

不連続ガラーキン法による流体計算

上野智久(東京大学)

利用カテゴリ XC-Trial

ブラックホールによる星の潮汐破壊現象のシミュレーションを行い、観測と比較することで宇宙におけるブラックホールの質量分布密度や降着現象の詳細を知ることができる。その際、潮汐力によって破壊された星の残骸がブラックホールへと降着する現象は電磁流体方程式で記述することができる。しかし、その方程式の非線形性と衝撃波を生じる性質により、精度の良い計算を行うためには細かいメッシュを用いた高コストな数値計算を行う必要がある。本研究では、将来の高精度降着シミュレーションに向けた第一歩として、不連続ガラーキン法を用いて流体方程式であるオイラー方程式を解くコードを開発し、メッシュ数や基底の次数、数値流束(不連続性のある物理量からメッシュに出入りする近似的な流束を求める機構)の種類、limiter(数値発散を抑制する機構)の種類などを変化させて様々なテストを行った。

不連続ガラーキン法

不連続ガラーキン法は、メッシュ内の物理量を定数で近似する差分法と異なり、物理量を基底の線形結合で近似する。このことで、衝撃波(不連続性)が発生しない問題については、メッシュのサイズに対して高次精度での誤差の収束を達成することができる。衝撃波が発生する問題についても、それ以外の領域については高次精度を達成するため、一次精度に落ちてしまうものの、その誤差の係数は単純な差分法に比べて小さくなる性質がある。同じく高次精度の計算を達成するMP5法と比べて、不連続ガラーキン法は単一のメッシュ内で閉じた計算の割合が多いためMPI通信の頻度が減り、高い並列化効率が実現できるという利点がある。

問題を時間積分するため、基底の線形結合で表された数値解に対し、隣接するメッシュからの流束に応じて時間発展を行う。このため、解かれる系は流束が定義できる保存形で書かれていないとまらない。幸い、(電磁)流体方程式は保存形に直すことが可能なため、不連続ガラーキン法で解くことができる。

今回は、物理量を近似する基底として、ルジャンドル多項式を採用する。ルジャンドル多項式を使うことで、その直交性によって計算量を減らすことができる。

二次元移流方程式でのテスト

周期境界条件の下で、高さ1.0のピークをもつ関数をxy軸に対し斜め方向に移流させるテストを行った(図1)。Limiterで振動を抑えた影響により、ピークが徐々になまりながら移動する様子を再現することができた。

一次元オイラー方程式でのテスト

広く使われているテスト問題であるsod's problemを不連続ガラーキン法によって解いた(図2)。衝撃波を伴う問題であるため、解析解と数値解の L^2 ノルムによる誤差はメッシュ幅の一乗

に比例して減少することを確認めた。

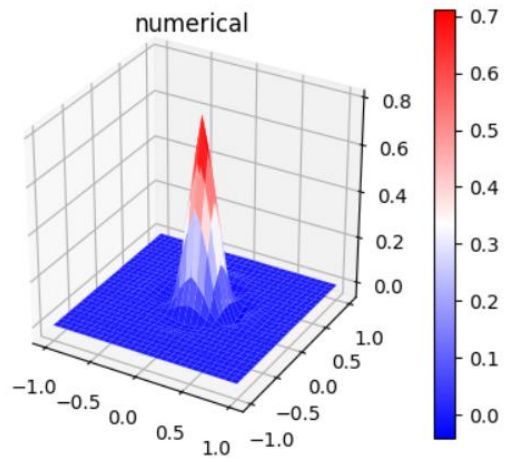


図 1:空間二次元の移流方程式のテスト

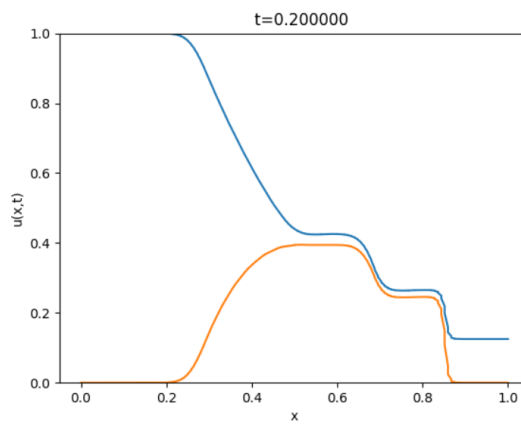


図 2:sod' s problem のテスト。
青線が密度 ρ を表し、オレンジ線は密度と速度の積 ρu を表す。