

重力多体系の物理と数値計算法入門

小久保英一郎

国立天文台理論研究部

講義内容

重力多体系の物理

- 重力の特徴
- 基本方程式
- 力学平衡
- 2体緩和

重力多体系の数値計算法

- 積分公式
- 時間刻みの工夫
- 重力計算の工夫

参考文献

[Galactic Dynamics](#) (Binney & Tremaine 1987, 2008)

恒星系力学のバイブル。恒星系力学全般を扱う。

[Dynamics of Galaxies](#) (Bertin 2000)

恒星系力学全般についての教科書。円盤銀河に詳しい。

[Dynamical Evolution of Globular Clusters](#) (Spitzer 1987)

球状星団の進化について。衝突系のバイブル。

[The Gravitational Million-Body Problem](#) (Heggie & Hut 2003)

球状星団の進化について。衝突系の新バイブル。

[天体物理学の基礎 II](#) (観山正見・野本憲一・二間瀬敏史編 2008)

シリーズ現代の天文学の1冊。1.1-1.2節が重力多体系。

[N体シミュレーション学校教科書](#) (国立天文台編)

国立天文台で開催される講習会の教科書。

重力の特徴

力の性質

- 万有である
- 引力のみである
- 遠距離力である
 - 遠距離相関
 - 現象の相似性 (特徴的スケールがない)

役割

- 不安定性による自発的構造形成

力の到達距離

湯川ポテンシャル

$$\phi \propto -\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

λ : 力の到達距離

力の到達距離

強い力	$\lambda \sim \text{fm}$	近距離力
弱い力	$\lambda \sim \text{fm}$	近距離力
電磁気力	$\lambda = \infty$	遠距離力
	$\lambda_{\text{eff}} \sim \text{原子半径/デバイ半径}$	
重力	$\lambda = \infty$	遠距離力

恒星系力学と天体力学

対象
興味

恒星系力学

多体系

分布関数

天体力学

小数多体系

軌道

基本方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = -Gm \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} + \boldsymbol{f}_p$$

最近関連分野

プラズマ物理

古典力学

重力多体系

定義

重力で相互作用する多数の要素からなる系
系 (構成粒子)

- 惑星リング (リング粒子)
- 原始衛星系円盤 (微衛星)
- 微惑星系 (微惑星)
- 散開星団 (恒星)
- 球状星団 (恒星)
- 銀河 (恒星)
- 銀河群 (銀河)
- 銀河団 (銀河)
- 宇宙 (銀河)

重力多体系の支配方程式

運動方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}$$

- $3N$ 元連立 2 階常微分方程式
- 計算量 $O(N^2)$

重力多体系の支配方程式

分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

ポワソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho$$

$$\rho = m \int f d\boldsymbol{v}$$

(以下、簡単のため等質量系を考える)

無衝突ボルツマン方程式の導出

1 体分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

位相空間

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

位相空間での流れの速度

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{v}, -\nabla\Phi)$$

粒子保存 (連続) の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial (f \dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0$$

無衝突ボルツマン方程式 (f のラグランジュ微分)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

運動方程式とボルツマン方程式の関係

- ボルツマン方程式は $N \rightarrow \infty (m \rightarrow 0)$ にした運動方程式と等価。
- 運動方程式はラグランジュ的、ボルツマン方程式はオイラー的。
- $f = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(t))$ が運動方程式に従って変化するのは明らか。
- 運動方程式はボルツマン方程式の特性方程式になっている。

運動方程式とボルツマン方程式の関係 2

$f(x, v, t) = c$ という解曲面 S を考える (簡単のため 1 次元とする)

解曲面に垂直なベクトル n

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$n \cdot C = 0$$

$$C = \left(v, -\frac{d\Phi}{dx}, 1 \right) \quad (S \text{ 上にある})$$

特性方程式

S 上の微分 (dx, dv, dt) は C に平行でなくてはならない

$$\frac{dx}{v} = \frac{dv}{-d\Phi/dx} = \frac{dt}{1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}$$

力学平衡

定義

- 分布関数 f が時間的に定常である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- 分布関数 f によって決まるポテンシャル Φ を固定して考えたときに、 f の時間微分が 0 になる。

(熱平衡とは限らない)

運動の積分

定義

ポテンシャル Φ のもとで、 x 、 v の関数 I が運動の積分であるとは、軌道にそって

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

が成り立つことである。

球対称の場合

- エネルギー E
- 角運動量 3 成分 J
- (近点経度)

ジーンズ定理

定理

任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

証明

必要性

f 自体運動の積分を定義を満たしている。

十分性

f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれの項が 0 になる。

力学平衡モデル

球対称モデル

$$f(E, J)$$

速度分散等方モデル

$$f(E)$$

ポワソン方程式

$$\rho = m \int f \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi \right) d\mathbf{v}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

解の構成法

1. f を v で積分することにより、 $\rho(\Phi)$ を求める。
2. ポワソン方程式に ρ を代入し、 $\Phi(r)$ を求める。

球対称等方モデルの例

等温モデル

$$f \propto e^{-E}$$

King モデル

$$f \propto \begin{cases} e^{-E} - e^{-E_0} & \text{if } E < E_0 \\ 0 & \text{if } E > E_0 \end{cases}$$

