数値流体力学の基礎

岡本 崇（北海道大学）

December 21, 2019

Euler 微分と Lagrange 微分

- Euler 微分: ある場所 ($\boldsymbol{r}$ 固定) での物理量の時間変化

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

- Lagrange 微分:　流れに沿った物理量の時間変化

$$\frac{D}{Dt}$$

Lagrange の方法では，ある時刻 t_0 に $\boldsymbol{r}_0$ にあった流体素片の時刻 t での位置は $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t)$ と書ける．流体素片の速度は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{r}_0}.$$

Euler の方法では $\boldsymbol{v}$ を各時刻ごと空間各点で求める: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

物理量 $F(\boldsymbol{r}, t)$ の流れに沿った時間変化を求める．

時刻 t に $\boldsymbol{r}$ にあった流体素片は時刻 $t + \Delta t$ には $\boldsymbol{r}(t + \Delta t) = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\Delta t$ に移動．

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\Delta t, t + \Delta t) - F(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} \tag{1}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t) &\simeq F(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) + \frac{\partial F}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial F}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial F}{\partial z} v_z \Delta t \\
&= F(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F \Delta t
\end{aligned}
$$

なので式 (1) に代入する．

Lagrange 微分と Euler 微分の関係

$$
\begin{aligned}
\frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F \Delta t - F(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F
\end{aligned} \tag{2}
$$

流体力学の基礎方程式

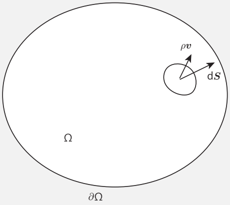
質量保存

閉曲面 $\partial\Omega$ に囲まれた領域 Ω.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho \, \mathrm{d}^3x + \int_{\partial\Omega}\rho\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho \, \mathrm{d}^3x + \int_{\Omega}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}^3x = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$



運動方程式

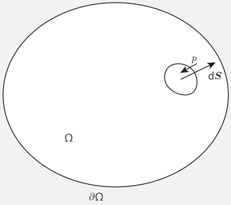
流体と共に動く領域 Ω．面に垂直に
圧力 p が働く．

$$\int_\Omega \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \mathrm{d}^3 x = -\int_{\partial\Omega} p \ \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_\Omega \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \mathrm{d}^3 x = -\int_{\Omega} \nabla p \ \mathrm{d}^3 x$$

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla p$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$



運動量保存

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}^3x + \int_{\partial\Omega} \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Omega \rho\boldsymbol{a}\ \mathrm{d}^3x \\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}^3x + \int_{\Omega} \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}^3x = \int_\Omega \rho\boldsymbol{a}\ \mathrm{d}^3x \\
&\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{a} = -\nabla p \\
&\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\cdot[(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + p\boldsymbol{I}] = 0
\end{aligned}
$$

外力による加速度 $\boldsymbol{g}$ が存在するとき

$$
\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\cdot[(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + p\boldsymbol{I}] = \rho\boldsymbol{g}
$$

エネルギー保存 (1)

運動方程式と $\boldsymbol{v}$ の内積.

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}\ (\boldsymbol{g}\ \text{は外力による加速度})$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}$$

またエンタルピー $H = U + pV$ を考えると $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + \mathrm{d}pV$. 単位質量あたりのエンタルピーは $\mathrm{d}h = \mathrm{d}p/\rho + T\mathrm{d}s$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - T\frac{Ds}{Dt}$$

断熱変化を考えると $Ds/Dt = 0$ なので $(Dp/Dt)/\rho = Dh/Dt$

エネルギー保存 (2)

結局

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}.$$

連続の式に $(v^2/2 + h)$ をかけると

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0.$$

エネルギー保存 (3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}.$$

u を単位質量あたりの内部エネルギーとすると $h=u+p/\rho$. $p=\rho h-\rho u$ なので,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}.$$

左辺第一項の大括弧内が流体の単位体積あたりのエネルギー, e, 第二項の大括弧内がエネルギー流束, $e+p$, である. 外力がないとき右辺は 0 となる.

