

# 重力多体系の物理の基礎

小久保英一郎

国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

# 講義内容

## 重力多体系の物理

- 重力の特徴
- 基本方程式
- 力学平衡
- 2体緩和

# 参考文献

[Galactic Dynamics](#) (Binney & Tremaine 1987, 2008)

恒星系力学のバイブル。恒星系力学全般を扱う。

[Dynamics of Galaxies](#) (Bertin 2000)

恒星系力学全般についての教科書。円盤銀河に詳しい。

[Dynamical Evolution of Globular Clusters](#) (Spitzer 1987)

球状星団の進化について。衝突系のバイブル。

[The Gravitational Million-Body Problem](#) (Heggie & Hut 2003)

球状星団の進化について。衝突系の新バイブル。

[天体物理学の基礎 II](#) (観山正見・野本憲一・二間瀬敏史編 2008)

シリーズ現代の天文学の1冊。1.1-1.2節が重力多体系。

[N体シミュレーション学校教科書](#) (国立天文台編)

国立天文台で開催される講習会の教科書。

# 重力の特徴

## 力の性質

- 万有である
- 引力のみである
- 遠距離力である
  - 遠距離相関
  - 現象の相似性 (特徴的スケールがない)

## 役割

- 不安定性による自発的構造形成

# 力の到達距離

## 湯川ポテンシャル

$$\phi \propto -\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

$\lambda$ : 力の到達距離

## 力の到達距離

強い力	$\lambda \sim \text{fm}$	近距離力
弱い力	$\lambda \sim \text{fm}$	近距離力
電磁気力	$\lambda = \infty$	遠距離力
	$\lambda_{\text{eff}} \sim \text{原子半径/デバイ半径}$	
重力	$\lambda = \infty$	遠距離力

# 恒星系力学と天体力学

	恒星系力学	天体力学
対象	多体系	小数多体系
興味	分布関数	軌道
基本方程式	$\frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{ \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i ^3}$	$\frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = -Gm \frac{\boldsymbol{x}}{ \boldsymbol{x} ^3} + \boldsymbol{f}_p$
最近関連分野	プラズマ物理	古典力学

# 重力多体系

## 定義

重力で相互作用する多数の要素からなる系

## 系 (構成粒子)

- 惑星環 (環粒子)
- 原始衛星系円盤 (微衛星)
- 微惑星系 (微惑星)
- 散開星団 (恒星)
- 球状星団 (恒星)
- 銀河 (恒星)
- 銀河群 (銀河)
- 銀河団 (銀河)
- 宇宙 (銀河)

# 重力多体系の支配方程式

運動方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}$$

- $3N$ 元連立 2 階常微分方程式
- 計算量  $O(N^2)$



# 重力多体系の支配方程式

分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

ポワソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\rho = m \int f d\boldsymbol{v}$$

(以下、簡単のため等質量系を考える)

# 無衝突ボルツマン方程式の導出

## 1 体分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

## 位相空間

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

## 位相空間での流れの速度

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{v}, -\nabla\Phi)$$

## 粒子保存 (連続) の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial (f \dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0$$

## 無衝突ボルツマン方程式 ( $f$ のラグランジュ微分)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

# 運動方程式とボルツマン方程式の関係

- ボルツマン方程式は  $N \rightarrow \infty (m \rightarrow 0)$  にした運動方程式と等価。
- 運動方程式はラグランジュ的、ボルツマン方程式はオイラー的。
- $f = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(t))$  が運動方程式に従って変化するのとは明らか。
- 運動方程式はボルツマン方程式の特性方程式になっている。

# 運動方程式とボルツマン方程式の関係 2

$f(x, v, t) = c$  という解曲面  $S$  を考える (簡単のため 1 次元とする)

解曲面に垂直なベクトル  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} = 0$$

$$\mathbf{C} = \left( v, -\frac{d\Phi}{dx}, 1 \right) \quad (S \text{ 上にある})$$

特性方程式

$S$  上の微分  $(dx, dv, dt)$  は  $\mathbf{C}$  に平行でなくてはならない

$$\frac{dx}{v} = \frac{dv}{-d\Phi/dx} = \frac{dt}{1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}$$

# 力学平衡

## 定義

- 分布関数  $f$  が時間的に定常である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- 分布関数  $f$  によって決まるポテンシャル  $\Phi$  を固定して考えたときに、 $f$  の時間微分が 0 になる。

(熱平衡とは限らない)