E_0 : 脱出エネルギー

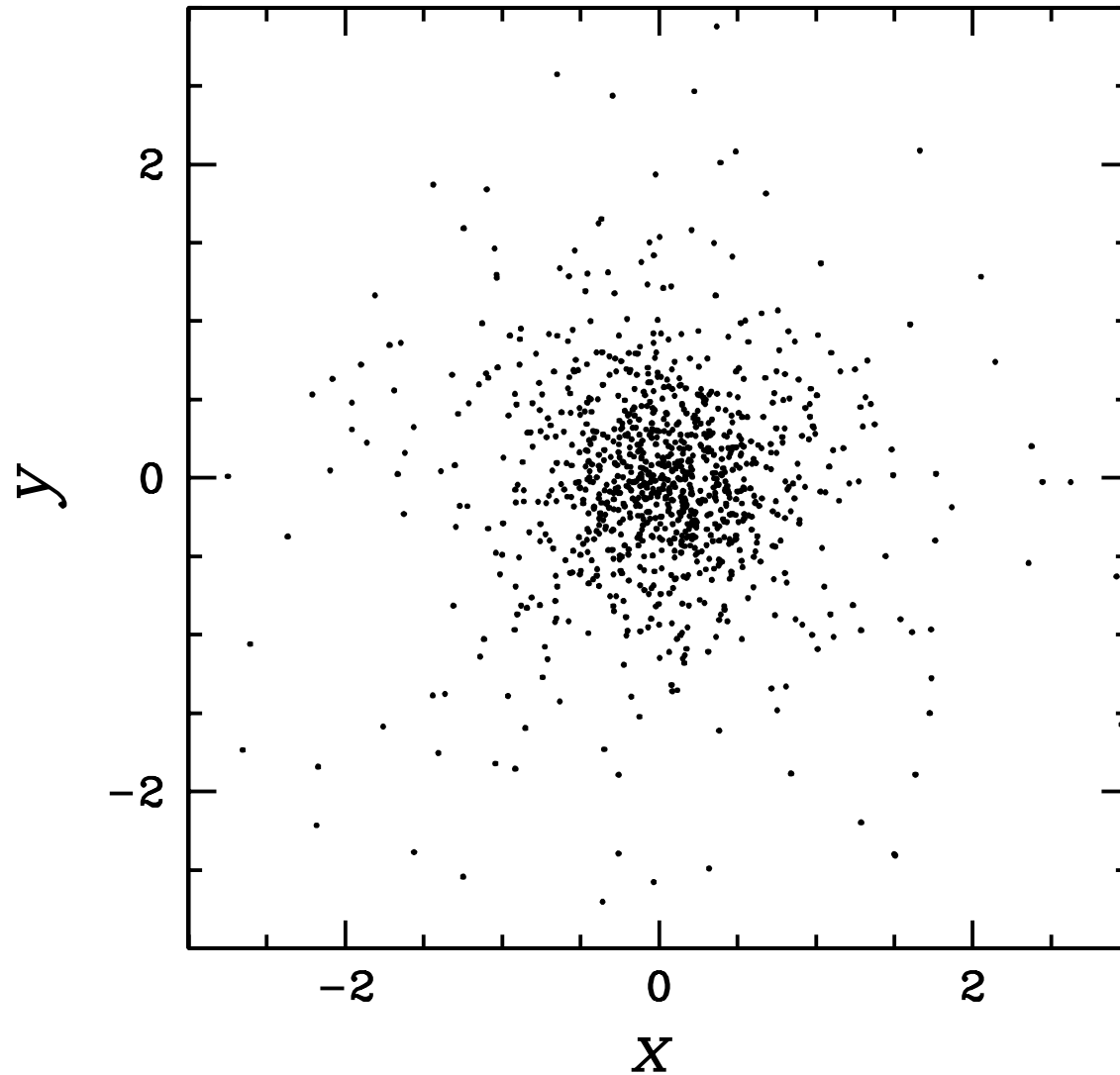
Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}$$

Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}, \quad \rho \propto (c^2 + r^2)^{-5/2}$$

$$N = 1024$$



ジーンズ方程式

無衝突ボルツマン方程式の速度空間のモーメント

速度の0次モーメント: 速度空間で積分

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\nu = \int f d\mathbf{v}, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d\mathbf{v}$$

速度の1次モーメント: v_j をかけて速度空間で積分

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$$

(1度は自分で導くこと)

流体のオイラー方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

オイラー方程式

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

ジーンズ方程式の応用

球対称系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} \left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2} \right) \right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr}$$

等方速度分散系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} = -\nu \frac{d\Phi}{dr} = -\nu \frac{GM(r)}{r^2}$$

質量分布

$$M(r) = -\frac{r \overline{v_r^2}}{G} \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right)$$

観測 $[(\nu(r), \overline{v_r^2}(r))] \rightarrow$ 質量分布 $M(r)$

テンソルビリアル定理

ジーンズ方程式の空間のモーメント

空間の1次モーメント: x_k をかけて空間で積分
($\nu \rightarrow \rho$ にしておく)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}$$

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d\mathbf{x}$$

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \sigma_{jk}^2 d\mathbf{x}$$

$$W_{jk} = -\frac{1}{2} G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}$$

(1度は自分で導くこと)

スカラービリアル定理

定常状態のテンソルビリアル定理のトレース

$$2K + W = 0$$

$$K = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \overline{v^2} d\mathbf{x}, \quad W = -\frac{1}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x} d\mathbf{x}'$$

