

成果に関連して出版、もしくは印刷、投稿中の論文リスト

(1) このプロジェクト（同様の過去のプロジェクトも含む）での成果

“Thermodynamics of the self-gravitating ring model”

T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo

Phys. Rev. **E71** (2005) 056111

“Thermodynamics of the self-gravitating ring model: Analyses with new iterative method”

T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo

J. Phys.: Conf. Ser. **31** (2006) 163-164

Y. Sota and T. Tatekawa, in preparation.

(2) これまでのプロジェクトの今年度中の成果

平衡状態の分布関数を導出する新たな逐次近似法

立川 崇之

物性研究 vol.87 No.4 (2007.1) 510-534

成果の概要

1 Introduction

昨年度のプロジェクトに引き続き本年度のプロジェクトで我々は、Newton 重力によって互いに相互作用を及ぼす粒子が一次元リングに拘束されているモデルの解析を行った。このモデルはソフトニングを加えているためにエントロピーの最大が存在するので、純粋な Newton 重力の性質を解析する事は出来ないが、平均場による近似で熱力学的性質を解析する事が出来る。本モデルは重力系のモデルであるので、ミクロカノニカル分布による解析では広いエネルギースケールに渡り負の比熱が現れる。本研究ではモデルの性質はソフトニングの大きさに依存し、ソフトニングの大きさを徐々に変えると、ポテンシャルの影響を受けるエネルギースケールと、自由粒子のように振る舞うエネルギースケールの境で、相転移の次数が二次から一次に変化する事が分かった。

そこで本年度は昨年度に続き、相転移の次数の違いが系の力学的進化にどのように関係しているかを調べるため、GRAPEを用いたシミュレーションによる解析を中心に調査を進めた。特に、ポテンシャルに拘束されている core 粒子の周囲を運動する、halo 粒子の運動に特異な性質が見られた。halo 粒子が core から飛び出して、再び戻ってくるまでの時間（再帰時間）の頻度分布を調べた。昨年度の解析では、core に拘束された粒子が、core を中心として振動するタイムスケールの見積もりが抜けており、このタイムスケールと再帰運動のタイムスケールとの比較がなされていなかったため、新たに考察に加えた。

2 一次元自己重力リングモデル

ここでまず、一次元自己重力リング (SGR) モデルについて手短かに説明を行う [1]。一次元リングモデルは三次元 Newton ポテンシャルによってリングに拘束された粒子が互いに相互作用を及ぼすモデルである (図 1)。

SGR モデルのハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

$$V_\varepsilon(\theta_i - \theta_j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}}, \quad (2)$$

ε はソフトニングパラメーターで、近距離での発散を防ぐ。 ε を大きく取った極限では、ポテンシャルが

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\frac{1 - \cos(\theta_i - \theta_j)}{2\varepsilon} - 1 \right] + O(\varepsilon^{-2}), \quad (3)$$

となり、HMF モデル [2] のポテンシャルに近づく。モデルの熱力学的性質を示すグラフとして、温度曲線と呼ばれるものがある。これは一粒子あたりの運動エネルギーを二倍したもの $T \equiv \beta^{-1} = 2 \langle K \rangle / N$ を温度として、一粒子あたりの全エネルギーとの関係を示したものである。HMF モデルに近づく $\varepsilon = 10$ の条件のもとでは、温度曲線は図 2(a) のよう

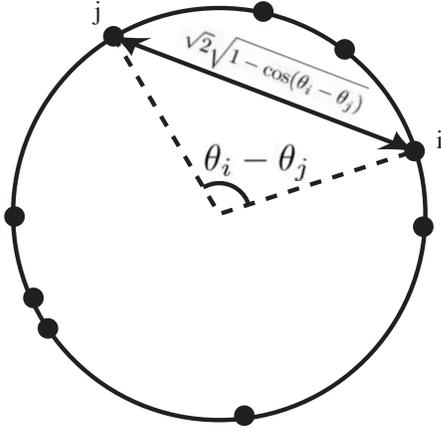


図 1: 半径を 1 とした一次元自己重力リング．粒子はリングに固定されており，その位置は角度によって識別される． θ_i と θ_j に存在する粒子対は，三次元重力と同じ逆二乗則で力を及ぼしあう．この際の距離は，粒子対がなす弧の長さである．

