







北海道大学・宇宙物理学研究室・岡本崇



MESH FREE 法

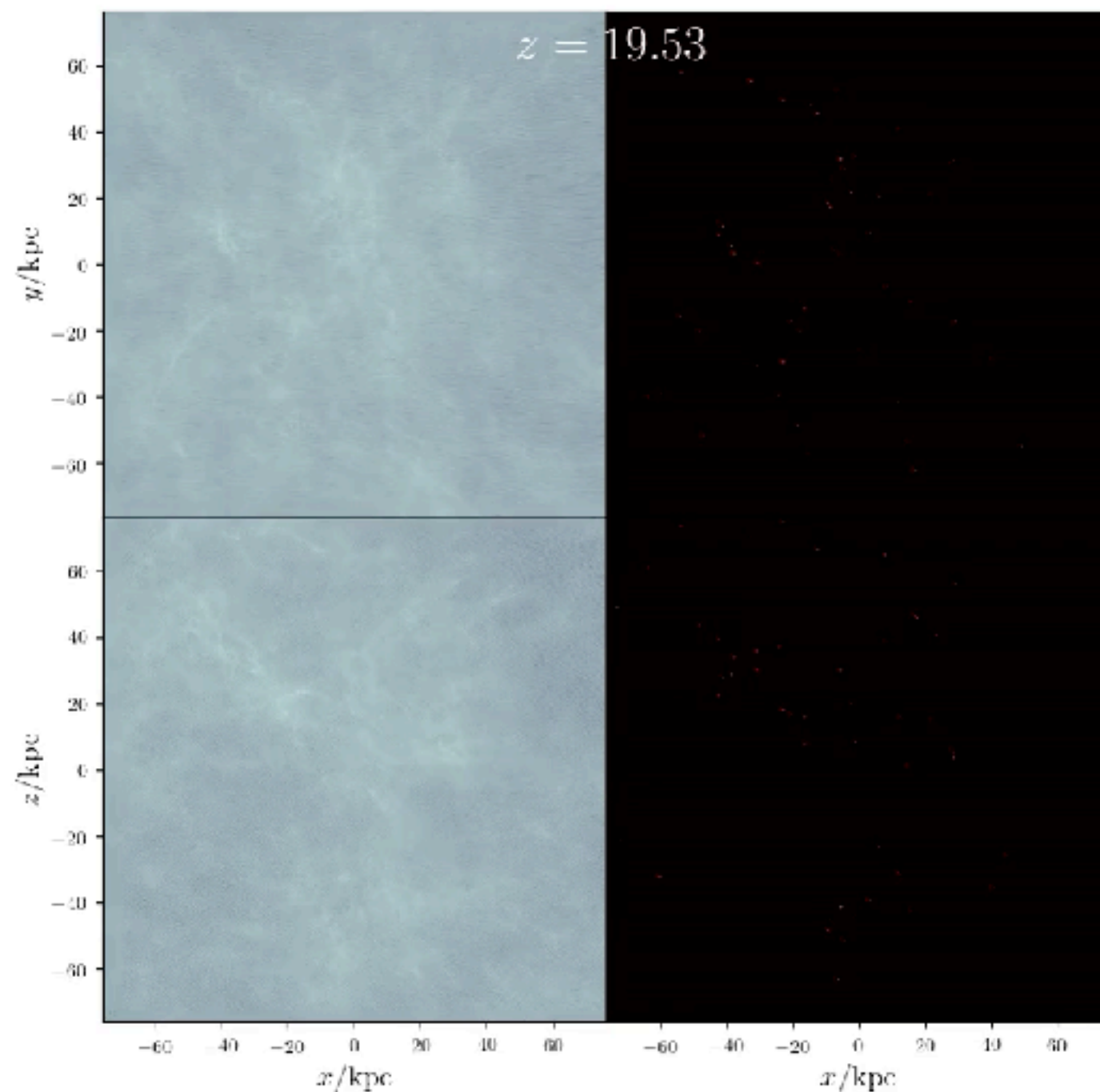


特徴

-  明確な格子はない
-  SPH と異なり保存形の基礎方程式を解く
-  流体要素を local な流体の速度で動かすことにより Lagrange 法的になる
-  ここでは主に GIZMO (Hopkins 2015) について解説

例: 銀河形成

-  GIZMO を用いて XC50 で計算したもの
-  独自の拡張をしたコードなので今回用いる public version とは異なる





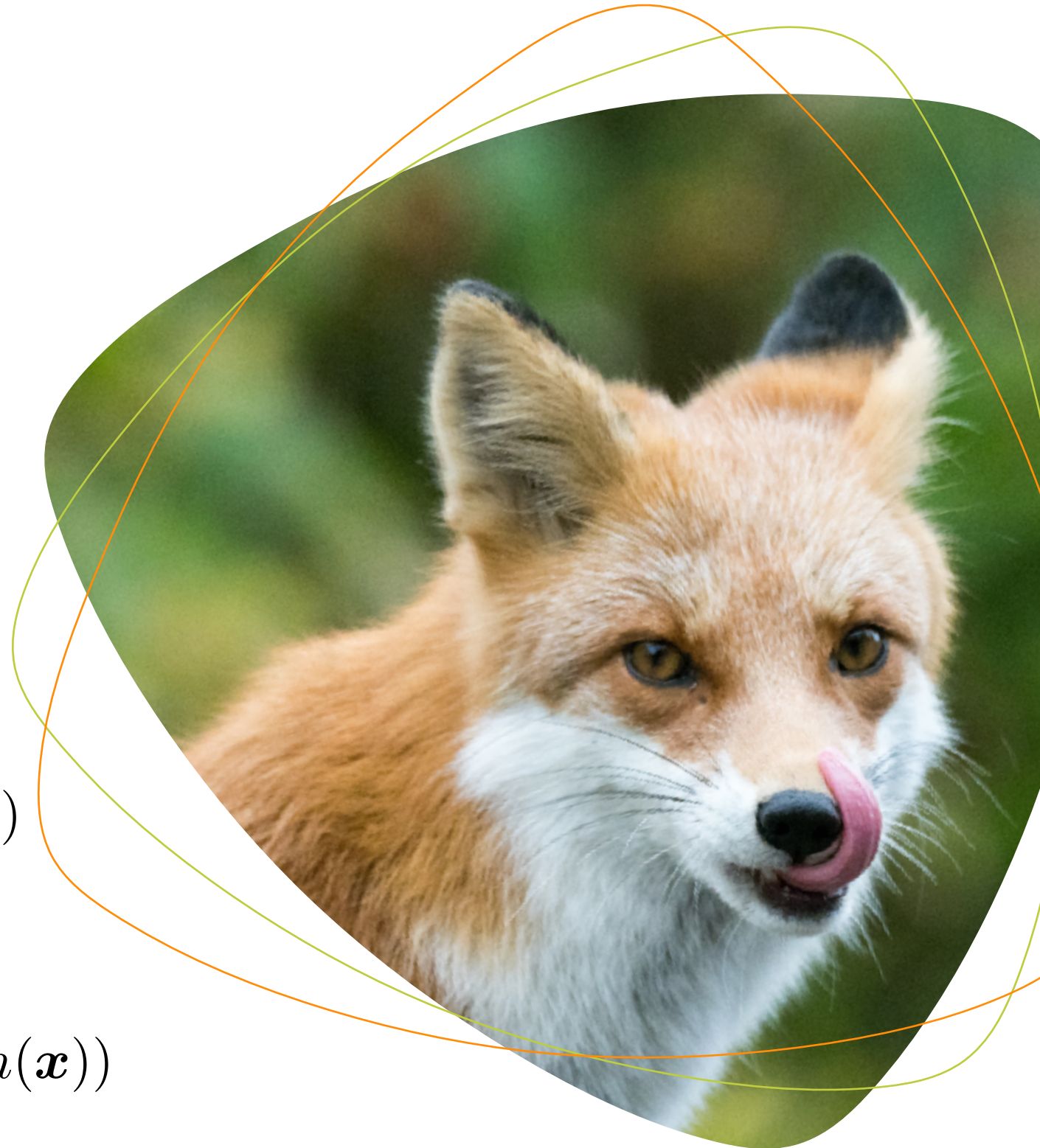
粒子法

物理量 $f(\boldsymbol{x})$ は空間上の離散的な
点でサンプリングされる: $f_i = f(\boldsymbol{x}_i)$

$$\langle f(\boldsymbol{x}) \rangle = \sum_j w_j f_j W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j|, h(\boldsymbol{x}))$$

where $W(\boldsymbol{x}, h) \rightarrow \delta(\boldsymbol{x})$ for $h \rightarrow 0$.

$$\langle \nabla f(\boldsymbol{x}) \rangle = \sum_j w_j f_j \nabla W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j|, h(\boldsymbol{x}))$$



