

Density Independent SPH

齋藤貴之

東京工業大学 理学研究流動機構

共同研究者：牧野淳一郎

Saitoh & Makino (2012) arXiv:1202.4277
<http://v1.jmlab.jp/~saitoh/sph/index.html>

SPH 法

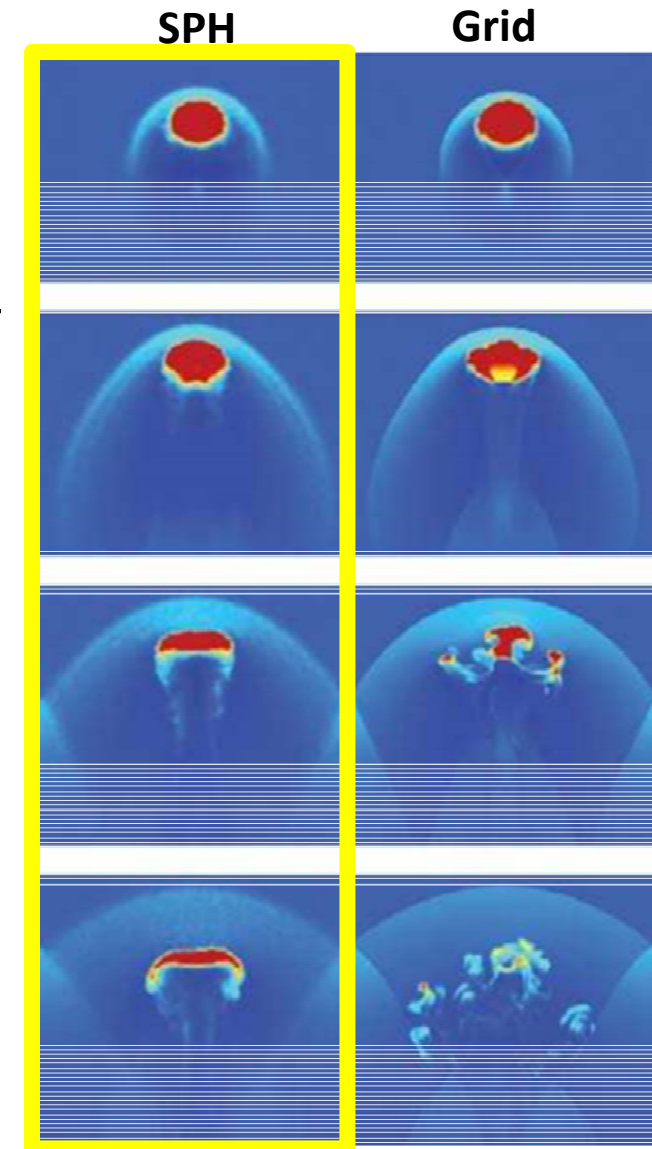
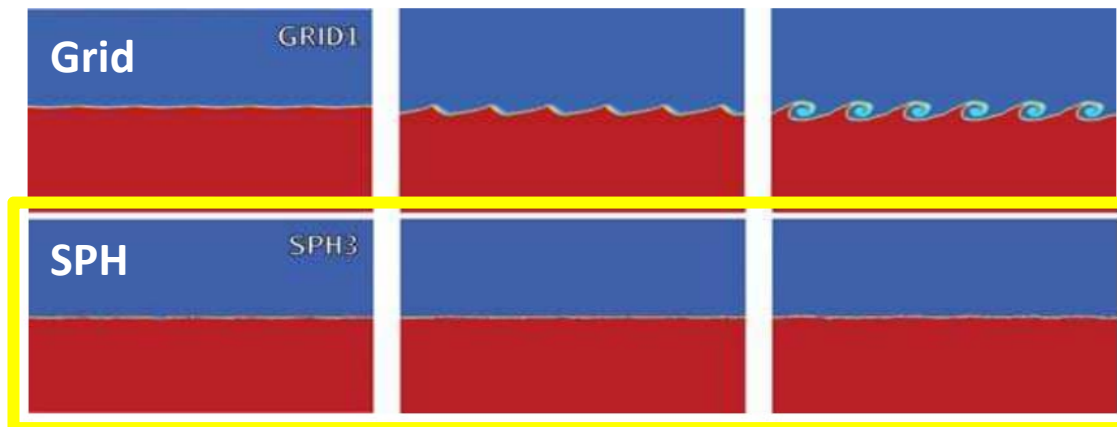
- 粒子法の一種 (Lucy 1977, Gingold & Monaghan 1977)
 - 物理量を粒子の重ね合わせから推定
- 利点
 - ガリレイ不変
 - 粒子密度の濃いところの分解能が自動的に上がる
 - 境界などの処理が不要

天体シミュレーションで多用されている



SPH 法の問題点

- Agertz+2007
 - SPH 法と Euler 法の比較
 - SPH は接触不連続面の扱いが苦手
 - 不安定性成長の抑制
 - fundamental difference
 - 原因はSPHの定式化に密度の微分可能性を用いているから



標準SPHの導出(1)

- ある物理量 f の x の点における物理量は

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'.$$

- これを、カーネル近似に置き換えると

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{x}',$$

物理量 f を W の畳み込みで評価する

- 空間微分は

$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}) = \int \nabla f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'.$$

➡
$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') \nabla W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'.$$

標準SPHの導出(2)

- 有限粒子による物理量の評価のため、離散近似を適用

- 体積要素として $\mathbf{dr}' = \mathbf{m}/\rho$ を導入する

- 物理量 f とその勾配の評価式は次の通り

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}_i) \simeq \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h), \quad \langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}) \simeq \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla W(r_{ij}, h),$$

- $f=\rho$ を入れると

$$\rho_i \simeq \sum_j m_j W(r_{ij}, h),$$

標準 SPH では、この密度を用いて他のすべての量を評価する

標準SPHの導出(3)

- オイラー方程式 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho},$

➡ $\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \simeq - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W(r_{ij}, h). \quad \left(\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho. \right)$