になる．一様分布の相 $U > U_c(\varepsilon)$ では，曲線はほぼ線形関係になり，一方でクラスターを形成する相 $U < U_c(\varepsilon)$ では折れ曲がる．この場合には，温度はエネルギー増加により上昇し，負の比熱は現れない．一方でソフトニングを小さく取ると，三次元重力のように，負の比熱の相が現れる．図 2(b) では，二つの異なる値の ε に対して曲線を描いた [1]．この場合，相は三つに分類される．

- 低エネルギーでクラスターを形成する相 $U < U_{top}(\varepsilon)$ ． U_{top} は比熱が 0 になるエネルギー $\partial T / \partial U = 0$ である．
- 中間状態の相 $U_{top}(\varepsilon) < U < U_c(\varepsilon)$ ．この相で負の比熱が現れる．
- 高エネルギーのガス状の相 $U_c(\varepsilon) < U$ ．

低エネルギーの相は ε の存在によって現れる．一方，高エネルギーの相では粒子はポテンシャルの影響をほとんど受けず，自由粒子のように振る舞う．中間状態の相が重力の特徴をよく示していると考えられ， ε を小さくする事により相のエネルギースケールが広がる．

3 SGR モデルの熱力学的性質

我々の開発した手法 [3, 4] により，SGR モデルの解析を行う．まずエントロピーを考えると， $U_c(\varepsilon)$ より高いエネルギーでは物質分布は一様になるので，

$$S = \frac{1}{2} (3 \log(2\pi) + 1 - \log \beta), \quad (4)$$

となる．図 3 は SGR モデルについて，エネルギー U の関数として温度 $T = \beta^{-1}$ とエントロピーを示している．注目すべきは $U_{top} \leq U \leq U_c$ において負の比熱が存在する事で

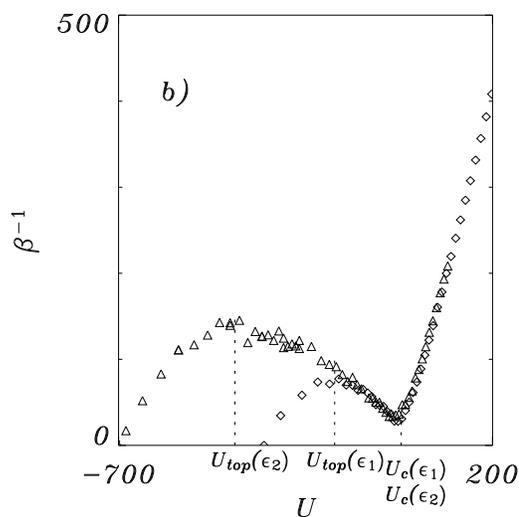
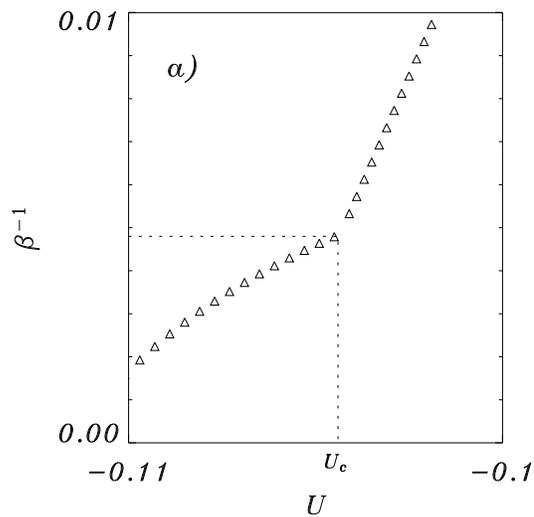


