

# Smoothed Particle Hydrodynamics

齋藤貴之(神戸大学)

# Contents

## 1. 理論パート

### – SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

### – その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅

## 2. 実習パート

### – 実習で使うコードについての短いお話

### – テスト

- 1D shocktube
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test

## 3. 参考文献

理論パート

# PART I

# Contents

## 1. 理論パート

### – SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

### – その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅

## 2. 実習パート

### – 実習で使うコードについての短いお話

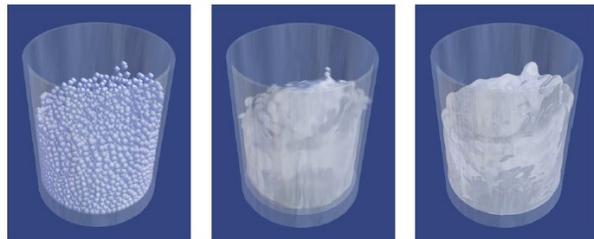
### – テスト

- 1D shocktube
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test

## 3. 参考文献

# Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法とは？

- SPH 法は圧縮性流体を扱うラグランジュ法の一つ
  - Lucy (1977), Gingold & Monaghan (1977) によって開発された
  - 流体素片の進化を解く
  - ある点における物理量は畳み込みによって評価する



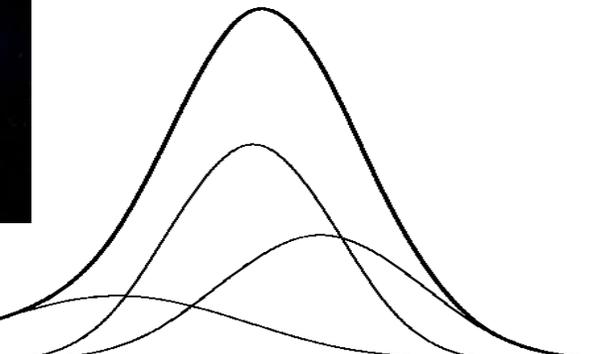
Muller+' 03 SIGGRAPH

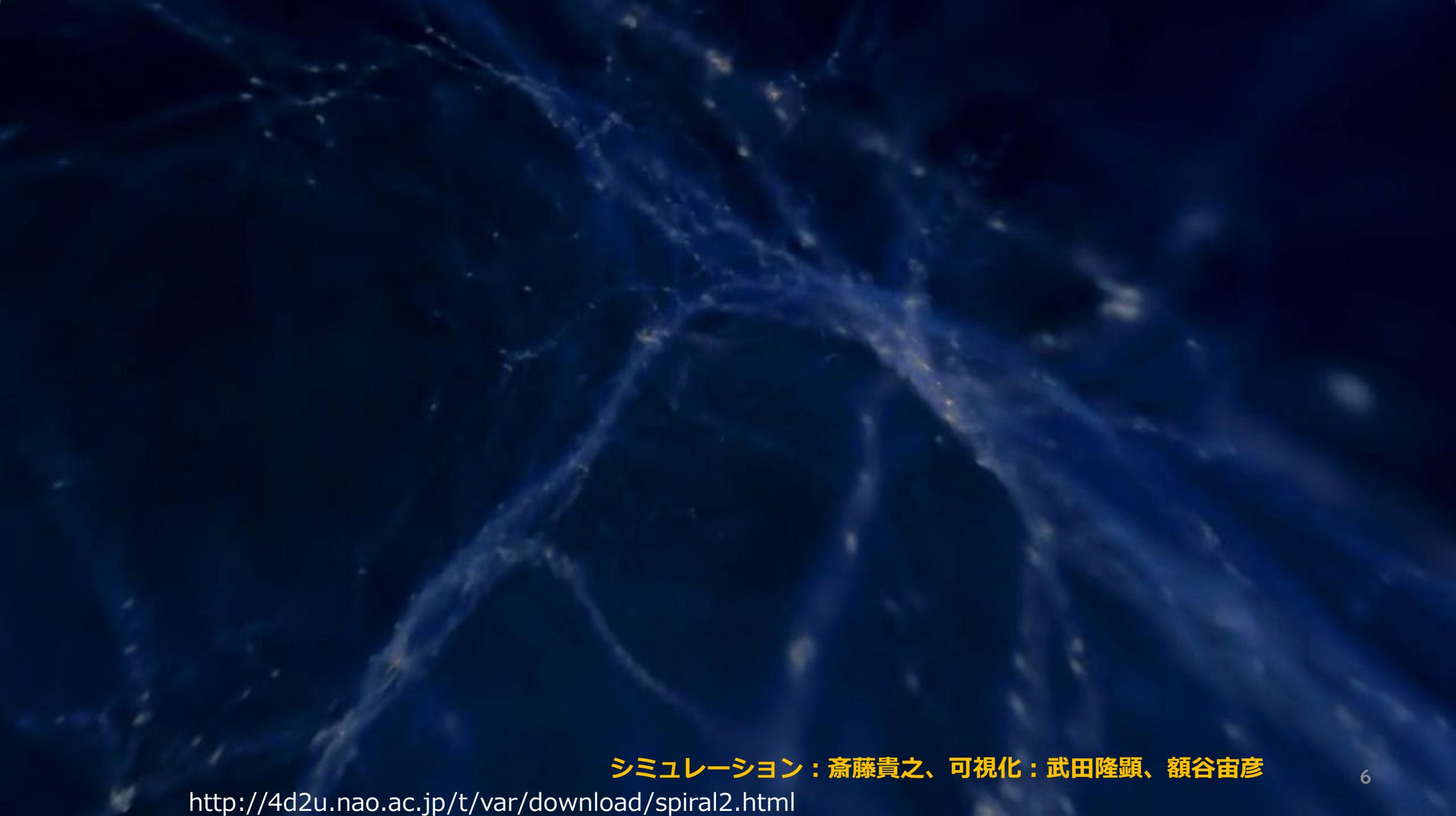
~cm scale



Saitoh et al.

~10<sup>22</sup>cm scale





シミュレーション：斎藤貴之、可視化：武田隆顕、額谷宙彦

<http://4d2u.nao.ac.jp/t/var/download/spiral2.html>



シミュレーション：馬場淳一、可視化：中山弘敬

<http://4d2u.nao.ac.jp/t/var/download/MWJourney.html>



# SPH 法の利点/欠点

- 利点
  - ガリレイ不変
  - ダイナミックレンジの大きな天文学の問題に適している
  - 高密度領域で高分解能
- 欠点
  - 低精度
  - 場の量を表現するのが苦手
  - ショックの分解能が低い

# 圧縮性流体の基礎方程式

- Continuity equation  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$
- Momentum equation  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho}$
- Energy equation  $\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$
- Equation of state  $P = (\gamma - 1)\rho u$

# カーネル近似

- ある点  $x$  にある物理量  $f$  は次のように表される

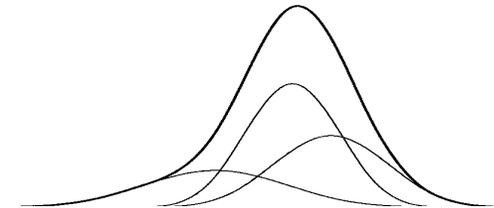
$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'$$

- カーネル近似を適用すると

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

となる

- ここで  $W$  はコンパクトサポート関数で、サイズ  $h \rightarrow 0$  でデルタ関数に戻る



# 空間微分の表現

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{r}) &= \int \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' \\ &= \left[ f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' \\ &= \int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'\end{aligned}$$

これとは異なる評価方法については後ほど

# カーネル関数

- カーネル関数が満たすべき性質
  1. 規格化されている
  2. コンパクトサポート
  3.  $h \rightarrow 0$  の極限で  $\delta$  関数に還元される
- 次のキュービックスプライン関数がよく使われる

$$W(r_{ij}, h) = \frac{\sigma_D}{h^D} \begin{cases} 1 - 3s^2/s + 3s^3/4 & (0 \leq s < 1) \\ (2 - s)^3/4 & (1 \leq s < 2) \\ 0 & \end{cases} \quad s = r_{ij}/h$$

$$\sigma_1 = 2/3, \sigma_2 = 10/7\pi, \sigma_3 = 1/\pi$$

# カーネル関数のバリエーション

- スプライン関数の他にも様々、最近よく使われるものとして Wendland シリーズ (See Dehnen & Aly 2012)

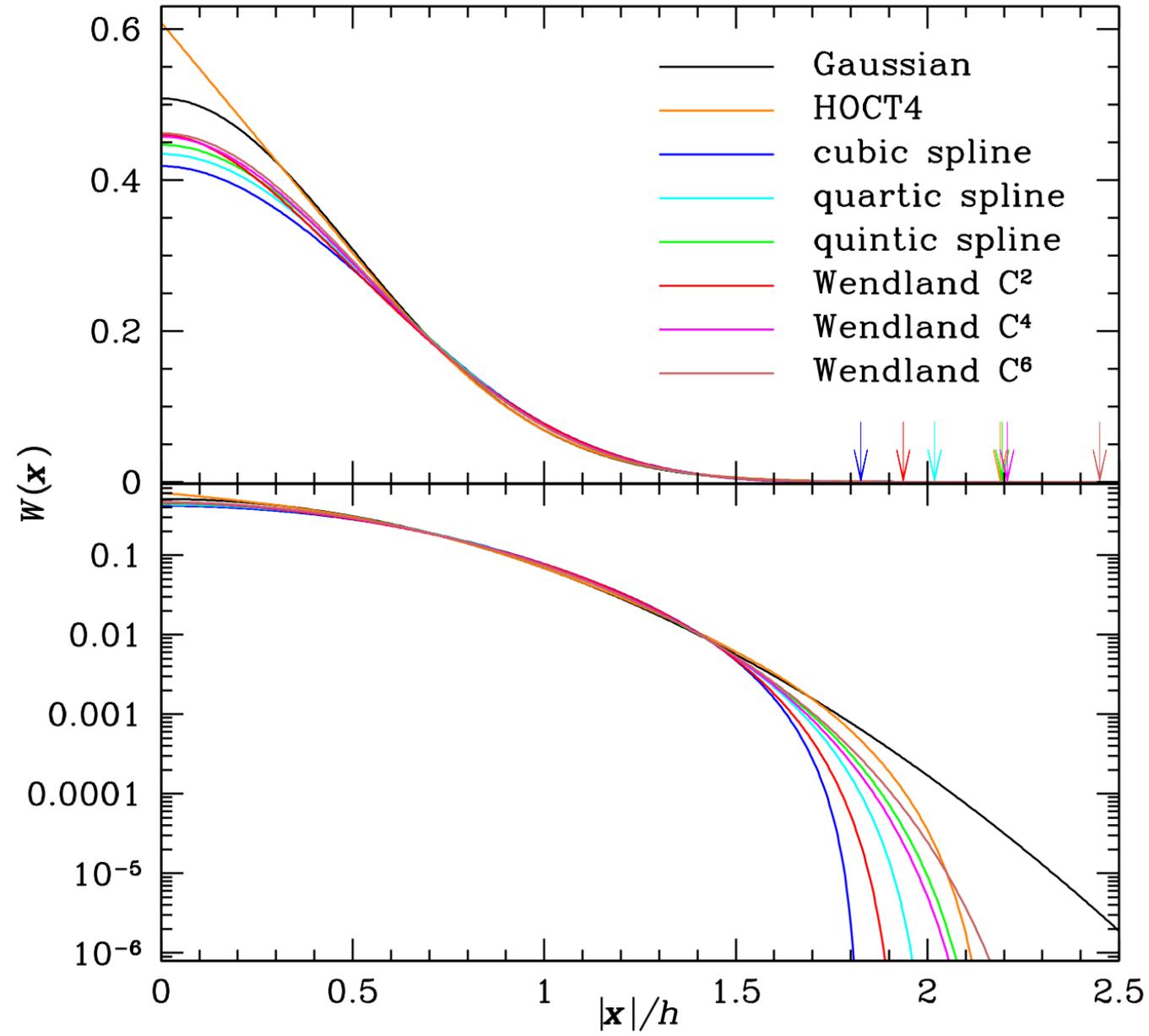
– Pairing instability が生じづらいという性質

kernel name	kernel function	C			$\sigma^2/H^2$			H/h		
		$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$
cubic spline	$b_4 = (1-r)_+^3 - 4(\frac{1}{2}-r)_+^3$	$\frac{8}{3}$	$\frac{80}{7\pi}$	$\frac{16}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{31}{392}$	$\frac{3}{40}$	1.732051	1.778002	1.825742
quartic spline	$b_5 = (1-r)_+^4 - 5(\frac{3}{5}-r)_+^4 + 10(\frac{1}{5}-r)_+^4$	$\frac{5^5}{768}$	$\frac{5^6 3}{2398\pi}$	$\frac{5^6}{512\pi}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{9759}{152600}$	$\frac{23}{375}$	1.936492	1.977173	2.018932
quintic spline	$b_6 = (1-r)_+^5 - 6(\frac{2}{3}-r)_+^5 + 15(\frac{1}{3}-r)_+^5$	$\frac{3^5}{40}$	$\frac{3^7 7}{478\pi}$	$\frac{3^7}{40\pi}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2771}{51624}$	$\frac{7}{135}$	2.121321	2.158131	2.195775
Wendland $C^2, \nu=1$	$\psi_{2,1} = (1-r)_+^3(1+3r)$	$\frac{5}{4}$	—	—	$\frac{2}{21}$	—	—	1.620185	—	—
Wendland $C^4, \nu=1$	$\psi_{3,2} = (1-r)_+^5(1+5r+8r^2)$	$\frac{3}{2}$	—	—	$\frac{1}{15}$	—	—	1.936492	—	—
Wendland $C^6, \nu=1$	$\psi_{4,3} = (1-r)_+^7(1+7r+19r^2+21r^3)$	$\frac{55}{32}$	—	—	$\frac{2}{39}$	—	—	2.207940	—	—
Wendland $C^2, \nu=2,3$	$\psi_{3,1} = (1-r)_+^4(1+4r)$	—	$\frac{7}{\pi}$	$\frac{21}{2\pi}$	—	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{15}$	—	1.897367	1.936492
Wendland $C^4, \nu=2,3$	$\psi_{4,2} = (1-r)_+^6(1+6r+\frac{35}{3}r^2)$	—	$\frac{9}{\pi}$	$\frac{495}{32\pi}$	—	$\frac{7}{132}$	$\frac{2}{39}$	—	2.171239	2.207940
Wendland $C^6, \nu=2,3$	$\psi_{5,3} = (1-r)_+^8(1+8r+25r^2+32r^3)$	—	$\frac{78}{7\pi}$	$\frac{1365}{64\pi}$	—	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{24}$	—	2.415230	2.449490

**Table 1.** Functional forms and various quantities for the B-splines (equation 11) and Wendland functions (equation 12) in  $\nu = 1-3$  spatial dimensions.  $(\cdot)_+ \equiv \max\{0, \cdot\}$ .  $C$  is the normalisation constant,  $\sigma$  the standard deviation (equation 8), and  $h = 2\sigma$  the smoothing scale. Note that the Wendland functions of given differentiability are identical for  $\nu = 2$  and  $\nu = 3$  but differ from those for  $\nu = 1$ .  $\psi_{2,1}$  (the  $C^2$  Wendland function in 1D) has already been used in the second SPH paper ever (Lucy 1977), but for 3D simulations, when it is not a Wendland function.

# カーネル関数のバリエーション

Dehnen & Aly 2012



# 空間精度

- $f$  のテイラー展開をカーネル近似を適用した式に代入する

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int \underline{f(\mathbf{r}')} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

$$f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \dots$$

- カーネル関数が偶関数であれば

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{r}) \int W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 d\mathbf{r}' + \dots$$

となり、SPH は空間二次精度

- ただしそもそも一般に SPH 近似の下で

$$1 \neq \int W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

# SPH の基礎方程式

- カーネル近似を用いた式を体積要素  $dr' = m/\rho$  を用いて離散化する

$$f_i = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h)$$

- $f$  に密度  $\rho$  を入れると

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

---

標準 SPH ではこの密度を用いてすべての物理量を導出する

# 運動方程式(1)

- ラグランジアン:

$$L = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \sum_j m_j u_j$$

$$= \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1}$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N, h_1, h_2, \dots, h_N)$$

- 拘束条件:

$$\phi_i = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_i}{m_i} (2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$$

$$P = (\gamma - 1)\rho u$$

$$P = A(s)\rho^\gamma$$


$$u = \frac{A(s)}{(\gamma - 1)} \rho^{\gamma-1}$$

## 運動方程式(2)

- オイラー=ラグランジュ方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i}$$

---

$$L = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1}$$

$$\phi_i = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_i}{m_i} (2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$$

# 運動方程式(3)

- 後ろ半分 ( $h_1, h_2, \dots, h_N$ ) について解くと、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i} \\
 - \frac{\partial L}{\partial h_i} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial h_i} \\
 = - \frac{\partial}{\partial h_i} \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial h_i} \left( \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_j}{m_j} (2h_j)^3 - N_{\text{ngb}} \right) \\
 = m_i A_i \rho_i^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &= \lambda_i \left( 32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} + \frac{32}{3} h_i^3 \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \frac{1}{m_i} \right) \\
 = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &
 \end{aligned}$$

# 運動方程式(4)

- 先ほどの二つの式から

$$\begin{aligned} m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &= \lambda_i \left( 32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} + \frac{32}{3} h_i^3 \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \frac{1}{m_i} \right) \\ &= \lambda_i 32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right) \end{aligned}$$

- $\lambda$  について解くと、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i}}{32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)} \\ &= \frac{m_i P_i}{32\pi h_i^2 \rho_i^3} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \\ &= \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{3m_i}{32\pi h_i^3} \phi_i \end{aligned} \quad \phi_i = \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

# 運動方程式(5)

- 前半半分  $(r_1, r_2, \dots, r_N)$  について解く

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i} \\
 &= -\sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-2} \nabla_i \rho_j + \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{3m_j}{32\pi h_j^3} \phi_j \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{4\pi}{3} (2h_j)^3 \frac{\rho_j}{m_j} - N_{\text{ngb}} \right) \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i \rho_j + \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{3m_j}{32\pi h_j^3} \phi_j \left( \frac{32\pi}{3} \frac{h_j^3}{m_j} \nabla_i \rho_j \right) \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} (1 - \phi_j) \nabla_i \rho_j \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \left( 1 + \frac{h_j}{3\rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial h_j} \right)^{-1} \nabla_i \rho_j = -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i \rho_j
 \end{aligned}$$

# 運動方程式(6)

- $$\begin{aligned}\nabla_i \rho_j &= \nabla_i \sum_k m_k W_{jk}(h_j) \\ &= m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ik}(h_i)\end{aligned}$$

- お疲れ様でした

$$\begin{aligned}m_i \frac{dv_i}{dt} &= - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \left( m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ik}(h_i) \right) \\ &= - \sum_j m_i m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)\end{aligned}$$

---

# エネルギー方程式(1)

- 独立な熱力学変数として内部エネルギーを用いるとエネルギー方程式が必要になる
- エネルギー方程式は、熱力学第一法則を通じて導出できる

$$dU = -PdV \longrightarrow \frac{dU_i}{dt} = -P_i \frac{dV_i}{dt} \\ = -m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt}$$

# エネルギー方程式(2)

- 密度の時間微分:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j m_j W_{ij}(h_i)$$

$$= \sum_j m_j \frac{dr_{ij}}{dt} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial r_{ij}} + \sum_j m_j \frac{dh_i}{dt} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i}$$

$$= \sum_j m_j v_{ij} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial r_{ij}} + \frac{dh_i}{d\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i}$$

- 整理すると

$$\left( 1 - \frac{dh_i}{d\rho_i} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} = \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt}$$
$$= \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j v_{ij} \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

# エネルギー方程式(3)

- もうちょっと整理する

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_i}{dt} &= \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i}\right)^{-1} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i) \\ &= f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)\end{aligned}$$

- 最終的に次の式を得る

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

---

# SPH 方程式のまとめ

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_i = \left( 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

# Other SPH eqs. (I)

- 次の拘束条件の場合:  $\phi_i = \frac{4\pi}{3}n_i(2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} f_{ij} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_{ji} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j f_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_{ij} = 1 - \frac{h_i}{3m_j n_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3n_i} \frac{\partial n_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