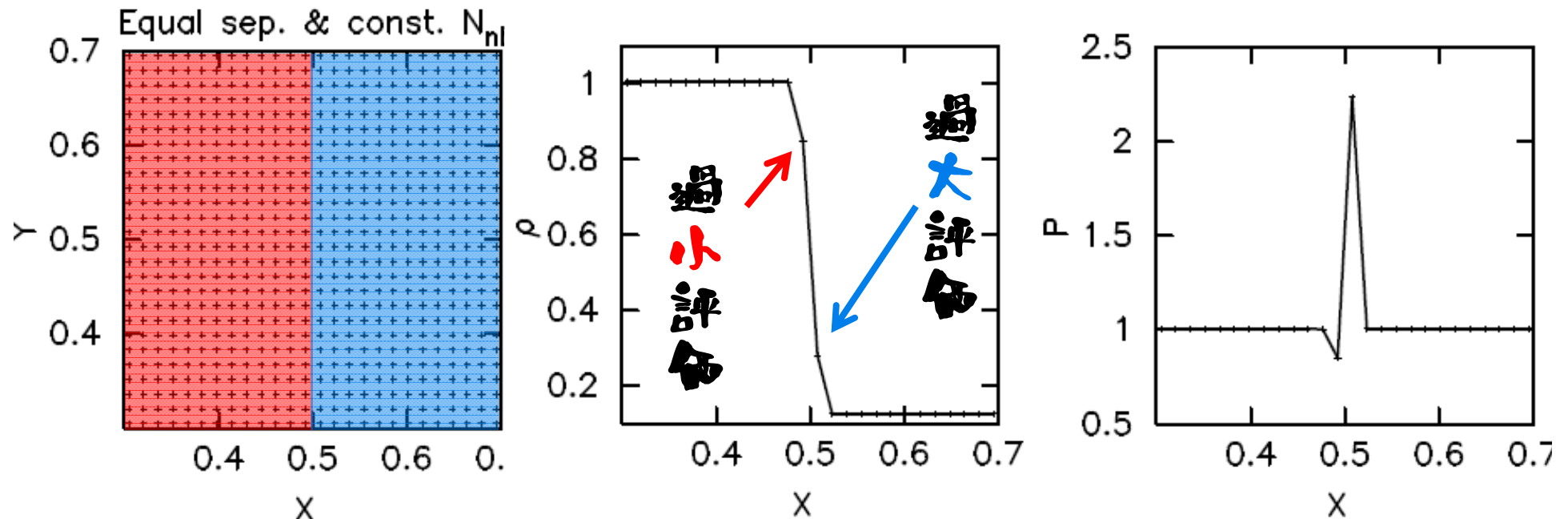
- エネルギー方程式 $\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v},$

➡ $\frac{du_i}{dt} \simeq \sum_j m_j \frac{P_i}{\rho_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W(r_{ij}, h). \quad \left(\nabla(\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \right)$

- あとは状態方程式 $P = (\gamma - 1) \rho u$
- 密度が微分可能であることを用いている**

接触不連続面での物理量推定

- 標準SPHの接触不連続での物理量推定
 - 密度8:1の接触不連続面、圧力=1(=一定)



- 接触不連続面の密度gap → 圧力エラー → 斥力となる
- 密度から他の物理量を求めるのに無理がある
 - 離散化からやり直す必要がある

Density Independent SPHの導出(1)

- 密度があらわに出てこない離散化をする
 - 流体力学なので、状態方程式を用いた体積要素をつかって離散化する
 - 新しい体積要素は

$$d\mathbf{r} = \frac{(\gamma - 1)mu}{P}.$$

- 物理量 f とその空間微分の推定式は

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}) \simeq \sum_j (\gamma - 1) \frac{U_j f_j}{P_j} W(r_{ij}, h_i), \quad U_j = m_j u_j$$

$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}_i) \simeq \sum_j (\gamma - 1) \frac{U_j f_j}{P_j} \nabla W(r_{ij}, h_i)$$

Density Independent SPHの導出(2)

- 先の式の f に次の値を入れる：

$$f = \frac{P}{(\gamma - 1)} = \rho u \equiv q,$$

- すると、
$$q_i \simeq \sum_j U_j W(r_{ij}, h_i). \quad U_j = m_j u_j$$

- この量はエネルギー密度なので理想気体では圧力に相当
- 接触不連続面でうまくいきそう！

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}) \simeq \sum_j (\gamma - 1) \frac{U_j f_j}{P_j} W(r_{ij}, h_i),$$

Density Independent SPHの導出(3)

- オイラー方程式 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho},$


$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \simeq -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) \nabla \tilde{W}_{ij}$$

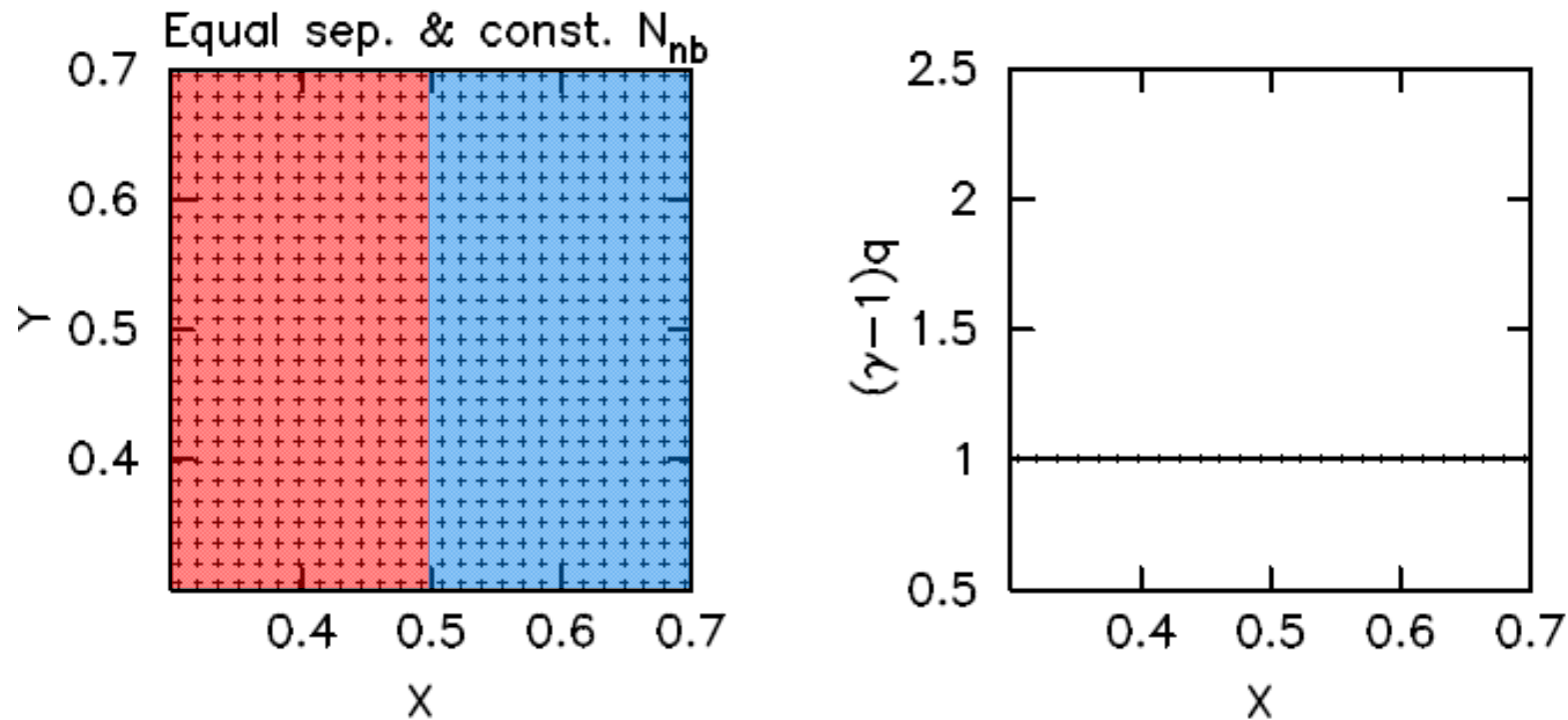
- エネルギー方程式 $\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v},$


$$\frac{dU_i}{dt} \simeq (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \tilde{W}(r_{ij}, h_{ij}),$$

- 以上の式に密度はあらわに出てこない
- 状態方程式 $P = (\gamma - 1)\rho u$ から密度が求まる

接触不連続面での物理量推定

- DISPHの接触不連続での物理量推定
 - 密度8:1の接触不連続面、圧力=1(=一定)



