高度な*N*体シミュレーション法

小久保英一郎

国立天文台科学研究部/天文シミュレーションプロジェクト

N体シミュレーションの基礎方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1,j\neq i}^{N} G m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3} \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}
$$

問題の難しさ

- 膨大な計算量 $O(N^2)$
- 広範囲な時間スケール

標準積分公式

無衝突系用

- リープフロッグ公式

衝突系用

- エルミート公式

エルミート法

特徴

- 4 次公式
- 予測子修正子法
- 時間対称公式
- 自動出発可能
- a だけでなく $\dot{a}$ も必要

エルミート法

公式

予測子

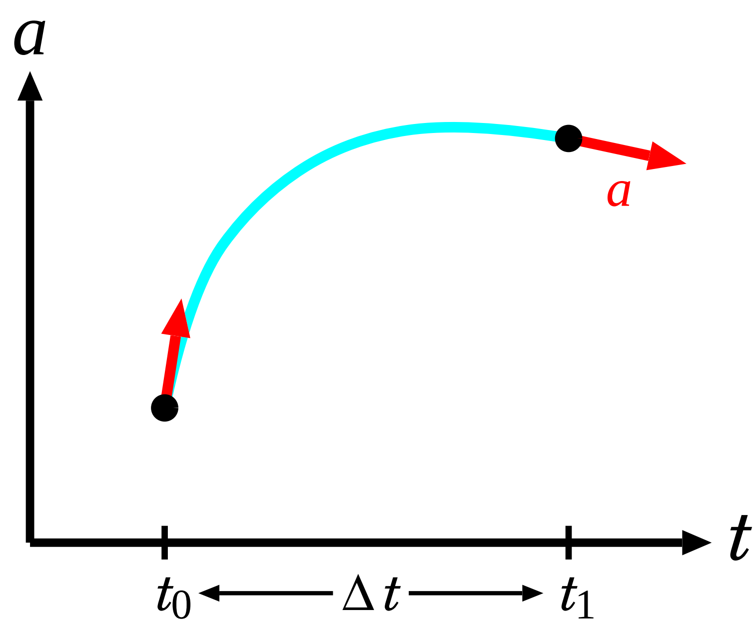
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \Delta t + \frac{\boldsymbol{a}_0}{2} \Delta t^2 + \frac{\dot{\boldsymbol{a}}_0}{6} \Delta t^3 \\
\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}_0 \Delta t + \frac{\dot{\boldsymbol{a}}_0}{2} \Delta t^2
\end{aligned}
$$

修正子

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}} &= \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(2)}}{24} \Delta t^4 + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(3)}}{120} \Delta t^5 \\
\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} &= \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(2)}}{6} \Delta t^3 + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(3)}}{24} \Delta t^4
\end{aligned}
$$

エルミート法

３次エルミート補間公式



$$(t_0, \boldsymbol{a}_0, \dot{\boldsymbol{a}}_0), (t_1, \boldsymbol{a}_1, \dot{\boldsymbol{a}}_1) \Rightarrow \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{a}}_0 t + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(2)}}{2} t^2 + \frac{\boldsymbol{a}_0^{(3)}}{6} t^3$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_0^{(2)} &= \frac{-6(\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_1) - \Delta t(4\dot{\boldsymbol{a}}_0 + 2\dot{\boldsymbol{a}}_1)}{\Delta t^2} \\ \boldsymbol{a}_0^{(3)} &= \frac{12(\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_1) + 6\Delta t(\dot{\boldsymbol{a}}_0 + \dot{\boldsymbol{a}}_1)}{\Delta t^3} \end{aligned}$$

エルミート法

計算アルゴリズム

1. $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{a}_0$、$\dot{\boldsymbol{a}}_0$ から $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$、$\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ を計算する
2. $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$、$\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ から $\boldsymbol{a}_1$、$\dot{\boldsymbol{a}}_1$ を計算する
3. $\boldsymbol{a}_0$、$\dot{\boldsymbol{a}}_0$、$\boldsymbol{a}_1$、$\dot{\boldsymbol{a}}_1$ から $\boldsymbol{a}_0^{(2)}$、$\boldsymbol{a}_0^{(3)}$ を計算する
4. $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$、$\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$、$\boldsymbol{a}_0^{(2)}$、$\boldsymbol{a}_0^{(3)}$ から $\boldsymbol{x}_\mathrm{c}$、$\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ を計算する
5. 1 に戻る