# Other SPH eqs. (2)

- 伝統的な(ヒューリスティックな)導出の場合

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

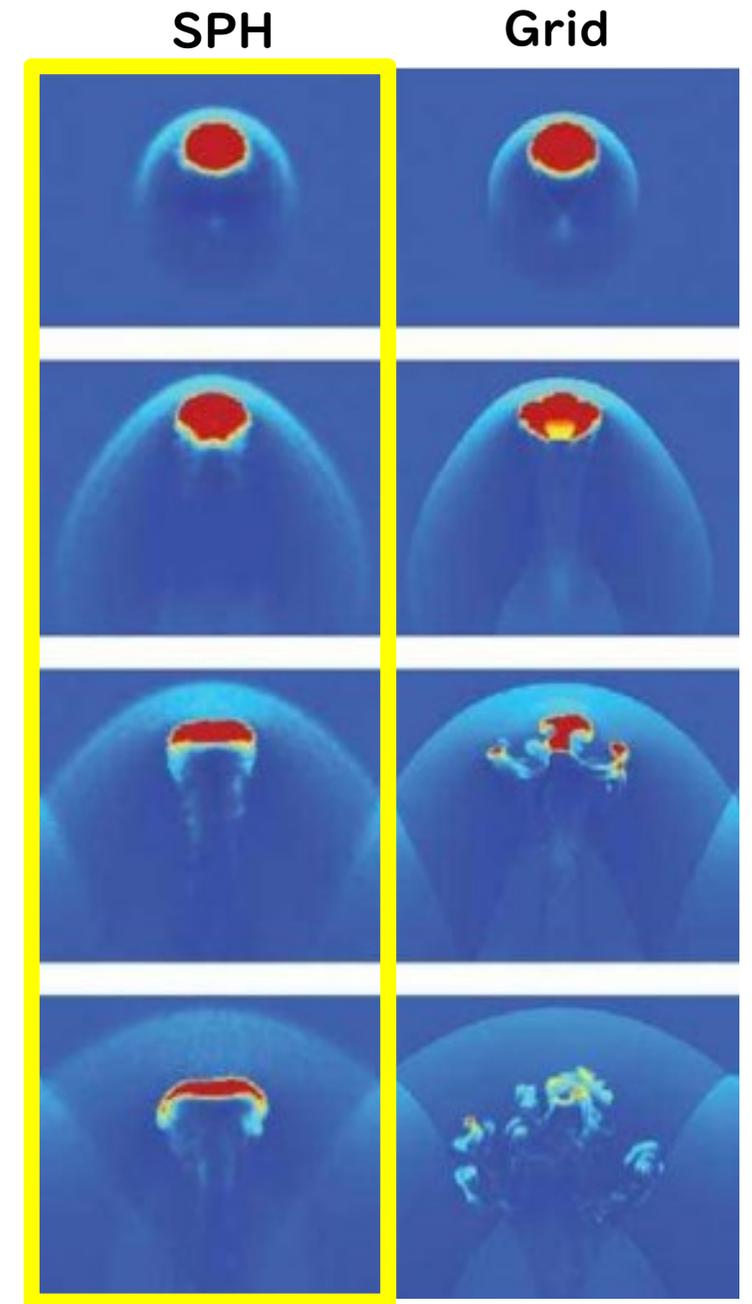
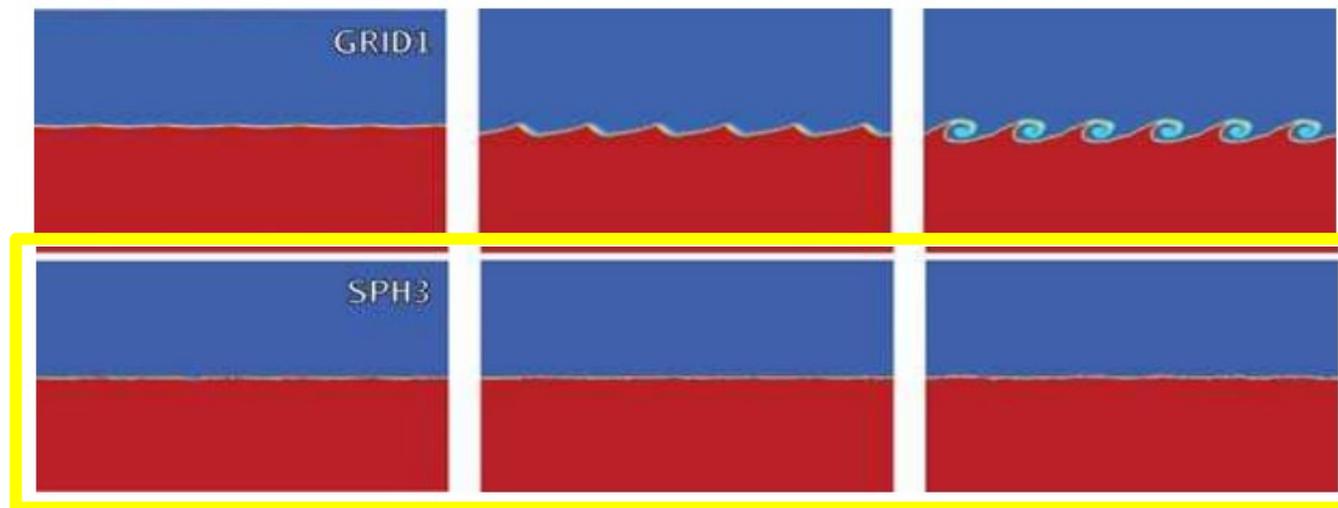
$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\tilde{W}_{ij} = \frac{1}{2} \{W_{ij}(h_i) + W_{ij}(h_j)\}$$

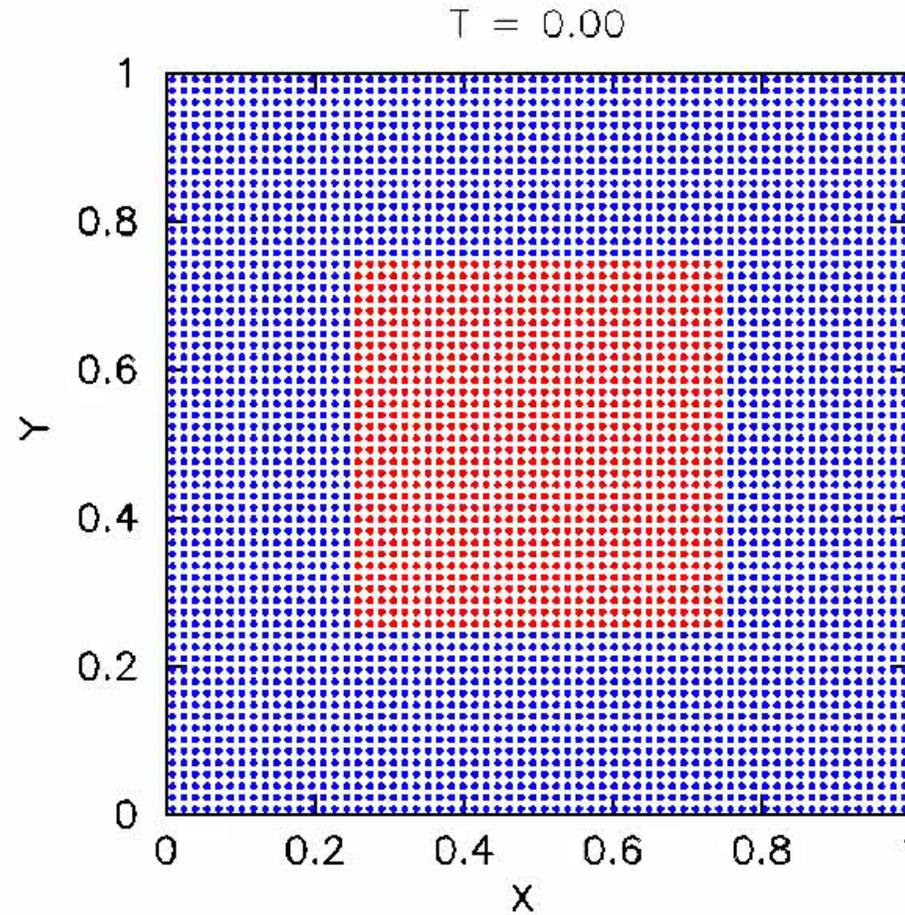
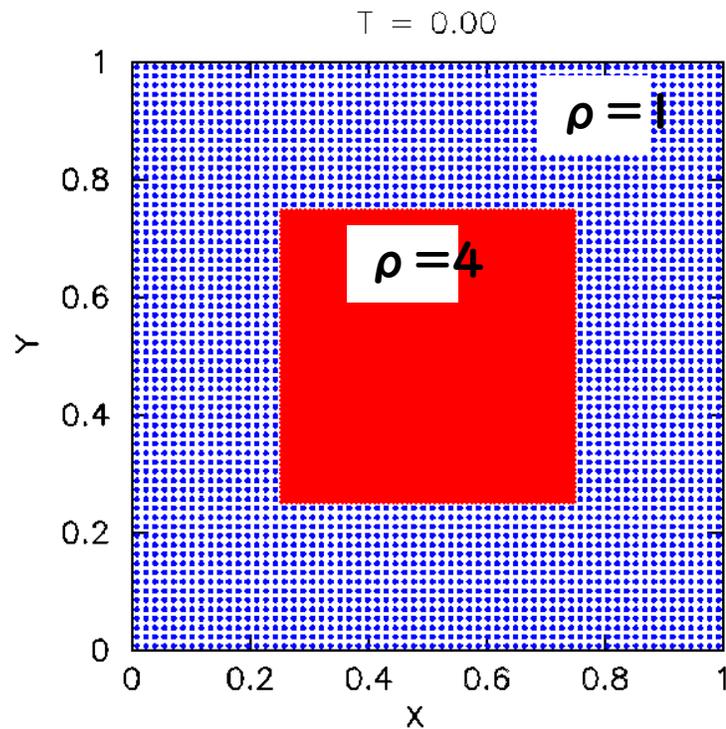
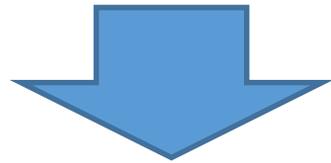
# Problem in SPH

- SPH 法は接触不連続面を扱えない、その結果流体不安定性の成長を抑制してしまう  
(Agertz+2007; Ritchie & Thomas 2001, Okamoto+2003)
  - 従来の SPH は密度の微分可能性を仮定しているから



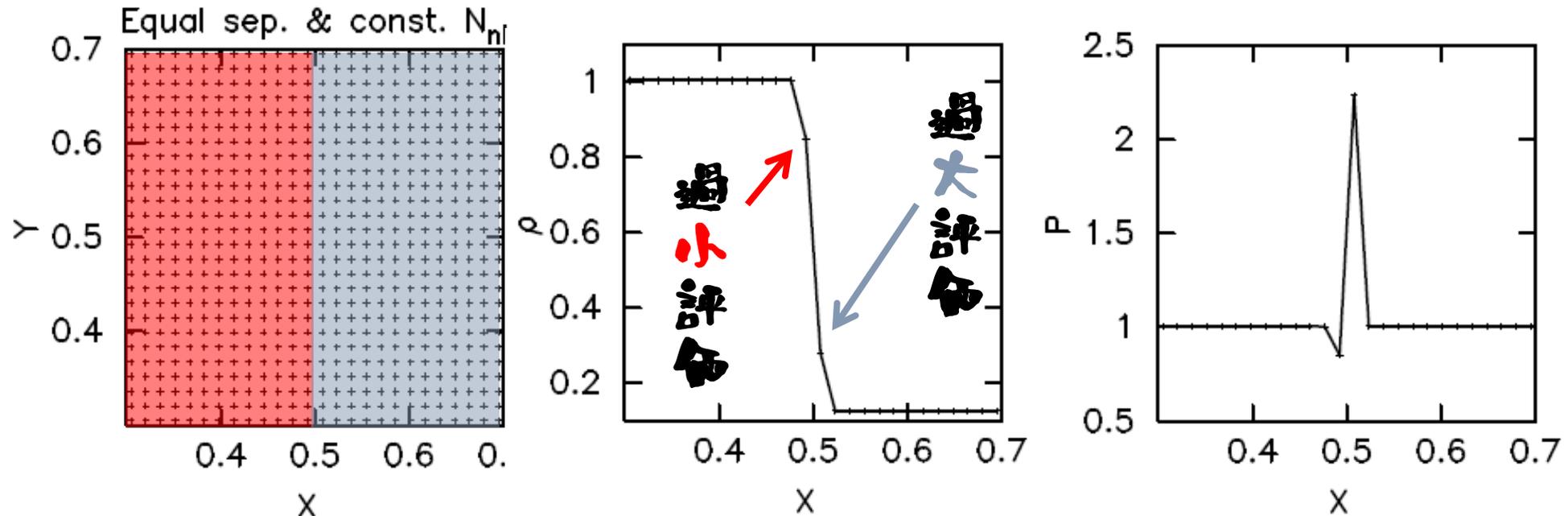
# Hydrostatic Equilibrium test

Initially hydrostatic equilibrium



# 接触不連続面における圧力の評価

密度8:1の接触不連続面、圧力=1(=一定)



- 接触不連続面の密度gap→圧力エラー→斥力となる
- 密度から他の物理量を求めるのに無理がある
  - 離散化からやり直す必要がある

# Density Independent SPH

- 次の体積要素を定式化に用いる:

$$\Delta V_j = \frac{(\gamma - 1)m_j u_j}{P_j} = \frac{U_j}{q_j} \quad \begin{array}{l} U_j = m_j u_j \\ q_j = \rho_j u_j \end{array}$$

- 物理量  $f$  は次のようになる

$$f_i = \sum_j f_j \frac{(\gamma - 1)m_j u_j}{P_j} W(r_{ij}, h_i)$$

- $f$  に  $q$  を入れる:

$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h_i)$$

理想気体では  $q$  は圧力に比例する ( $P=(\gamma-1)q$ )

# 運動方程式とエネルギー方程式

- 運動方程式

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left( \frac{f_i^{\text{grad}}}{q_i} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{f_j^{\text{grad}}}{q_j} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

- エネルギー方程式

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} f_i^{\text{grad}} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$P = (\gamma - 1) \rho u$$

$$f_i^{\text{grad}} = \left( 1 + \frac{h_i}{3q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

# Other DISPH eqs. (I)

- 次の拘束条件の場合:  $\phi_i = \frac{4\pi}{3}n_i(2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$

$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left( \frac{f_{ij}}{q_i} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{f_{ji}}{q_j} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} f_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_{ij} = 1 - \frac{h_i}{3U_j n_i} \frac{\partial q_i}{\partial h_i} \left( 1 + \frac{h_i}{3n_i} \frac{\partial n_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

# Other DISPH eqs. (2)

- 伝統的な導出の場合

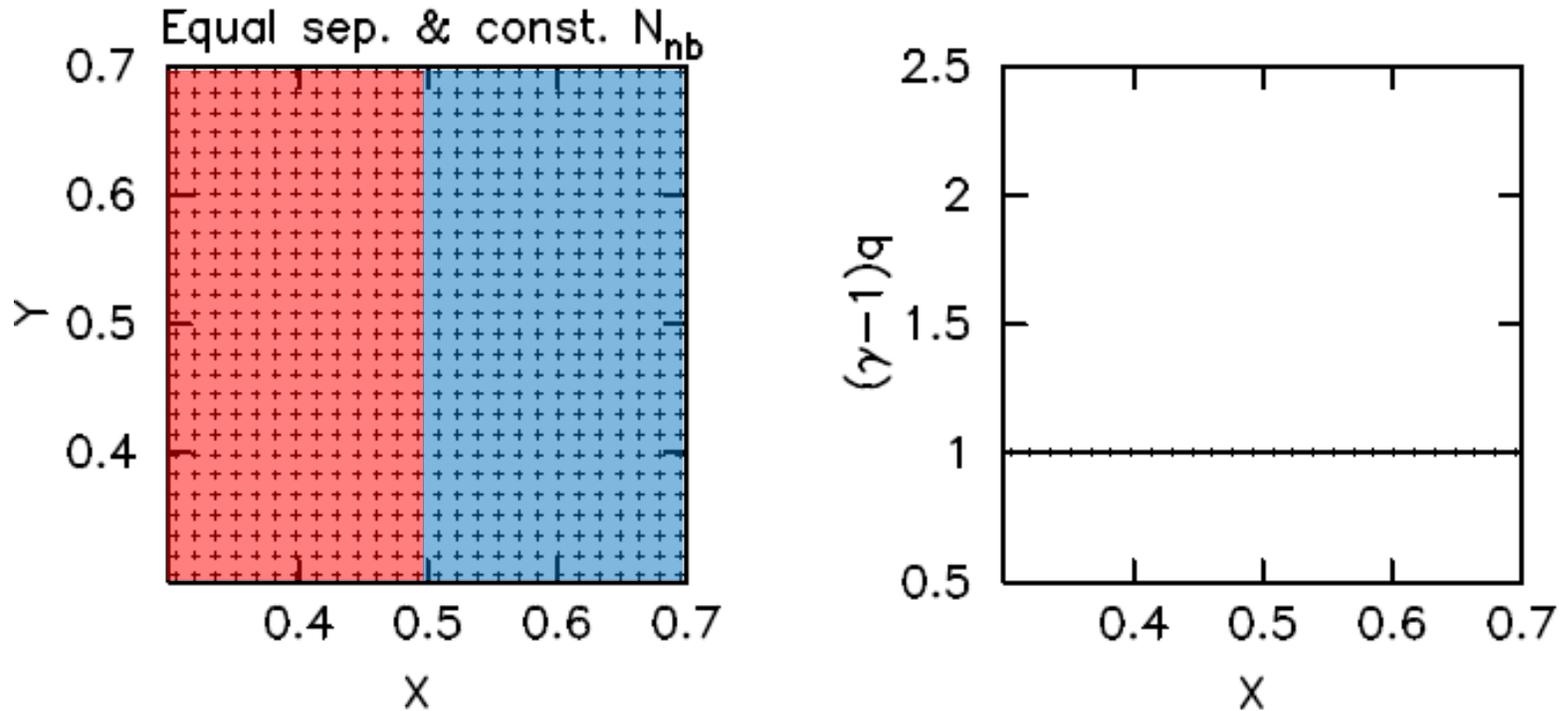
$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left( \frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_i} \right) \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