図 2: 数値計算によって得られた SGR モデルの温度曲線．いずれも粒子数は $N = 100$ である．(a) は $\varepsilon = 10$ とした場合で， U_c で系は二次相転移を起こす．この時は負の比熱は現れない．(b) は $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\varepsilon_2 = 2.5 \times 10^{-7}$ の場合．相転移はミクロカノニカル分布で一次相転移となる．二つのエネルギー $U_c(\varepsilon_1)$ と $U_c(\varepsilon_2)$ は非常に近い値となり，相転移エネルギーは ε にあまり依存しないようである．一方， $U_{top}(\varepsilon_1)$ は明らかに $U_{top}(\varepsilon_2)$ より小さく， ε を小さくすると減少する．負の比熱は $U_{top} < U < U_c$ で現れ，ソフトニングを小さくするとエネルギースケールが広がる．

ある．また， $U_{low} \leq U \leq U_{high}$ ではエントロピーは凸の部分をつなげた破線とはずれている．これはカノニカル分布とミクロカノニカル分布が与える平衡状態が同一でない事を示している．つまりミクロカノニカル分布では食い違いが生じるエネルギースケールは安定であるが，カノニカル分布では準安定，あるいは不安定である．

ソフトニングパラメーターを大きくしていった場合を見てみる．まずパラメーターを $\varepsilon = 10^{-2}$ とした場合を考える．ミクロカノニカル分布では，図 4 で示したように $U_{top} \simeq -0.8$ で比熱の符号の変化が起き， $U = U_c \simeq -0.3$ で相転移を起こす．しかし温度はエネルギーの関数として， $U = U_c$ で微分不可能ではあるが連続になるので，相転移は二次である．また，秩序パラメーター『磁化』の対称性の破れと相転移の次数が関連している事が，図 4 (b) から見て取れる．温度曲線は，この二次相転移が凸凹型である事を示している．ミクロカノニカル分布で二次相転移がこのタイプのものである [5] ためには，相転移点で比熱のジャンプを見る必要がある．

$\varepsilon = 10^{-5}$ から $\varepsilon = 10^{-2}$ の間で，ミクロカノニカル分布の三重臨界点が存在する．この三重臨界点では次の二つの性質が現れる．

- 温度曲線は U_c より低いエネルギー側から見て， $U = U_c$ で水平になる．
- 準安定の非一様相が存在するエネルギーの上限が U_{in} から U_c に向かって落ちる．一方で一様相は U_c より低いエネルギーで連続的に不安定相として存在する．

図 5 で，我々はミクロカノニカル分布における臨界エネルギー U_c ，エネルギーの境界 U_{in} および U_{hom} の ε 依存性を示す．ミクロカノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で，この点が準安定な非一様相の存在の境界で，このエネルギーの上限は臨界エネルギーに一致するようになる．これが対称性の破れを伴う三重臨界点の一般的な様相である（[5] の図 6 を参照）．

カノニカル分布での三重臨界点を調べるには，二つの曲線 U_{low} および U_{high} が合流する ε の値を見る必要がある．この値の大まかな見積りは $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ である．カノニカル分布での三重臨界点は， U_{top} が前述の二つの曲線に合流するところでもあり，負の比熱を持つエネルギースケールが消えるところである．従って，エントロピー曲線での変曲点 U_{top} が消える事により，アンサンブルの違いはカノニカル分布での三重臨界点においてなくなる．相転移の分類を示した論文 [5] の表 1 でも確認できるように，アンサンブルの違いが消えうるのは，三重臨界点に関わる時だけである．

結論として， ε の変化による SGR モデルの相転移ダイアグラムの重要な変更は，ミクロカノニカル分布およびカノニカル分布の三重臨界点の存在によるものである． $\varepsilon \leq \varepsilon_T^c$ において，アンサンブルの非等価性を示すエネルギースケールが存在する．このような状況は既に今までの論文 [6, 7] で知られている．