全エネルギー

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W$$

- 全エネルギーは、ポテンシャルエネルギーの 1/2 で、絶対値は運動エネルギーに等しい。
- 系の見かけの比熱が負

ビリアル定理の応用

系

定常状態: 質量 M 、速度分散 $\langle v^2 \rangle$

スカラービリアル定理

$$M\langle v^2 \rangle + W = 0 \rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g} \simeq 0.4 \frac{GM}{r_h}$$

$$\text{重力半径: } r_g = \frac{GM^2}{|W|}$$

$$\text{半質量半径: } r_h \simeq 0.4r_g$$

系の質量

$$M \simeq \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{0.4G}$$

観測 ($\langle v^2 \rangle, r_h$) \rightarrow 質量 M

衝突項

ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}}$$

衝突項

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}} : 2 \text{体散乱の効果}$$

衝突系と無衝突系

考えている時間スケールで

衝突系 : 2体緩和で系が進化

無衝突系 : 2体緩和の効果が無視可能

2体緩和

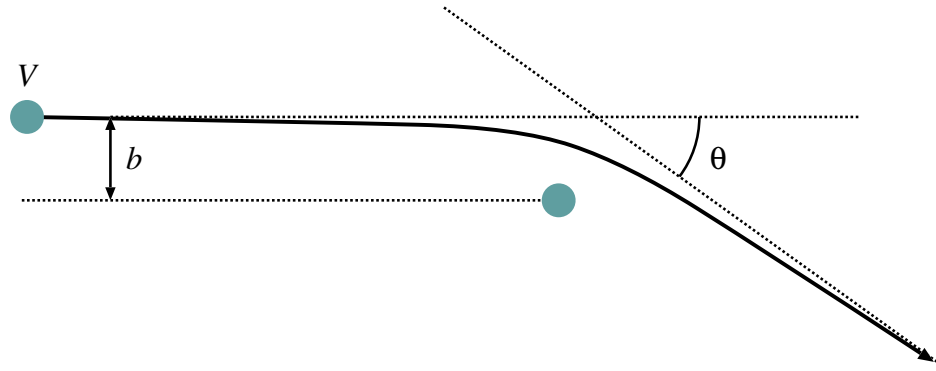
原因は何か？

- 系が有限粒子数で構成されているための効果
- 滑らかな平均ポテンシャルからの粒子によるずれによる進化

無視できない場合

- 衝突系 (球状星団、散開星団、銀河中心、微惑星系など)
- 無衝突系の全ての N 体シミュレーション (数値誤差の主要因)

2体散乱



フィールド粒子 ($m, v = 0, n$) の中を進むテスト粒子 ($m = 0, v$) を考える

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = v \sin \theta = 2v \frac{b/b_0}{1 + (b/b_0)^2}, \quad b_0 = \frac{Gm}{v^2}$$

単位時間あたりの2次の平均変化

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta v_{\perp}^2 2\pi n v b db \sim \frac{G^2 n m^2 \ln \Lambda}{v}$$

$$\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

b_{\max} : 系のサイズ, b_{\min} : 90度散乱のインパクトパラメータ

緩和時間

緩和時間

$$T_{\text{relax}} \equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \sim \frac{v^3}{G^2 n m^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{\ln N} T_{\text{cross}}$$

$$T_{\text{cross}} = \frac{R}{v}$$

(ビリアル定理から $v^2 \simeq GNm/R$)

例

天体	N	$T_{\text{cross}} [\text{yr}]$	$T_{\text{relax}} [\text{yr}]$
銀河	10^{11}	10^8	10^{18}
球状星団	10^5	10^5	10^9

有限質量粒子の場合

フィールド粒子 (m_f, v_f, n_f) の中を進むテスト粒子 (m_t, v_t) を考える。
相対速度を $V = v_f - v_t$ とする。

散乱角

$$\tan \theta = \frac{2b}{(b/b_0)^2 - 1}, \quad b_0 = \frac{G(m_t + m_f)}{V^2}$$

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin \theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{b/b_0}{1 + (b/b_0)^2}$$
$$\Delta v_{\parallel} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos \theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (b/b_0)^2}$$

有限質量粒子の場合

簡単のため、 $v_f = 0$ とする。

(速度分布がある場合も計算できるが、今回は省略。本質はこの場合と同じ。)

単位時間あたりの平均速度変化

$$\langle \Delta v_{\perp} \rangle = 0$$

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

1 次の効果 (力学的摩擦)

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

- エネルギー等分配の効果
- 質量の大きな粒子にほど強くはたらく
- 大きさはほぼ質量密度 ($n_f m_f$) に比例

2次の効果

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

- 拡散によるランダム速度の増加
- 大きさは質量分布に依存

2体緩和時間

等質量粒子からなり、速度がマクスウェル分布をしている系の2体緩和時間
局所的な見積もり

$$\begin{aligned} T_{\text{relax}} &\equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \\ &= 0.34 \frac{\sigma^3}{G^2 \rho m \ln \Lambda} \\ &= \frac{1.8 \times 10^{10}}{\ln \Lambda} \left(\frac{\sigma}{10 \text{kms}^{-1}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{10^3 M_{\odot} \text{pc}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} [\text{yr}] \end{aligned}$$

大域的な見積もり

$$\begin{aligned} T_{\text{relax}}^{\text{half}} &\simeq \frac{0.14 N}{\ln(0.4 N)} \sqrt{\frac{r_h^3}{GM}} \\ &= \frac{6.5 \times 10^8}{\ln(0.4 \Lambda)} \left(\frac{M}{10^5 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{r_h}{\text{pc}} \right)^{3/2} [\text{yr}] \end{aligned}$$

よくある間違い

- $T_{\text{relax}}^{\text{half}} >$ 宇宙年齢なので 2 体緩和は効かない
 - ρ 大、もしくは σ 小のところでは T_{relax} は短い
- ソフトニングが大きいので 2 体緩和は効かない
 - Λ を小さくする (b_{min} を大きくする) だけ
- PM 法などでは 2 体緩和は効かない
 - Λ を小さくする (b_{min} を大きくする) だけ

非現実的な 2 体緩和の回避方法

- 基本的には粒子数を増やす他にない!