SPH 法の場合

 物理量

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}') d^3 x',$$

where $\int W(\mathbf{x}) d^3 x = 1$ and $W(\mathbf{x}) = W(-\mathbf{x})$

 微分

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h(\mathbf{x})) \nabla' f(\mathbf{x}') d^3 x'$$

$$= - \int \{ \nabla' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} f(\mathbf{x}') d^3 x'$$

$$= \int \{ \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} f(\mathbf{x}') d^3 x'$$

SPH 法の精度（よくある嘘）

🥕 テイラー展開

$$f(\mathbf{x}') \simeq f(\mathbf{x}) + f^{(1)}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{f^{(2)}(\mathbf{x})}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \dots$$

🥕 SPH の式に代入

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &\simeq f(\mathbf{x}) + \frac{h_{\text{eff}}^2}{4} \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h_{\text{eff}}^4), \end{aligned}$$

$$\text{wehre } h_{\text{eff}}^2 \equiv 2 \int x^2 W(\mathbf{x}; h) d^3 x$$

なので SPH は空間 2 次精度（という人がいる）

SPH 法の本当の精度

 離散化

$$f_i = \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \int W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'; h(\mathbf{x}_i)) f(\mathbf{x}') d^3 x'$$

$$\simeq \sum_j f_j W(x_{ij}, h_i) \frac{m_j}{\rho_j}$$

$$\simeq f_i \sum_j W(x_{ij}, h_i) \frac{m_j}{\rho_j} + (\nabla f)_i \sum_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) W(x_{ij}, h_i) \frac{m_j}{\rho_j} + \dots$$

 一般的に

$$\sum_j W(x_{ij}, h_i) \frac{m_j}{\rho_j} \neq 1 \ \& \ \sum_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) W(x_{ij}, h_i) \frac{m_j}{\rho_j} \neq 0,$$

なので SPH の空間精度は 0 次



Mesh free 法

SPH の利点をそのままに精度をなんとかしたい

保存形の weak solution

🥕 スカラー関数 $u(\mathbf{x}, t)$ の保存形を考える

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{a}u) = 0$$

ここで, $\mathbf{F}(u, \mathbf{x}, t)$ は速度 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ で動く座標系で見た流束

🥕 上式に境界で 0 になる関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ をかけて全時空で積分

$$\int \int \left[\frac{\partial u}{\partial t} \phi + \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{a}u) \phi \right] dt d^3x = 0$$

🥕 左辺を部分積分

$$\int \int \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{F} + \mathbf{a}u) \cdot \nabla \phi \right] dt d^3x = 0$$

離散化

$$\int \int \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{F} + \mathbf{a}u) \cdot \nabla \phi \right] dt d^3x$$
$$= \int \int \left[u \dot{\phi} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \right] dt d^3x = 0 \quad \left(\because \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D\phi}{Dt} - \mathbf{a} \cdot \nabla \phi \right).$$

 上式を離散化するために内挿関数 $\Psi(\mathbf{x})$ を導入

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|, h(\mathbf{x})),$$

$$\text{where } w(\mathbf{x})^{-1} = \sum_j W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|, h(\mathbf{x}))$$

 明らかに partition of unity を満たす

$$\sum_i \Psi_i = 1$$

空間精度

 空間積分

$$\begin{aligned}
 \int f(\mathbf{x}) d^3x &\simeq \int \sum_i f(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) d^3x \\
 &= \sum_i \int \{f(\mathbf{x}_i) + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\} \Psi_i(\mathbf{x}) d^3x + \mathcal{O}(h(\mathbf{x})^2) \\
 &= \sum_i f_i \int \Psi_i(\mathbf{x}) d^3x + \sum_i \nabla f_i \cdot \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \underline{\Psi_i(\mathbf{x})} d^3x + \mathcal{O}(h(\mathbf{x})^2) \\
 &= \sum_i f_i V_i + \mathcal{O}(h(\mathbf{x})),
 \end{aligned}$$

もはや球対称じゃないので消えない

where $V_i \equiv \int \Psi_i d^3x$

 論文には2次精度と書いてあるが、1次精度

離散化

Applying $\int f(\mathbf{x})d^3x = \sum_i f_i V_i$ to

$$\int \int [u\dot{\phi} + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi] dt d^3x = 0,$$

we get $\sum_i \int [V_i u_i \dot{\phi}_i + V_i F_i^\alpha (D^\alpha \phi)_i] dt = 0,$

where $(D^\alpha \phi)_i$ is the discrete version of $(\nabla\phi)_i^\alpha$.

空間微分

 Larson & Vila (2008) を使う (空間2次精度)

$$(D^\alpha f)_i = \sum_j (f_j - f_i) B_i^{\alpha\beta} \Delta x_{ij}^\beta W_j(\mathbf{x}_i) \equiv \sum_j (f_j - f_i) \Psi_j^\alpha,$$

where $\Psi_j^\alpha = B_i^{\alpha\beta} \Delta x_{ij}^\beta W_j(\mathbf{x}_i)$ and $\Delta \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$

 ここで $B_i^{\alpha\beta} \equiv (E_i^{\alpha\beta})^{-1}$ は renormalization matrix と呼ばれ


$$E_i^{\alpha\beta} = \sum_j \Delta x_{ij}^\alpha \Delta x_{ij}^\beta W_j(\mathbf{x}_i)$$

により定義される.

 $W_j(\mathbf{x}_i)$ は球対称なコンパクトサポートを持つ関数なら何でも良い

離散化続き

$$\sum_i \int \left[V_i u_i \dot{\phi}_i + V_i F_i^\alpha (D^\alpha \phi)_i \right] dt = 0$$

 部分積分により $\int V_i u_i \dot{\phi}_i dt = - \int \frac{d}{dt} (V_i u_i) \phi_i dt$

また,

$$\begin{aligned} \sum_i V_i F_i^\alpha (D^\alpha \phi)_i &= \sum_i V_i F_i^\alpha \sum_j (\phi_j - \phi_i) \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{ij} V_i F_i^\alpha \phi_j \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - \sum_{ij} V_i F_i^\alpha \phi_i \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) \\ &= - \sum_i \phi_i \sum_j [V_i F_i^\alpha \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j F_j^\alpha \Psi_i^\alpha(\mathbf{x}_j)] \end{aligned}$$

 結局

$$\int dt \sum_i \phi_i \left(\frac{D}{Dt} (V_i u_i) + \sum_j [V_i F_i^\alpha \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j F_j^\alpha \Psi_i^\alpha(\mathbf{x}_j)] \right) = 0$$

離散化と有限体積法

🌱 常に成り立つためには

$$\frac{D}{Dt}(V_i u_i) + \sum_j [V_i F_i^\alpha \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j F_j^\alpha \Psi_i^\alpha(\mathbf{x}_j)] = 0$$

🌱 流束 F に i と j 間の Riemann 問題の解, \tilde{F}_{ij}^α , を適用するために

$$F_i^\alpha = F_j^\alpha = \tilde{F}_{ij}^\alpha$$

で置き換えると,

$$\frac{D}{Dt}(V_i u_i) + \sum_j \tilde{F}_{ij}^\alpha [V_i \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j \Psi_i^\alpha(\mathbf{x}_j)] = 0$$

🌱 形式的に面ベクトルを $A_{ij}^\alpha \equiv V_i \Psi_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j \Psi_i^\alpha(\mathbf{x}_j)$ と定義

$$\frac{D}{Dt}(V_i u_i) + \sum_j \underline{\tilde{F}_{ij}} \cdot A_{ij} = 0 \quad \leftarrow \text{有限体積法の式}$$

i と j の間の面と一緒に動く座標系での流束

Linear reconstruction

- 🥕 必要な流束 $\tilde{F}_{ij} \cdot \hat{A}_{ij}$ ($\hat{A} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$) は1次元の Riemann 問題を A_{ij} 静止系で解くことで得られる
- 🥕 面の位置の選び方には自由度があるが, GIZMO では i と j の中間点を使う: $\mathbf{x}_{ij} = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ (論文では $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\{h_i/(h_i + h_j)\}$)
- 🥕 この点 \mathbf{x}_{ij} の速度は
$$\mathbf{a}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$$
- 🥕 より一般的には
$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \frac{(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2}$$

Linear reconstruction 続き

🥕 面 A_{ij} を境界とした Riemann 問題の left state と right state は

linear reconstruction を用いて:

$$f_{\text{rec},i} = f_i + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot (\nabla f)_i$$

$$f_{\text{rec},j} = f_j + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j) \cdot (\nabla f)_j$$

🥕 実際には不連続面での数値振動を抑えるために slope limiter を導

入し $(\nabla f)_i$ を $(\nabla f)_i^{\text{lim}}$ で置き換える:

Slope limiter

 Balsara 2004

$$(\nabla f)_i^{\text{lim}} = \alpha_i (\nabla f)_i$$

$$\text{where } \alpha_i \equiv \min \left[1, \beta_i \min \left(\frac{f_{i,\text{ngb}}^{\text{max}} - f_i}{f_{i,\text{mid}}^{\text{max}} - f_i}, \frac{f_i - f_{i,\text{ngb}}^{\text{min}}}{f_i - f_{i,\text{mid}}^{\text{min}}} \right) \right]$$

 $f_{i,\text{ngb}}^{\text{max}}$ と $f_{i,\text{ngb}}^{\text{min}}$ は i の全ての neighbour の f の最大値と最小値

 $f_{i,\text{mid}}^{\text{max}}$ と $f_{i,\text{mid}}^{\text{min}}$ は i の全ての neighbour に対する x_{ij} での f :

$$f_{\text{rec},i} = f_i + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot (\nabla f)_i$$

の最大値と最小値

 β_i が $0.5 \leq \beta_i \leq 1$ で二次精度となる。

Particle volume

🥕 Kernel size (i.e. smoothing length) h_i を以下のように決める

$$N_{\text{ngb}} = C_d n_i h_i^d = C_d w(\mathbf{x}_i)^{-1} h_i^d = C_d h_i^d \sum_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)$$

🥕 3次元の場合は

$$N_{\text{ngb}} = \frac{4}{3} \pi h_i^3 \sum_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)$$

🥕 h_i が決まると粒子 i の体積は $V_i = \int \Psi_i(\mathbf{x}) d^3x$

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h(\mathbf{x}))$$

$$= [w(\mathbf{x}_i) + \nabla w(\mathbf{x})|_i \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) + \mathcal{O}((\mathbf{x}_i - \mathbf{x})^2)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h(\mathbf{x}))$$

🥕 $\int W(\mathbf{x}) d^3x = 1$ と $\int \mathbf{x} W(\mathbf{x}) d^3x = 0$ より

$$V_i = w(\mathbf{x}_i) + \mathcal{O}(h^2); w(\mathbf{x}_i) = \left[\sum_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i) \right]^{-1} = \frac{4}{3} \pi h_i^3 / N_{\text{ngb}}$$

有限体積法と有限質量法

- 🥕 今までの話は全て有限体積法にもとずいている
 - 🥕 GIZMO では mesh-free finite volume (**MFV**) となる
 - 🥕 流体要素間の mass flux がある
 - 🥕 各「粒子」の質量は変化する
 - 🥕 SPH のように質量が変化しない方がうれしい場合も多い
 - 有限質量法
 - 🥕 GIZMO では mesh-free finite mass (**MFM**)
 - 🥕 流体要素を追跡したい場合に便利
 - 🥕 GIZMO ではこっちが default

MFM の実装

- 🥕 Lagrangian volume が面 A_{ij} の左右で質量が保存するように変形すると仮定
- 🥕 MFV では x_{ij} の速度 a_{ij} で動く座標系で, A_{ij} は静止しているものとして Riemann 問題を解いた (x_l と x_r に対する A_{ij} の相対位置が固定)
- 🥕 MFM では上記の座標系で A_{ij} が速度 S_* で動いていると仮定 (S_* は Riemann 問題における contact wave のスピード, star state velocity)
- 🥕 粒子間の mass flux が 0 になる.



GIZMO

- 🥕 流体 (SPH, MFM, MFV)
- 🥕 自己重力 (PM-Tree)
- 🥕 Cosmological
- 🥕 Non-cosmological
- 🥕 磁気流体 (MHD)
- 🥕 輻射輸送 (FLD, M1, etc.)