時間ステップの工夫

時間ステップの種類

固定時間ステップ
　　全粒子が同一固定時間ステップ

可変時間ステップ
　　全粒子が同一可変時間ステップ

独立粒子固定時間ステップ
　　各粒子が独自の固定時間ステップ

独立粒子可変時間ステップ
　　各粒子が独自の可変時間ステップ

階層化タイムステップ
　　各粒子が独自の可変ブロック時間ステップ

階層化時間ステップ

時間ステップ

- 2^n に離散化

計算アルゴリズム

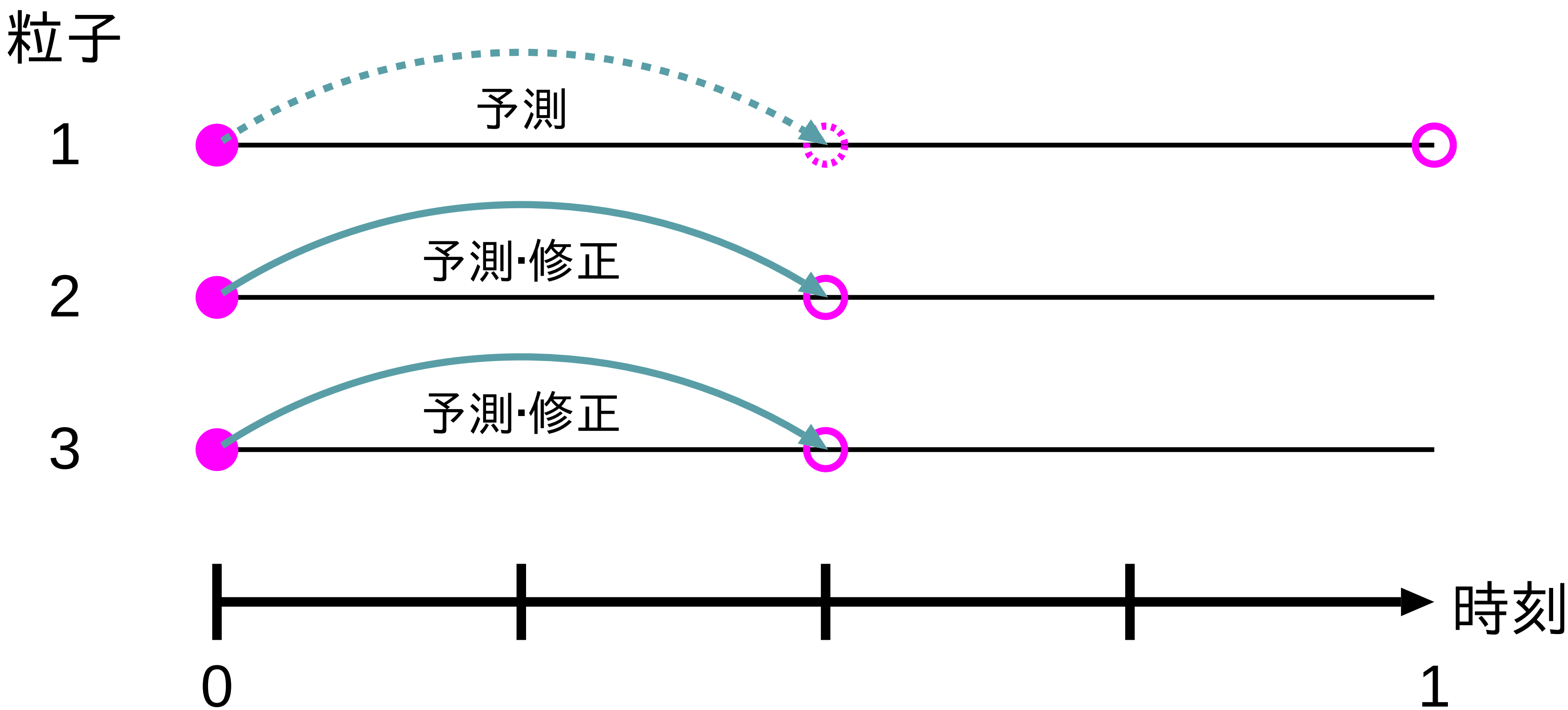
1. 時刻 $t_i + \Delta t_i$ が最小となる粒子群を選ぶ
2. その粒子群の軌道を新しい時刻まで積分する
3. その粒子群の新しい時間ステップを決める
4. 1 に戻る

粒子群を軌道積分するためには新しい時刻での力の計算が必要

- 可変時間ステップの予測子修正子法を使う
- 予測子を使って任意の時刻の位置を予測する

階層化時間ステップ

２のべき乗の時間ステップ



予測子の計算回数を減らせる!