浮動小数点表示

浮動小数点表現

	符合	指数	仮数	計
単精度	1	8	23	32
倍精度	1	11	52	64

$$\text{浮動小数} = (-1)^{\text{符合}} \times (2^{\text{指数}}) \times (\text{仮数})$$

有効桁数

$$\text{有効桁数} = \log(\text{仮数})$$

	有効桁数
単精度	~ 7
倍精度	~ 15

丸め誤差

丸め誤差

有限 bit への打ち切りにより発生する相対誤差

丸め方法

0 捨 1 入 (最近接丸め)

丸め誤差の大きさ

	丸め誤差
単精度	3×10^{-8}
倍精度	5×10^{-17}

桁落ちと情報落ち

桁落ち

近接した2数の減算による有効桁の減少

$$\text{例: } 1.234567(7 \text{ 桁}) - 1.234566(7 \text{ 桁}) = 1.0 \times 10^{-6}(1 \text{ 桁})$$

情報落ち

大きさの違う2数の加算による有効桁の消失

$$\text{例: } 1.234567 + 1.234567 \times 10^{-6} = 1.234568$$

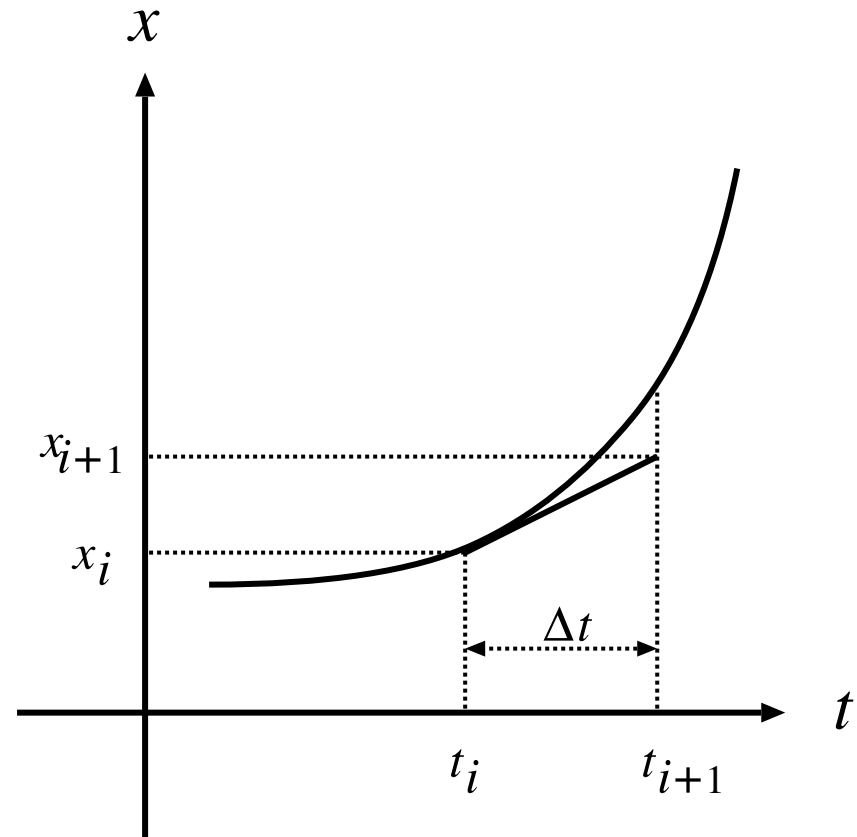
オイラー法

初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

公式

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i) \Delta t$$



積分公式の次数

m 次の公式

局所打ち切り誤差

各ステップでの打ち切り誤差

$$x(t_{i+1}) - x_{i+1} = O(\Delta t^{m+1})$$

$x(t_{i+1})$: 厳密解, x_{i+1} : 数値解

大域打ち切り誤差

一定積分区間での累積打ち切り誤差

$$O(\Delta t^{m+1}) \times \frac{t}{\Delta t} = O(\Delta t^m)$$

N 体シミュレーションの基礎方程式

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}$$
$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$$

問題の難しさ

- 膨大な計算量 $O(N^2)$
- 広範囲な時間スケール

標準積分公式

無衝突系用

- リープフロッグ公式

衝突系用

- エルミート公式

リープフロッグ法

公式

$$\begin{aligned}v_{i+1/2} &= v_i + a_i \frac{\Delta t}{2} \\x_{i+1} &= x_i + v_{i+1/2} \Delta t \\v_{i+1} &= v_{i+1/2} + a_{i+1} \frac{\Delta t}{2}\end{aligned}$$

特徴

- 2次公式
- シンプレクティック公式
- 時間対称公式
- 自動出発可能

リープフロッグ法

公式

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}_i \Delta t^2$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \Delta t^2$$

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \frac{\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i}{\Delta t}$$