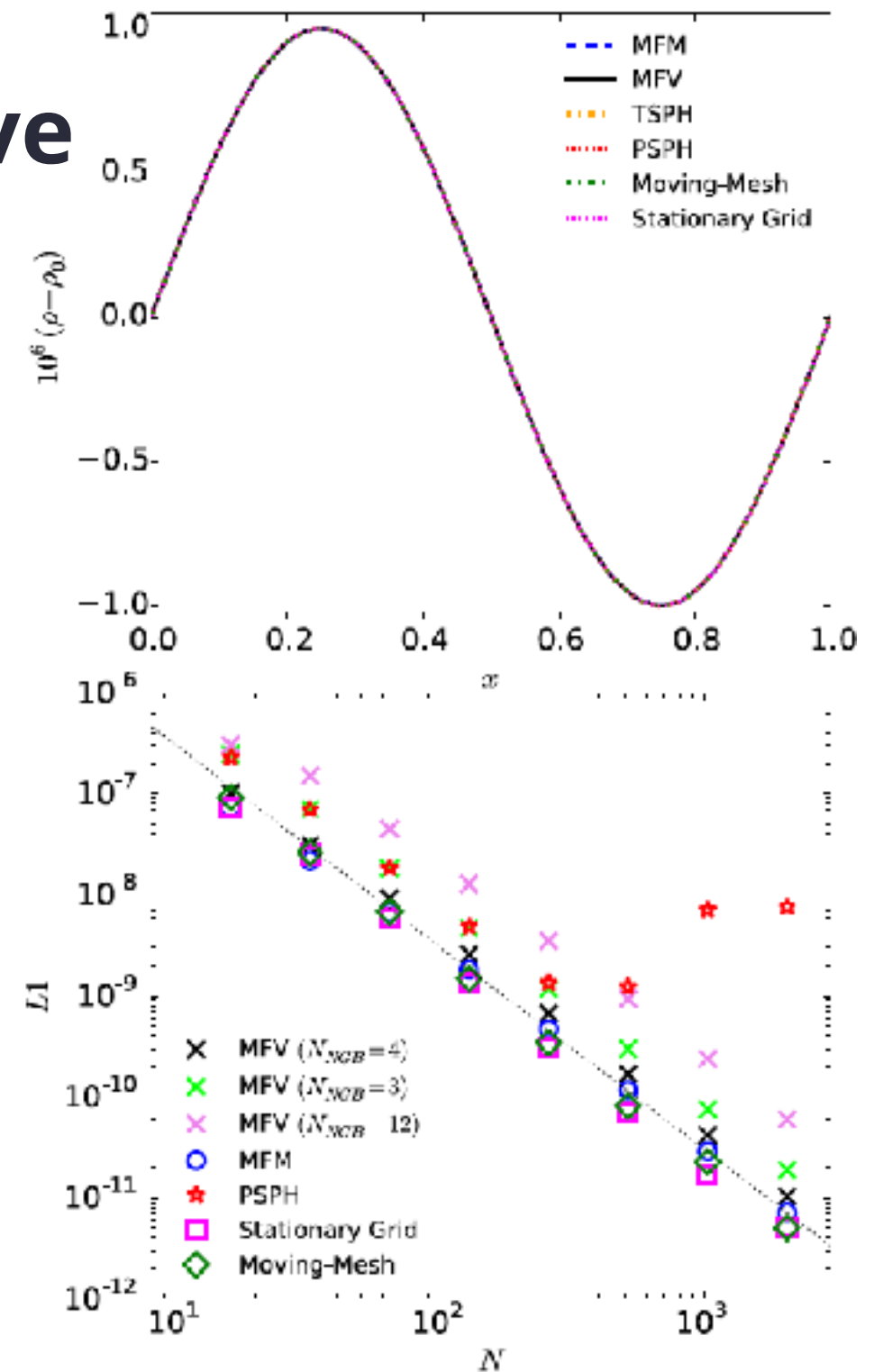


Linear traveling sound wave

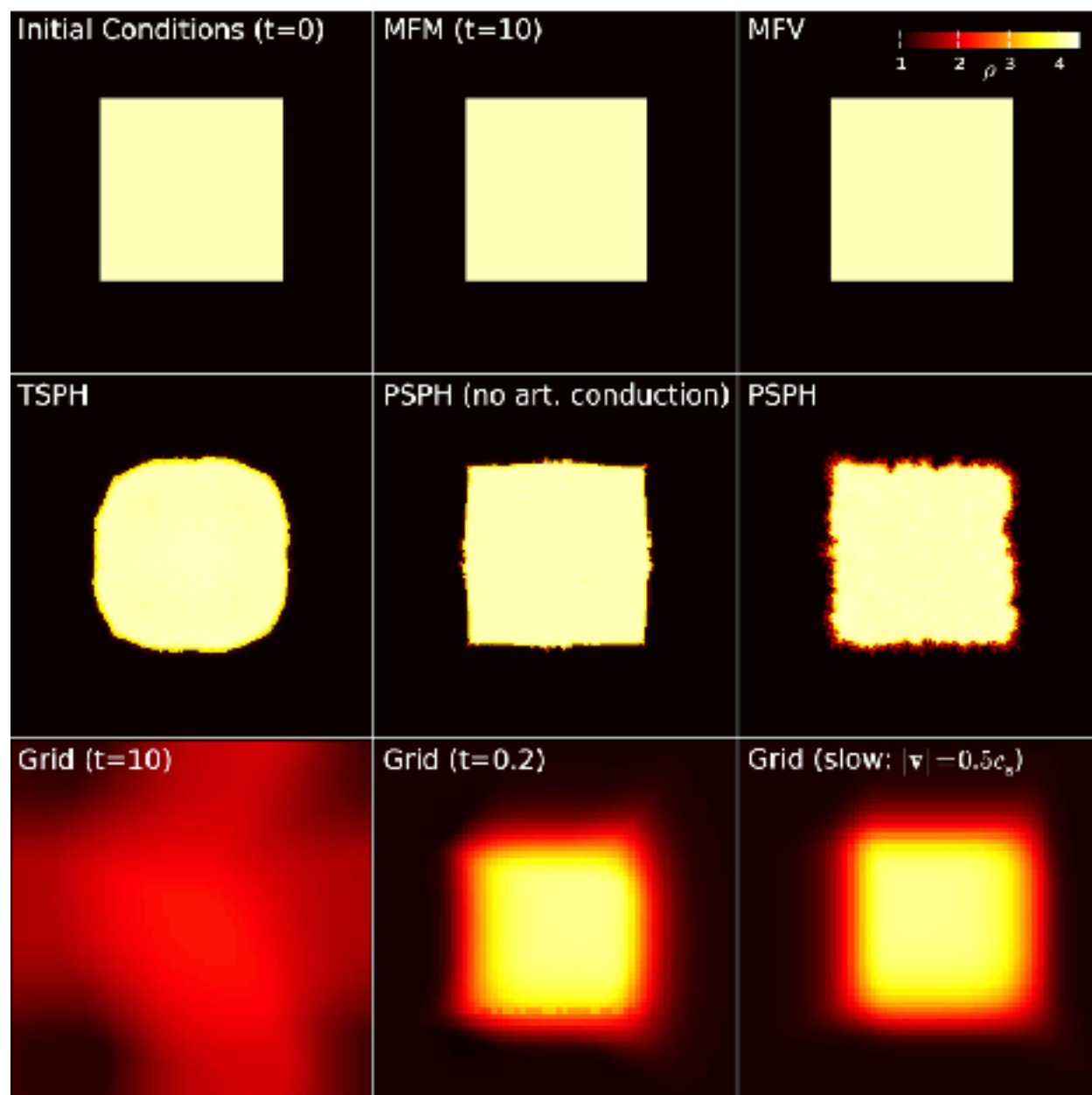
音波を 1 周期進化させて初期状態との差をみる

$$L1 = \frac{1}{N} \sum_i |\rho_i - \rho(x_i)|$$

MFV と MFM の振る舞いは二次精度



The square test



- 🥕 圧力平衡にある密度の異なる流体
- 🥕 64^2 粒子
- 🥕 流体全体が一様な速度 $v_x = 142.3, v_y = -31.4$ を持つ
- 🥕 静止した grid ではエラーがガリレイ普遍ではないため、数値拡散が見られる（ガリレイ不変性は粒子法の利点）

The Gresho vortex

Steady state triangular vortex of Gresho & Chan (1990)

$\rho = 1$

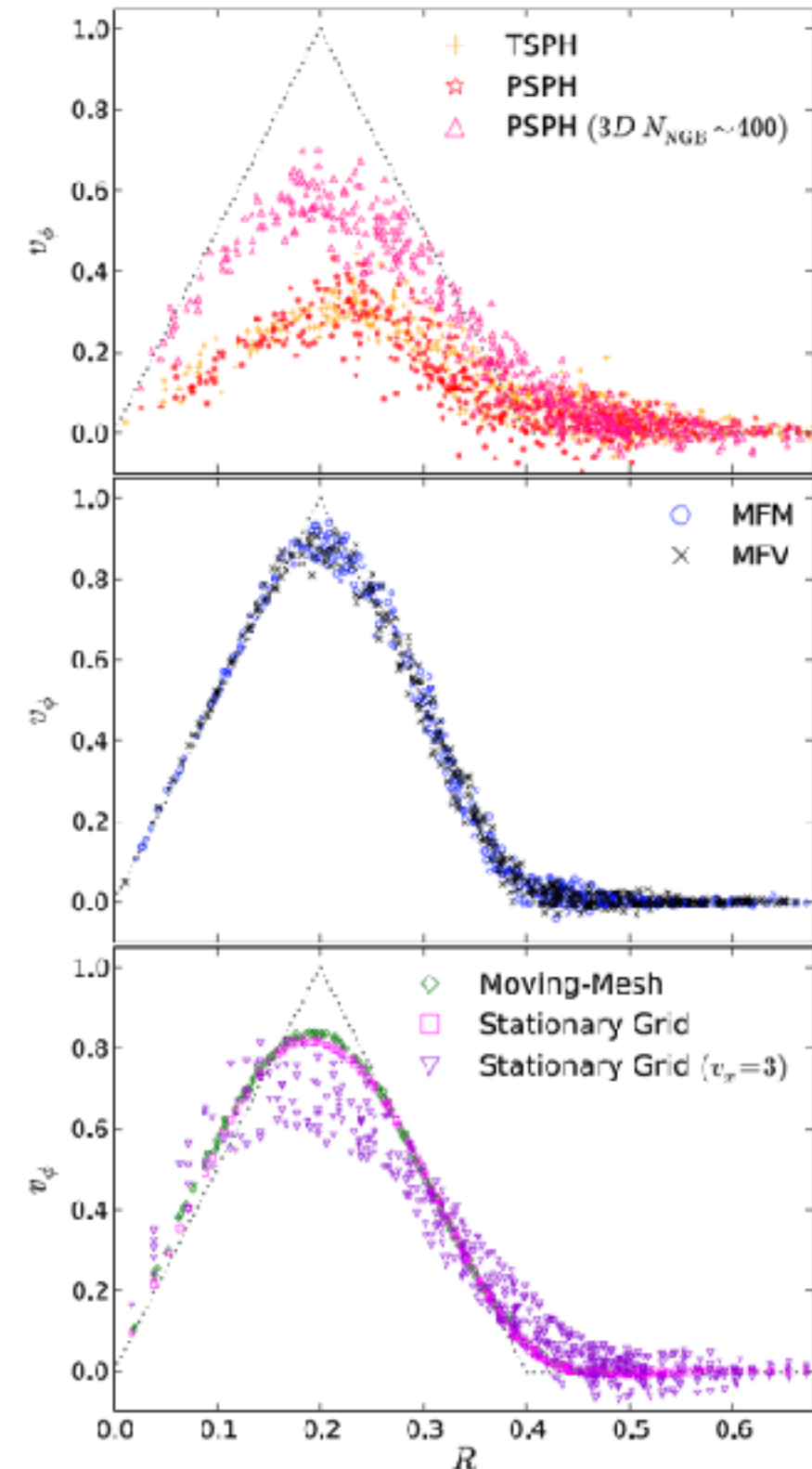
$0 < x < 1, 0 < y < 1$

動径方向の速度は 0

$$P(R) = \begin{cases} 5 + 12.5R^2 & (0 \leq R < 0.2) \\ 9 + 12.5R^2 - 20R + 4 \ln(5R) & (0.2 \leq R < 0.4) \\ 3 + 4 \ln 2 & (R \geq 0.4) \end{cases}$$

$$v_\phi(R) = \begin{cases} 5R & (0 \leq R < 0.2) \\ 2 - 5R & (0.2 \leq R < 0.4) \\ 0 & (R \geq 0.4) \end{cases}$$