# 運動の積分

## 定義

ポテンシャル  $\Phi$  のもとで、 $x$ 、 $v$  の関数  $I$  が運動の積分であるとは、軌道にそって

$$\frac{d}{dt}I(x, v) = v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0$$

が成り立つことである。

## 球対称の場合

- エネルギー  $E$
- 角運動量 3 成分  $J$
- (近点経度)

# ジーンズ定理

## 定理

任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

## 証明

必要性

$f$  自体運動の積分を定義を満たしている。

十分性

$f$  の全微分を  $I_k$  で書き下せば、それぞれの項が 0 になる。

# 力学平衡モデル

## 球対称モデル

$$f(E, J)$$

## 速度分散等方モデル

$$f(E)$$

## ポワソン方程式

$$\rho = m \int f \left( \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) d\mathbf{v}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

## 解の構成法

1.  $f$  を  $v$  で積分することにより、 $\rho(\Phi)$  を求める。
2. ポワソン方程式に  $\rho$  を代入し、 $\Phi(r)$  を求める。



# 球対称等方モデルの例

等温モデル

$$f \propto e^{-E}$$

King モデル

$$f \propto \begin{cases} e^{-E} - e^{-E_0} & \text{if } E < E_0 \\ 0 & \text{if } E > E_0 \end{cases}$$

$E_0$  : 脱出エネルギー

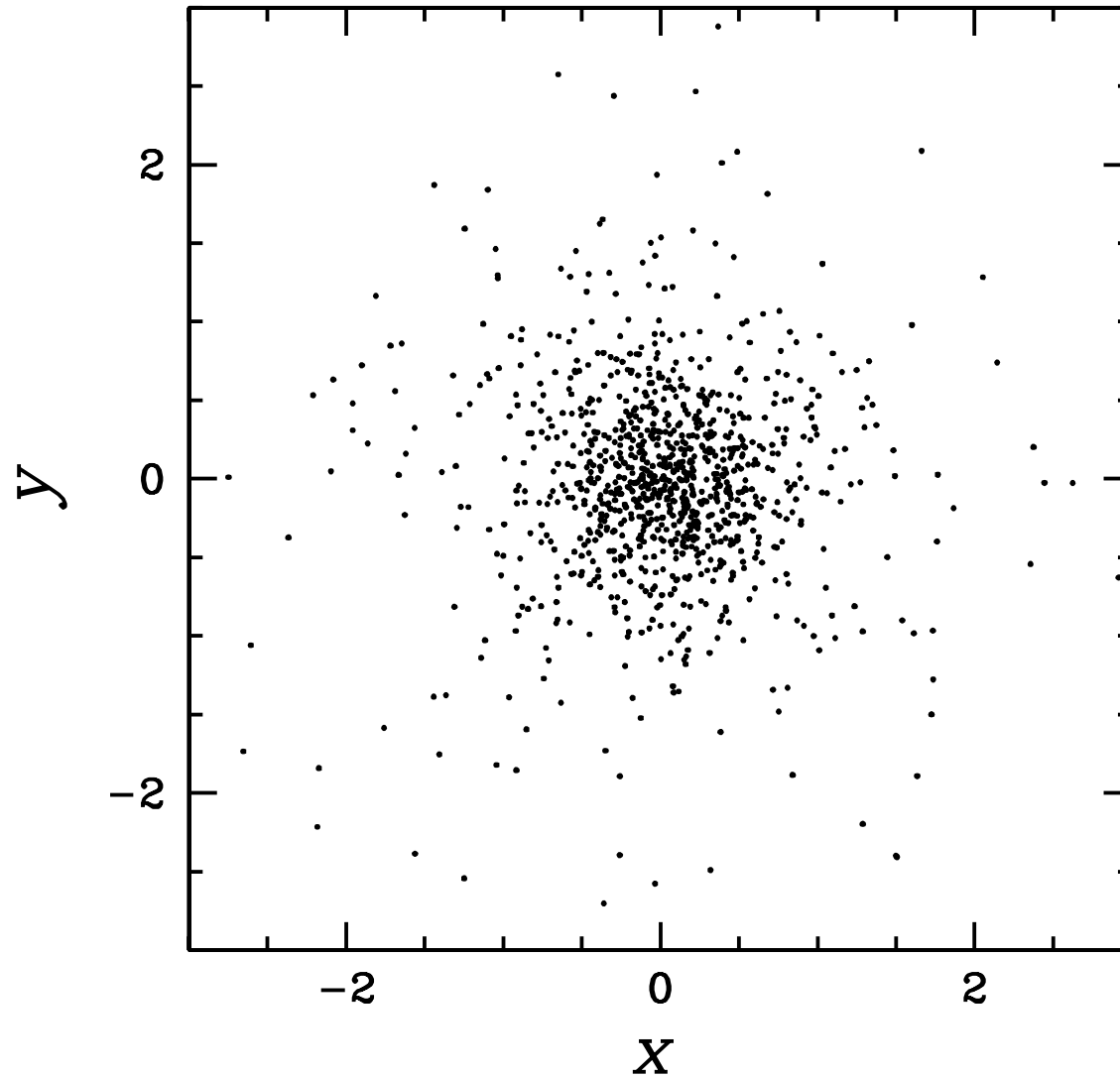
Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}$$

# Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}, \quad \rho \propto (c^2 + r^2)^{-5/2}$$

$$N = 1024$$



# ジーンズ方程式

無衝突ボルツマン方程式の速度空間のモーメント

速度の0次モーメント: 速度空間で積分

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\nu = \int f d\mathbf{v}, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d\mathbf{v}$$

速度の1次モーメント:  $v_j$  をかけて速度空間で積分

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$$

(1度は自分で導くこと)

# 流体のオイラー方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

オイラー方程式

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

# ジーンズ方程式の応用

球対称系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} \left[ 2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}) \right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr}$$

等方速度分散系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} = -\nu \frac{d\Phi}{dr} = -\nu \frac{GM(r)}{r^2}$$

質量分布

$$M(r) = -\frac{r \overline{v_r^2}}{G} \left( \frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right)$$

観測  $[(\nu(r), \overline{v_r^2}(r))] \rightarrow$  質量分布  $M(r)$

# テンソルビリアル定理

ジーンズ方程式の空間のモーメント

空間の1次モーメント:  $x_k$  をかけて空間で積分  
( $\nu \rightarrow \rho$  にしておく)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}$$

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d\mathbf{x}$$

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \sigma_{jk}^2 d\mathbf{x}$$

$$W_{jk} = -\frac{1}{2} G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}$$

(1度は自分で導くこと)

# スカラービリアル定理

定常状態のテンソルビリアル定理のトレース

$$2K + W = 0$$

$$K = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \overline{v^2} d\mathbf{x}, \quad W = -\frac{1}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x} d\mathbf{x}'$$

全エネルギー

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W$$

- 全エネルギーは、ポテンシャルエネルギーの 1/2 で、絶対値は運動エネルギーに等しい。
- 系の見かけの比熱が負

# ビリアル定理の応用

系

定常状態: 質量  $M$ 、速度分散  $\langle v^2 \rangle$

スカラービリアル定理

$$M\langle v^2 \rangle + W = 0 \rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g} \simeq 0.4 \frac{GM}{r_h}$$

$$\text{重力半径: } r_g = \frac{GM^2}{|W|}$$

$$\text{半質量半径: } r_h \simeq 0.4r_g$$

系の質量

$$M \simeq \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{0.4G}$$

観測 ( $\langle v^2 \rangle, r_h$ )  $\rightarrow$  質量  $M$



# 衝突項

ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}}$$

衝突項

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}} : 2 \text{体散乱の効果}$$

衝突系と無衝突系

考えている時間スケールで

衝突系 : 2体緩和で系が進化

無衝突系 : 2体緩和の効果が無視可能

# 2体緩和

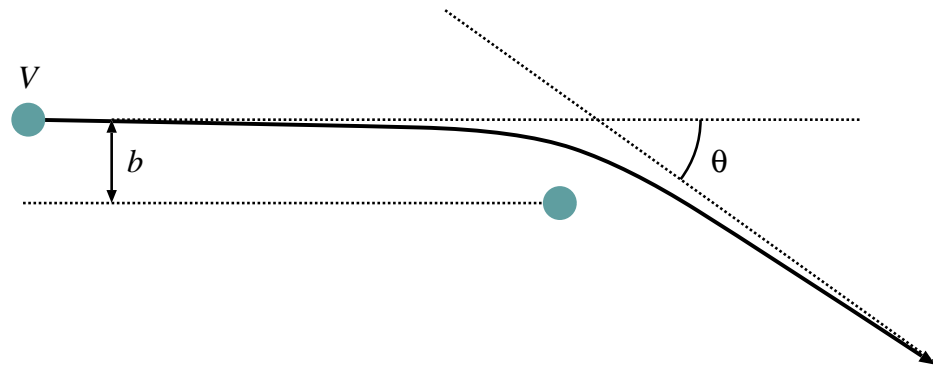
原因は何か？

- 系が有限粒子数で構成されているための効果
- 滑らかな平均ポテンシャルからの粒子によるずれによる進化

無視できない場合

- 衝突系 (球状星団、散開星団、銀河中心、微惑星系など)
- 無衝突系の全ての  $N$  体シミュレーション (数値誤差の主要因)