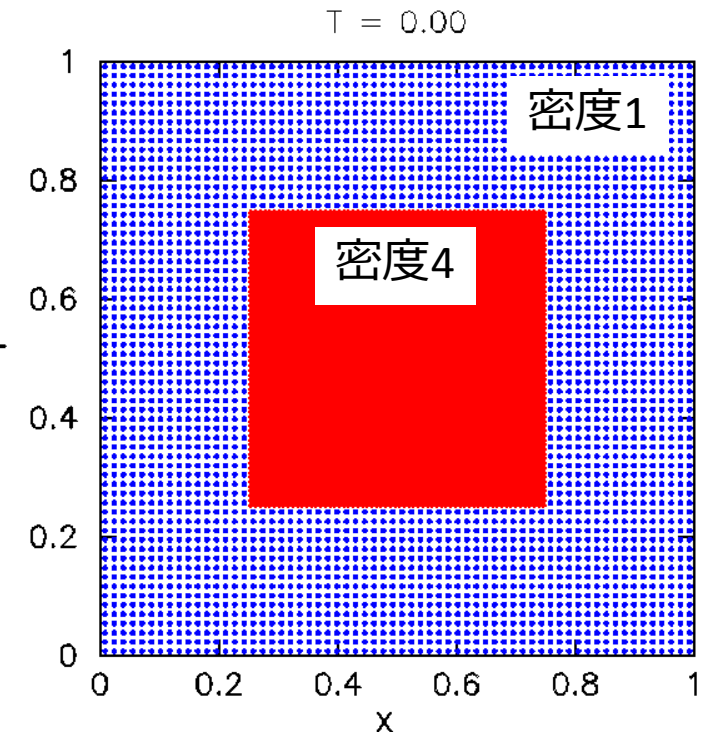
圧力を評価のベースにするので、接触不連続面でスムーズ

数値シミュレーション

- シミュレーションコードは ASURA (のサブセット)を使う
- 時間積分は leap-frog を採用
- 時間刻み幅に shared step/variable time-step を採用
 - $Dt = 0.3 \cdot 2xh / \max_j v_{sig}$ の最小の値を用いる
- 標準 SPH 法と、我々の SPH 法で結果の比較を行う

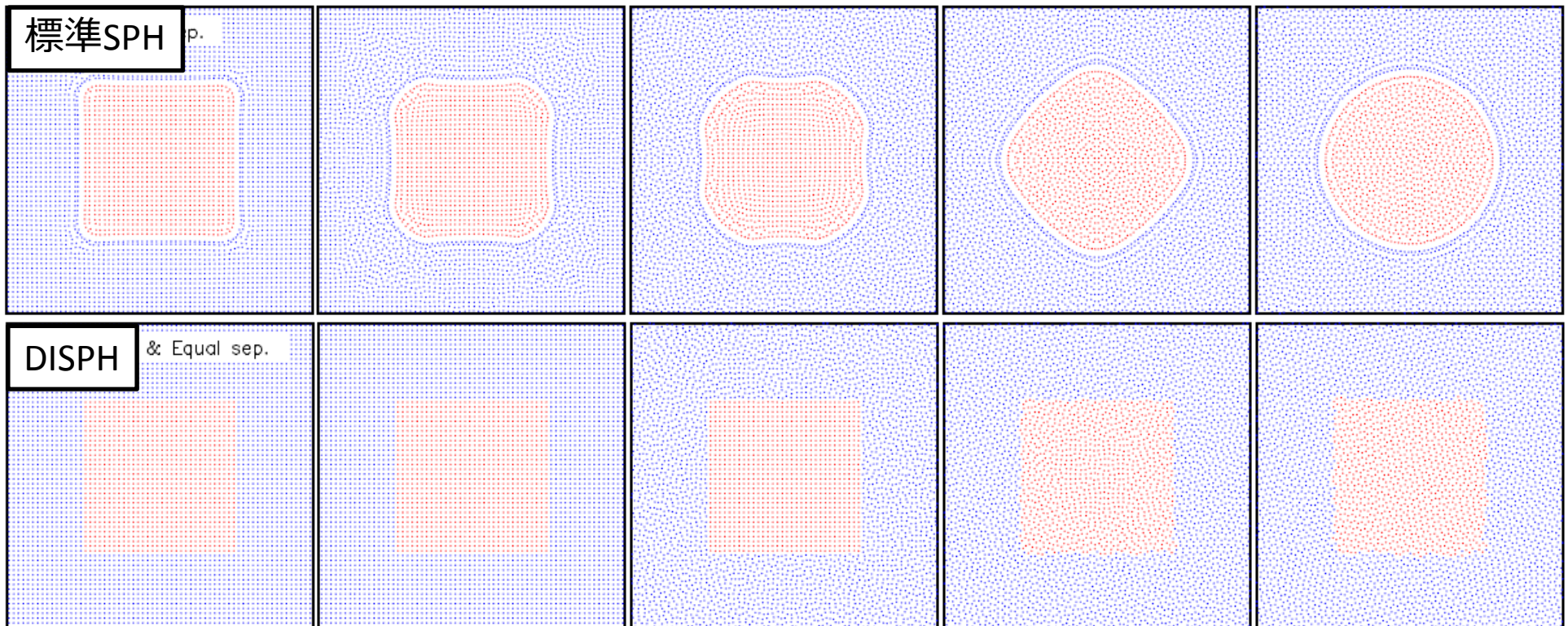
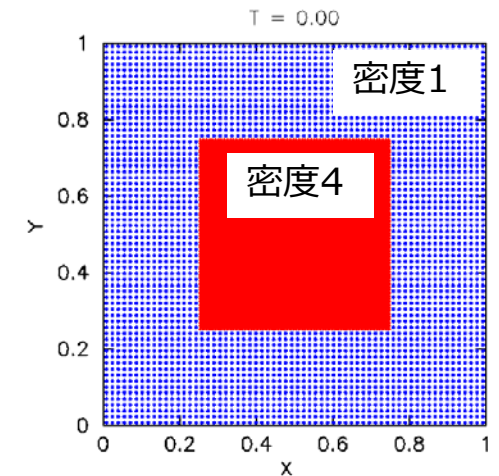
圧力平衡流体テスト

- 二次元、静止流体テスト
 - 密度1の流体中に密度4の流体を置き、全体が圧力平衡になるように設定
 - 圧力の値は1
 - 音速は高密度領域で ~ 1
 - 圧力平衡なのでこの構造は本来変わらないはず