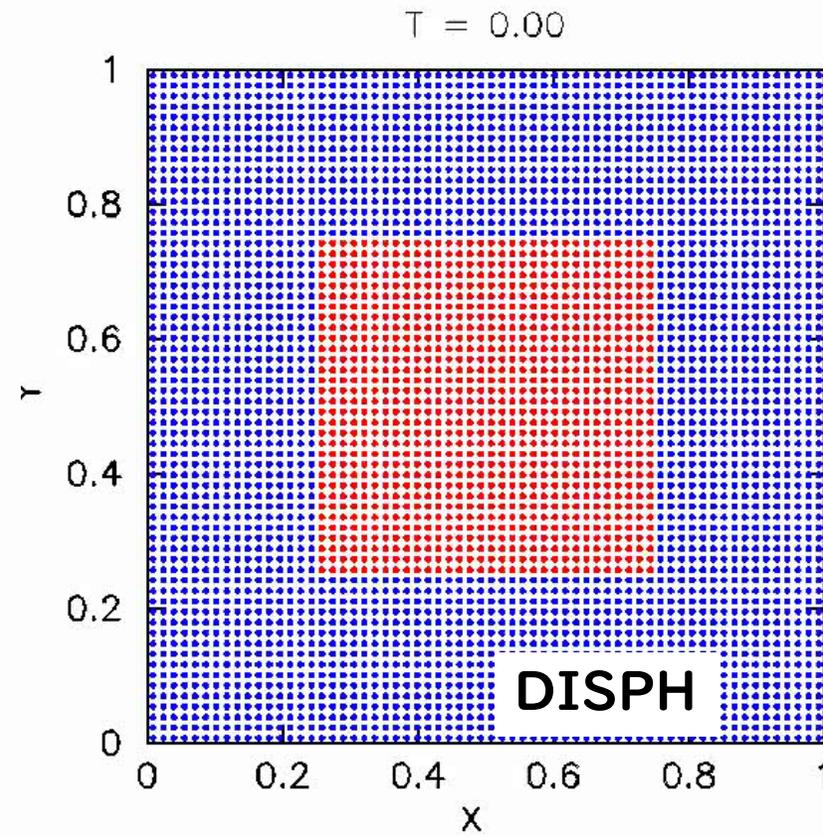
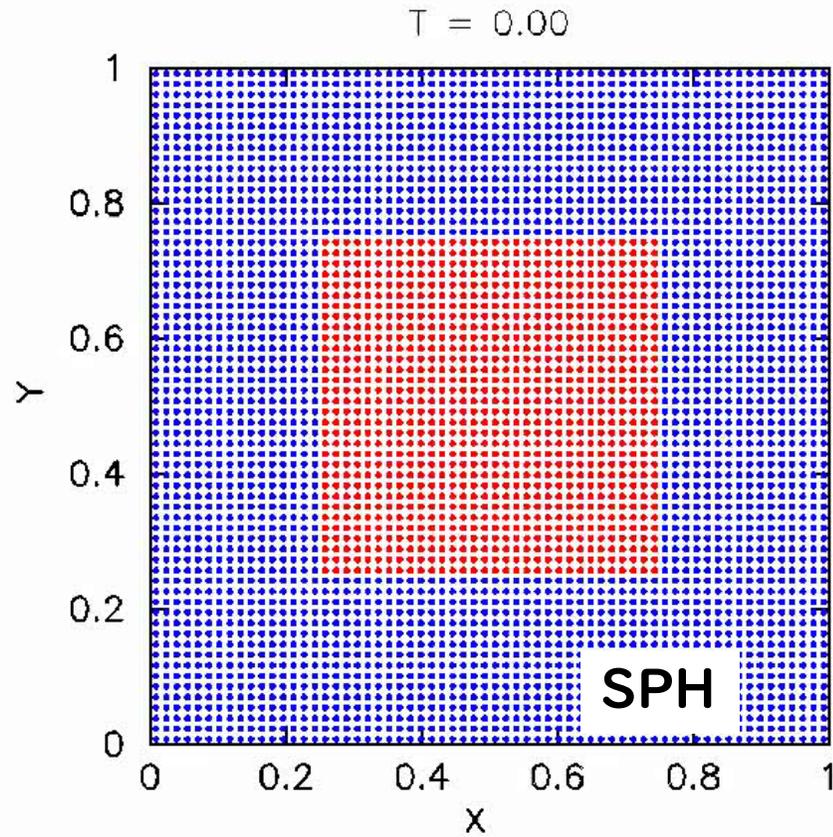
$$\tilde{W}_{ij} = \frac{1}{2} \{W_{ij}(h_i) + W_{ij}(h_j)\}$$

# Pressure at Contact Discon. with DISPH

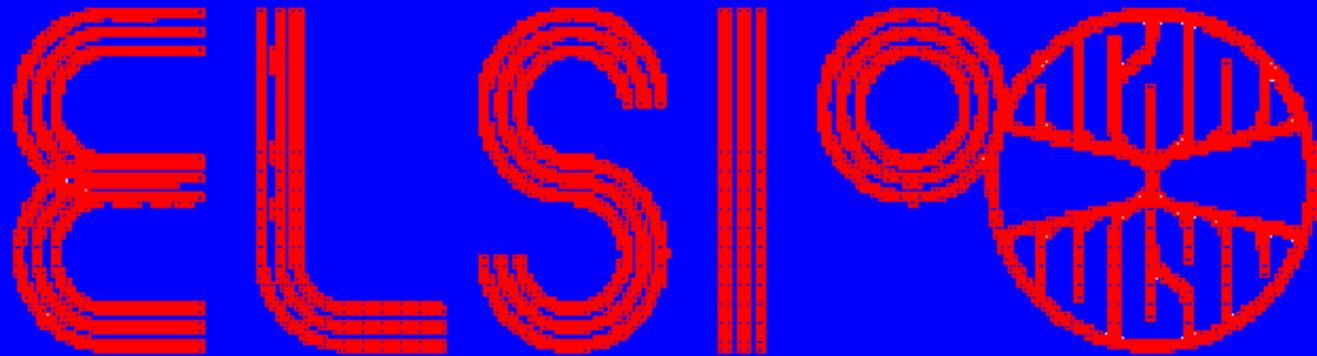


- DISPH では圧力をスムーズな物理量として用いる
- 接触不連続面での圧力はもちろんスムーズになる

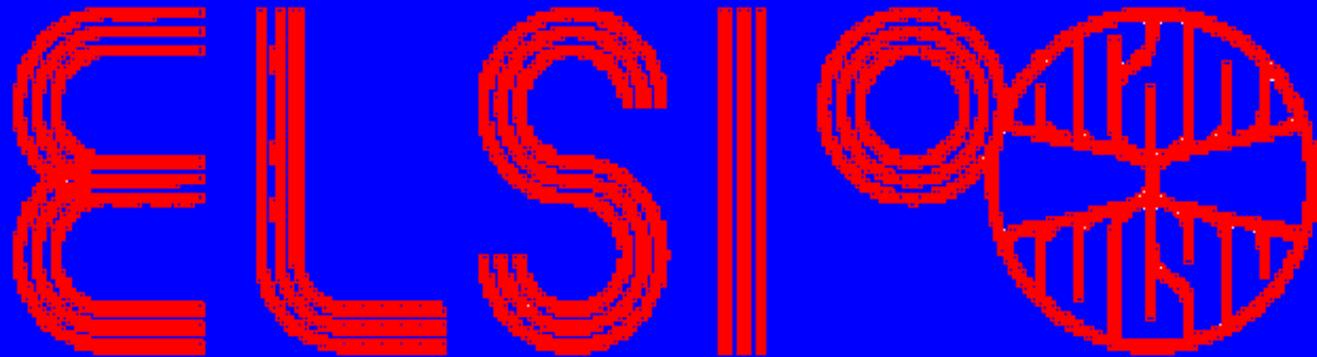
# Hydrostatic Equilibrium test



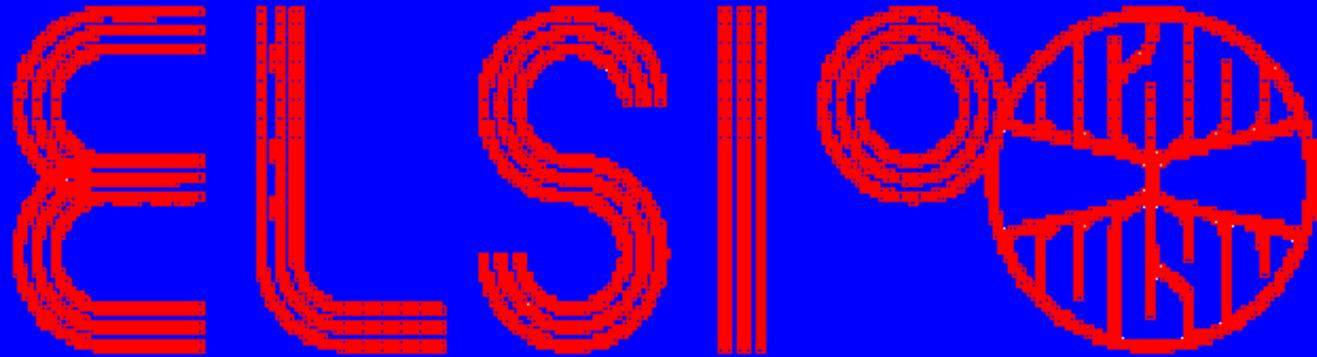
Initial condition



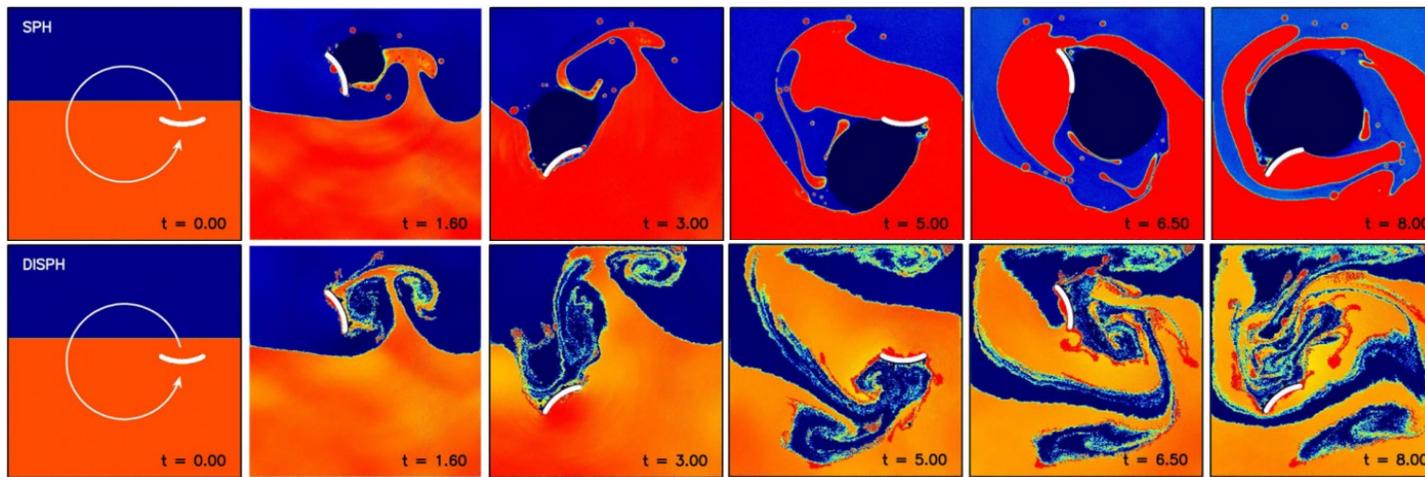
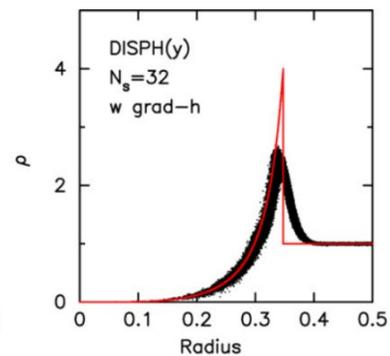
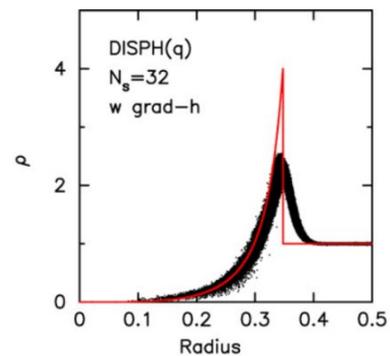
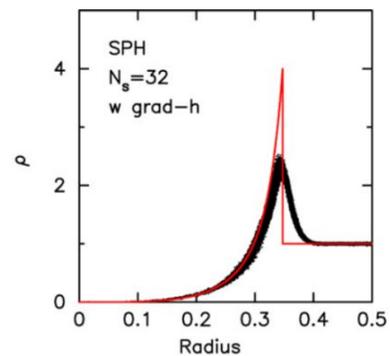
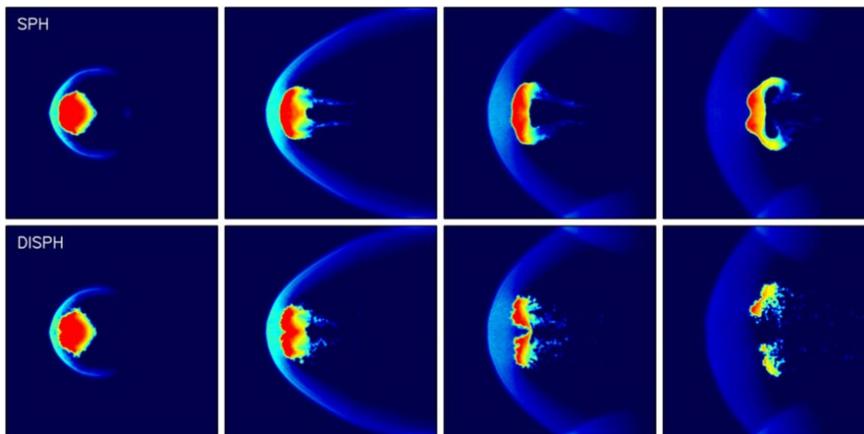
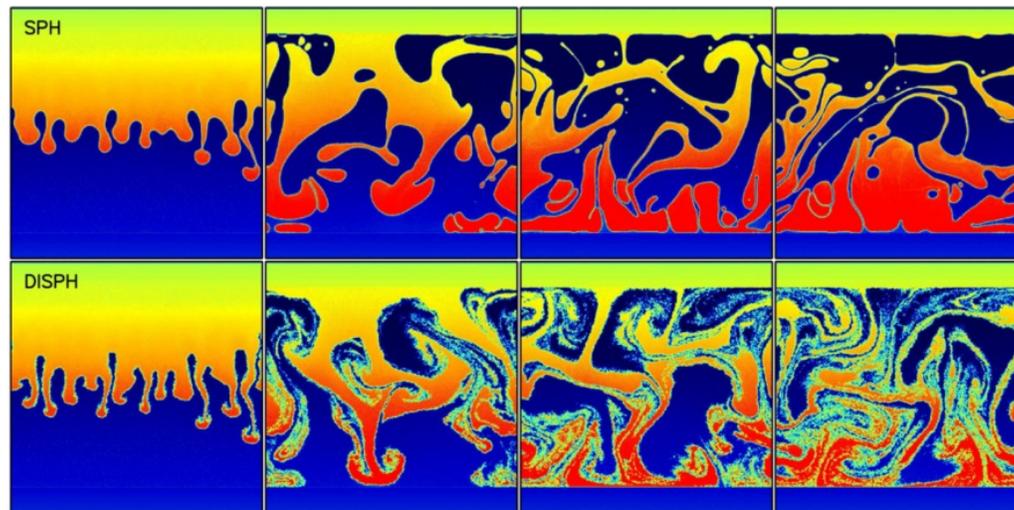
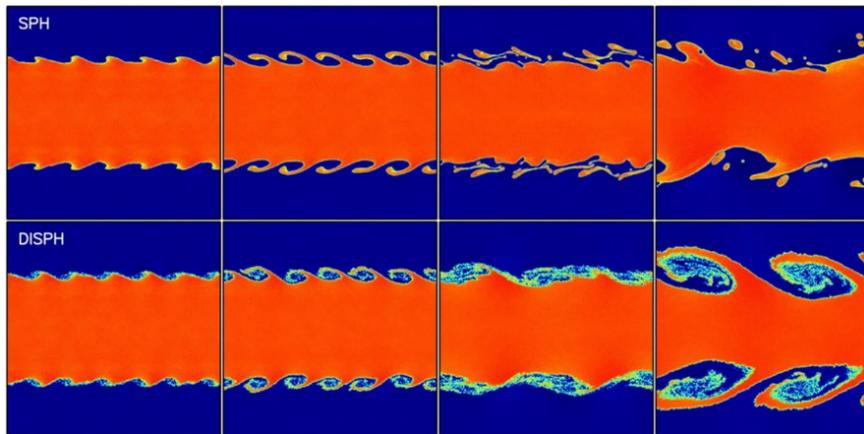
Our SPH



Standard SPH



# Tests



# Generalized DISPH

- $q(=P/(\gamma-1))$  の代わりに  $y=P^\zeta$  をもちいる
    - $\zeta=1$  のときオリジナルのDISPHに戻る
    - See Saitoh & Makino (2013)
- 

## DISPH for Non-ideal EOS

- 非理想状態方程式は地球惑星科学的応用を刷る上で重要になる (マントル、鉄コア etc.)
  - $P=P(\rho, u)$
- $P$  そのものを基本量とする
- See Hosono, Saitoh and Makino (2013)

# Contents

## 1. 理論パート

### – SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

### – その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅

## 2. 実習パート

### – 実習で使うコードについての短いお話

### – テスト

- 1D shocktube
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test

## 3. 参考文献

# 人工粘性(1)

- ショックを捉えるために人工粘性を導入する
- 最近よく使われるタイプ(Monaghan 1997)

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} \frac{v_{ij}^{\text{sig}}}{0.5(\rho_i + \rho_j)} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

※別なアプローチ

Godonov SPH (Inutuka 2002)

## 人工粘性(2)

- 運動方程式、エネルギー方程式には次の形で寄与する

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_j m_i m_j \Pi_{ij} \nabla \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_i m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \tilde{W}_{ij}$$

# 人工粘性(3)

- von Neumann-Richtmyer-Landshoff 型人工粘性  
(Monaghan & Gingold 1983; Hernquist & Katz 1989)

$$p_i = \begin{cases} -\alpha \rho_i c_i h_i (\nabla \cdot \mathbf{v})_i + \beta \rho_i h_i^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})_i^2 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

- 人工粘性項起源の圧力項を流体圧力に加える
- 一般に対称性を満たさないなので、うまくないことあり(運動方程式エネルギー方程式の形による)

# 人工粘性スイッチ

- ショックのないところで人工粘性がきかないようにしたいので粘性係数を変化させる (Morris & Monaghan 1997; Rosswog 2000; Cullen & Dehnen 2010)
- 割と簡単な Rosswog にしたかうと

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = (\alpha_{\max} - \alpha_i) \max(-\nabla \cdot \mathbf{v}_i, 0) - \frac{\alpha_i - \alpha_{\min}}{\tau_i}$$

$$\tau_i = \frac{h_i}{c_i}$$

# Balsara Limiter

- シアーで人工粘性がきかないようにしたい → Balsara Limiter (Balsara 1995):

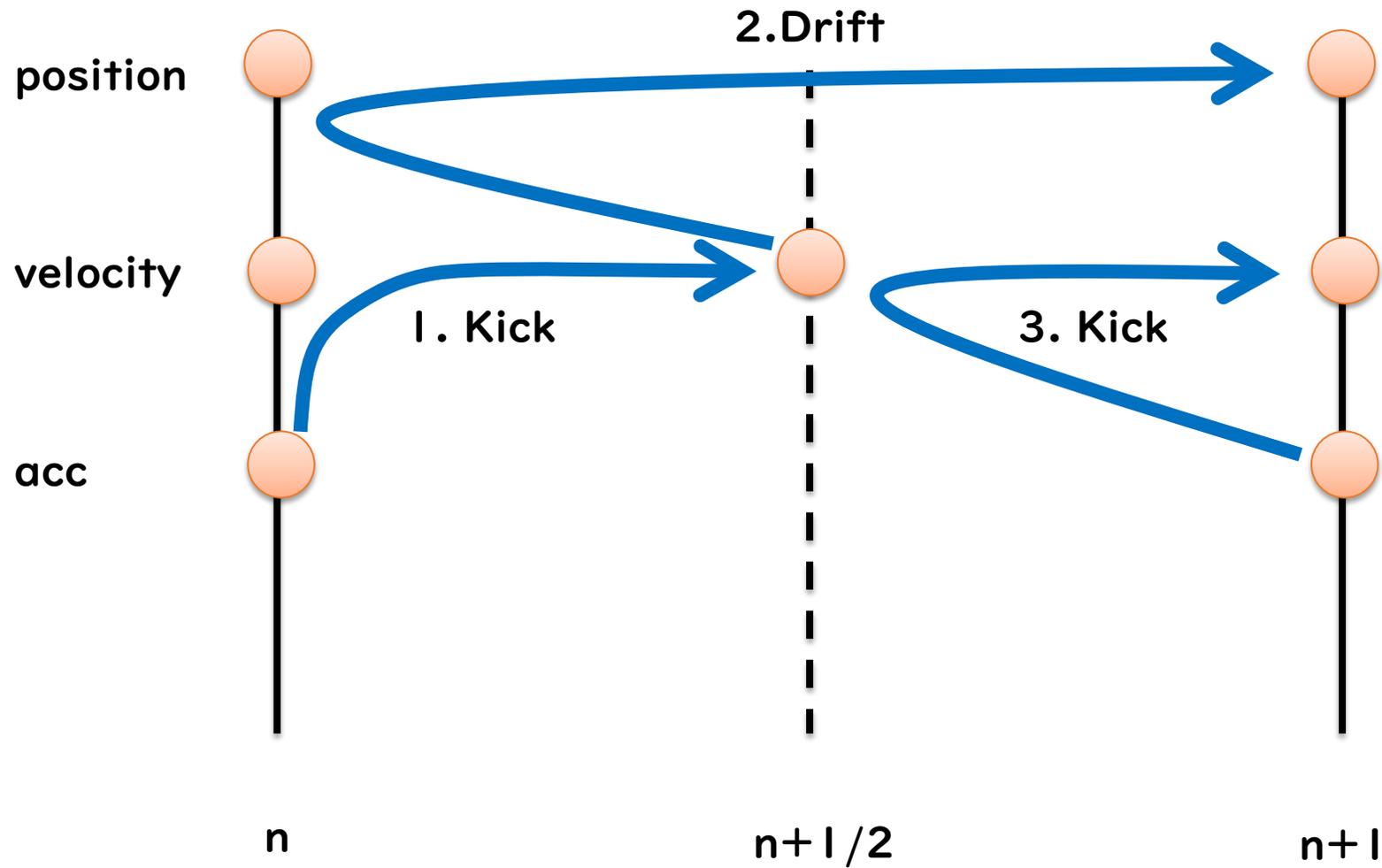
$$F_i^{\text{Balsara}} = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{v}|}{|\nabla \cdot \mathbf{v}| + |\nabla \times \mathbf{v}| + \epsilon_b c s_i / h_i}$$

ここで  $c s_i$  は音速、また  $\epsilon_b = 1.e-4$ .