特徴

- 2次公式
- シンプレクティック公式
- 時間対称公式
- 自動出発可能

リープフロッグ法

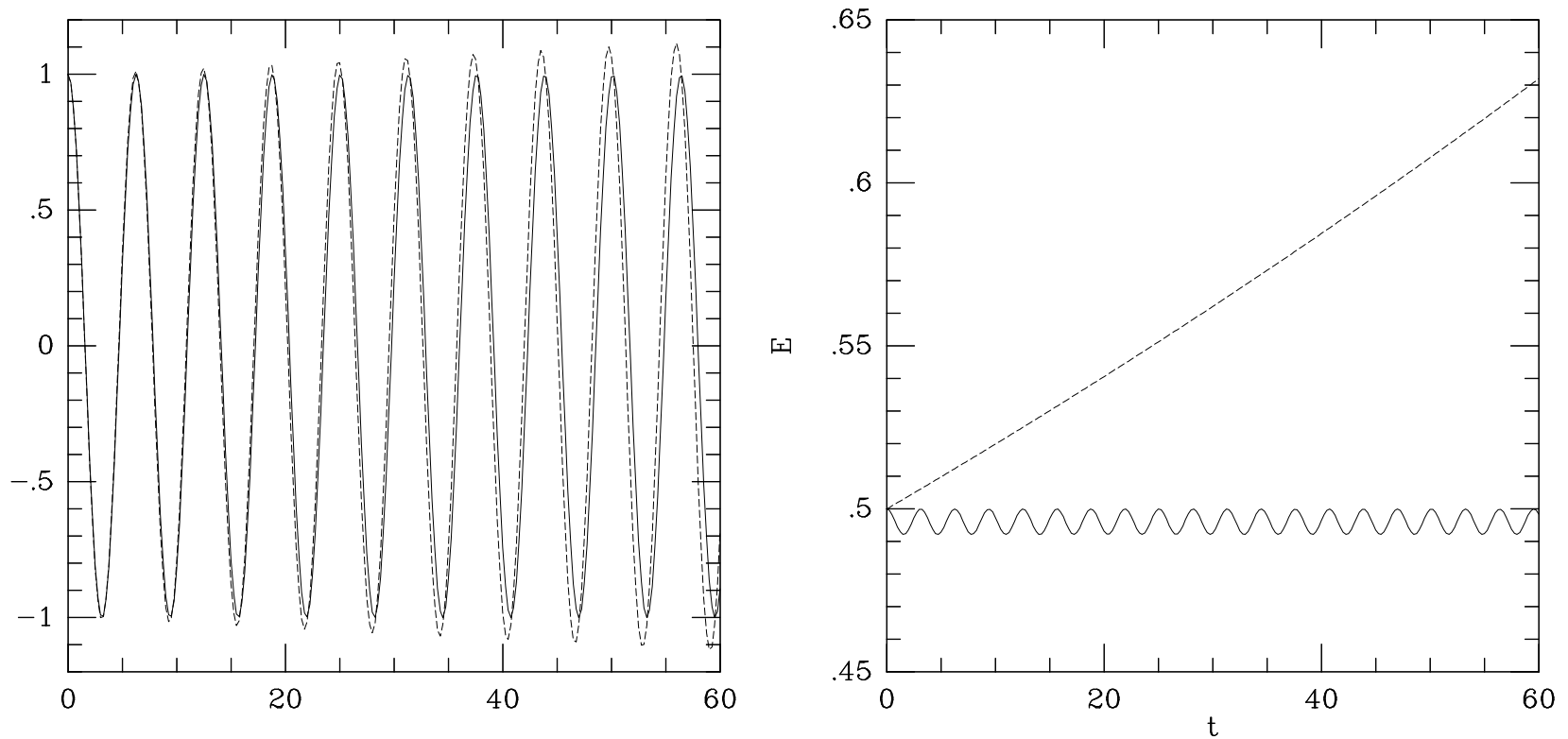
計算アルゴリズム

1. v_0 、 a_0 から $v_{1/2}$ を計算する
2. x_0 、 $v_{1/2}$ から x_1 を計算する
3. x_1 から a_1 を計算する
4. $v_{1/2}$ 、 a_1 から v_1 を計算する
5. 1 に戻る

リープフロッグ法

調和振動子の計算例:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$



軌道 (左) とエネルギー変化 (右)。リープフロッグ法 (実線) と 2 次ルンゲクッタ法 (破線)。

エルミート法

特徴

- 4次公式
- 予測子修正子法
- 時間対称公式
- 自動出発可能
- a だけでなく \dot{a} も必要

エルミート法

公式

予測子

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t + \frac{\mathbf{a}_0}{2} \Delta t^2 + \frac{\dot{\mathbf{a}}_0}{6} \Delta t^3$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \Delta t + \frac{\dot{\mathbf{a}}_0}{2} \Delta t^2$$

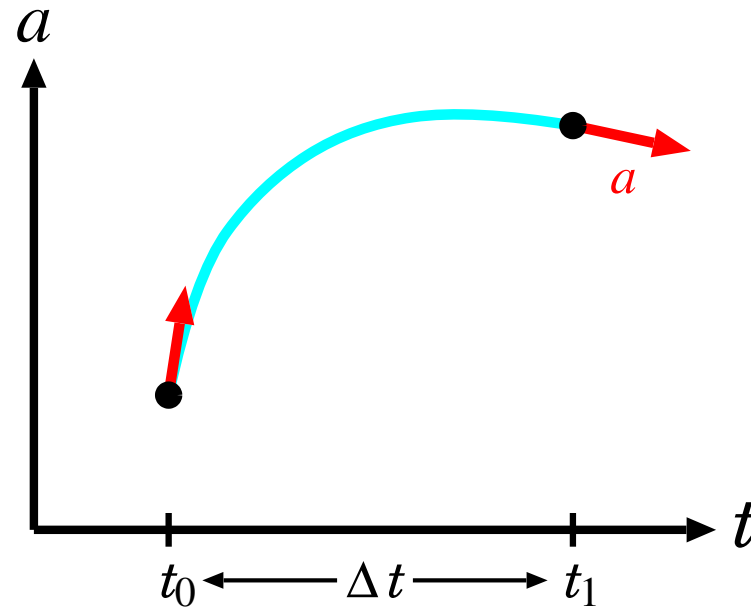
修正子

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_p + \frac{\mathbf{a}_0^{(2)}}{24} \Delta t^4 + \frac{\mathbf{a}_0^{(3)}}{120} \Delta t^5$$

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_p + \frac{\mathbf{a}_0^{(2)}}{6} \Delta t^3 + \frac{\mathbf{a}_0^{(3)}}{24} \Delta t^4$$