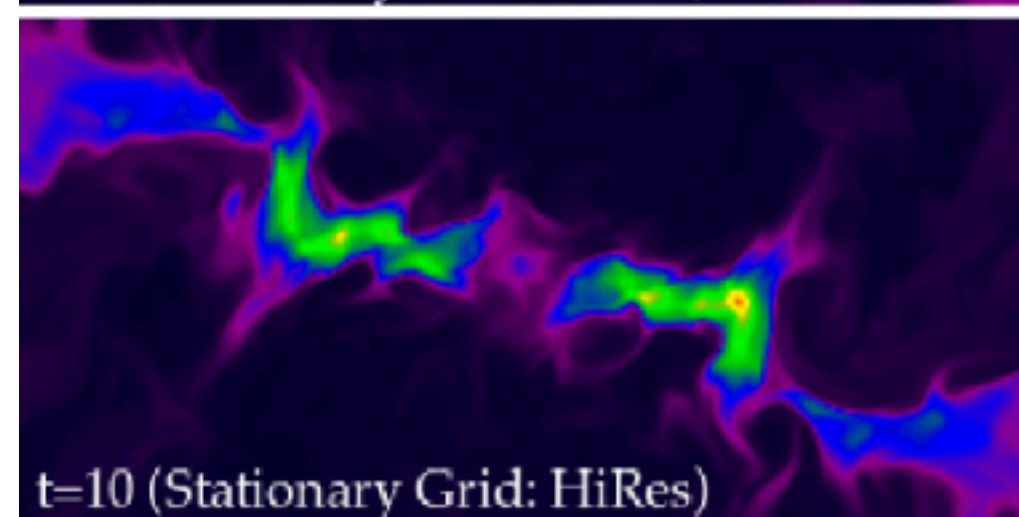
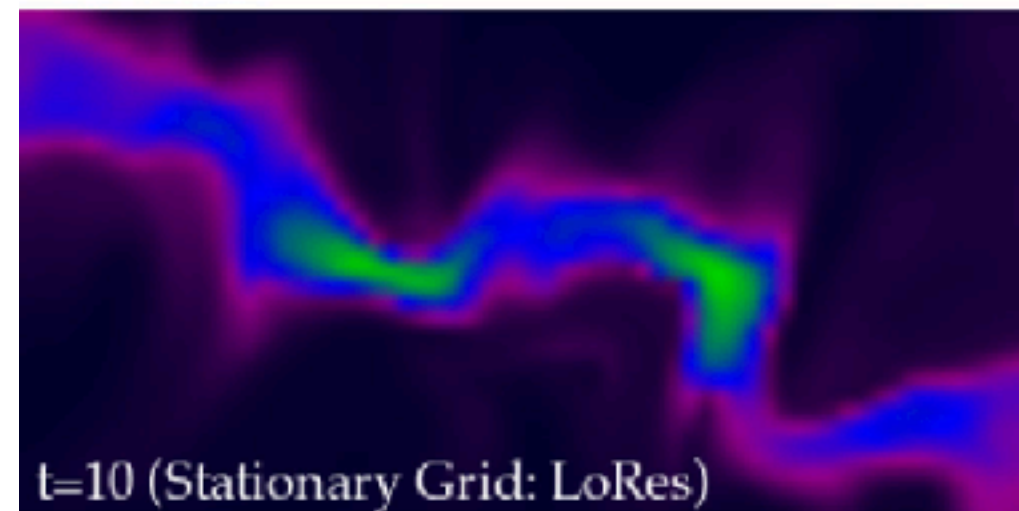
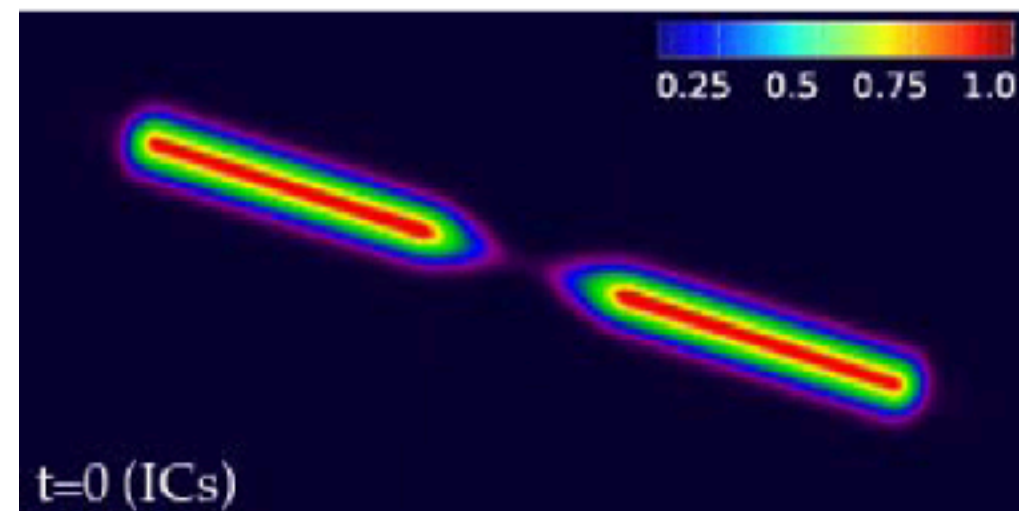
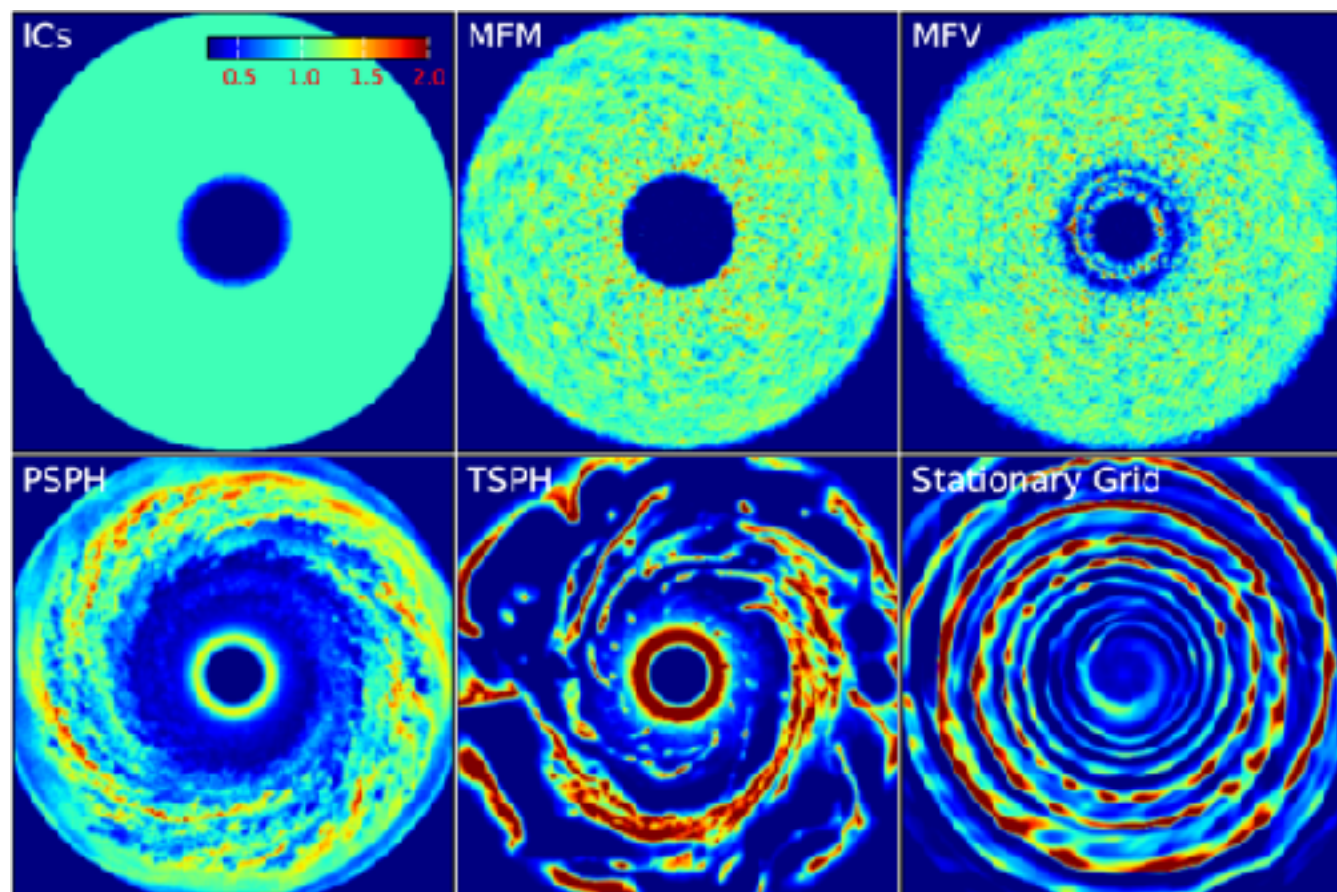
$t = 3$ (~2.4周期) 進化させる