4 core への halo 粒子の再帰運動

それでは相転移の次数は系の力学的進化にどのように関わっているのだろうか．我々は過去の論文 [1] で調べられた量のうちのいくつかを再検討した．ここでは相転移の次数の違いによって大きな違いが現れた，halo 粒子の core への再帰運動について述べる．

SGR モデルを構成する粒子は、そのエネルギーにより三相に分類される事は既に述べた。この三相のうち、最も低エネルギーの相が core の相で、ソフトニングのために存在する相である。この相に含まれる粒子はポテンシャルの底に存在し、まさに core を形成する。この相よりも高いエネルギーにあり、重力の特徴を良く表していると考えられるのが halo の相である。halo の相の粒子は過去の論文で特異な性質をいくつか示していた。例えば、速度分布は Maxwell 分布よりもむしろ Lorentz 分布の方がうまくあう事である。

ここでこれから解析する再帰運動とは次のようなものである。高いエネルギーを持つ halo 粒子は core から飛び出す、ポテンシャルの影響を受けているためにいずれは引き戻される。この運動に着目する。core からの飛び出しから引き戻されるまでの時間を測定し、頻度分布を求める。厳密には core の重心を横切ってから、再び横切るまでの時間を測定する。

この解析の際に重要なタイムスケールとして、core による振動がある。SGR model のポテンシャル (1) は原点付近で Taylor 展開すると、対称性のために二次の項がまず現れる。

$$-\frac{1}{2N} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta + \varepsilon)}} = \frac{1}{2N\sqrt{2\varepsilon}} \left[-1 + \frac{\theta^2}{2\varepsilon} + O(\varepsilon^4) \right]. \quad (5)$$

つまり、二次の項の部分のポテンシャルは

$$V_{2nd} = \frac{\theta^2}{4\sqrt{2}N\varepsilon^{3/2}}, \quad (6)$$

となる。もし core を構成する粒子が N_c 個ならば、core による振動周期は

$$t_{osc} = 2^{5/4} \varepsilon^{3/4} \sqrt{N/N_c}, \quad (7)$$

となる。

昨年度は $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-3}$ の場合についてシミュレーションを行った。今回は特に一次相転移を起こす $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合について詳細な解析を行った。粒子数は $N = 1000$ とし、 $U = -10$ とした。上記の時間の見積もりでは、 $t_{osc} \simeq 10^{-3}$ となるので、この振動の影響が現れるかを見極めるため、スナップショットは $\Delta t = 10^{-4}$ として $t = 100$ までの計算を行った¹。

この結果を示したものが図 7, 8 である。スナップショットが 100 万枚になるためにサンプルも膨大なものになると期待されるが、我々の解析では core から飛び出した halo 粒子のうち、core に戻ってくるまでの間は常に halo 粒子であり、他の相に変わらないものを選んでいないため、解析の対象となる粒子は延べで数百万体である。解析では、異なる初期条件を与えた二つのサンプルを用いた。この結果、前に見積もった core による単振動の周期の 5 倍である、 $\tau = 0.05$ より長いタイムスケールでベキ的な関係が見られた。ただ残念な事に、単振動の周期よりもやや長いタイムスケールからベキ的な関係が見られる事は、 ε がより大きく、系が二次相転移を起こす場合にも見られた傾向である。この再帰運動が相転移の次数に依存するという事は、我々の解析からは明確に言い切れない。

今後我々は、リアプノフ指数の解析等、非線形動力学の立場から、系の相転移の次数と力学的発展の関係を調査していく予定である。

¹巨大な一時ファイルをたびたび発生させ、皆様にはご迷惑をおかけしました。

参考文献

- [1] Y. Sota, O. Iguchi, M. Morikawa, T. Tatekawa, K. Maeda, Phys. Rev. E **64**, 056133 (2001).
- [2] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 2361 (1995).
- [3] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, Phys. Rev. **E71**, 056111 (2005).
- [4] 立川崇之, 物性研究 **87**, 531 (2007).
- [5] F. Bouchet, J. Barré, J. Stat. Phys. **118**, 1073 (2005).
- [6] J. Barré, D. Mukamel, S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **87**, 030601 (2001).
- [7] M. Antoni, S. Ruffo, A. Torcini, Phys. Rev. E **66**, 025103 (2002).