エネルギー保存 (4)

加熱 (heating) や冷却 (cooling) によるエネルギーの出入りも考えると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}+\Gamma-\Lambda,$$

ここで，Γ, Λ はそれぞれ単位体積，単位時間あたりの加熱と冷却によるエネルギーの出入りの絶対値.

式を閉じるために状態方程式が必要．理想気体の状態方程式:

$$p=(\gamma-1)\rho u,$$

ここで γ は比熱比である.

保存形

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ (e+p) v_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_y v_z \\ (e+p) v_y \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ (e+p) v_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} + \Gamma - \Lambda \end{pmatrix}$$

保存形

- メリット
  - 全質量が完全に保存
  - 外力がなく，断熱の場合，全運動量と全エネルギーも完全に保存する
  - 衝撃波の Rankine-Hugoniot 関係を自然に満たす
- デメリット
  - 断熱でもエントロピーとエネルギーは同時に保存しない
  - 運動エネルギーが大きい場合に内部エネルギーが（桁落ちして）≤ 0 になる

オマケ: Lagrange 形式の流体の基礎方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \\
\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} \\
\frac{Du}{Dt} &= -\frac{P}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\Gamma}{\rho} - \frac{\Lambda}{\rho}
\end{aligned}
$$

- メリット
  - 全エネルギーの大部分が運動エネルギーが占める場合も $u > 0$ が保証される
  - 断熱の場合にエネルギーとエントロピーを同時に保存させられる (Springel & Hernquist 2003).
- デメリット
  - 一般的には衝撃波を解くのに人工粘性を必要とする

有限体積法の考え方 (1)

Gauss Theorem

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}^3x = \int_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}^3x$$
$$= \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= \int_{\partial\Omega} A_x \mathrm{d}S_x + A_y \mathrm{d}S_y + A_z \mathrm{d}S_z,$$

where $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}S_x, \mathrm{d}S_y, \mathrm{d}S_z) = (n_x, n_y, n_z)\mathrm{d}S$.

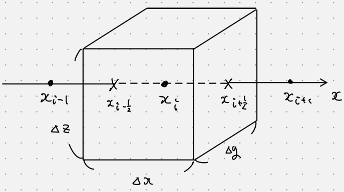
有限体積法の考え方 (2)

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{1}{V}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} u\,\mathrm{d}S_x$$

$$x = x_{i+\frac{1}{2}}\ :\ \mathrm{d}S_x = (\Delta y, \Delta z, 0, 0)$$

$$x = x_{i-\frac{1}{2}}\ :\ \mathrm{d}S_x = (-\Delta y, \Delta z, 0, 0)$$

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z$$



有限体積法の考え方 (3)

$$\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} u\ \mathrm{d}S_x = \frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left\{u_{i+\frac{1}{2}}\Delta y\Delta z + u_{i-\frac{1}{2}}(-\Delta y\Delta z)\right\}$$

$$\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

有限体積法の空間精度は $u_{i\pm\frac{1}{2}}$ をどの精度で近似するかによって決まる.

保存形と有限体積法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f}(u) = 0$$

ある体積要素 Ω_i を考える

$$\begin{aligned}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}}\right) &= \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}^3 x = \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \boldsymbol{f}\mathrm{d}^3 x \\ &= \frac{1}{V_i}\int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{V_i}\sum_j^N \boldsymbol{f}_{ij}\cdot \boldsymbol{S}_{ij}.\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{S}_{ij}$ は隣接する要素 j との間の面の面ベクトル，$\boldsymbol{f}_{ij}$ は面 S_{ij} 上の流束．要素間の面と面上の流束が定義出来れば保存量の時間発展が解ける．

F_{ij} の決め方

隣り合う全てのセル $(i, i+1)$ で $U_L = U_i$, $U_R = U_{i+1}$ としてリーマン問題を解く．その解から $i + \frac{1}{2}$ を通過する流束を決める．この流束の決め方がスキームの違いとなる．

- Godunov 法: リーマン問題を厳密に解く（iteration が必要）
- 近似リーマン解法（色々）
  - HLL 系が人気．GIZMO は HLLC, Athena++ は HLLD.
    (HLL と HLLC については Toro 1999 を)
  - 北大系の人は何故か AUSM 系が好き．
    おすすめは SLAU2 (Kitamura et al. 2016).