圧力平衡流体テスト

- 標準 SPH では、接触不連続面で非物理的表面張力が働き形状が変わる
- 我々のSPHは初期の平衡分布を保つ

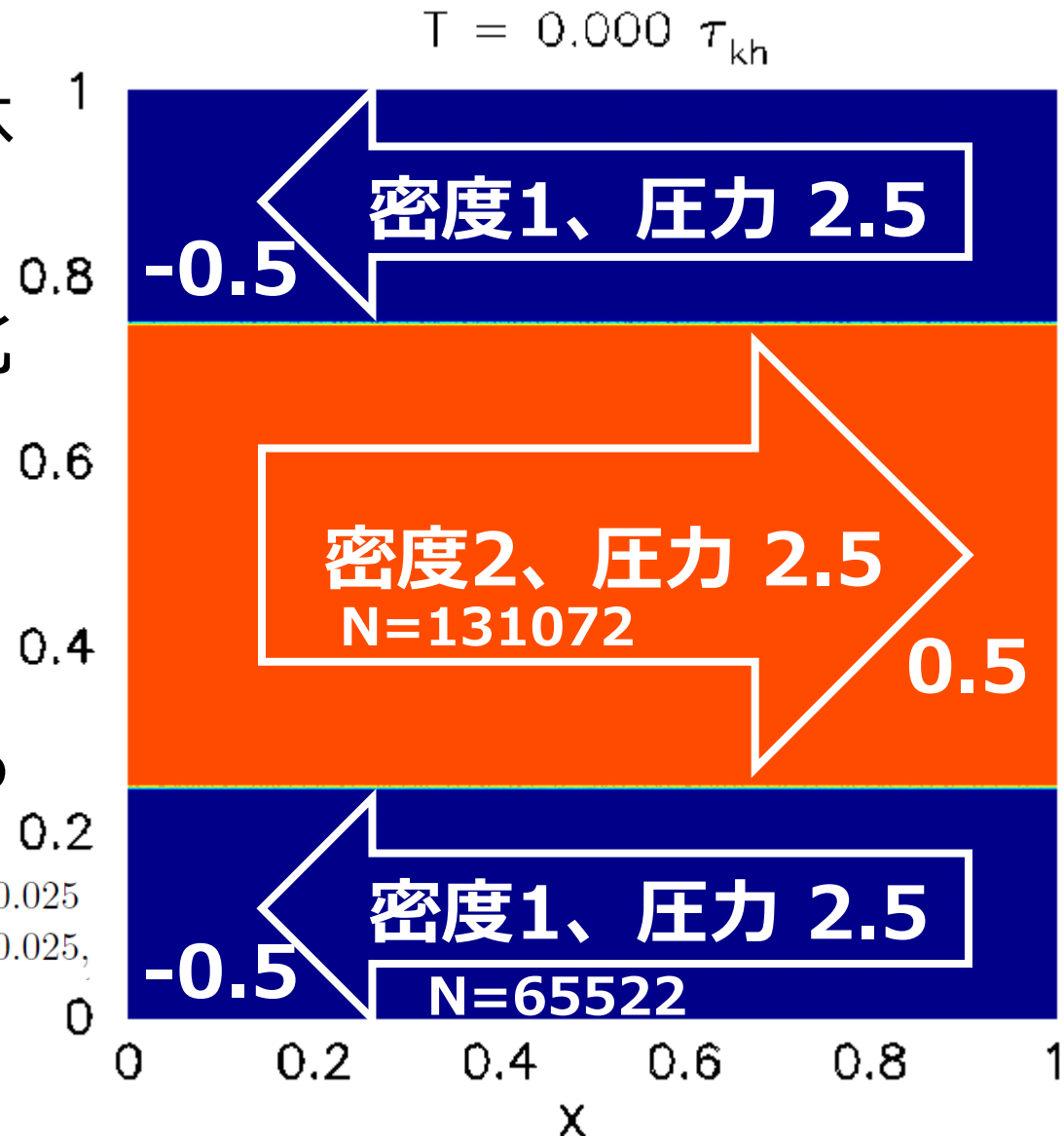


Kelvin-Helmholtz instability tests

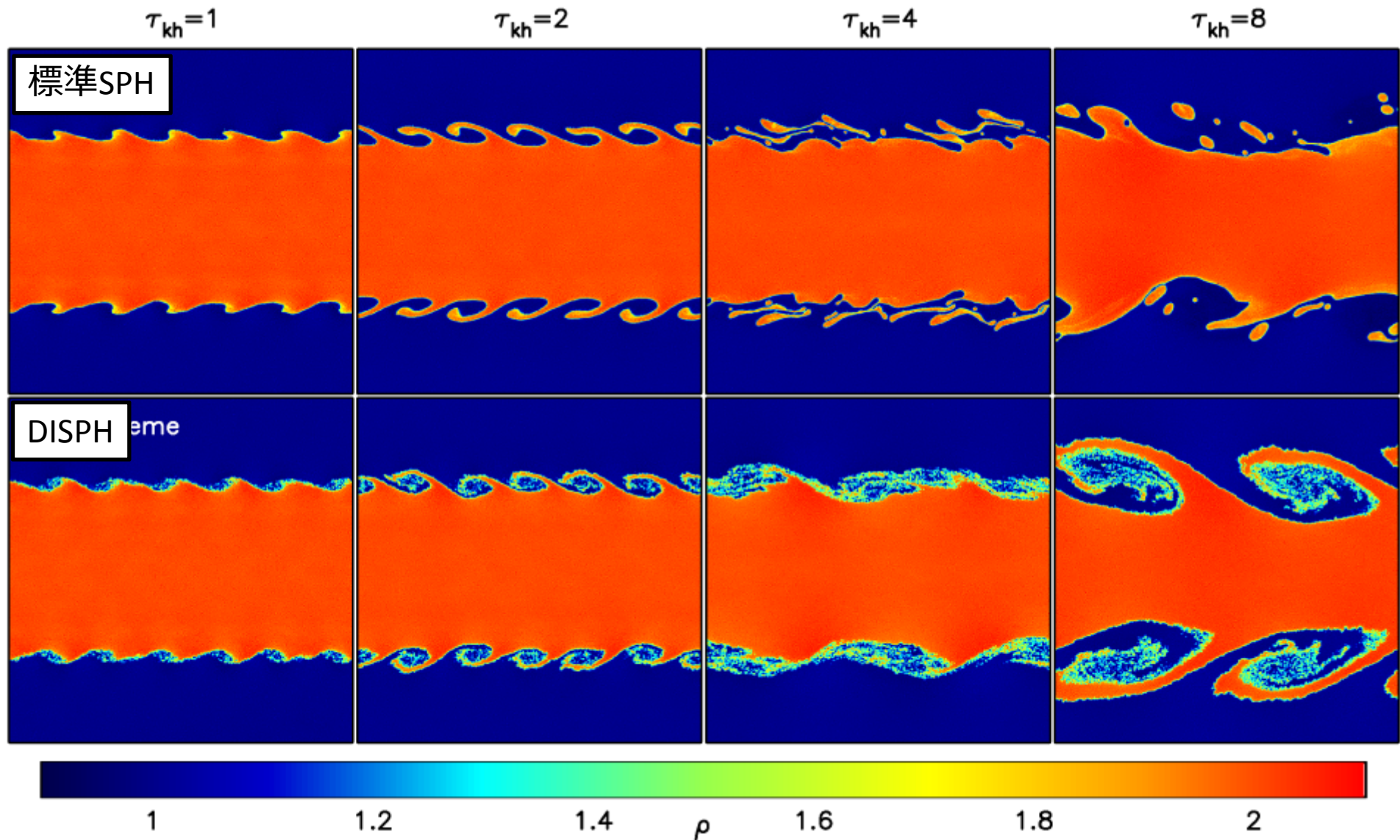
- シアー一起源の流体不安定性の試験
- 初期条件：密度比 1:2、圧力2.5、相対速度1
- 境界面にy方向速度の摂動を入れる