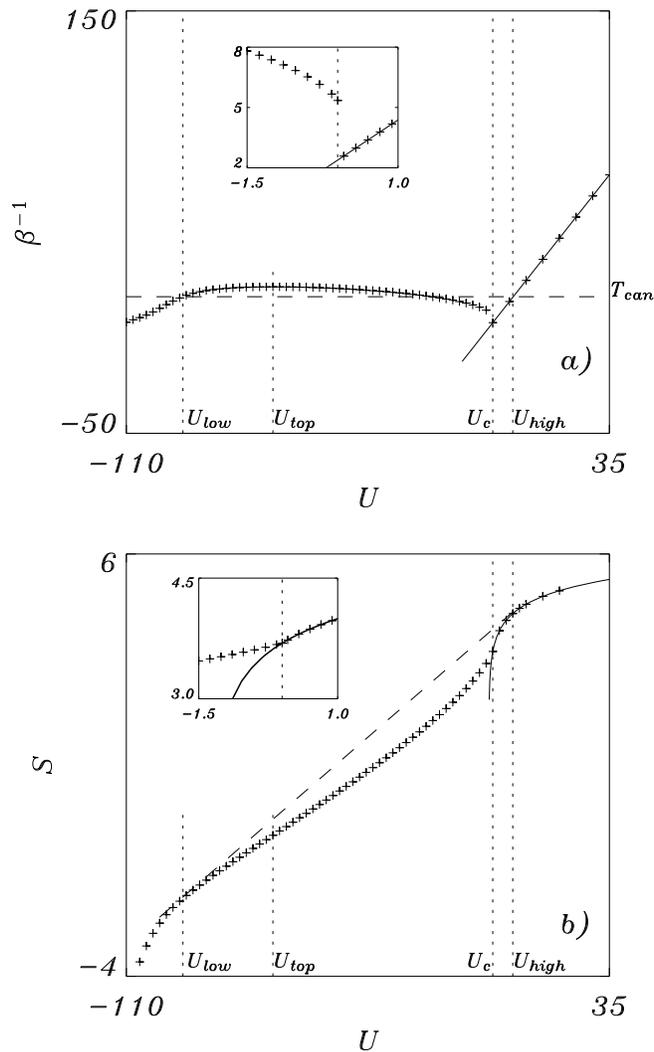


図 3: 温度 (図 (a)) とエントロピー (図 (b)) を U の関数として見た図 . ここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とした . 四つのエネルギースケールは以下の通り . $U_{low} \simeq -93$, $U_{high} \simeq 6$ はアンサンブル間の食い違いが生じるエネルギー . $U_c \simeq 0$ はミクロカノニカル分布の相転移点 . $U_{top} \simeq -66$ は負の比熱が現れる下限である . $T_{can} \simeq 15$ はカノニカル分布での相転移温度を示す . 次に (b) で実線は一様分布の解析解である . この解は準安定状態として U_c まで伸びている . (a) と (b) には相転移点 U_c 付近の拡大図を載せており , 温度は U_c で不連続であり , エントロピーは傾きの異なるスロープに移る . 明らかに一次相転移の性質を示している .