- $\Pi_{ij} \rightarrow \Pi_{ij}^{\text{Balsara}}$ :

$$\Pi_{ij}^{\text{Balsara}} = 0.5(F_i^{\text{Balsara}} + F_j^{\text{Balsara}})\Pi_{ij}$$

# 時間積分:Leapfrog



# 時間積分:Leapfrog

position

$$v^{n+1/2} = v^n + \frac{1}{2}a^n dt$$

velocity

$$x^{n+1} = x^n + v^{n+1/2} dt$$

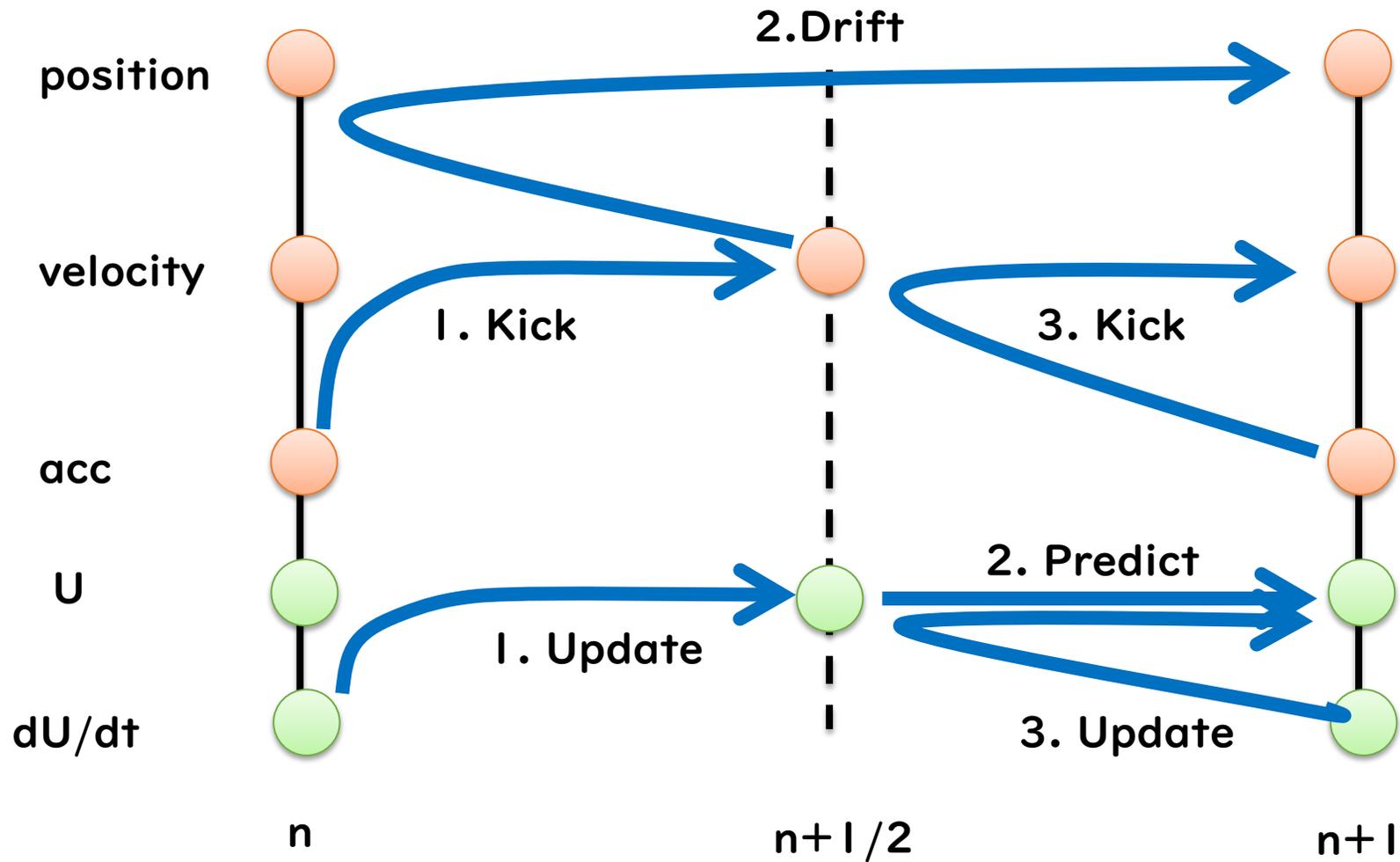
Acc

$$v^{n+1} = v^{n+1/2} + \frac{1}{2}a^{n+1} dt$$



$$x^{n+1} = x^n + v^n dt + \frac{1}{2}a^n dt^2$$

# 内部エネルギーの時間積分:ホイン法



# 内部エネルギーの時間積分:ホイン法

posit

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{1}{2} \left( \frac{dU}{dt} \right)^n dt$$

veloc

$$U_p^{n+1} = U^n + \left( \frac{dU}{dt} \right)^n dt$$

Acc

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dU}{dt} \right)_p^{n+1} dt$$

U



du/dt

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dU}{dt} \right)^n + \left( \frac{dU}{dt} \right)_p^{n+1} \right\} dt$$

# Time step

- Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件

$$dt_i^{\text{CFL}} = C^{\text{CFL}} \frac{2h_i}{\max_j v_{ij}^{\text{sig}}}$$

ここで  $C^{\text{CFL}} \sim 0.3$ 、また

$$v_{ij}^{\text{sig}} = cs_i + cs_j - \beta^{\text{sig}} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}}$$

そして  $\beta^{\text{sig}} \sim 3$

- 加速度条件

$$dt_i^{\text{acc}} = C^{\text{acc}} \sqrt{\frac{h_i}{a_i}} \quad C^{\text{acc}} \sim 0.3$$

- 併せて

$$dt = \min_i dt_i \quad dt_i = \min(dt_i^{\text{CFL}}, dt_i^{\text{acc}})$$

# Kernel サイズ決定方法

- 主に二つ

- ネイバー数(相互作用する粒子数)一定

- 密度から推定:  $h = \eta \left( \frac{m}{\rho} \right)^{1/D}$

- 近傍粒子探査にはツリー法 (Barnes & Hut 1986) がよく用いられる

実習パート

# PART 2

# Contents

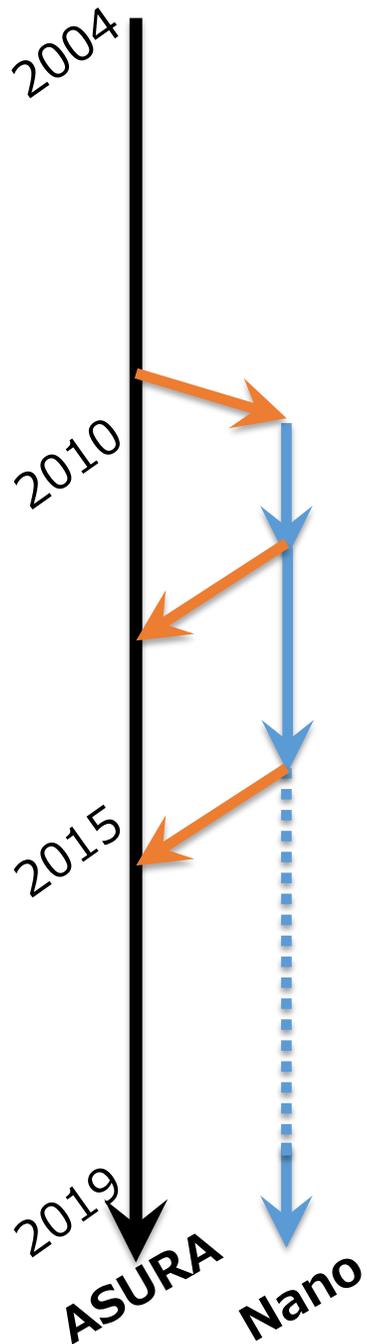
## 1. 理論パート

- SPH の原理
  - Standard SPH
  - Density independent SPH
- その他
  - 人工粘性、時間積分、時間刻み幅

## 2. 実習パート

- 実習で使うコードについての短いお話
- テスト
  - 1D shocktube
  - 2D hydrostatic equilibrium test
  - 2D Kelvin-Helmholtz instability test
  - 2D Rayleigh-Taylor instability test
  - 3D Sedov-Taylor test
  - 2D Keplerian disk test
  - 2D barred galaxy test

## 3. 参考文献



# NanoASURA

- C 言語(C99)で書かれた SPH コード
  - ASURA は MPI 並列銀河形成シミュレーション用コード
  - NanoASURA は SPH 部分を切り出したもの
- 並列化は OpenMP
- パラメータファイルのフラグを変更するだけで DISPH/SSPH の比較が可能
- 標準的なベンチマークテストを持つ
- 可視化のためのツール(pgplotを利用)も同梱



# License

- MIT ライセンスの元で配布しています
- <http://opensource.org/licenses/MIT>

# xcでの実行準備

- ソースファイルをコピーします
  - 注意:xc は work でしか実行できないので work dir を使いましょう (ただし時間がたつと消えるので注意)
  - cd /work/hydro?? ※ここで??は自分の番号
  - cp /home/hydro00/NanoASURA\_hydro2019.tar.gz ./
  - tar xvfz ./NanoASURA\_hydro2019.tar.gz

# ディレクトリ構造

- **src** : ソースコード
  - **setup** : 初期条件生成ファイル群
- **runs** : 作業ディレクトリ
  - **shocktube** : 1D shocktube
  - **hydrostatic** : 2D hydrostatic
  - **kh** : 2D Kelvin-Helmholtz inst.
  - **rt** : 2D Rayleigh-Taylor inst.
  - **sedov** : 3D Sedov-Taylor
  - **keplar** : 2D keplar disk
  - **galaxy** : 2D barred galaxy model
- **plot** : plot tool
- **doc** : Documents generated by DoxyGen

# コンパイル

- c コンパイラだけが必要なのでコンパイルは簡単
  - cd ./src
  - make
  - “asura.out” ができます
- 今回の実習では XC50 上で実行しますので、XC50 にログインした状態でコンパイルしてください
  - Makefile の最初にある CC=cc をgccなどに変更すると自分のパソコンや解析サーバでも実行可能です
  - いまの Makefile は XC50 専用になっています

# XC50 での実行方法

- 作業ディレクトリに移動します
  - `cd ../runs/shocktube`
- ジョブを投入します
  - `qsub ./batch.sh`
  - ASURA は自分のディレクトリにある `param.txt` ファイルを読み込んでセットアップし、シミュレーションを開始します
  - しばらく待つと計算が終わります

- `src` : ソースコード
  - `setup` : 初期条件生成ファイル群
- `runs` : 作業ディレクトリ
  - `shocktube` : 1D shocktube
  - `hydrostatic` : 2D hydrostatic
  - `kh` : 2D Kelvin-Helmholtz inst.
  - `rt` : 2D Rayleigh-Taylor inst.
  - `sedov` : 3D Sedov-Taylor
  - `keplar` : 2D keplar disk
  - `galaxy` : 2D barred galaxy model
- `plot` : plot tool
- `doc` : Documents generated

# Parameter file “param.txt”

```
NParticles 1000 % Number of particles used in this run.
RunType 0 % 0 is the shocktube test.
OutDir ./data_disph % Data output directory.
RunName shocktube % Base name of output file.

Dimension 1 % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 2 % Box size.
Lbox1 1 % Not used in this run.
Lbox2 1 % Not used in this run.

TEnd 0.1 % Simulation end time.
CFL 0.3 % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1 % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 1 % 0=cubic spline kernel,
% 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
% 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 1 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
% If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
% where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2 % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.

UseGradh 1 % Use the grad-h term.
UseGradN 1 % Use both grad-N and grad-h terms.
DerivativeOperatorType 0 % 0=the standard operators.
% 1=those shown in Hosono, Saitoh & Makino (2016).
Gamma 1.4 % Specific heat ratio.
Ns 5 % Number of neighbor particles.
Nspm 1 % Tolerance number of the neighbor number, Ns.

ViscType 0 % If 0, use Monaghan 1997 type visc term. If 1, use vNR type visc term.
ViscAlpha 1.0 % Viscosity coefficient.
UseVariableAlpha 0 % If 1, this code uses the variable alpha mode.
ViscAlphaMin 0.1 % Min alpha for the variable alpha mode.
ViscAlphaMax 2.0 % Max alpha for the variable alpha mode.
ViscBalsara 0 % Switch for the Balsara limiter.
ViscSignalVelocity 3.0 % A factor for the signal velocity.

ICFile

OutputFileNumber 100 % Number of output files.
WriteEveryStep 0 % When this flag is 1, the program writes particle data after every step.

ShowLog 1 % Verbose mode

ThreadNumber 8 % Number of thread for OpenMP instructions.
DynamicChunk 10 % Chunk size for OpenMP instructions.
```

# Shocktube テスト

- 圧縮性流体の標準的テスト
- このテストで主にショック補足能力を確認する



$$\begin{aligned} \rho = 1, \quad P = 1, \quad v = 0 \quad (x \leq 0), \\ \rho = 0.25, \quad P = 0.1795, \quad v = 0 \quad (x > 0), \end{aligned}$$

# Shocktube テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/shocktube
- 次の二つの場合を試してみましょう:
  - UseDISPH 1 and ./data\_disph
  - UseDISPH 0 and ./data\_ssph

```
NParticles 1000 % Number of particles used in this run.
RunType 0 % Name of the shocktube test.
OutDir ./data_disph % Data output directory.
RunName shocktube % Base name of output file.

Dimension 1 % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 2 % Box size.
Lbox1 1 % Not used in this run.
Lbox2 1 % Not used in this run.

TEnd 0.1 % Simulation end time.
CFL 0.3 % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1 % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
```

# 可視化プログラム、ついてます

- 可視化には解析サーバを使いますので、解析サーバ an09 上でコンパイルしてください
  - `cp /home/hydro00/NanoASURA_hydro2019.tar.gz ./`
  - `tar zxvf ./NanoASURA_hydro2019.tar.gz`
  - `cd ./NanoASURA`
- 可視化プログラムのコンパイルには “gcc” と “pgplot” を使います
  - `cd ./plot`
  - `make`
  - “plot.out” ができます
- 解析サーバに XC50 の work がマウントされているので、解析サーバから直接 XC50 の出力を読み出して可視化できます

# Parameter file for plot

```
OutDir ./data_st_disph
DataDir_00 ../runs/shocktube/data_disph
DataDir_01 ../runs/hydrostatic/data_disph
DataDir_02 ../runs/kh/data_disph_
DataDir_03 ../runs/rt/data_disph
DataDir_04 ../runs/sedov/data_disph
DataDir_05 ../runs/keplar/data_disph_

FileName_00 shocktube
FileName_01 surface
FileName_02 kh
FileName_03 rt
FileName_04 sedov
FileName_05 keplar

WriteMode 2 % 0->XSERVE, 1->eps, 2->png,
PaletteID 1

FileStart 1
FileEnd 3000

# Type
PlotType 5 %0=shocktube
          %1=hydrostatic
          %2=kh
          %3=rt
          %4=sedov
          %5=keplar

ShowTime 1

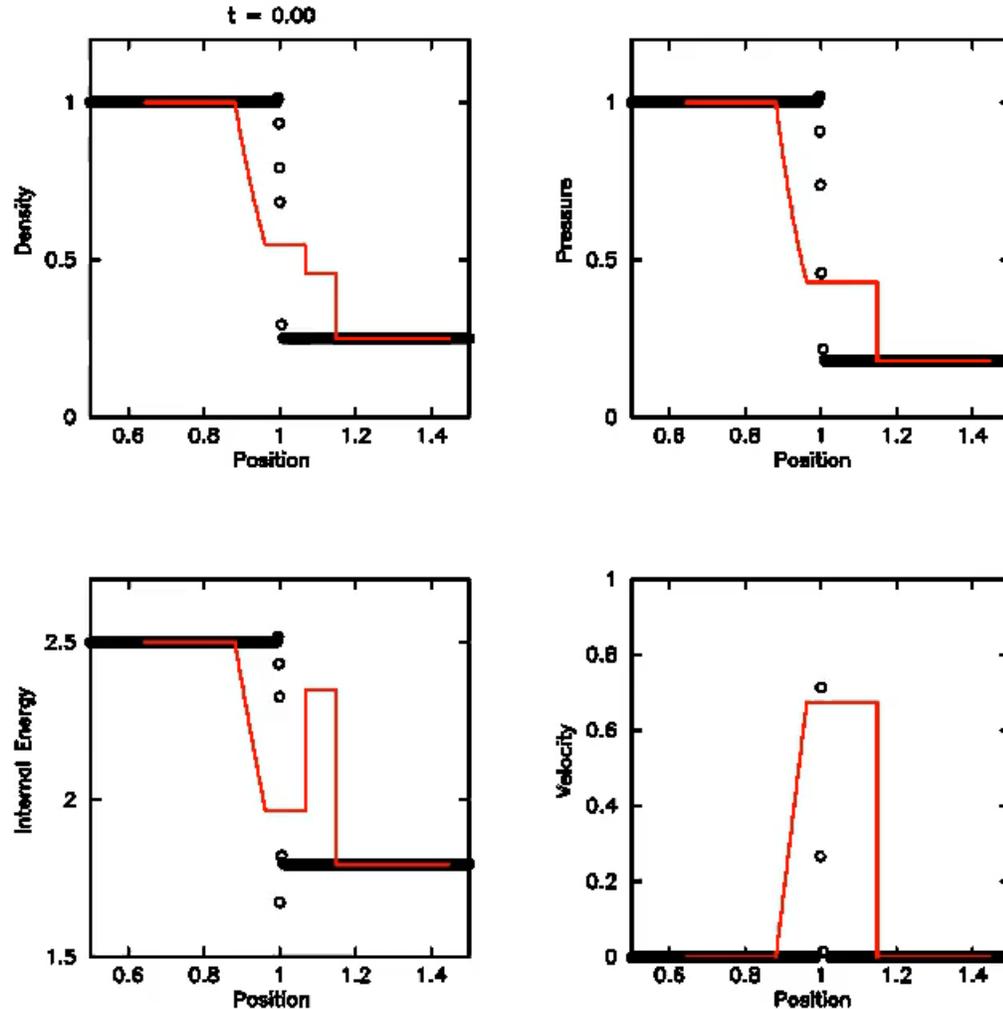
UseEOSRho 1 %if 1, rho = q/u is used.
```