$$v_y = \begin{cases} A \sin[-2\pi(x + 0.5)/\lambda], & |y - 0.25| < 0.025 \\ A \sin[2\pi(x + 0.5)/\lambda], & |y - 0.75| < 0.025, \end{cases}$$

$$\lambda=1/6, A=0.025$$



Kelvin-Helmholtz instability tests

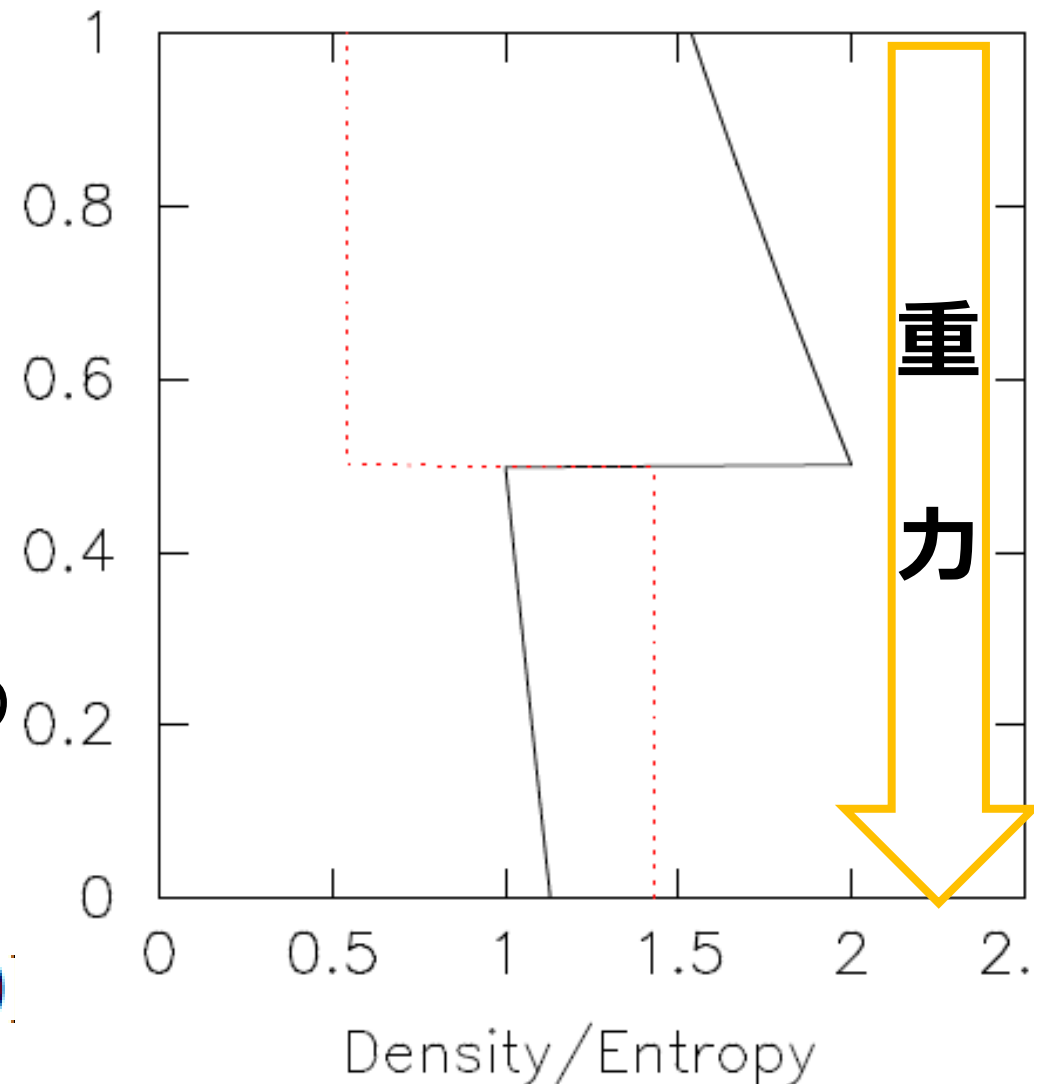


Rayleigh-Taylor instability tests

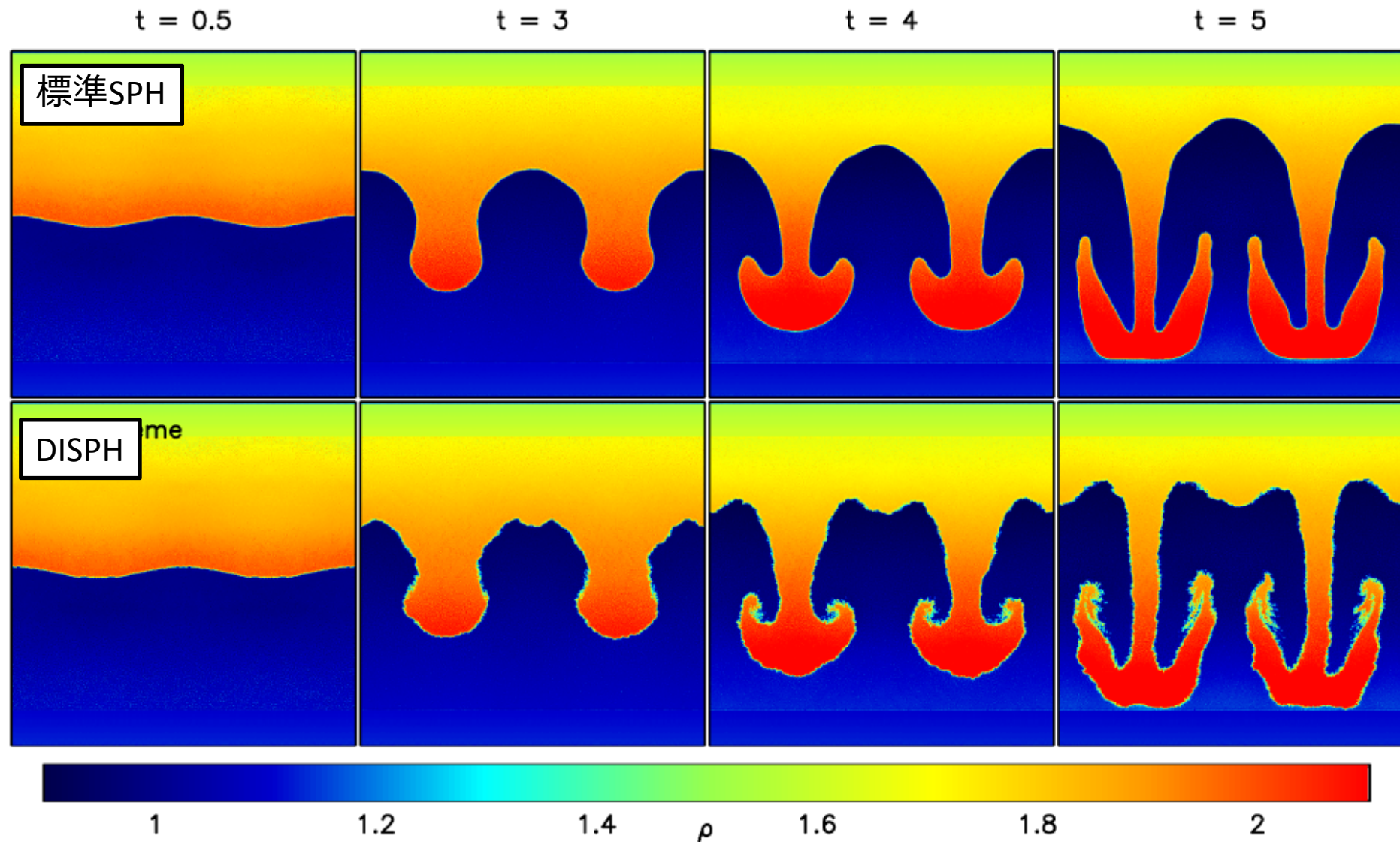
- 静水圧平衡にある流体中で、重力により引き起こされる不安定性
- 初期条件：密度比 1:2
- 境界面にy方向速度の摂動を入れる

$$\Delta v_y(x, y) = \delta_{vy} [1 + \cos(4\pi x)] \{1 + \cos[5\pi(y - 0.5)]\}$$