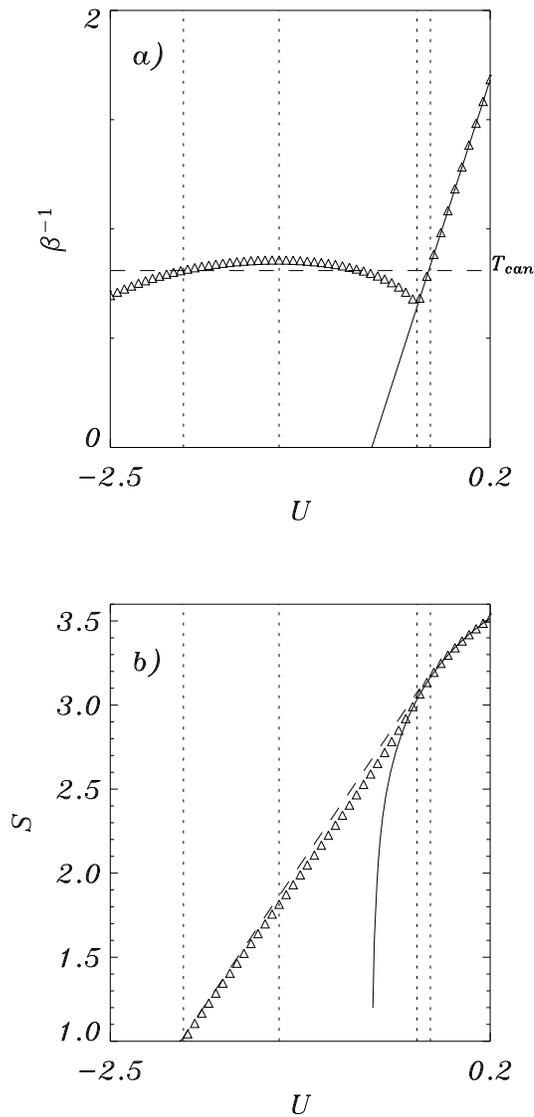


図 4: (a): $\epsilon = 10^{-2}$ での温度曲線 (白い三角) . 垂直の破線は左から $U_{low} \simeq -1.98$, $U_{top} \simeq -1.3$, $U_c \simeq -0.32$, $U_{high} \simeq -0.225$ を示す . 解析的に得られる一様相の曲線は連続である . 図 . 3 との大きな違いは , U_c での温度のジャンプが見られない事である . 相転移はミクロカノニカル分布で二次である . 一方で , カノニカル分布では $T_{can} \simeq 0.8$ で一次相転移を起こす . (b): $\epsilon = 10^{-2}$ でのエネルギーとエントロピーの関係 (白い三角) . エントロピー曲線は非一様相から一様相 (実線) に滑らかに接続する . エントロピー曲線の U_{low} および U_{high} における共通接線となる破線は , アンサンブルによる相転移の違いを示す .

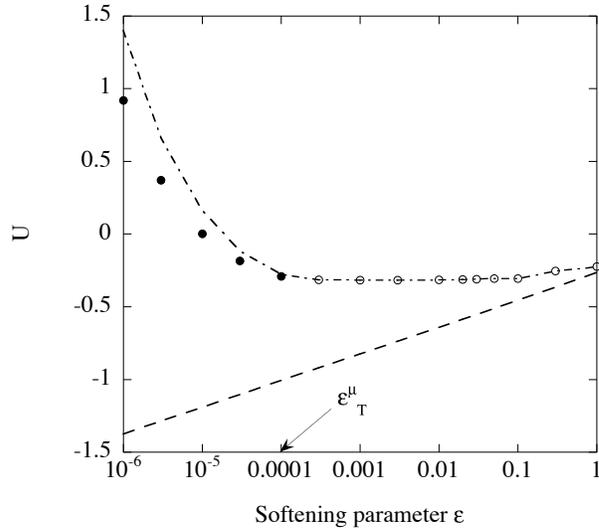


図 5: 一点破線は $U_{in}(\varepsilon)$ を，破線は $U_{hom} = \overline{E}_p(\varepsilon)$ を示す．黒丸はミクロカノニカル分布の一次相転移の臨界エネルギーを，白丸は二次相転移の臨界エネルギーを示す．ミクロカノニカル分布での三重臨界点は $\varepsilon_T^\mu \simeq 10^{-4}$ で，相転移はここで一次から二次に変化し，同時に準安定の非一様相がなくなる．