エルミート法

3次エルミート補間公式



$$(t_0, \mathbf{a}_0, \dot{\mathbf{a}}_0), (t_1, \mathbf{a}_1, \dot{\mathbf{a}}_1) \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \dot{\mathbf{a}}_0 t + \frac{\mathbf{a}_0^{(2)}}{2} t^2 + \frac{\mathbf{a}_0^{(3)}}{6} t^3$$

$$\mathbf{a}_0^{(2)} = \frac{-6(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1) - \Delta t(4\dot{\mathbf{a}}_0 + 2\dot{\mathbf{a}}_1)}{\Delta t^2}$$

$$\mathbf{a}_0^{(3)} = \frac{12(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1) + 6\Delta t(\dot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}_1)}{\Delta t^3}$$

エルミート法

計算アルゴリズム

1. x_0 、 v_0 、 a_0 、 \dot{a}_0 から x_p 、 v_p を計算する
2. x_p 、 v_p から a_1 、 \dot{a}_1 を計算する
3. a_0 、 \dot{a}_0 、 a_1 、 \dot{a}_1 から $a_0^{(2)}$ 、 $a_0^{(3)}$ を計算する
4. x_p 、 v_p 、 $a_0^{(2)}$ 、 $a_0^{(3)}$ から x_c 、 v_c を計算する
5. 1に戻る

時間ステップの工夫

時間ステップの種類

固定時間ステップ

全粒子が同一固定時間ステップ

可変時間ステップ

全粒子が同一可変時間ステップ

独立粒子固定時間ステップ

各粒子が独自の固定時間ステップ

独立粒子可変時間ステップ

各粒子が独自の可変時間ステップ

階層化タイムステップ

各粒子が独自の可変ブロック時間ステップ

階層化時間ステップ

計算アルゴリズム

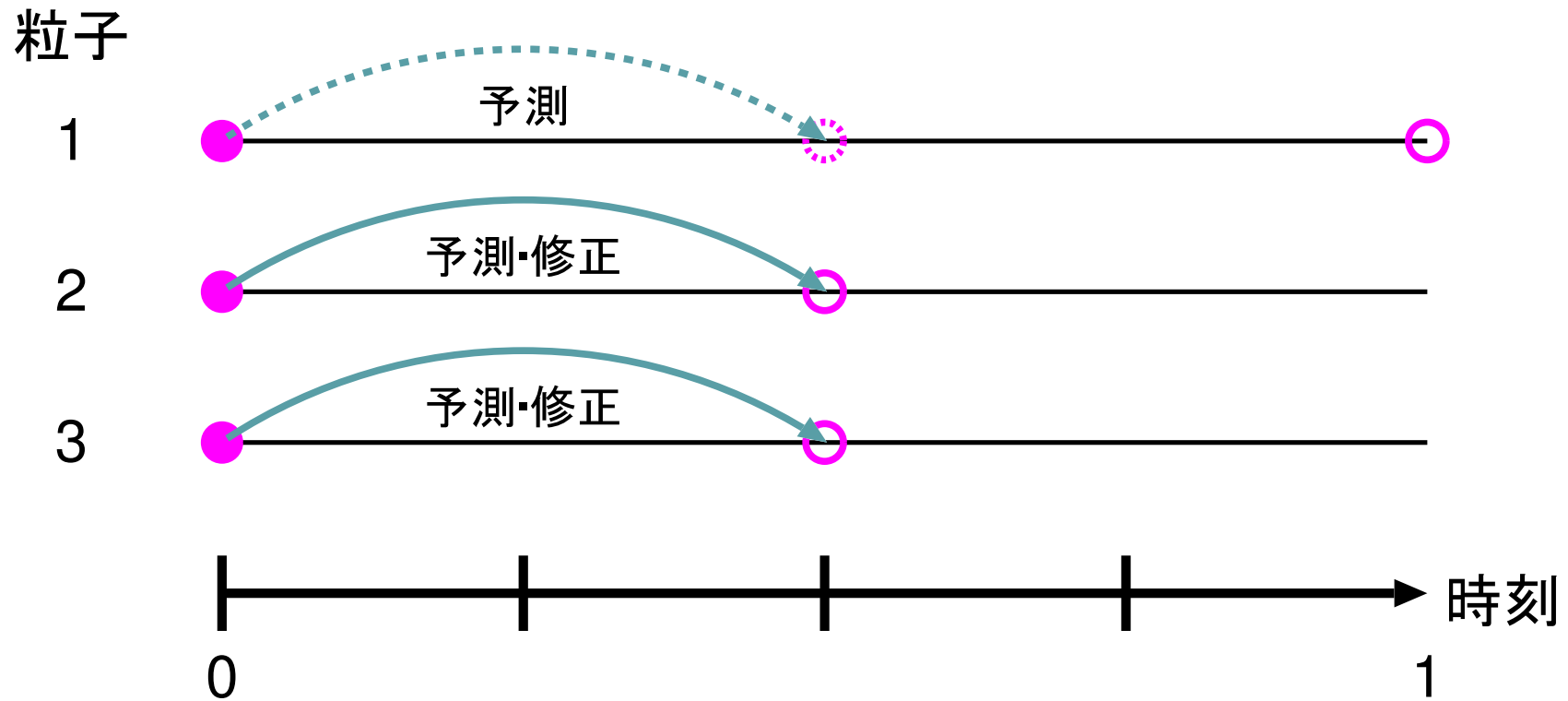
1. 時刻 $t_i + \Delta t_i$ が最小となる粒子群を選ぶ
2. その粒子群の軌道を新しい時刻まで積分する
3. その粒子群の新しい時間ステップを決める
4. 1に戻る

粒子群を軌道積分するためには新しい時刻での力の計算が必要

- 可変時間ステップの予測子修正子法を使う
- 予測子を使って任意の時刻の位置を予測する

階層化時間ステップ

2のべき乗の時間ステップ



予測子の計算回数を減らせる!