ケプラー円盤

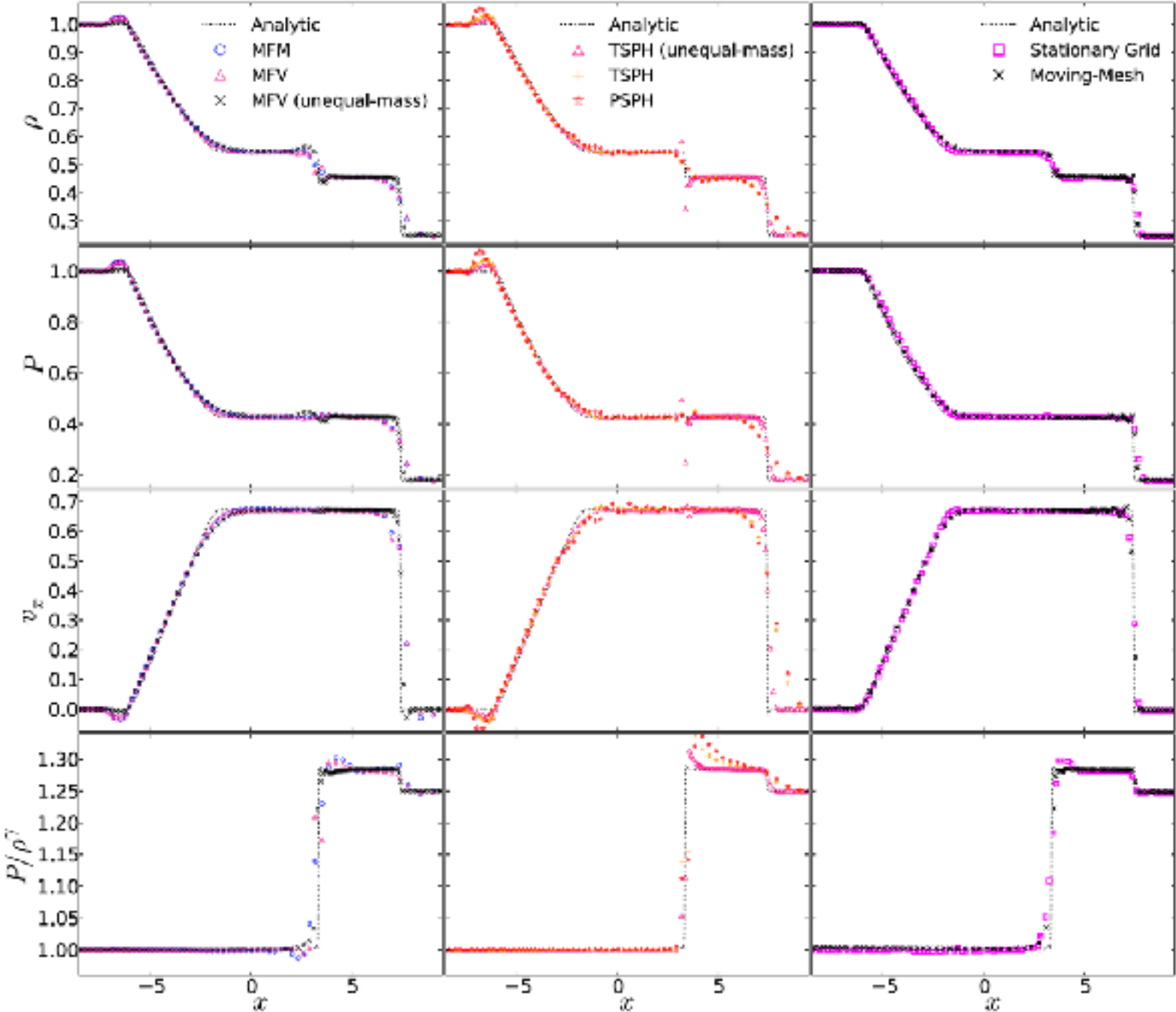
質点の周囲の一様密度の冷たいケプラー円盤

$t = 120$ (~20 orbits)



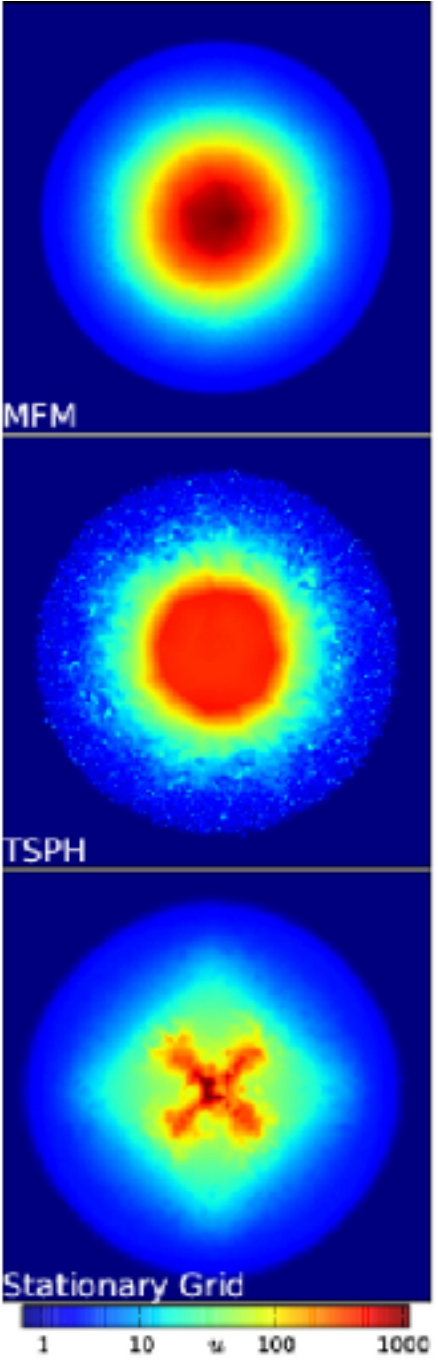
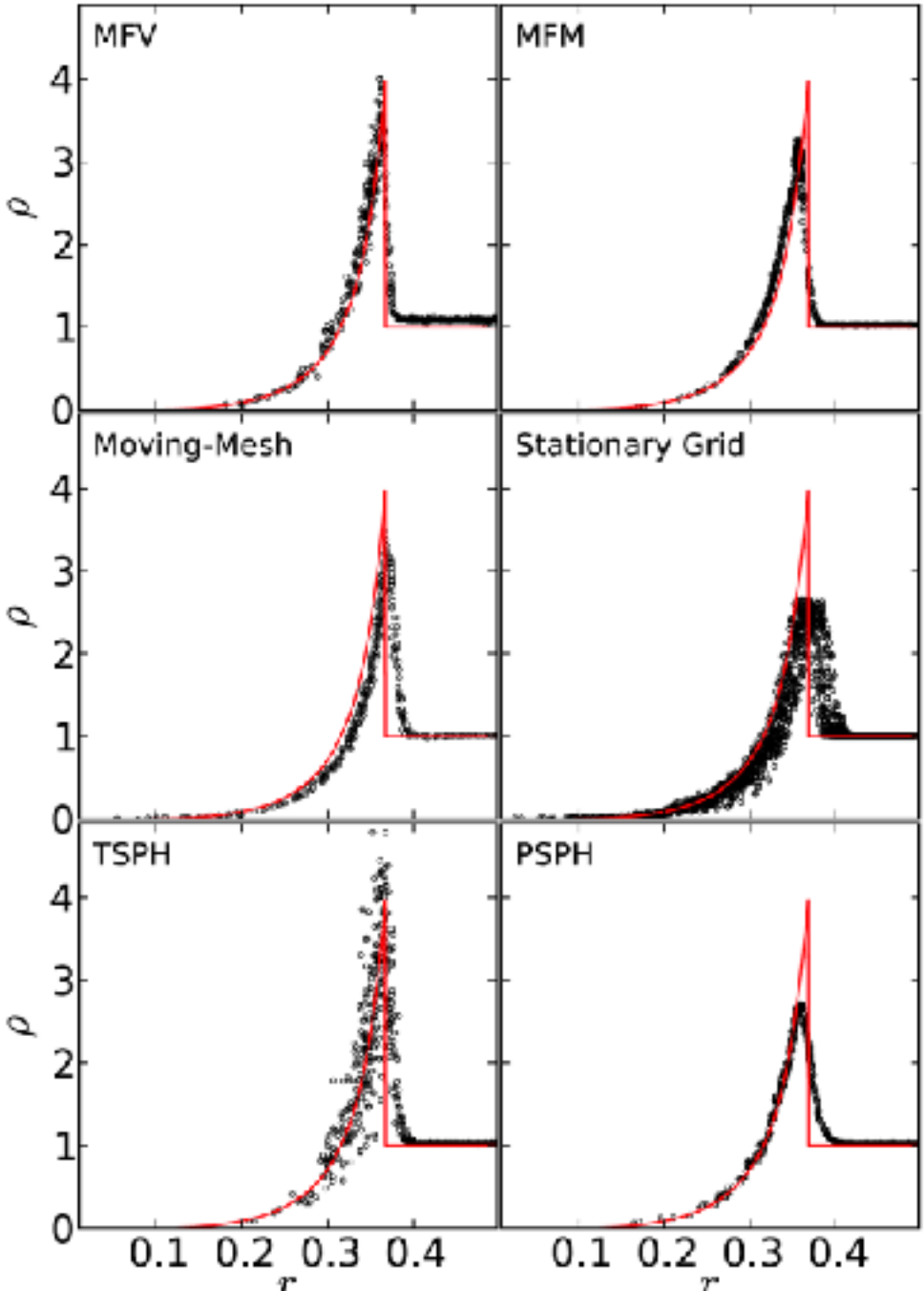
Sod shock-tube