- パラメータは param.txt に定義されている
  - とりあえず大事なところ
    - **PlotType** はどのタイプの計算の可視化をするか (shocktube なら 0)
    - **DataDir\_0?** : データ入力ディレクトリ (PlotType と対応)
- [/xc-work/hydroXX/NanoASURA\\_hydro2019/runs/shocktube/data\\_disph](#) となっているので、XX を自分の数字に変更する
- **OutDir** : 出力ディレクトリ、**変え忘れると前の図が上書きされてしまいますので注意**
  - **WriteMode** は出力フォーマットを定義
    - 0=画面出力、1=eps ファイル、2=png ファイル
    - とりあえず0で結果を確認して良ければ 1 or 2 に
  - 下の方にモデルごとのパラメータあり(??\_PlotType等)

# Shocktube: DISPH

- Shocktube test (runs/shocktube)

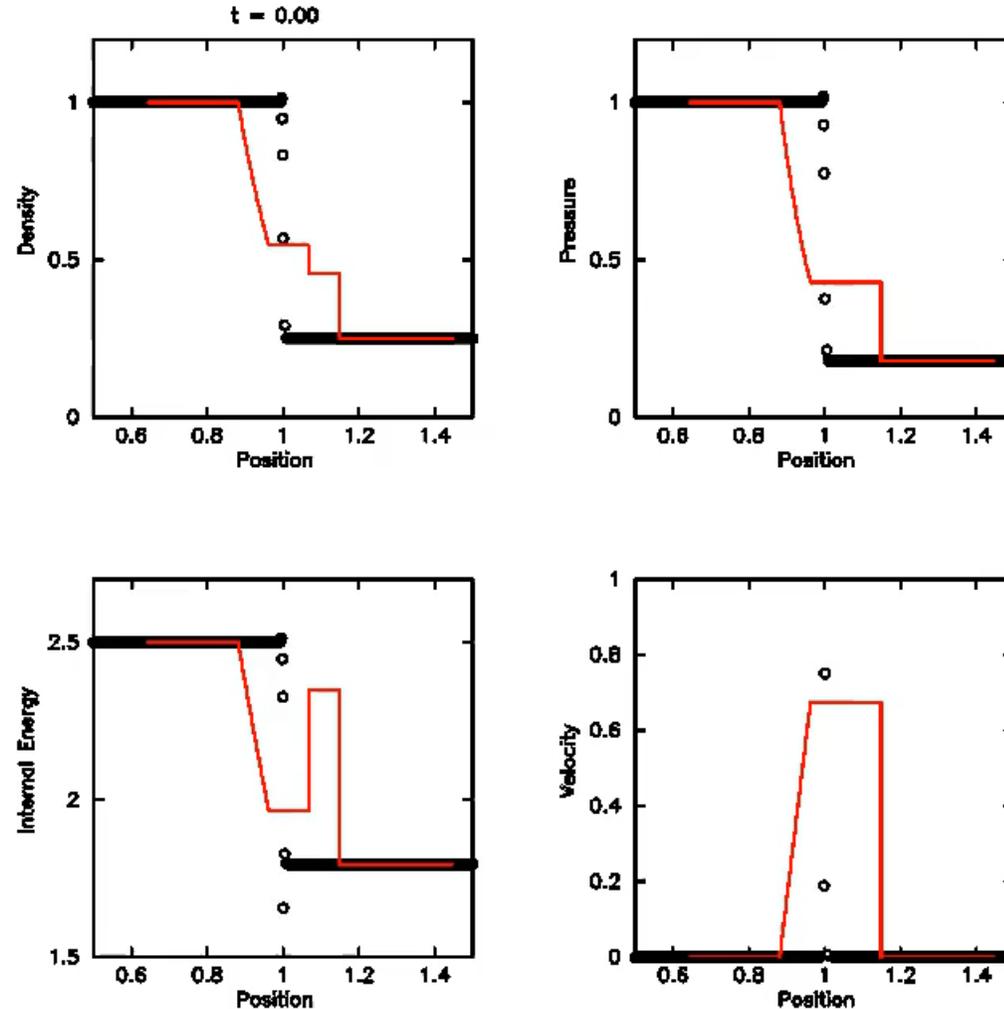
PlotType=0



# Shocktube: SSPH

- Shocktube test (runs/shocktube)

PlotType=0

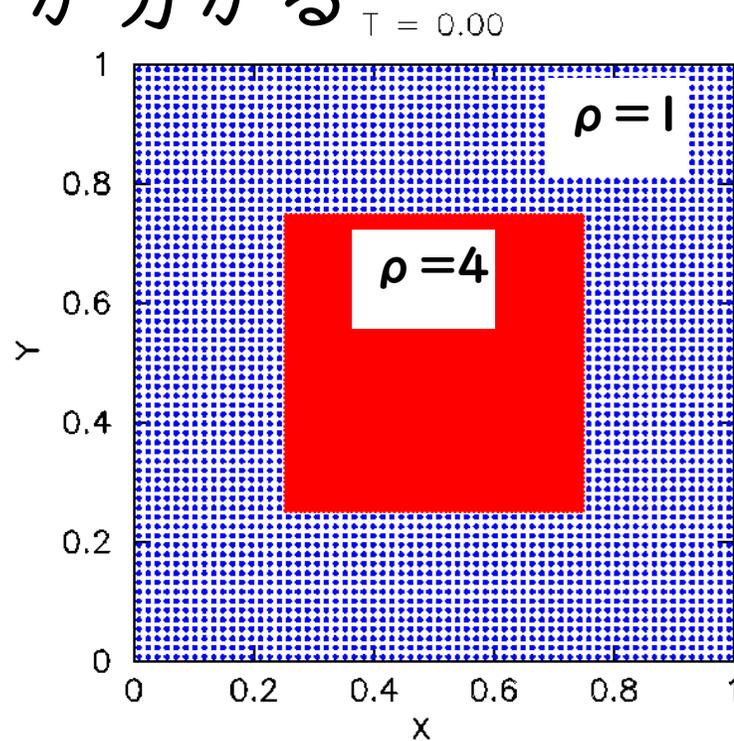


# アニメーションファイル作成

- ffmpeg によるアニメーション作成
- ffmpeg -y -i  
“./data\_st\_disph/shocktube\_four.%04d.png”  
-vcodec libx264 -vf format=yuv420p  
-partitions parti4x4+partp8x8  
-qmax 30 -r 10  
shocktube\_disph.mp4  
を1行で
- ffplay -loop 100 ./shocktube\_disph.mp4
- パワーポイントなどにも貼れます

# Hydrostatic Equilibrium テスト

- 従来の SPH 法は接触不連続面を扱えない  
→ 非物理的表面張力が現れる
- このテストではこの影響を見ることができ、また、DISPH でどのように改善されるかが分かる



# Hydrostatic Equilibrium テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/hs
- 次の二つのケースを試みましょう:
  - UseDISPH 1, OutDir ./data\_disph
  - UseDISPH 0, OutDir ./data\_ssph

```
NParticles 48      % Nparticles is the total number of particles used in this run.
RunType 1         % RunType 1 is hydrostatic test.
OutDir ./data_disph % Data output directory.
RunName surface  % Base name of output file.

Dimension 2      % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 1         % Box size.
Lbox1 1         % Box size.
Lbox2 1         % Not used in this run.

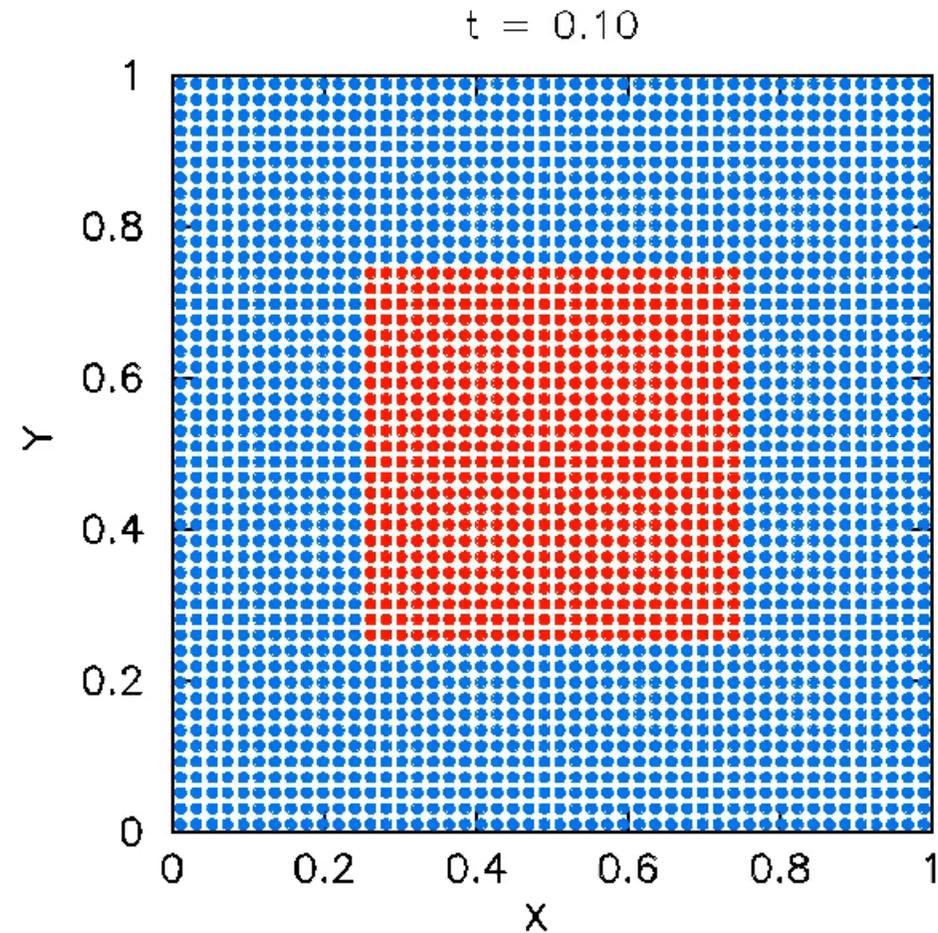
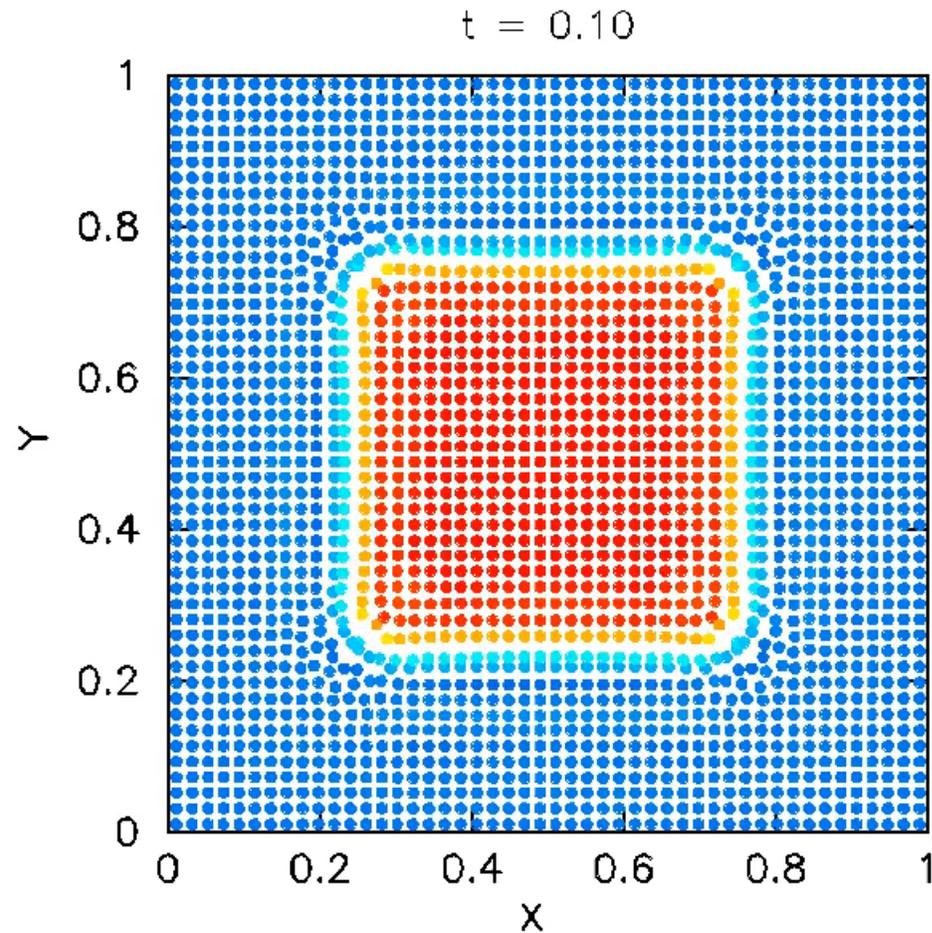
TEnd 8.0         % Simulation end time.
CFL 0.3         % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1      % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 3 % 0=cubic spline kernel,
                  % 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                  % 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 0 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number
                  % If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
                  % where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2   % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.
```

# Hydrostatic equilibrium テストの可視化

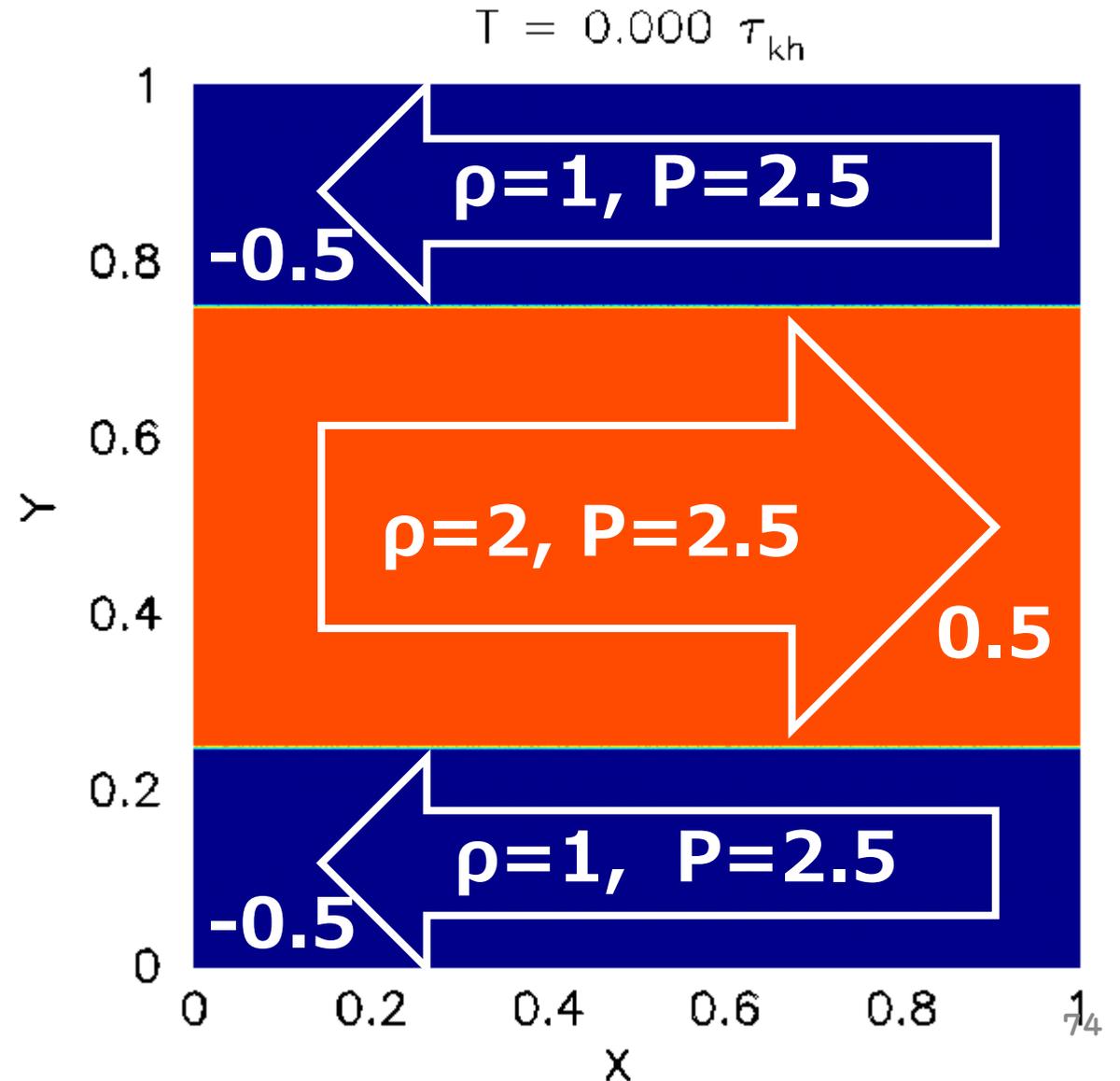
- Hydrostatic tests (run/hydrostatic)

PlotType=1



# Kelvin-Helmholtz 不安定性テスト

- シアーによる流体不安定性
- 初期条件:  
密度比 1:2,  $P_{init} = 2.5$ ,  
 $V_{relative} = 1$
- 境界に速度摂動を与える
- 接触不連続面での物理量評価の違いが不安定性成長に与える影響がわかる