相互作用計算の工夫

近似的な解法

- ツリー法
- PM(Particle-Mesh)(FFT) 法
- P³M(Particle-Particle Particle-Mesh) 法
- 球面調和関数展開法

ツリー法

計算量

遠くにある粒子はまとめて扱う $O(N^2) \Rightarrow O(N \log N)$

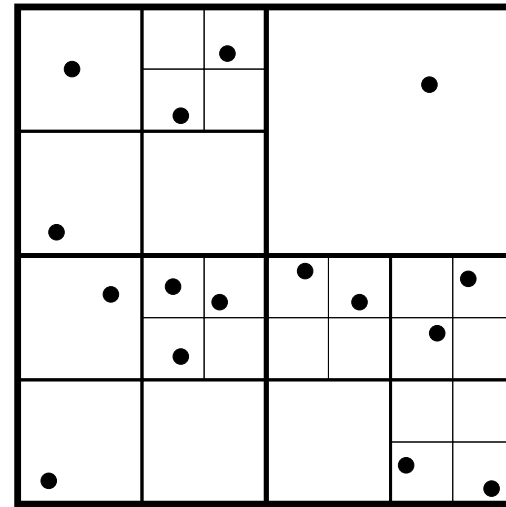
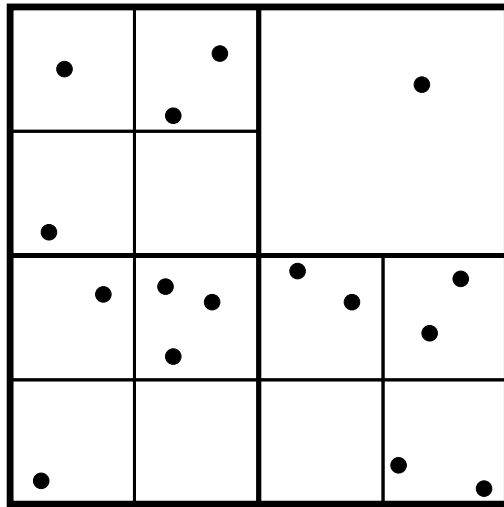
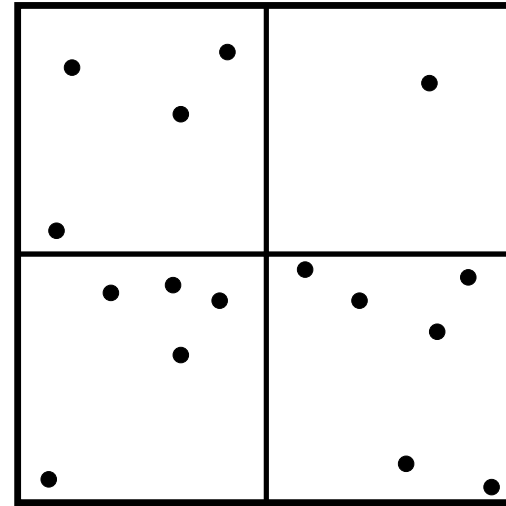
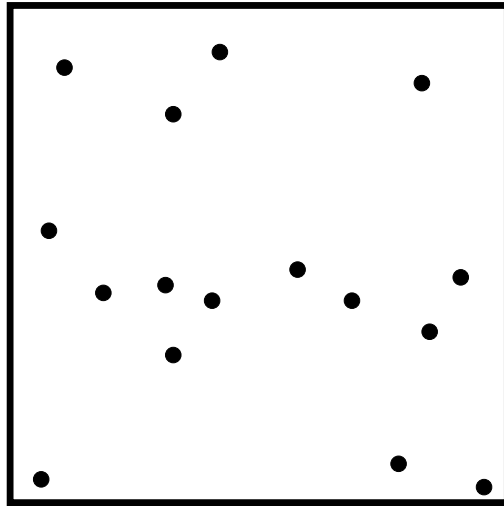
計算アルゴリズム

1. セル分割によりツリー構造を構築する
2. セル内の粒子の質量と重心を求める
3. セルからの粒子への力を計算する
 - セルの粒子からの見込み角が十分小さい場合はセルの重心からの力
 - そうでない場合はセルの子セルからの力

