに、(5) 式を  $\ln x$  で微分して、さらに (5) 式を使って  $\kappa$  を消去すると、

$$\Psi'' = (1 - \gamma + 3\Psi)\Psi' - (2 - \gamma + \Psi)(\Psi - 1)\Psi, \quad (8)$$

ここで  $\gamma := -d \ln y / d \ln x$ 。

(2) 式と (7) 式から、 $\sigma_r$  を消去すると、

$$\beta' = \frac{3 - 2\beta}{2} \left[ \gamma - \frac{\dot{b}}{b} \Psi' - 2\beta - \frac{6 - b - 4\beta}{b} \Psi \right], \quad (9)$$

ここで  $\beta$  の空間依存性は  $\Psi$  を通して依存するとすれば、

$$\beta' = \frac{\partial \beta}{\partial \Psi} \Psi' =: \dot{\beta} \Psi', \quad (10)$$

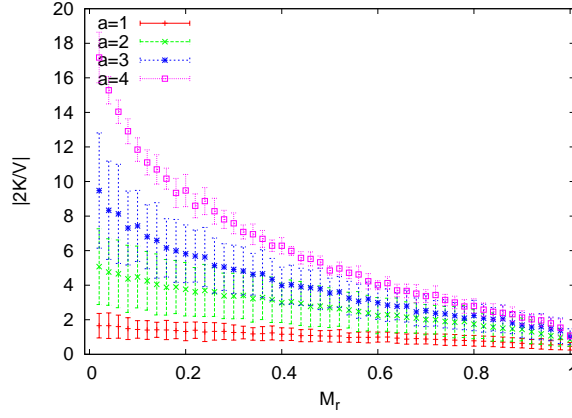


図 3: 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの LV 比。正巾のポテンシャル ( $V(r) \propto r^a$ ) の場合。

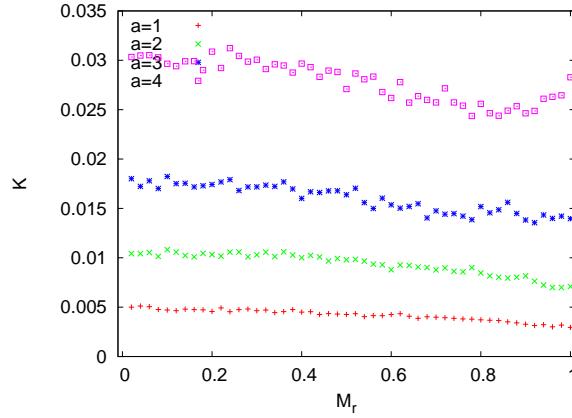


図 4: 正巾ポテンシャルの場合 (図 3) の運動エネルギーの分布。

となり、

$$\gamma = \left( \frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta} + \frac{\dot{b}}{b} \right) \Psi' + 2\beta + \frac{6-b-4\beta}{b} \Psi, \quad (11)$$

と書ける。

(8) 式と (11) 式から  $\gamma$  を消去すれば、解くべき方程式は  $\Psi$  についての 2 階微分方程式になる。

$$\frac{d}{d \ln x} \begin{pmatrix} \Psi \\ P_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_\Psi \\ - \left[ \frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta} + \frac{\dot{b}}{b} \right] P_\Psi^2 + \left[ 1 - 2\beta - \frac{2(3-2b-2\beta)}{b} \Psi + \left( \frac{2\dot{\beta}}{3-2\beta} + \frac{\dot{b}}{b} \right) (\Psi - 1) \Psi \right] P_\Psi - 2 \left[ (1 - \beta) - \frac{3-b-2\beta}{b} \Psi \right] (\Psi - 1) \Psi \end{pmatrix} \quad (12)$$

で、(6) 式を満たすものである。ただし、 $b$  と  $\beta$  は  $\Psi$  の任意関数。

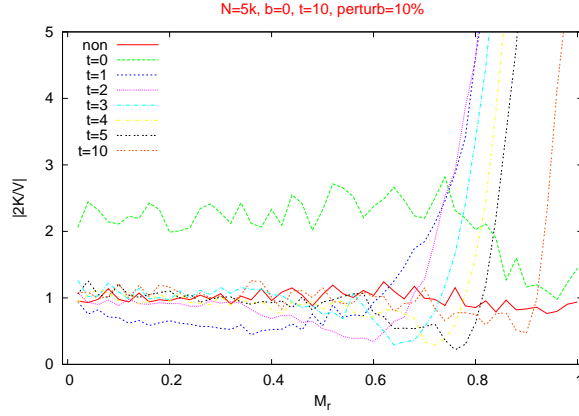


図 5: 典型的な LV 関係が良い状態に摂動を与えたものの LV の時間発展。5000 体で初期ビリアルゼロの初期条件で、 $t = 10t_{ff}$  まで時間発展した状態に、各粒子の位相空間の座標を 10% ランダムにずらす摂動を加えた。