- 🥕 定番
- 🥕 厳密解あり
- 🥕 Moving mesh, stationary grid の次に MFM と MFV は正確

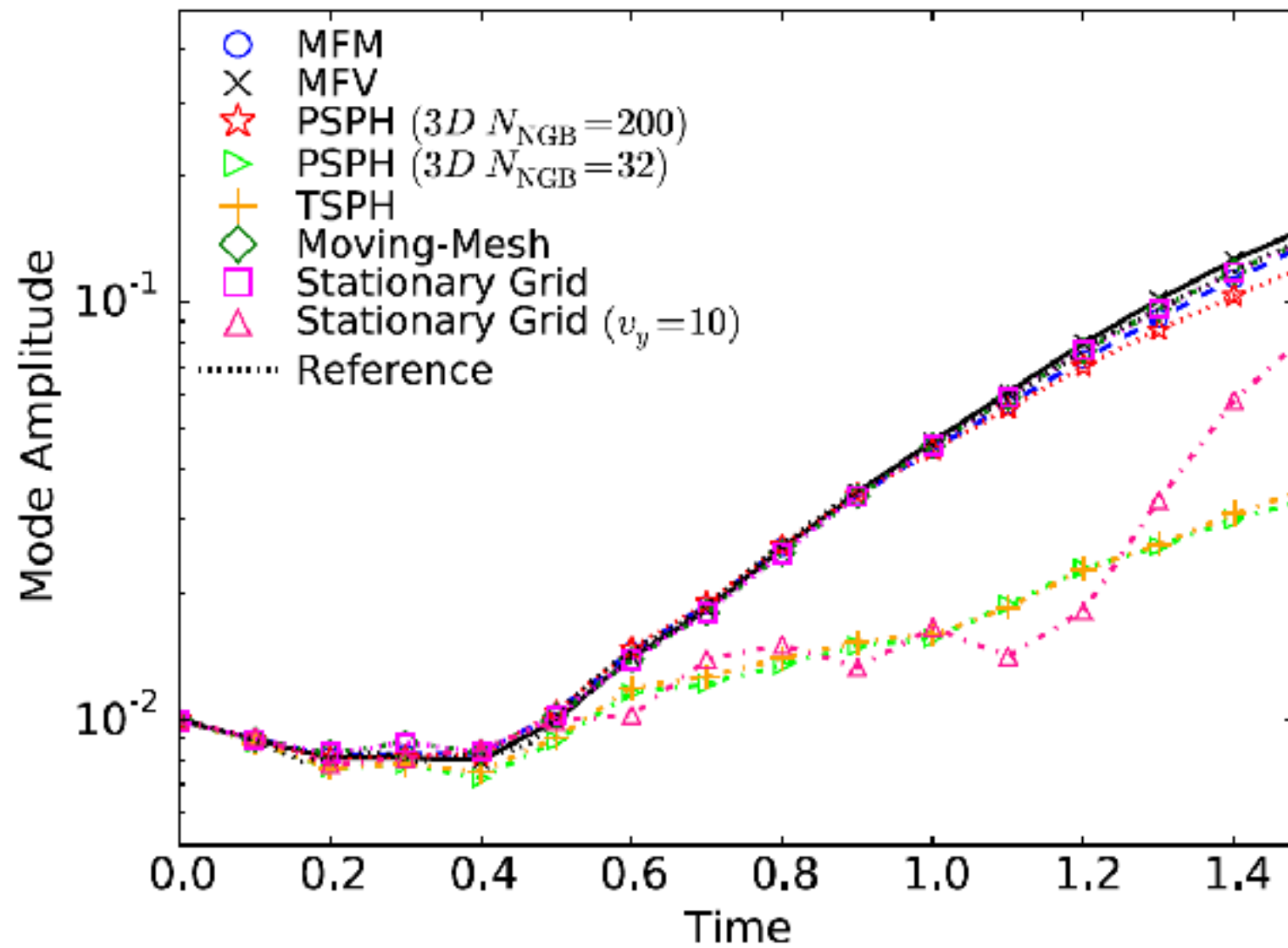
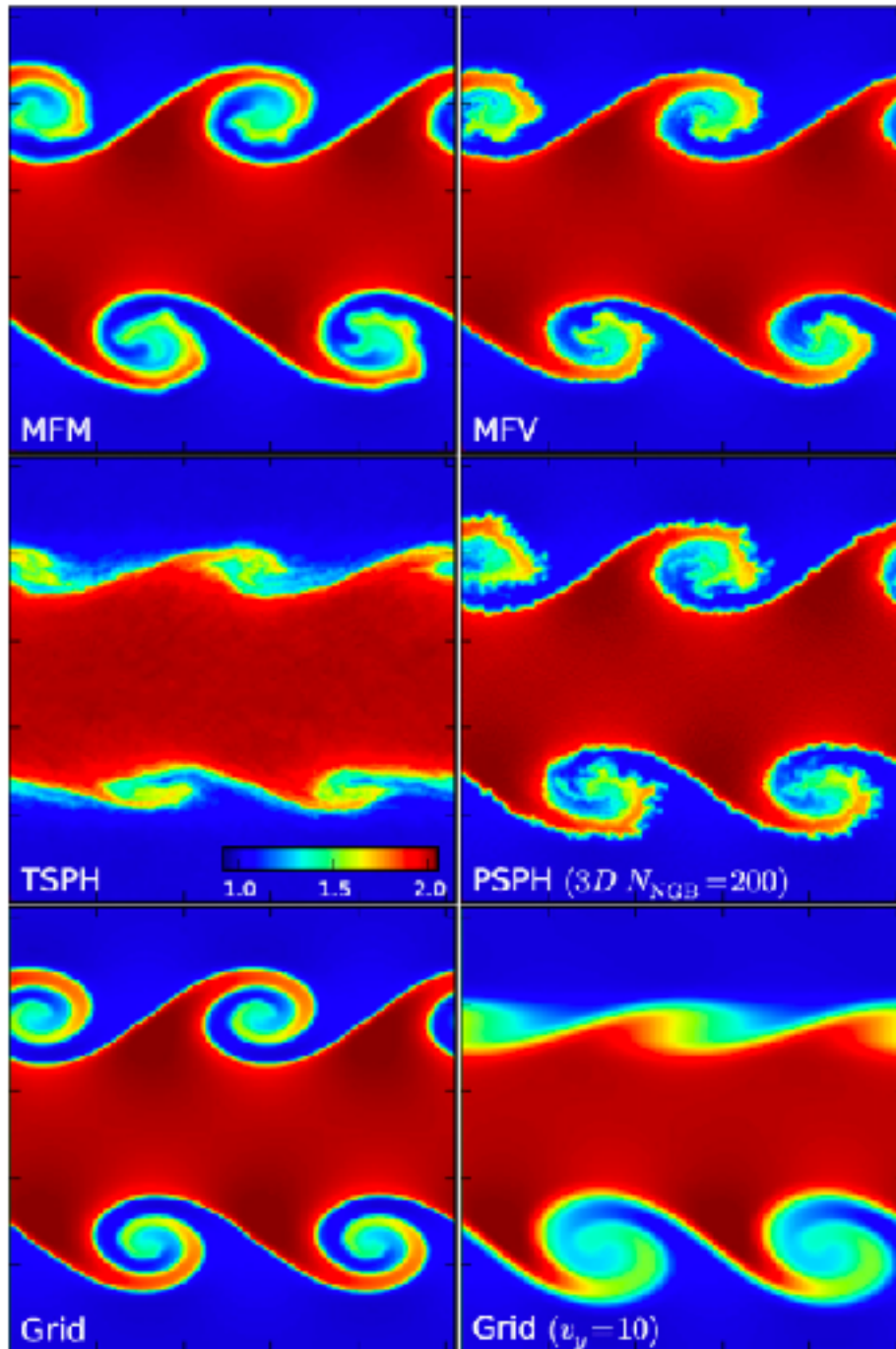