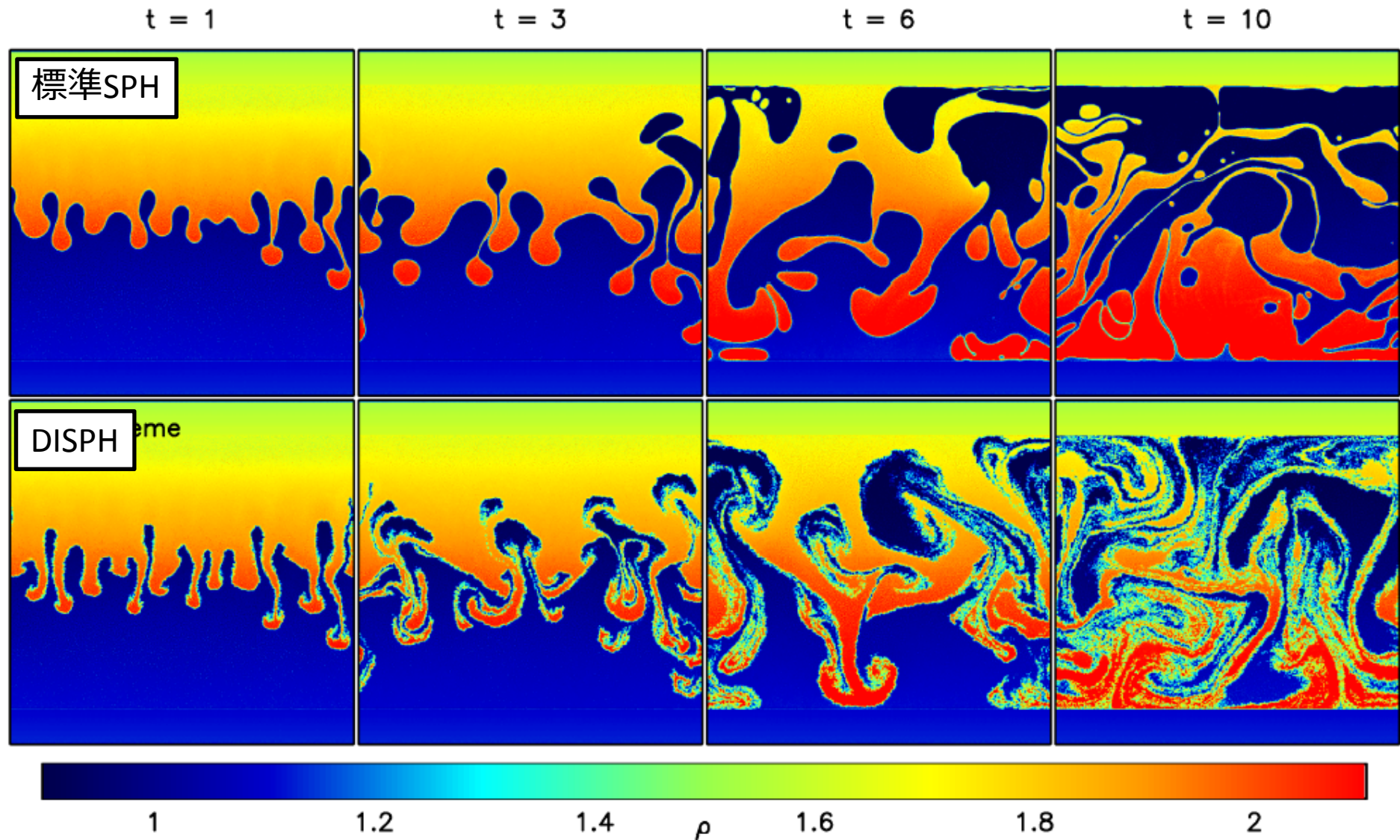
$$\delta_{vy} = 0.025$$



Rayleigh-Taylor instability tests

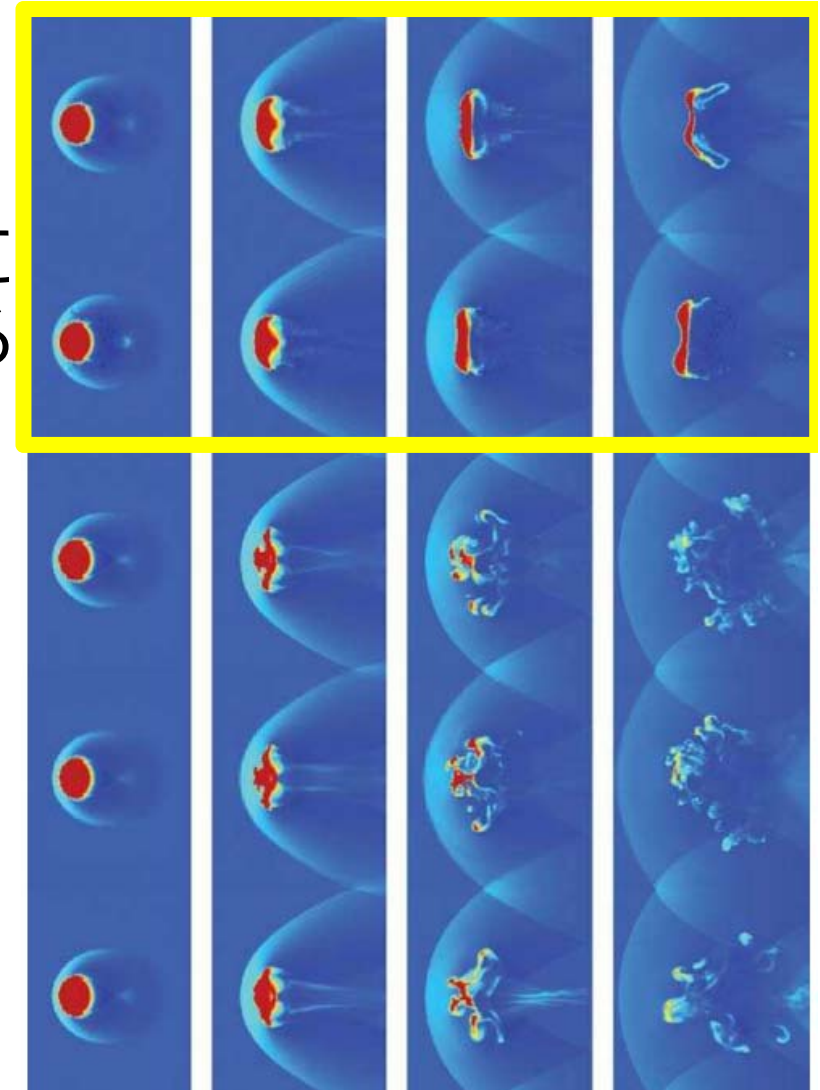
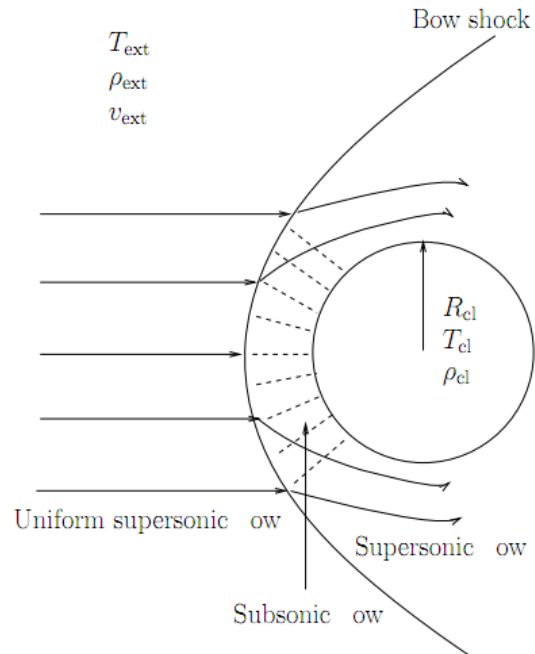