# Kelvin-Helmholtz 不安定性テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/kh
- 次のニケースを試してみましょう:
  - UseDISPH 1, and OutDir ./data\_disph
  - UseDISPH 0, and OutDir ./data\_ssph

```
NParticles 256      % Nparticles is the total number of particles used in this run.
RunType 2          % 2=Kelvin-Helmholtz test.
OutDir ./data_disph % Data output directory.
RunName kh         % Base name of output file.

Dimension 2        % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 1            % Box size.
Lbox1 1            % Box size.
Lbox2 1            % Not used in this run.

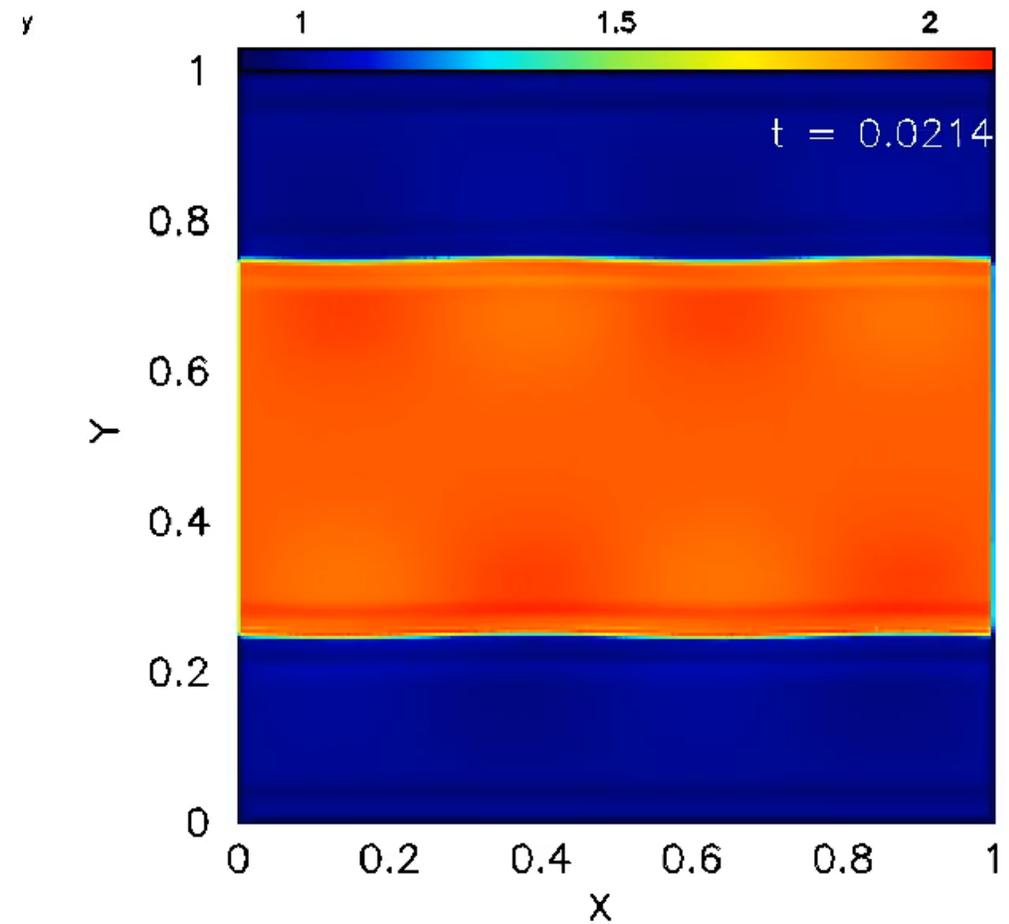
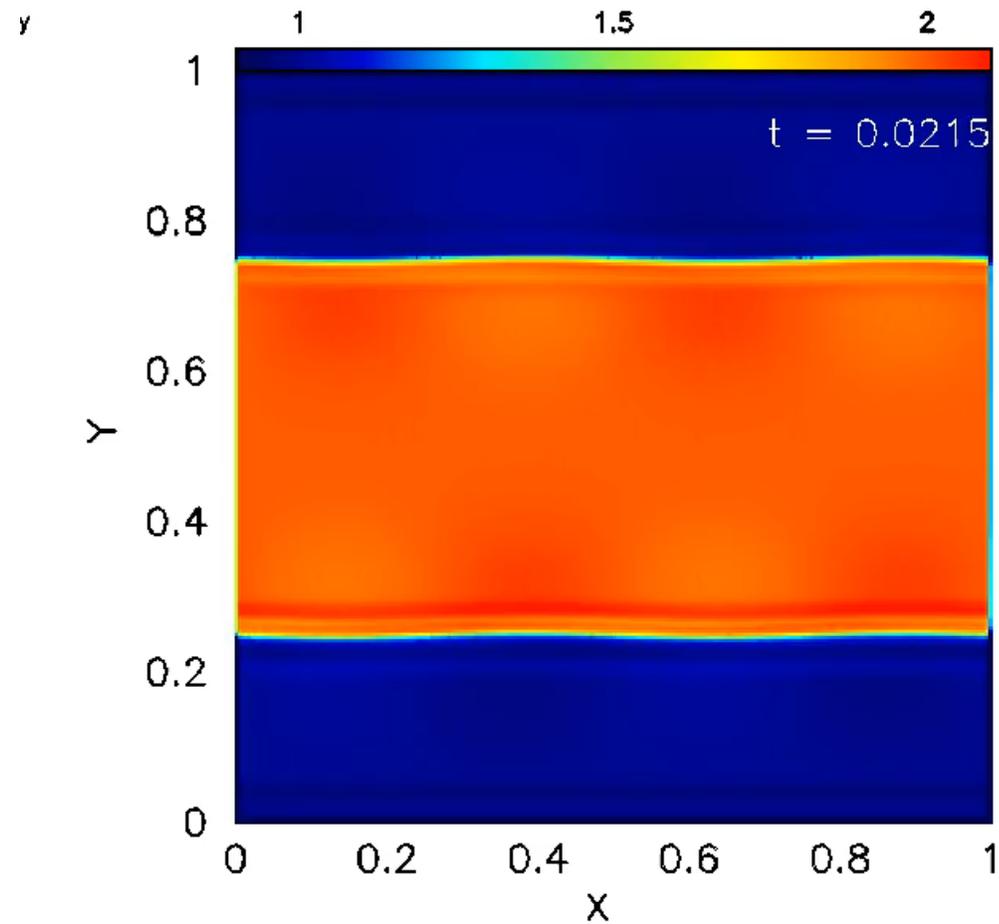
TEnd 2.0           % Simulation end time.
CFL 0.3            % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1         % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 3 % 0=cubic spline kernel,
                  % 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                  % 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 0 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
                  % If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{1/D}$ ,
                  % where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2      % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.
```

# Kelvin-Helmholtz 不安定性テストの可視化

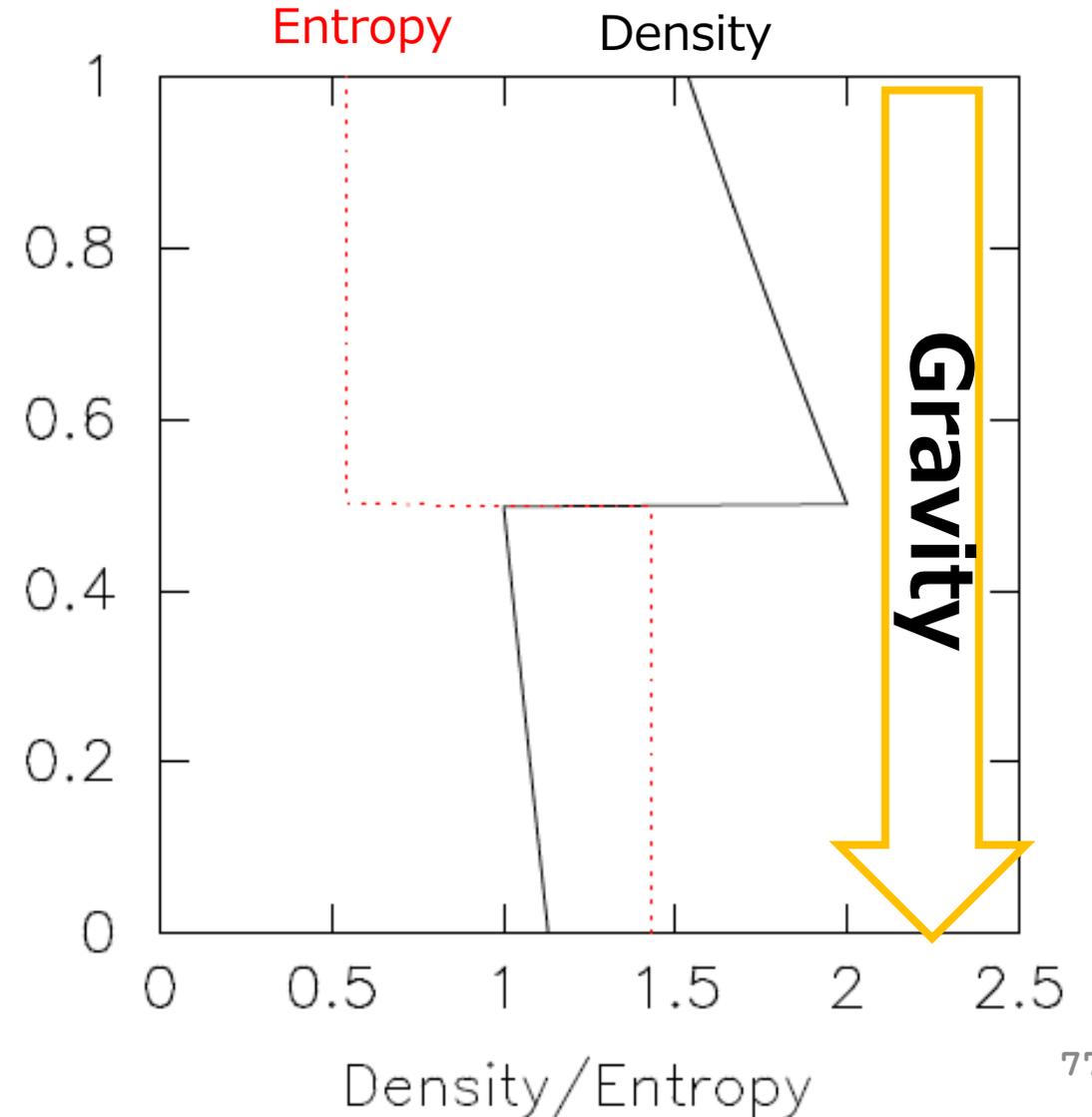
- Kelvin-Helmholtz inst. tests (runs/kh)

PlotType=2



# Rayleigh-Taylor 不安定性テスト

- 重力によって引き起こされる不安定性
- 初期条件: 密度比 1:2 @  $y=0.5$
- 鉛直方向に速度の摂動を与える
- 接触不連続面での物理量評価の違いが不安定性成長に与える影響がわかる



# Rayleigh-Taylor 不安定性テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/rt
- 次の二つのケースを試してみましょう:
  - UseDISPH 1, and OutDir ./data\_disph
  - UseDISPH 0, and OutDir ./data\_ssph

```
%NParticles 240      % ~Npart^2/4 is the total number of particles used in this run.
NParticles 160      % ~Npart^2/4 is the total number of particles used in this run.
RunType 3           % 0 is the rt test.
OutDir ./data_disph % Data output directory.
RunName rt          % Base name of output file.

Dimension 2         % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 0.25          % Box size.
Lbox1 1             % Box size.
Lbox2 1             % Not used in this run.

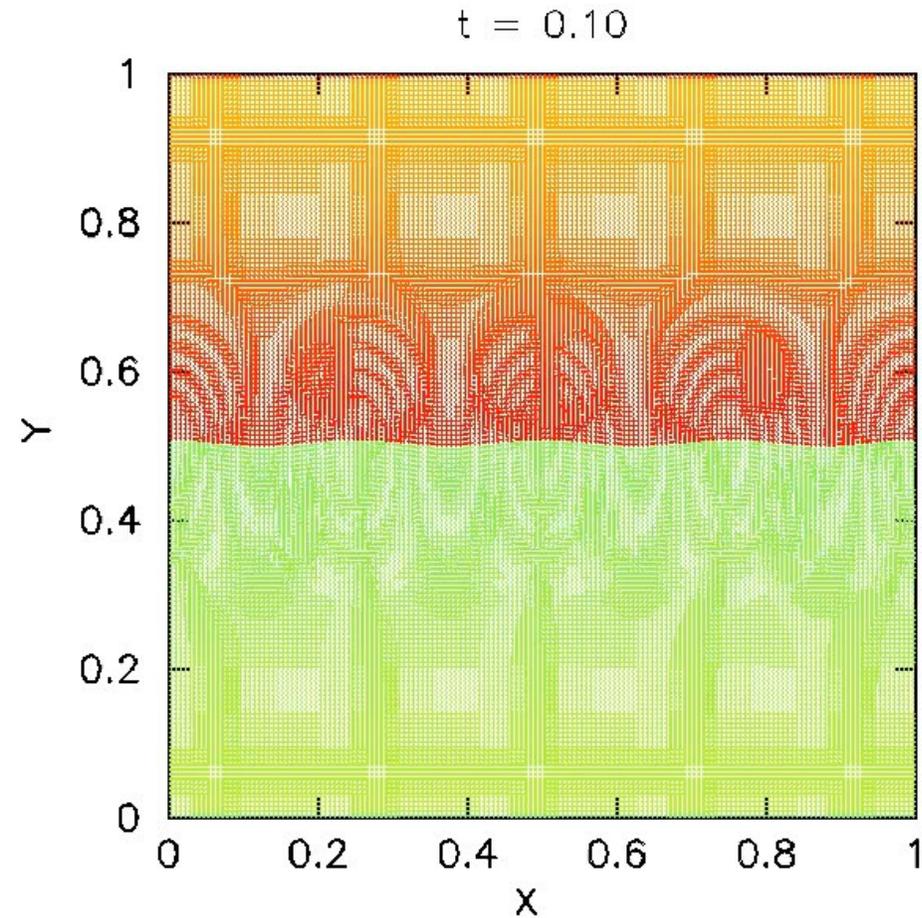
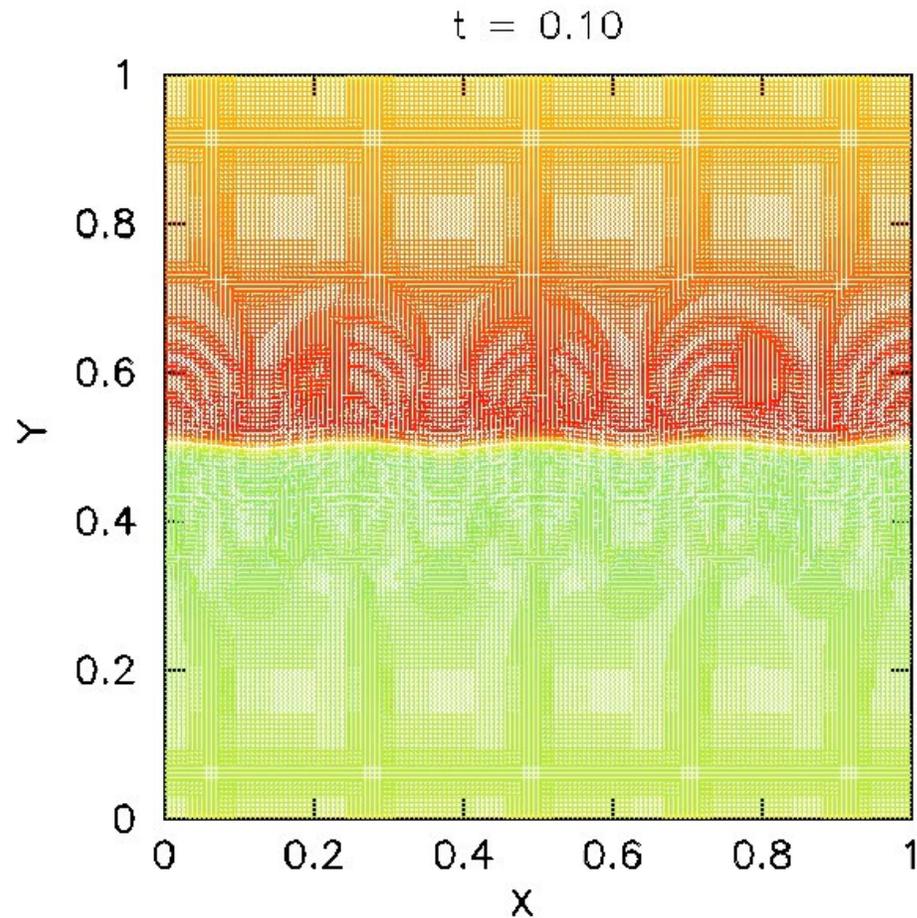
TEnd 10             % Simulation end time.
CFL 0.3             % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1          % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 3 % 0=cubic spline kernel,
                   % 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                   % 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 0 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
                   % If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
                   % where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2       % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.
```

# Rayleigh-Taylor 不安定性テストの可視化

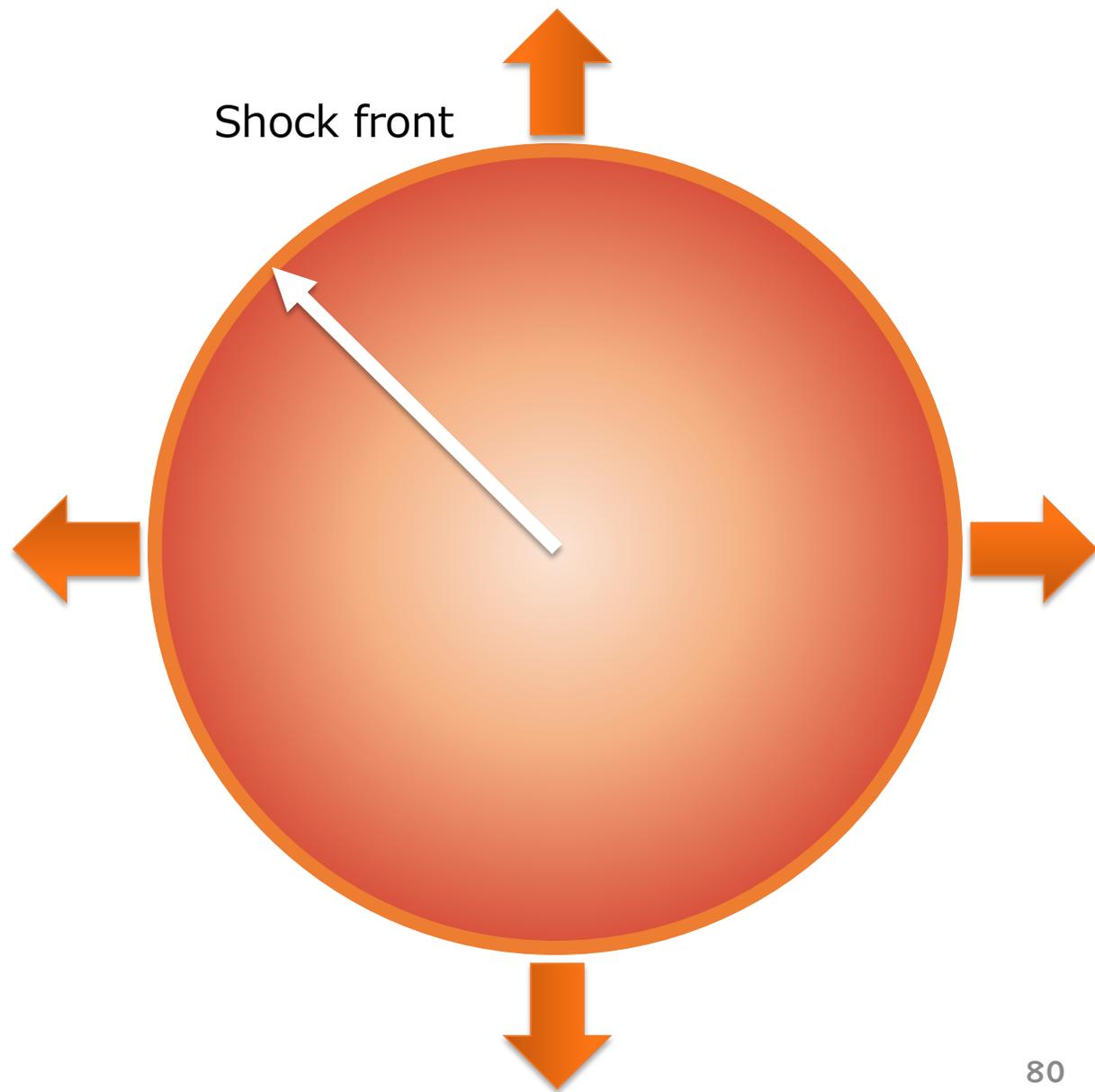
- Rayleigh-Taylor inst. tests (runs/rt)