Sedov-Taylor expansion

- 🥕 点源爆発
- 🥕 解析解あり
- 🥕 stationary grid は grid の異方性が見えてしまう。

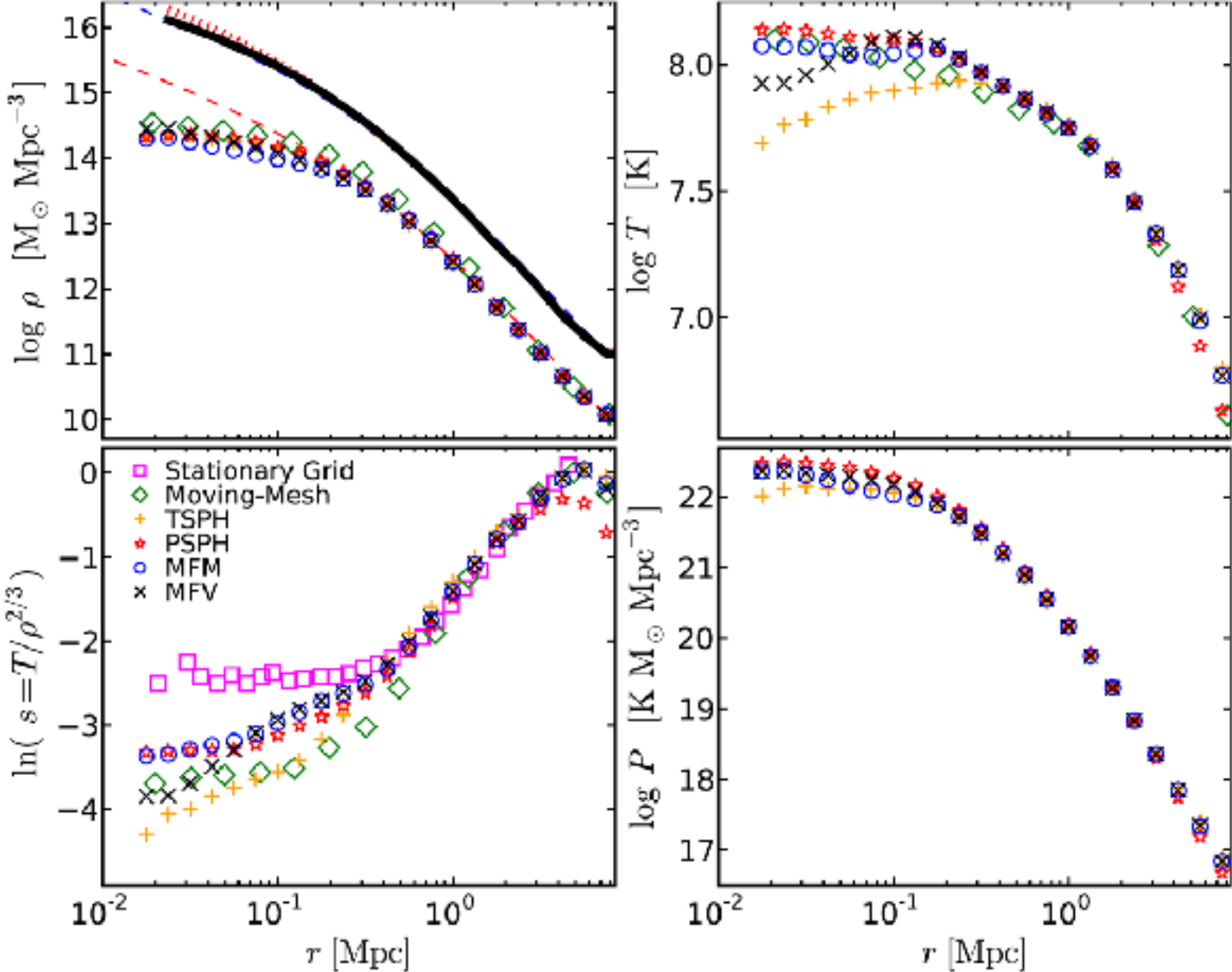


Kelvin-Helmholtz instability



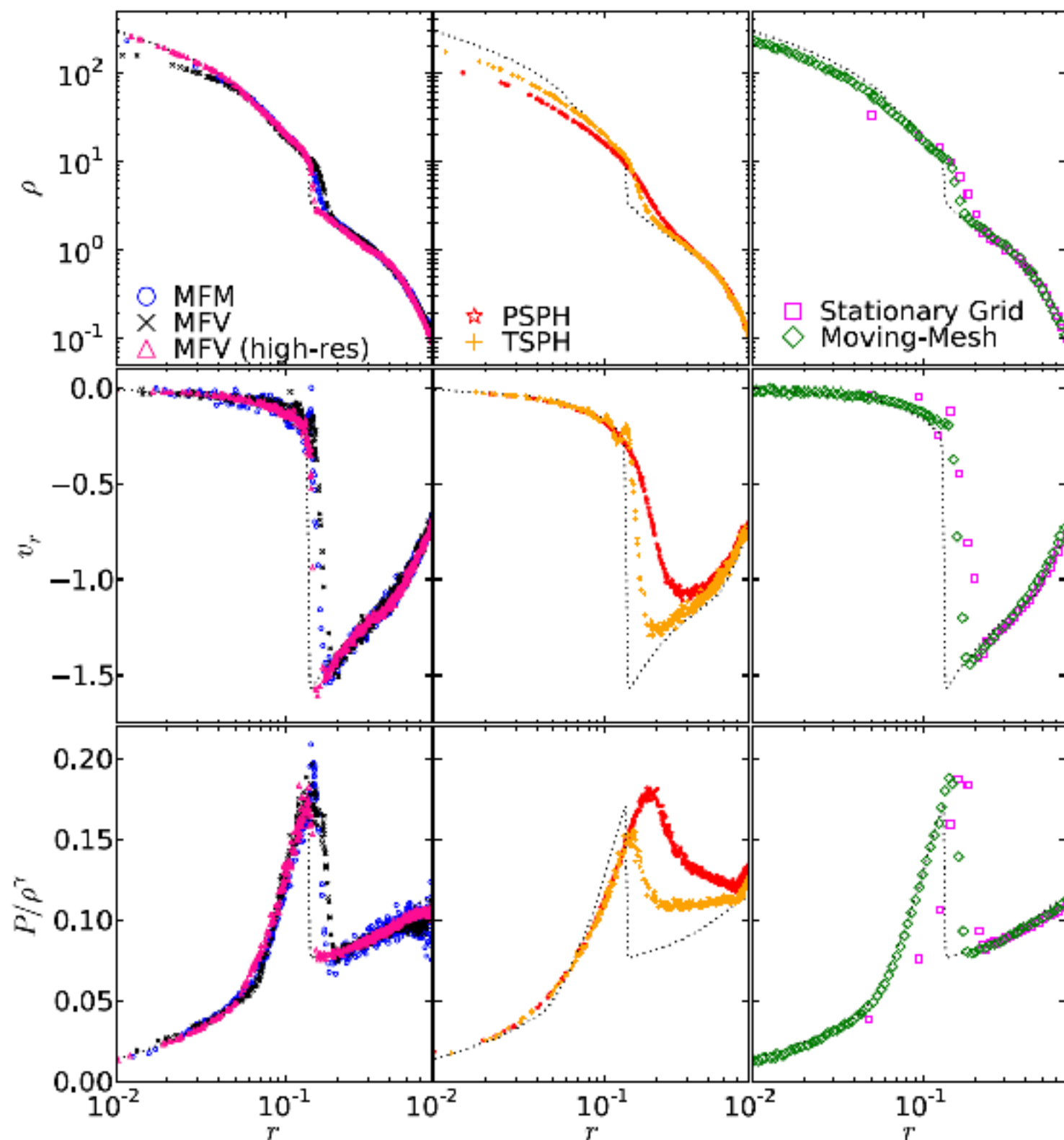
The Santa Barbara Cluster

- 宇宙論的な銀河団形成 (Frenk et al. 1999)
- SPH と mesh 法での entropy profile の違いは長い間議論になっていた。



球对称 collapse

- 🥕 $\gamma = 5/3, M = 1, R = 1$
- 🥕 $\rho(r) = (2\pi r)^{-1}$ for $r < R$
- 🥕 $u = 0.05$
- 🥕 $v = 0$
- 🥕 30^3 粒子





結論

🥕 Mesh-free 法

🥕 Moving-mesh 法より手軽で簡単

🥕 SPH より正確

🥕 特に利害関係者ではないので強く勧めたりはしませんが GIZMO には既に様々な物理が実装されているので遊んでみて下さい



🥕 銀河形成関係のモジュール

(FIRE2)は権利関係がうるさいので





参考文献

-  Lanson & Vila, 2008, SIAM J. NUMER. ANAL, 46, 1912
-  Gaburov & Nitadori, 2011, MNRAS, 414, 129
-  Hopkins, 2015, MNRAS, 450, 53 (code paper)
-  Arepo も公開されています
<https://arepo-code.org/>