ここで、LV 関係を満たす場合 ( $b = 1$ ) を考えると、(12) 式の固定点は、次の 3 つになる。

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ P_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

最初と 2 番目の固定点は、原点と無限遠に対応して、最後の固定点は、スケーリング解に対応している。それぞれの固定点まわりの固有値は、それぞれ次のようになっている。

固定点まわりの固有値

$$(\Psi, P_\Psi) = (0, 0)$$

$$\text{固有値} \implies -1, 2(1 - \beta) \text{ (saddle point)}$$

$$(\Psi, P_\Psi) = (1, 0)$$

$$\text{固有値} \implies 1, -2(1 - \beta) \text{ (saddle point)}$$

$$(\Psi, P_\Psi) = (1/2, 0)$$

$$\text{固有値} \implies (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(1 - \beta)})/2 \text{ (attractor)}$$

$$\alpha := \dot{\beta}/2(3 - 2\beta) \geq 0$$

このことから、物理的に興味のある解として、原点と無限遠に対応する固定点を結ぶ解がある。この解は、密度分布が無限遠でべき的な振舞を持つ解に対応しており、密度の漸近的振るまいは表 1 のようになる。特に、非等方性パラメータ  $\beta$  が空間の定数の場合には、分布関数は、 $f(E, L) \propto L^{-2\beta} |E|^{(7-6\beta)/2}$  となり、物理的な状況 ( $0 \leq \beta < 1$ ) では安定である。この解は Ü.-I.K. Veltmann [4] によって初めて求められ、N.W.Evans と J.An によって LV 関係を仮定して導かれたものと一致している [5]。

まとめ

Cold collapse を起こした後に現れる準平衡状態で、数値シミュレーションから得られた 局所ビリアル (LV) 関係について、普遍性と安定性と球対称定常解の中での性質について解析した。

表 1: 密度の原点と無限遠での漸近的振るまい。  $\gamma(0)$  と  $\gamma(1)$  は、それぞれ  $2\beta(0)$  と  $5 - 2\beta(1)$  と等しい。

$\gamma(0)$	$\beta(0)$	$\rho(0)$	$\gamma(1)$	$\beta(1)$	$\rho(\infty)$
0	0	flat	4	0.5	$r^{-4}$
1	0.5	$r^{-1}$	3.5	0.75	$r^{-3.5}$
1.5	0.75	$r^{-1.5}$	3	1	$r^{-3}$

普遍性については、LV 関係と初期条件の相関から、各粒子のエネルギーがある程度交換される必要がある。また、相互作用のべきを変えた数値シミュレーションからは、LV 関係が満たされるのは負べきのポテンシャルを持つ場合であった。このことから、LV 関係が成り立つためには、激しい緩和と開放系であることが必要だと思われる。

安定性については、シミュレーションで得られた LV 関係がよい状態に、数値的に摂動を加えて調べた。各粒子の位相空間の位置を 1 割もずらしても、数 free fall time で、LV 関係が満たされる状態に戻った。特に、LV の値が低い粒子は内側に、高い粒子は外側に移動し、さらに高すぎる粒子は逃げてしまうという振舞が見られた。このことから、安定性において開放系であることが重要だと思われる。

球対称定常な場合の Jeans 方程式で、LV 関係が成り立つ時には、数値計算で得られるような、漸近的領域 ( $r \rightarrow 0, \infty$ ) で、密度分布がべき的になる解が存在した。このような解は、少なくとも数値的には安定であるので、無衝突系の緩和過程において位相空間での重要な指標になると思われる。

## 参考文献

- [1] O. Iguchi, Y. Sota, T. Tatekawa, A. Nakamichi, and M. Morikawa, Phys. Rev. E **71**, 016102 (2005).
- [2] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, and A. Nakamichi, J. Phys. Conf. Ser. **31**, 173 (2006).
- [3] O. Iguchi, Y. Sota, A. Nakamichi, and M. Morikawa, Phys. Rev. E **73**, 046112 (2006).
- [4] Ü. -I. K. Veltmann, Astron. Zh. **56**, 976 (1979).
- [5] N. W. Evans and J. An, Mon. Not. R. Astron. Soc. **360**, 492(2005).