Rayleigh-Taylor instability tests

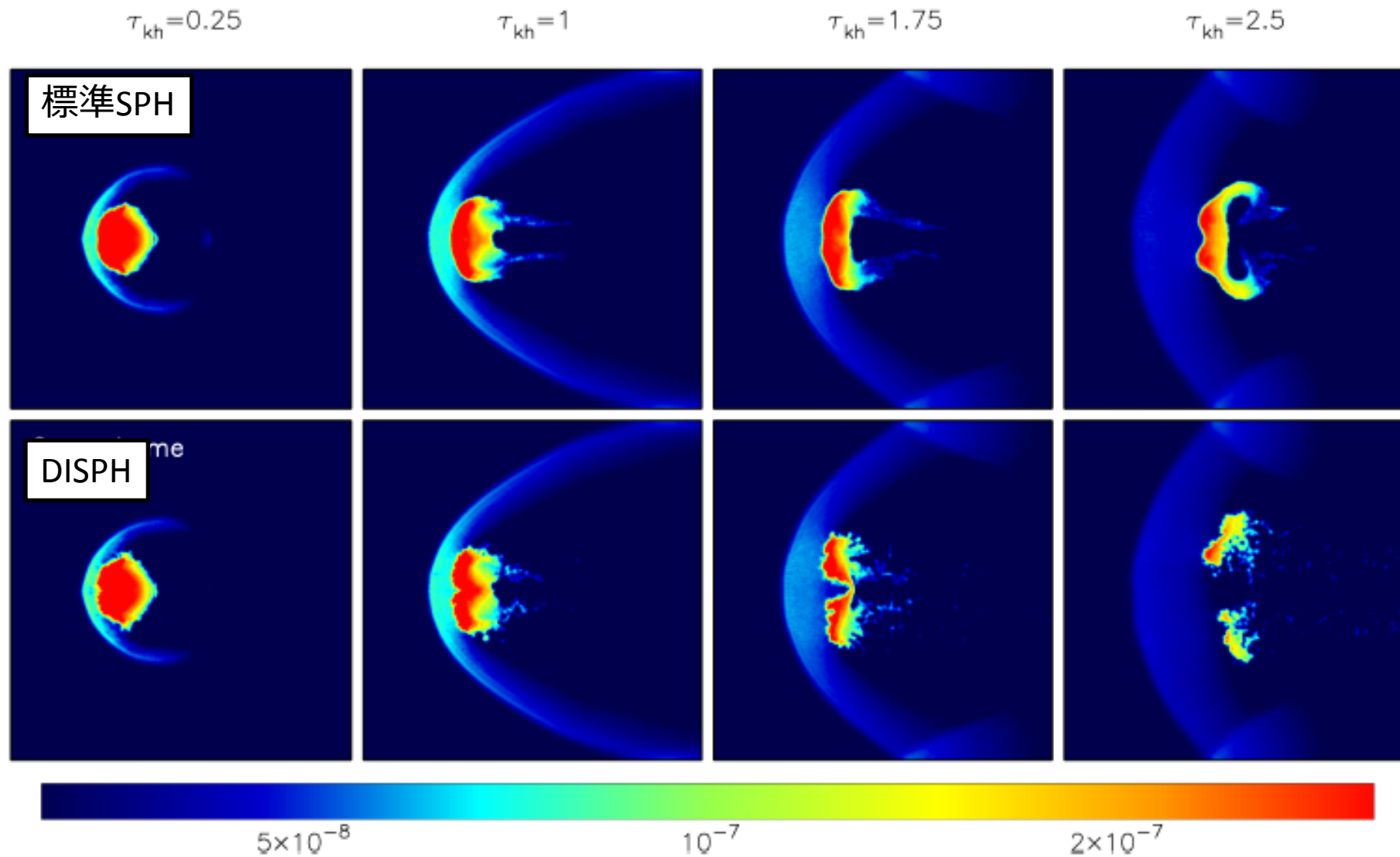


Blob tests

- Agertz+2007
 - SPH/Eular codes の比較
 - 大体 $t_{\text{kh}}=1$ ぐらいから表面に発生した不安定性で壊れる