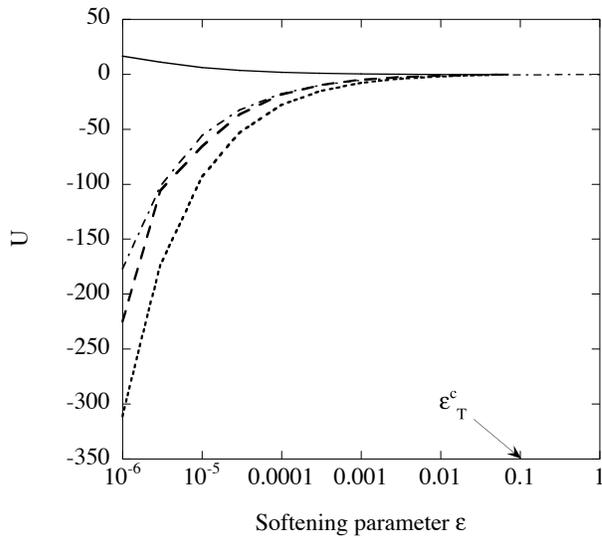


図 6: U_{low} (破線)， U_{high} (実線)，および U_{top} (一点破線) の ε 依存性．カノニカル分布の三重臨界点は $\varepsilon_T^c \simeq 10^{-1}$ で，ここで三つの曲線が合流する．また，このソフトニングパラメータは，ミクロカノニカル分布で負の比熱がなくなり，カノニカル分布で相転移が二次に変化するところである．この図で我々は太い破線で曲線を描いているが，これは以前の論文 [1] で見積もられた $U_{top}^{th} \simeq -1/(4\sqrt{2\varepsilon})$ である．

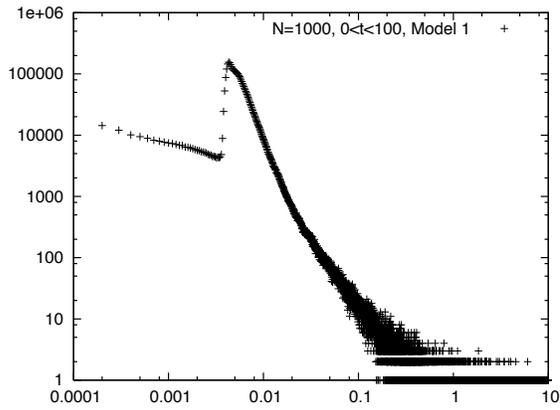


図 7: $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 1000$, $U = -10$ での halo 粒子の再帰運動の頻度分布．横軸は時間，縦軸は粒子数を表す．core による単振動のタイムスケールは 10^{-3} であり，べき的な関係はその 5 倍のタイムスケールから現れ始める．

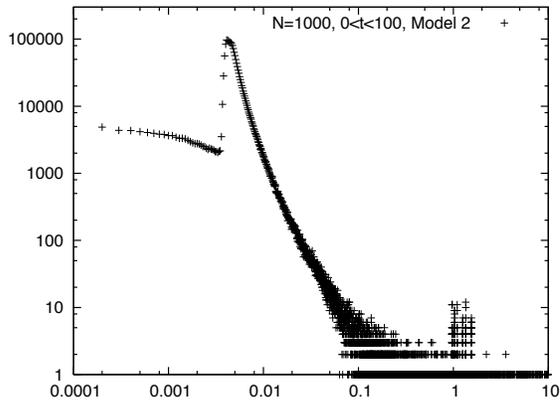


図 8: $\varepsilon = 10^{-5}$, $N = 1000$, $U = -10$ での halo 粒子の再帰運動の頻度分布．図 7 とは異なる初期条件から始めた．横軸は時間，縦軸は粒子数を表す．core による単振動のタイムスケールは 10^{-3} であり，べき的な関係はその 5 倍のタイムスケールから現れ始める．こちらの場合には $\tau = 1$ 程度のあたりに局所的なピークが見えるが，これは halo 粒子に依るモデル内の周回運動を反映している．