PlotType=3



# Sedov-Taylor テスト

- 点源爆発問題
- 初期条件:
  - 一様密度 ( $=1$ )
  - 中心にエネルギー ( $=1$ )
  - 背景ガスは十分低温



# Sedov-Taylor テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/sedov
- 次の二ケースを試してみましょう:
  - UseDISPH 1, and OutDir ./data\_disph
  - UseDISPH 0, and OutDir ./data\_ssph

```
NParticles 64      % Not used in this run.
RunType 4         % 4 = Sedov test.
OutDir ./data_disph
RunName sedov     % Base name of output file.

Dimension 3       % Dimension.
PeriodicBoundary 1 % Periodic boundary condition.
Lbox0 1          % Box size.
Lbox1 1          % Box size.
Lbox2 1          % Not used in this run.

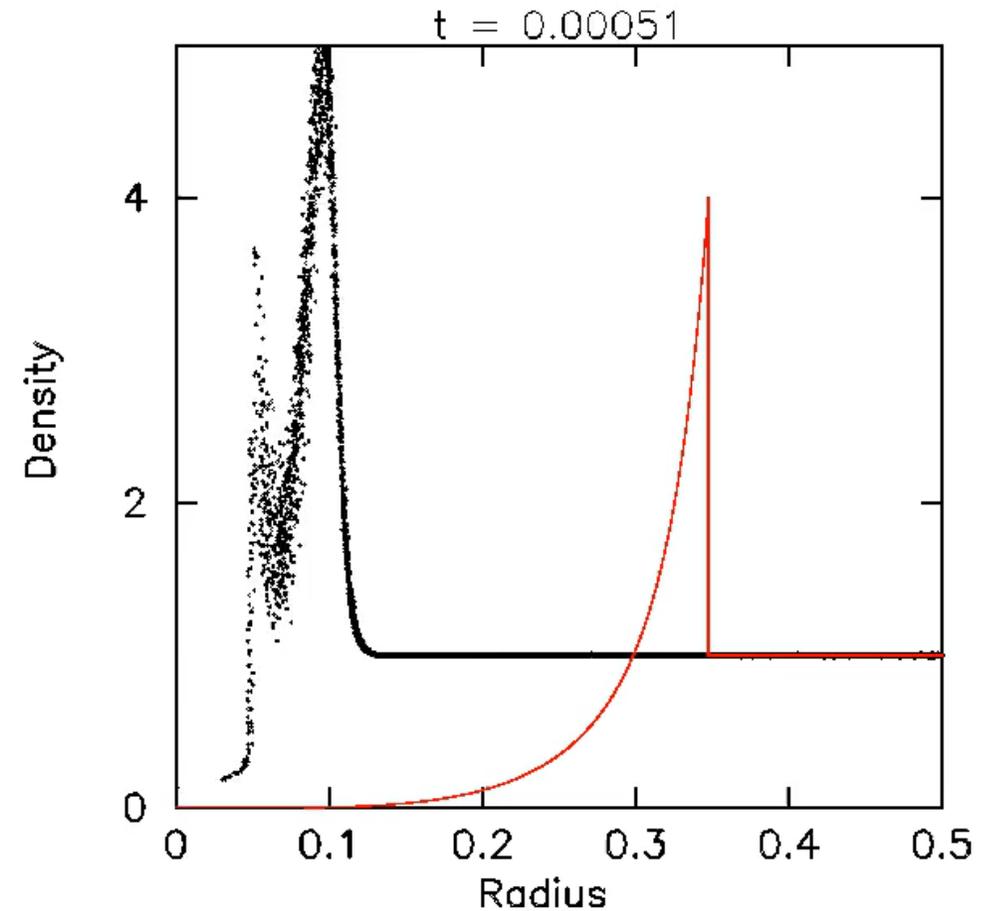
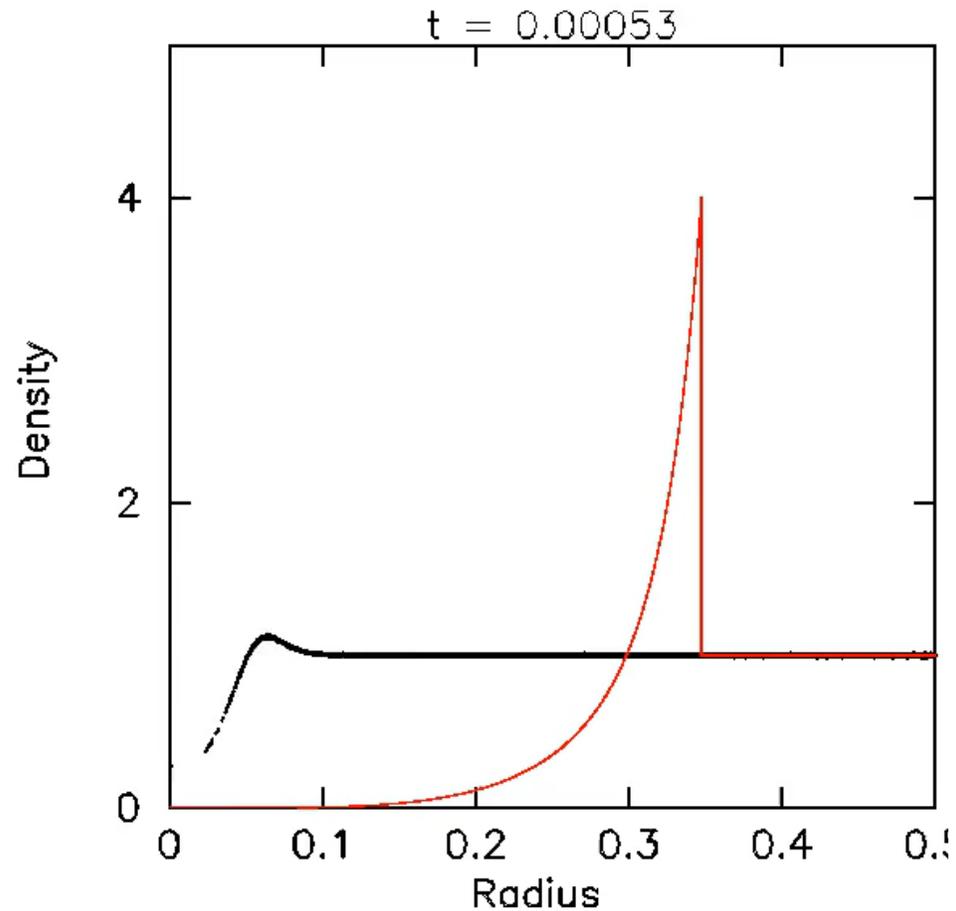
TEnd 0.05        % Simulation end time.
CFL 0.3          % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1       % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 3 % 0=cubic spline kernel,
                  % 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                  % 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 0 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
                  % If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
                  % where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2    % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.
```

# Sedov-Taylor テストの可視化

- Sedov-Taylor tests (runs/sedov)

PlotType=4



# Sedov-Taylor テストの可視化

- Param.txt を編集して表示モードを変えてみる

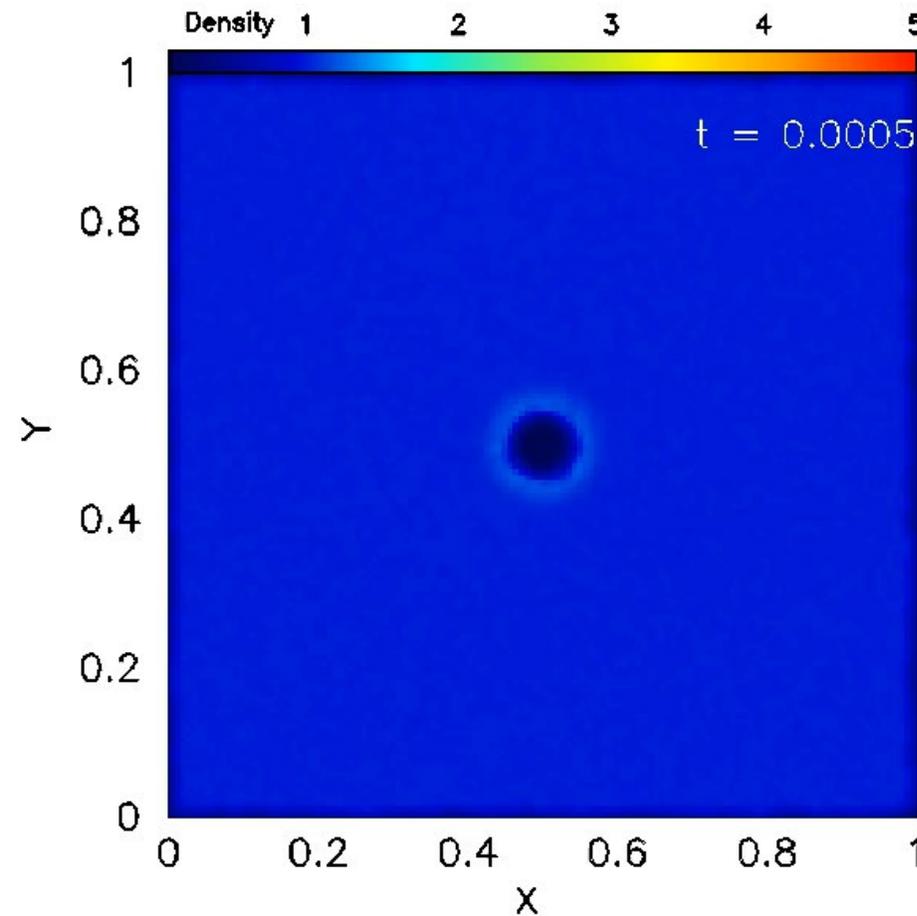
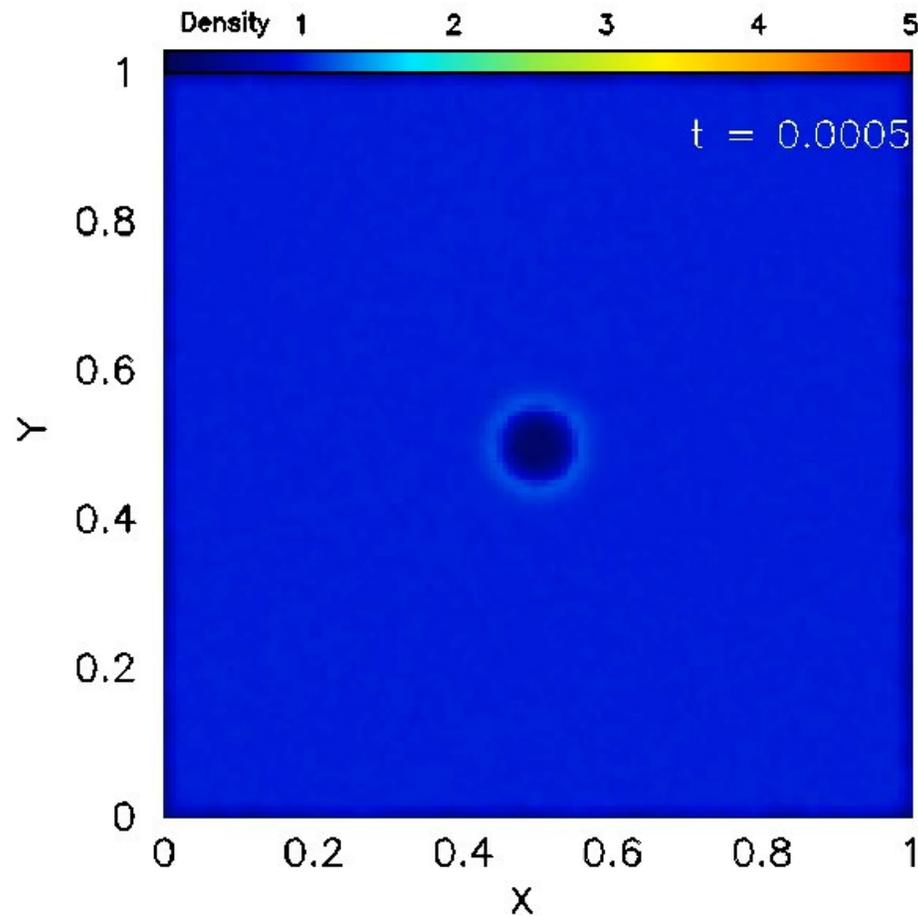
```
# For PlotType 4
SD_PlotType 1 % 0=slice,1=rho,2=p,3=Density map,
SD_PlotSolution 1
SD_SolutionFileName ./sedov_t005.dat
SD_Xmin 0
SD_Xmax 1
SD_Ymin 0
SD_Ymax 1
SD_Slice 0.05
SD_Rmin 0
SD_Rmax 0.5
SD_Rhomin 0
SD_Rhomax 5
SD_Pmin 0
SD_Pmax 10
SD_GridSize 128
SD_Palette 2
```

**1から3にしてみる**

# Sedov-Taylor テストの可視化

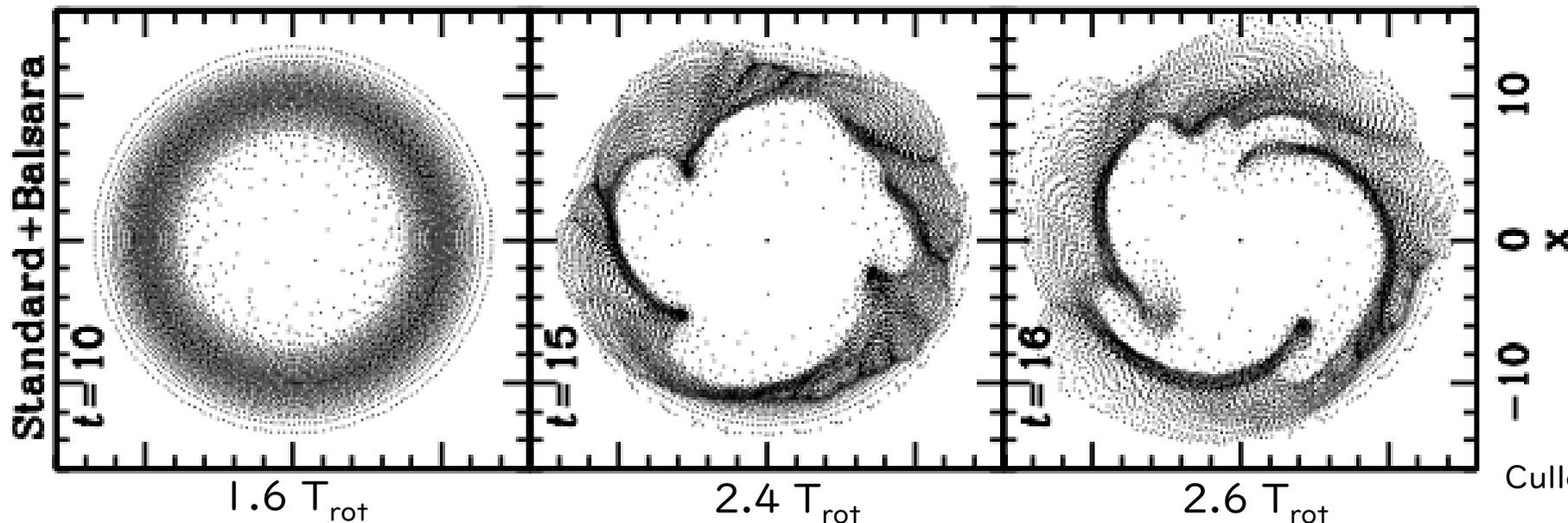
- Sedov-Taylor tests (runs/sedov)

PlotType=4  
SD\_PlotType=3



# Keplerian disk テスト

- 回転する円盤構造は天体形成過程で頻出する基本的構造
- 数値シミュレーションは難しい(SPHに限らず)
- Keplerian disk だと SPH では数回転持たない  
→ よりよい人工粘性スイッチが必要 (Cullen & Dehnen 2010)



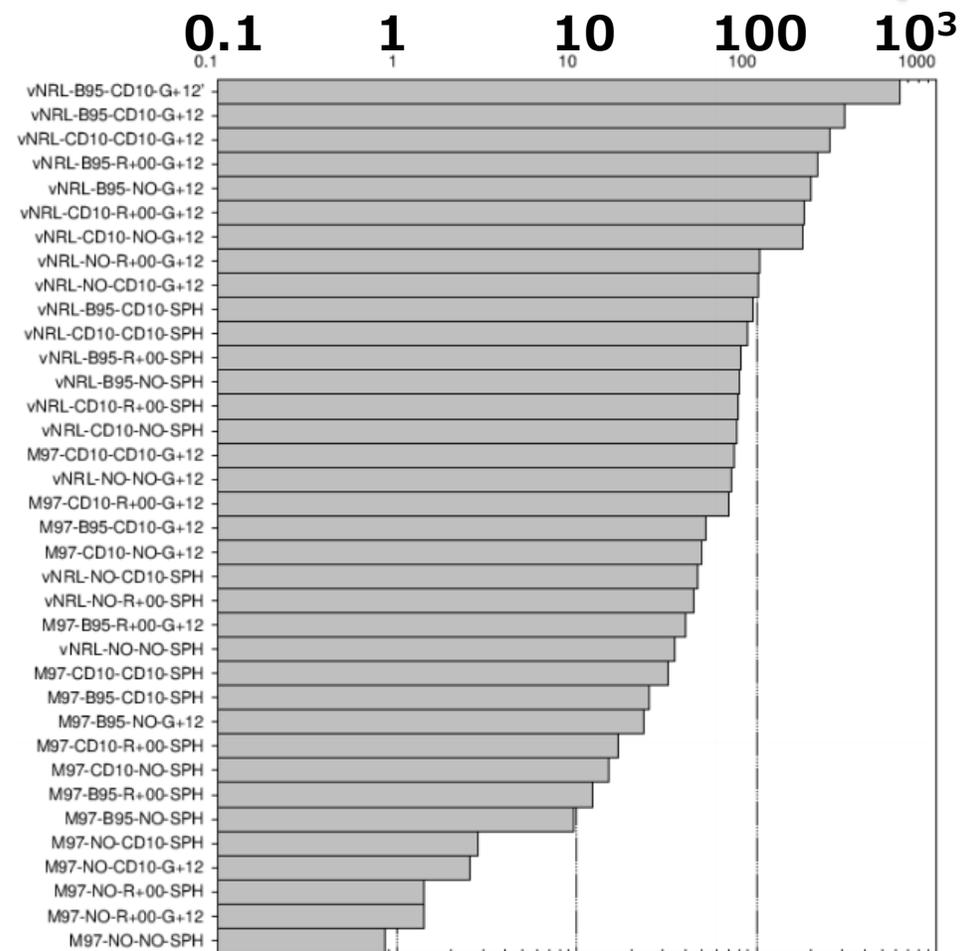
# 様々な人工粘性項の組み合わせと円盤寿命

$T_{rot} \sim 600!$



Type	Abbreviation	Equations	Reference
Form of AV	vNRL	(1)	von Neumann & Richtmyer (1950); Landshoff (1955)
	M97	(6)	Monaghan (1997)
Shock indicator	No	No	Do not use
	R+00	(16)	Rosswog et al. (2000)
	CD10	(18)-(21)	Cullen & Dehnen (2010)
Shear switch	No	No	Do not use
	B95	(22)	Balsara (1995)
	CD10	(25)-(27)	Cullen & Dehnen (2010)
$\nabla \cdot v$	SPH	(3)	Lucy (1977)
	G+12	(4)	García-Senz et al. (2012)

- vNRL 型人工粘性と高精度な grad/div/ rot が肝



# MLS-based grad/div/rot

- 詳細は Garcia-Senz et al. 2012; Hosono, Saitoh & Makino 2016

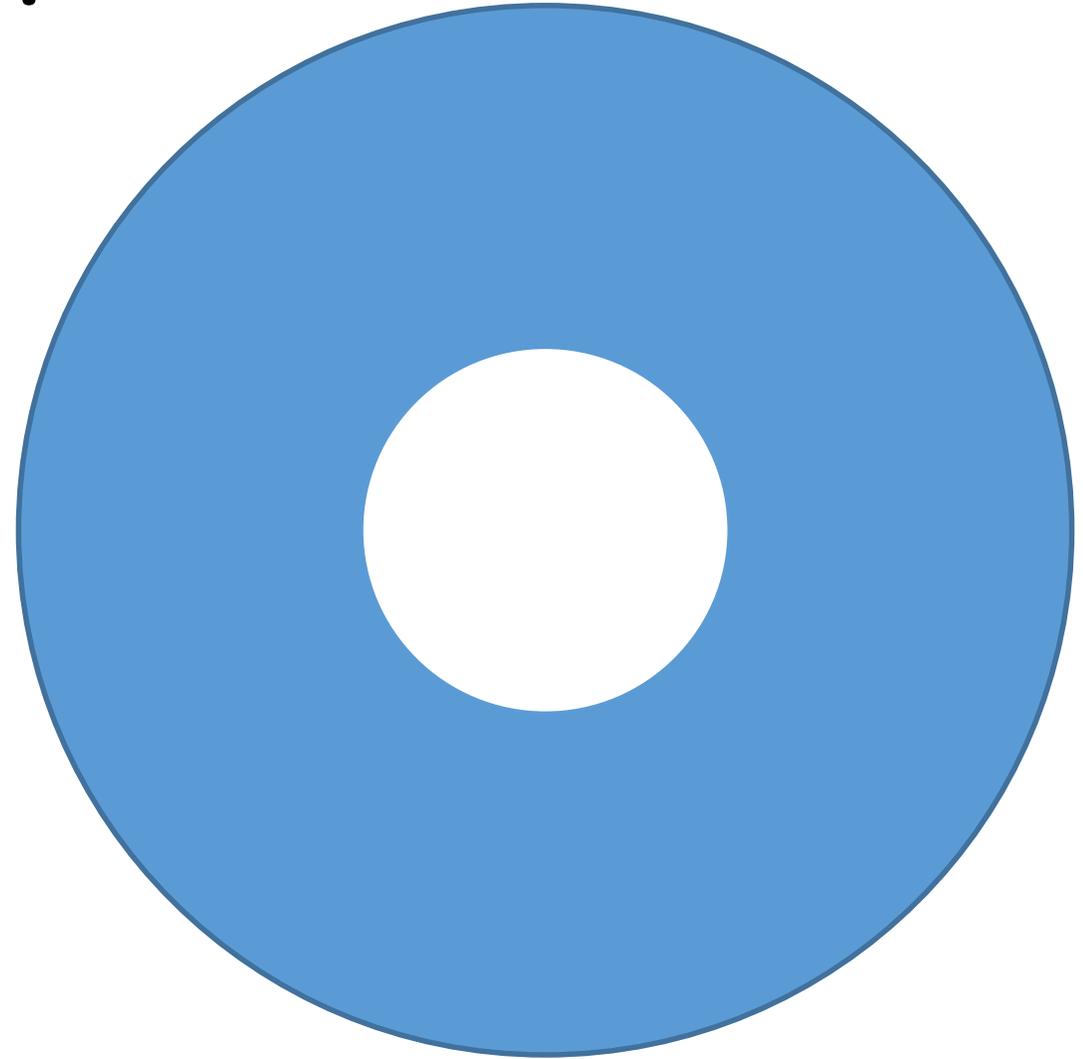
$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot [\mathcal{M}_i^{-1}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)] W(x_{ij}, h_i)$$

$$\mathcal{M}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(x_{ij}, h_i)$$