相互作用計算の工夫

近似的な解法

- ツリー法
- PM(Particle-Mesh)(FFT) 法
- P^3M(Particle-Particle Particle-Mesh) 法
- P^3T(Particle-Particle Particle-Tree) 法
- 球面調和関数展開法

ツリー法

計算量

遠くにある粒子はまとめて扱う $O(N^2) \Rightarrow O(N \log N)$

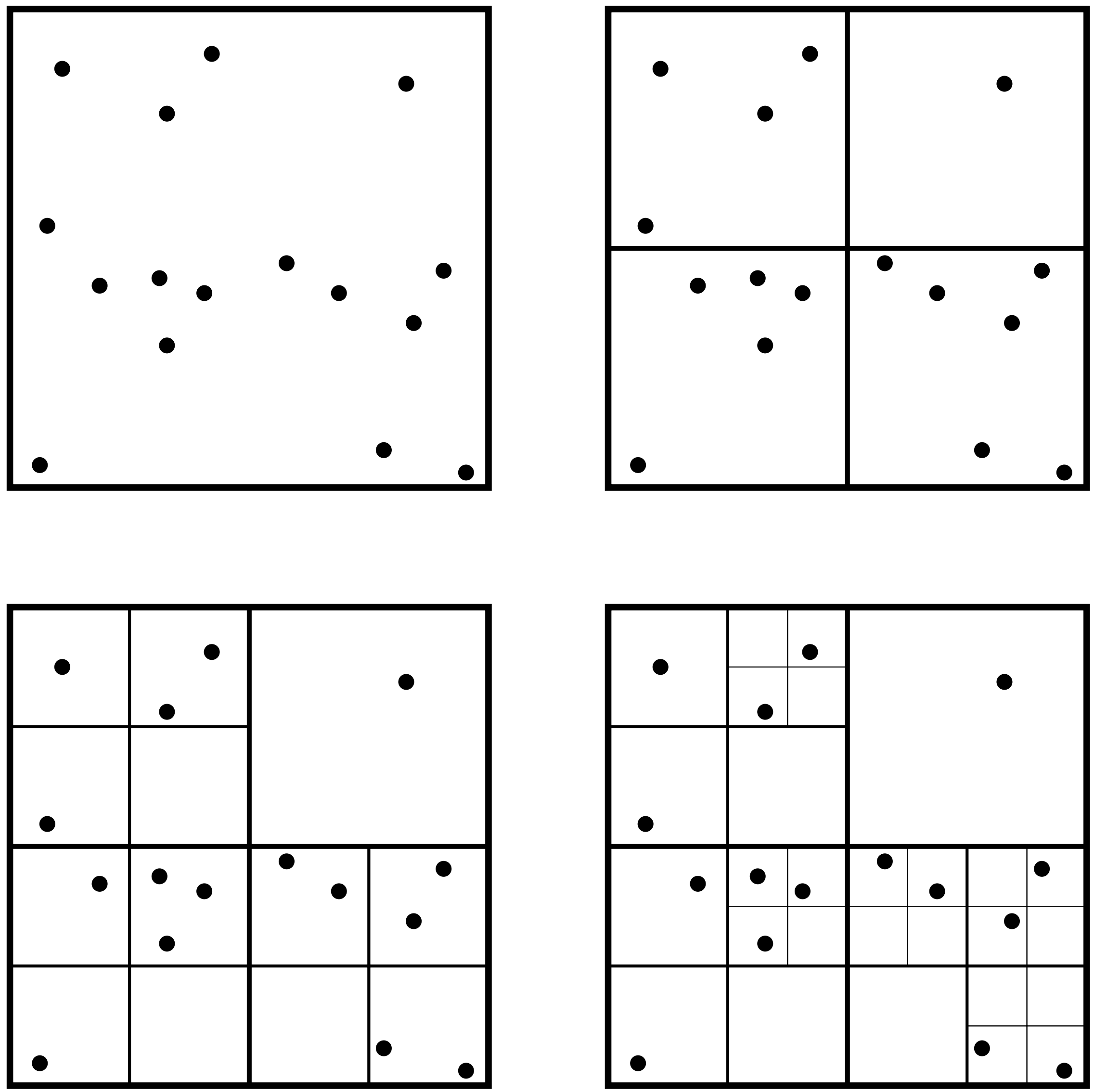
計算アルゴリズム

1. セル分割によりツリー構造を構築する
2. セル内の粒子の質量と重心を求める
3. セルからの粒子への力を計算する
   - セルの粒子からの見込み角が十分小さい場合はセルの重心からの力
   - そうでない場合はセルの子セルからの力

$$判定条件: \frac{l}{d} < \theta$$

l: セルの長さ、d: 重心までの距離、θ: 見込み角

ツリー構造



２次元の分割例

結果の正しさの確認

ただ１回計算しただけでは、計算の正しさについてほとんどなにもわからない。

系統的に計算方法を変えて２回以上計算すると、非常に有用な情報が得られる。

(伊理正夫, 藤野和建, 数値計算の常識,1985)

- 時間ステップを変えて計算
- 粒子数を変えて計算
- 積分公式を変えて計算
- 精度を変えて計算