$$\text{判定条件: } \frac{l}{d} < \theta$$

l : セルの長さ、 d : 重心までの距離、 θ : 見込み角

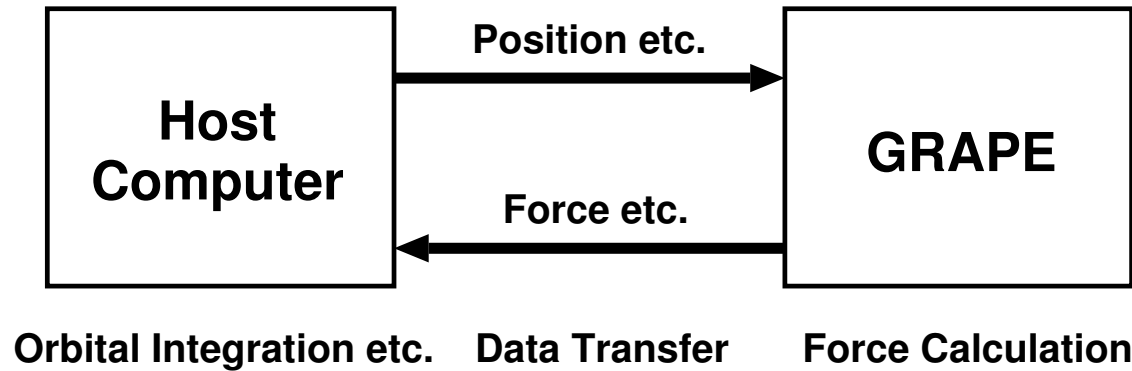
ツリー構造



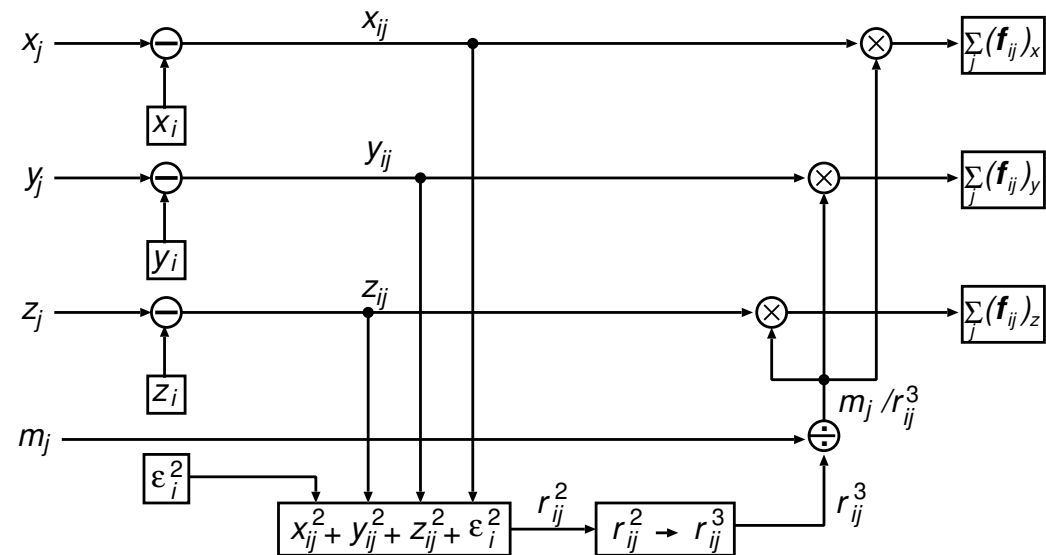
2次元の分割例

重力多体問題専用計算機 GRAPE

GRAPE システム



GRAPE パイプライン



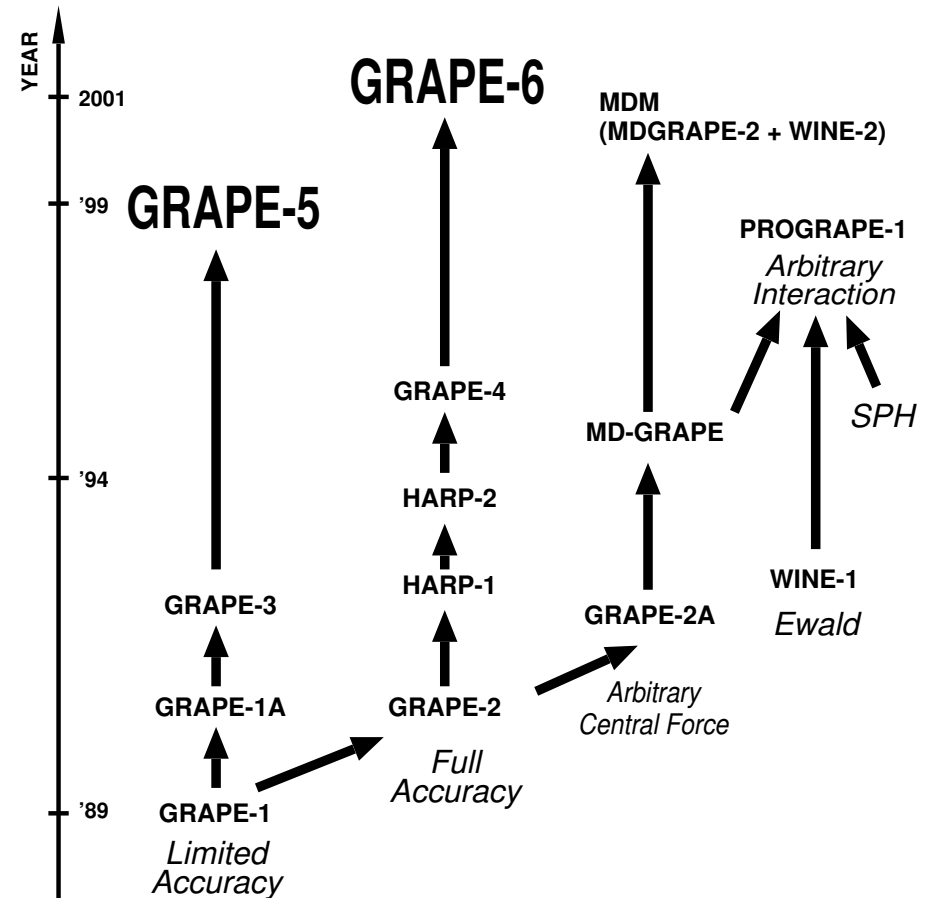
重力多体問題専用計算機 GRAPE

高速の秘密

- 専用 LSI 化
- パイプライン化
- 並列化

GRAPE ファミリー

奇数番号	無衝突系用
偶数番号	衝突系用
HARP-1 以降	\dot{a} の計算
HARP-2 以降	予測子の計算



結果の正しさの確認

ただ1回計算しただけでは、計算の正しさについてほとんどなにもわからない。

系統的に計算方法を変えて2回以上計算すると、非常に有用な情報が得られる。

- 時間ステップを変えて計算
- 粒子数を変えて計算
- 積分公式を変えて計算
- 精度を変えて計算