# Keplerian disk テスト

- 2D ケプラー回転円盤
- 初期条件:
  - 半径0.5→2に
  - 一様密度分布
  - 中心ポテンシャルの元で回転

$$\mathbf{a}_{\text{ext}} = \begin{cases} -\frac{GM}{(x^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \mathbf{x} & |\mathbf{x}| < 0.25 \\ -\frac{GM}{x^3} \mathbf{x} & \text{otherwise} \end{cases}$$



# Keplerian disk テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/keplar
- 次の二ケースを試してみましょう:
  - DerivativeOperatorType=1, ViscType=1, UseVariableAlpha=1
  - DerivativeOperatorType=0, ViscType=0, UseVariableAlpha 0

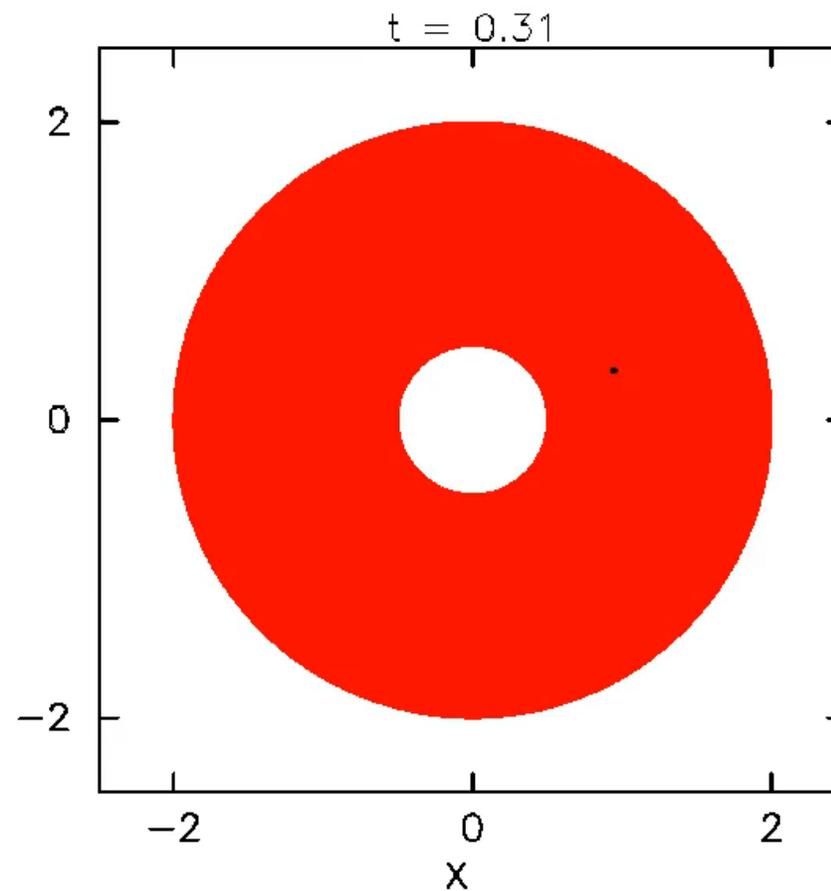
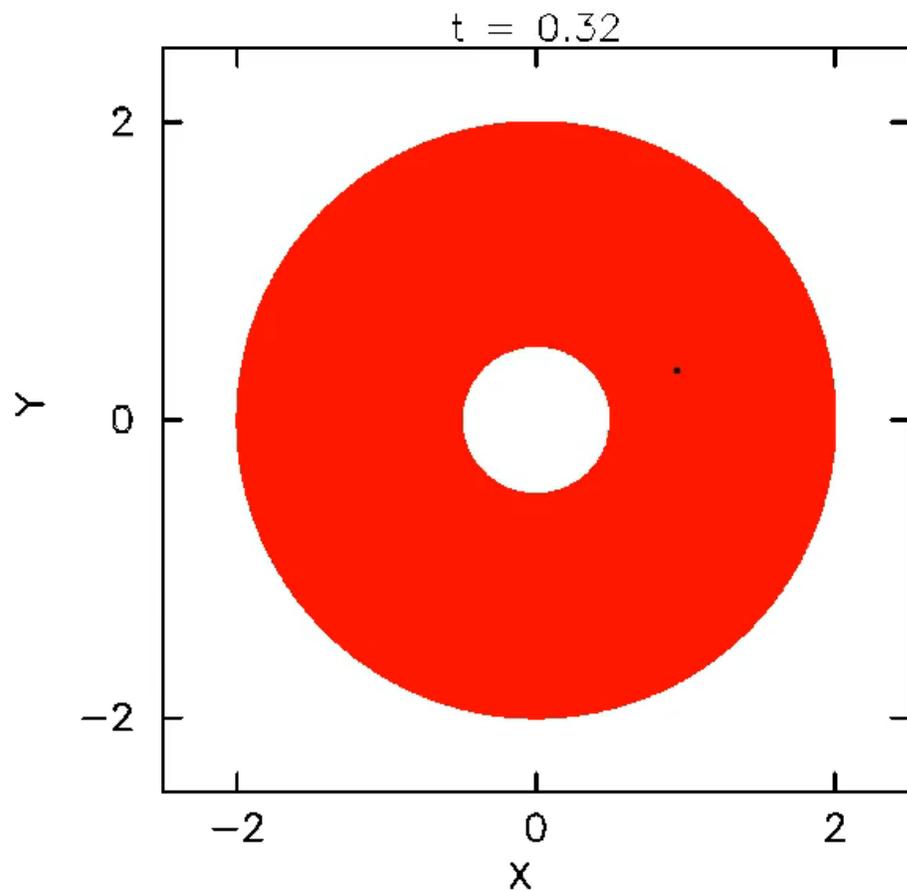
```
UseGradh 1 % Use the grad-h term.
UseGradN 1 % Use the grad-N and grad-h terms.
DerivativeOperatorType 1 % 0=the standard operators.
% 1=those shown in Hosono, Saitoh \& Makino (2016).
Gamma 1.6667 % Specific heat ratio.
Ns 32 % Number of neighbor particles.
Nspm 2 % Tolerance number of the neighbor number, Ns.

ViscType 1 % use Monaghan 1997 type visc term. If 1, use vNR type visc term.
ViscAlpha 0.1 % viscosity coefficient.
UseVariableAlpha 1 % If 1, this code uses the variable alpha mode.
ViscAlphaMin 0.1 % Min alpha for the variable alpha mode.
ViscAlphaMax 2.0 % Max alpha for the variable alpha mode.
ViscBalsara 1 % Switch for the Balsara limiter.
ViscSgnalVelocity 3.0 % A factor for the signal velocity.
```

# Keplerian disk テストの可視化

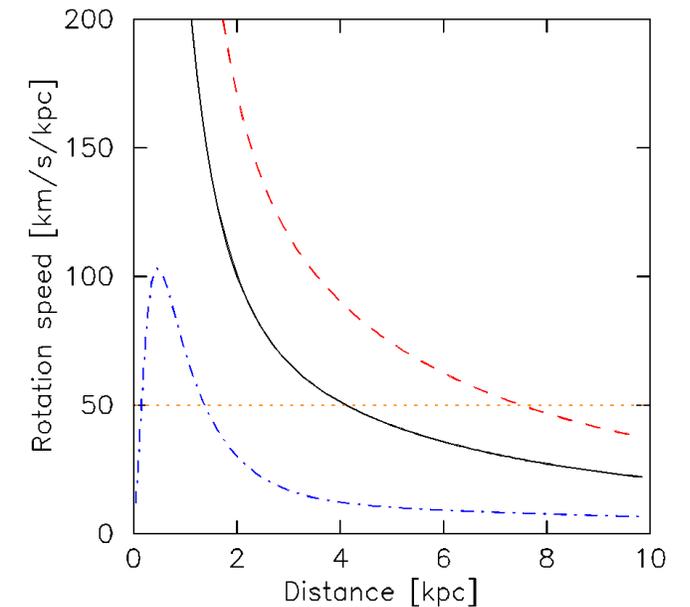
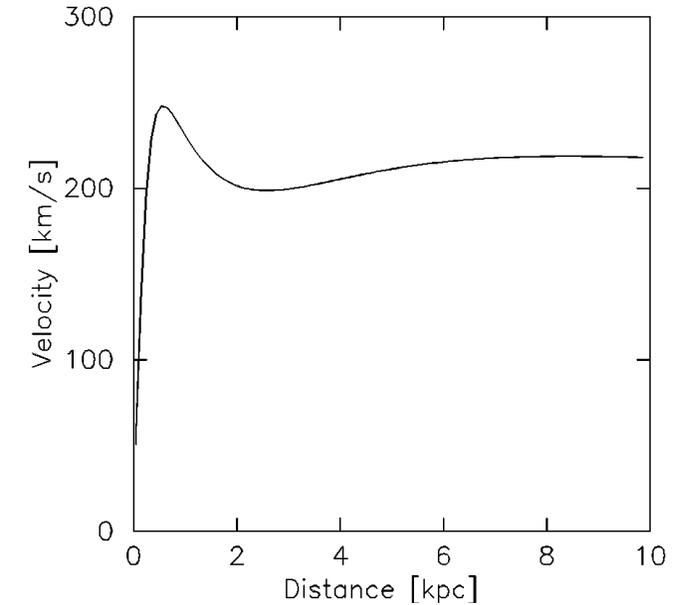
- Keplerian disk tests (runs/keplrar)

PlotType=5



# Barred galaxy テスト

- 銀河ポテンシャル中の等温ガスの進化
- 初期条件:  
exp ガス円盤  
ガスは  $10^4\text{K}$  (強制的に  $du/dt=0$  にすることで温度を固定)
- ポテンシャルはダークマターハロー、バルジ、星円盤、バー
  - パラメータは Pettitt+2014, Wada 1994, Saitoh+2008 から



# Barred galaxy テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/galaxy
- とりあえず今のモデルを試してみましょう:

```
NParticles 30000      % Not used
RunType 6            % 6 is the galaxy model test.
OutDir ./data_disph
RunName galaxy      % Base name of output file.

Dimension 2         % Dimension.
PeriodicBoundary 0  % Periodic boundary condition.
Lbox0 1             % Box size.
Lbox1 1             % Box size.
Lbox2 1             % Not used in this run.

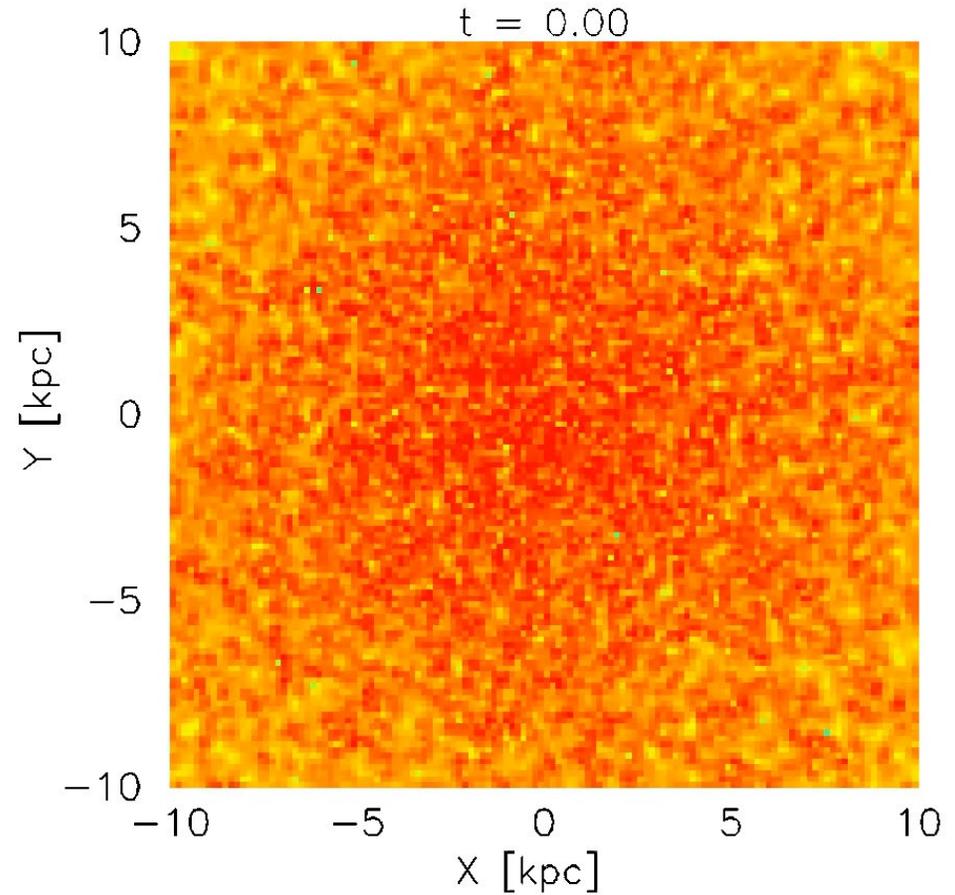
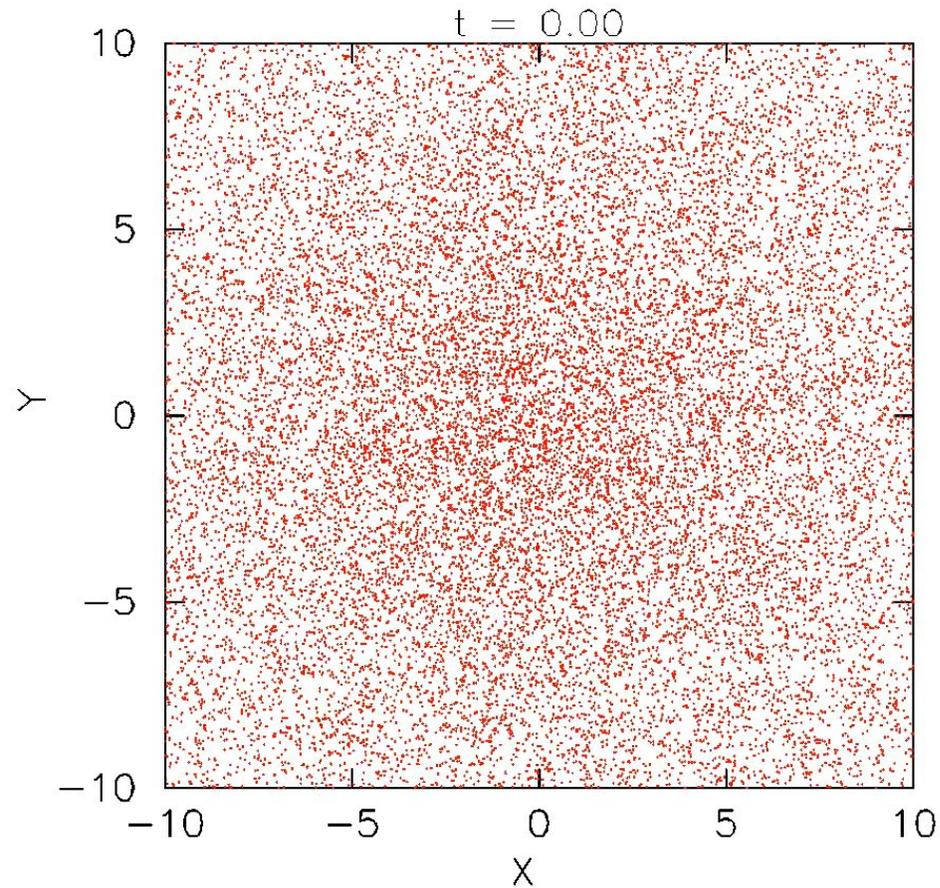
TEnd 10.0           % Simulation end time.
CFL 0.3             % Coefficient for the CFL timestep.

UseDISPH 1          % If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType 3  % 0=cubic spline kernel,
                    % 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                    % 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType 0 % If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
                    % If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
                    % where m, rho, and D are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta 1.2       % KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.
```

# Barred galaxy テストの可視化

- Barred galaxy tests (runs/galaxy)

PlotType=6



# 余裕がある人向け課題

- 粒子数を変更してみる(st/kh/rt/galaxy)
  - NParticles
- Kernel のタイプを変更してみる(hq/kh)
  - KernelType
- 長時間積分する(kh)
  - TEnd
- エネルギーや運動量の保存を確認してみる
  - コード編集が必要
- バーポテンシャルのパターン速度を変更してみる
  - コード編集が必要(src/setup/SetupGalaxyModel.c: 101 行目)
  - 例えば50km/s/kpc → 10km/s/kpc
- 渦状腕ポテンシャルを導入してみる(galaxy)
  - コード編集が必要(src/setup/SetupGalaxyModel.c: 153行目以下に何か)

参考文献

# PART 3

# Contents

## 1. 理論パート

- SPH の原理
  - Standard SPH
  - Density independent SPH
- その他
  - 人工粘性、時間積分、時間刻み幅

## 2. 実習パート

- 実習で使うコードについての短いお話
- テスト
  - 1D shocktube
  - 2D hydrostatic equilibrium test
  - 2D Kelvin-Helmholtz instability test
  - 2D Rayleigh-Taylor instability test
  - 3D Sedov-Taylor test
  - 2D Keplerian disk test
  - 2D barred galaxy test

## 3. 参考文献

# Original papers

- Lucy, AJ, vol. 82, p. 1013–1024, 1977
- Monaghan & Gingold, MNRAS, vol. 181, p. 375–389, 1977

# Reviews

- Monaghan, ARAA. Vol. 30 p. 543–574, 1992
- Monaghan, RPPh, Vol. 68, p. 1703–1759, 2005
- Rosswog, New A. Reviews, Vol. 53, p. 78–104, 2009
- Springel, ARAA, vol. 48, p.391–430, 2010

# Other Important Papers

- Hernquist & Katz, ApJ Supplement Series, vol. 70, p. 419–446, 1989
- Ritchie & Thomas, MNRAS, Vol. 323 p. 743–756, 2001
- Springel & Hernquist, MNRAS, Vol. 333 p. 649–664, 2002
- Inutsuka, JCoPh, Vol. 179, p. 238–267, 2002
- Okamoto et al., MNRAS, Vol.345, p. 429–446, 2003
- Price, JCoPh, Vol. 227, p. 10040–10057
- Read et al., MNRAS, Vol. 405 p. 1513–1530, 2010
- Cullen & Dehnen, MNRAS, Vol. p. 669–683, 2010
- Dehnen & Aly, MNRAS, Vol. 425, p. 1068–1082, 2012
- Garcia-Senz et al, A&A, Vol. 538, AA9, 2012
- Saitoh & Makino, ApJ, Vol. 768, article id. 44, 2013

# Other Important Papers

- Hopkins, MNRAS, Vol. 428, p.2840–2856, 2013
- Hosono, Saitoh & Makino, PASJ, Vol.65, article id.108, 2013
- Hosono, Saitoh & Makino, ApJS, Vol.224, article id. 32, 2016
- Saitoh & Makino, ApJ, Vol.823, article id. 144, 2016
- Yamamoto & Makino, PASJ, Vol. 69, id 35, 2017
- Price et al. PASP, Vol.35, id.e031, 82pp., 2018

# Misc.

- Balsara, JCoPh, Vol. 121, p.357-372, 1995
- Monaghan, JCoPh, Volume 136, p. 298-307, 1997
- Saitoh & Makino, ApJ Letters, Vol. 697, p. L99-L102, 2009
- Saitoh & Makino, PASJ, Vol.62, p.301-314, 2010