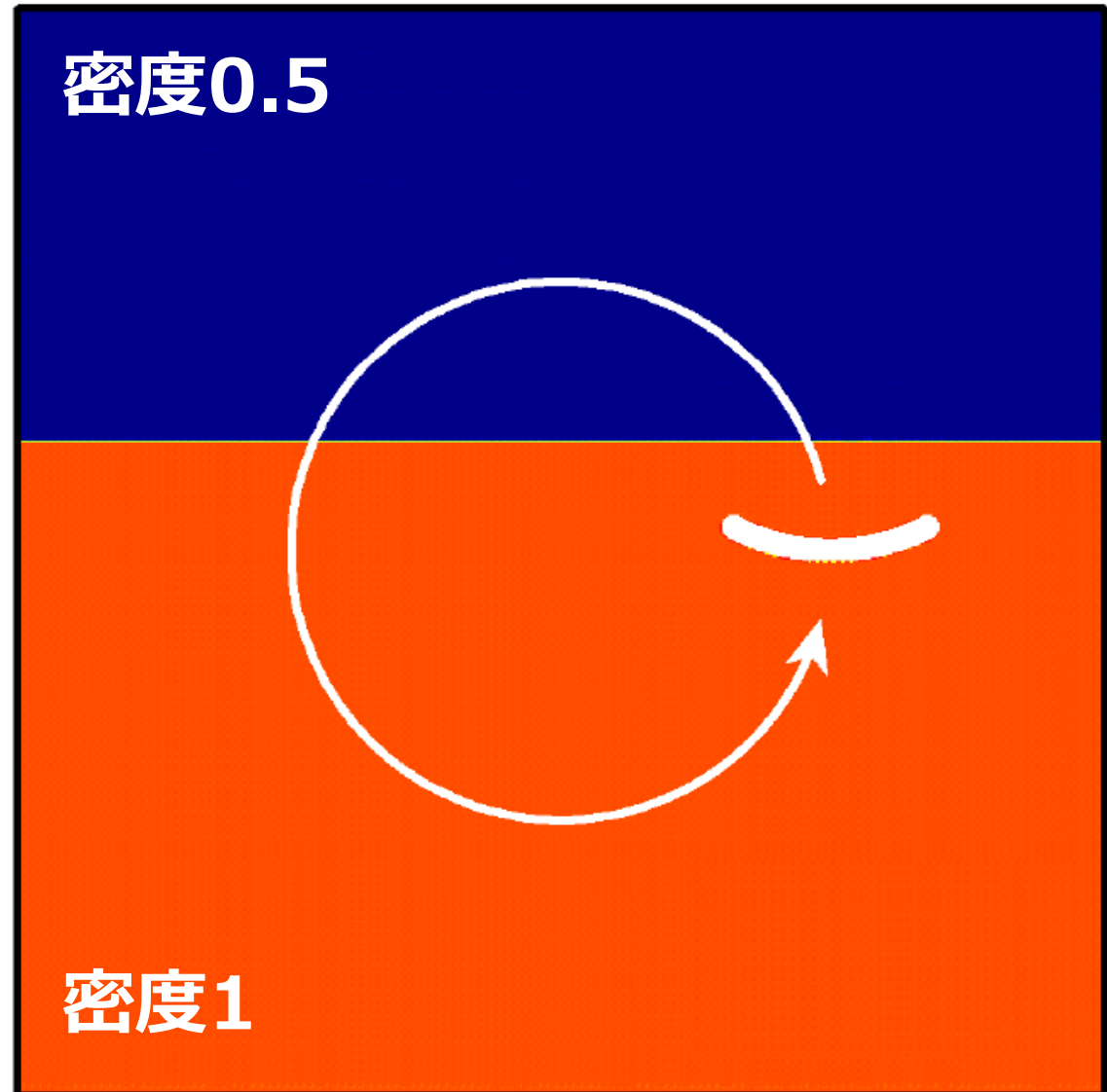


Blob tests

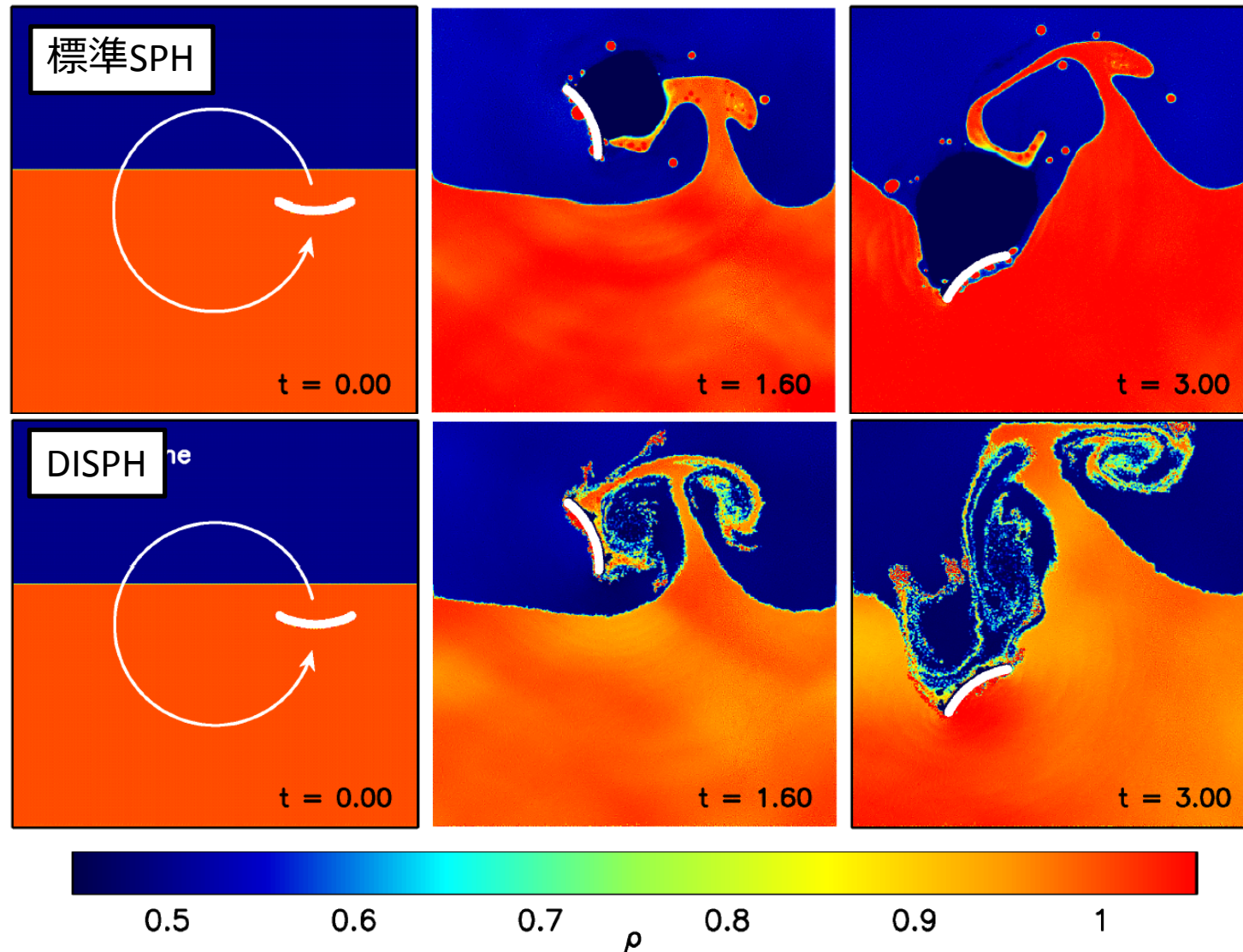


Two phase fluid mixing

- 密度の異なる圧力平衡流体を剛体スプーンで強制混合
- スプーンの角速度は $2\pi/5$
- AREPO(Springel 2010)論文図39



Two phase fluid mixing



Discussion

- Hopkins (2012)
 - *grad-h* term の導入
 - Euler-lagrange equation からの導出
- Hosono, Saitoh, & Makino in prep.
 - 一般の状態方程式に対応した DISPH
 - Giant impact 等への応用

まとめ

- エネルギー密度をベースとする粒子法を構築した
 - 物理量の評価式の離散化過程で、従来と異なり状態方程式による体積要素を使う
 - これを出発点に運動方程式、エネルギー方程式を導出
- 利点
 - 従来のSPH法と同様、ラグランジュ的なので密度の高いところで自動的に分解能が上がる、ガリレイ不変といった性質がすべて備わっている
 - 従来のSPH法にあった、接触不連続面を扱えない問題、その結果として流体不安定性の著しい抑制問題が解決
 - 必要な式はすべて機械的に導出可能
- 難点
 - ショックの扱いに注意が必要