# 2体散乱



フィールド粒子 ( $m, v = 0, n$ ) の中を進むテスト粒子 ( $m = 0, v$ ) を考える

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = v \sin \theta = 2v \frac{b/b_{90}}{1 + (b/b_{90})^2}, \quad b_{90} = \frac{Gm}{v^2}$$

単位時間あたりの2次の平均変化

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \int_0^{b_{\max}} \Delta v_{\perp}^2 2\pi n v b db \sim \frac{G^2 n m^2 \ln \Lambda}{v}$$

$$\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{90}}$$

$b_{\max}$ : 系のサイズ,  $b_{90}$ : 90度散乱のインパクトパラメータ

# 緩和時間

## 緩和時間

$$t_{\text{relax}} \equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \sim \frac{v^3}{G^2 n m^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{\ln N} t_{\text{cross}}$$

$$t_{\text{cross}} = \frac{R}{v}$$

(ビリアル定理から  $v^2 \simeq GNm/R$ )

## 例

天体	$N$	$t_{\text{cross}}[\text{yr}]$	$t_{\text{relax}}[\text{yr}]$
銀河	$10^{11}$	$10^8$	$10^{18}$
球状星団	$10^5$	$10^5$	$10^9$

# 有限質量粒子の場合

フィールド粒子 ( $m_f, v_f, n_f$ ) の中を進むテスト粒子 ( $m_t, v_t$ ) を考える。  
相対速度を  $V = v_f - v_t$  とする。

散乱角

$$\tan \theta = \frac{2b}{(b/b_{90})^2 - 1}, \quad b_{90} = \frac{G(m_t + m_f)}{V^2}$$

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin \theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{b/b_{90}}{1 + (b/b_{90})^2}$$

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos \theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (b/b_{90})^2}$$

# 有限質量粒子の場合

簡単のため、 $v_f = 0$  とする。

(速度分布がある場合も計算できるが、今回は省略。本質はこの場合と同じ。)

単位時間あたりの平均速度変化

$$\langle \Delta v_{\perp} \rangle = 0$$

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

# 1 次の効果 (力学的摩擦)

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = - \frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

- エネルギー等分配の効果
- 質量の大きな粒子にほど強くはたらく
- 大きさはほぼ質量密度 ( $n_f m_f$ ) に比例

# 2次の効果

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

- 拡散によるランダム速度の増加
- 大きさは質量分布に依存



# 2体緩和時間

等質量粒子からなり、速度がマクスウェル分布をしている系の2体緩和時間  
局所的な見積もり

$$\begin{aligned} t_{\text{relax}} &\equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \\ &= 0.34 \frac{\sigma^3}{G^2 \rho m \ln \Lambda} \\ &= \frac{1.8 \times 10^{10}}{\ln \Lambda} \left( \frac{\sigma}{10 \text{ kms}^{-1}} \right)^3 \left( \frac{\rho}{10^3 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}} \right)^{-1} \left( \frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} [\text{year}] \end{aligned}$$

大域的な見積もり

$$\begin{aligned} t_{\text{relax}}^{\text{half}} &\simeq \frac{0.14N}{\ln(0.4N)} \sqrt{\frac{r_h^3}{GM}} \\ &= \frac{6.5 \times 10^8}{\ln(0.4\Lambda)} \left( \frac{M}{10^5 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left( \frac{r_h}{\text{pc}} \right)^{3/2} [\text{year}] \end{aligned}$$

# よくある間違い

- $t_{\text{relax}}^{\text{half}} >$  宇宙年齢なので 2 体緩和は効かない
  - $\rho$  大、もしくは  $\sigma$  小のところでは  $t_{\text{relax}}$  は短い
- ソフトニングが大きいので 2 体緩和は効かない
  - $\Lambda$  を小さくする ( $b_{\text{min}}$  を大きくする) だけ
- PM 法などでは 2 体緩和は効かない
  - $\Lambda$  を小さくする ( $b_{\text{min}}$  を大きくする) だけ

## 非現実的な 2 体緩和の回避方法

- 基本的には粒子数を増やす他にない!