

輻射輸送

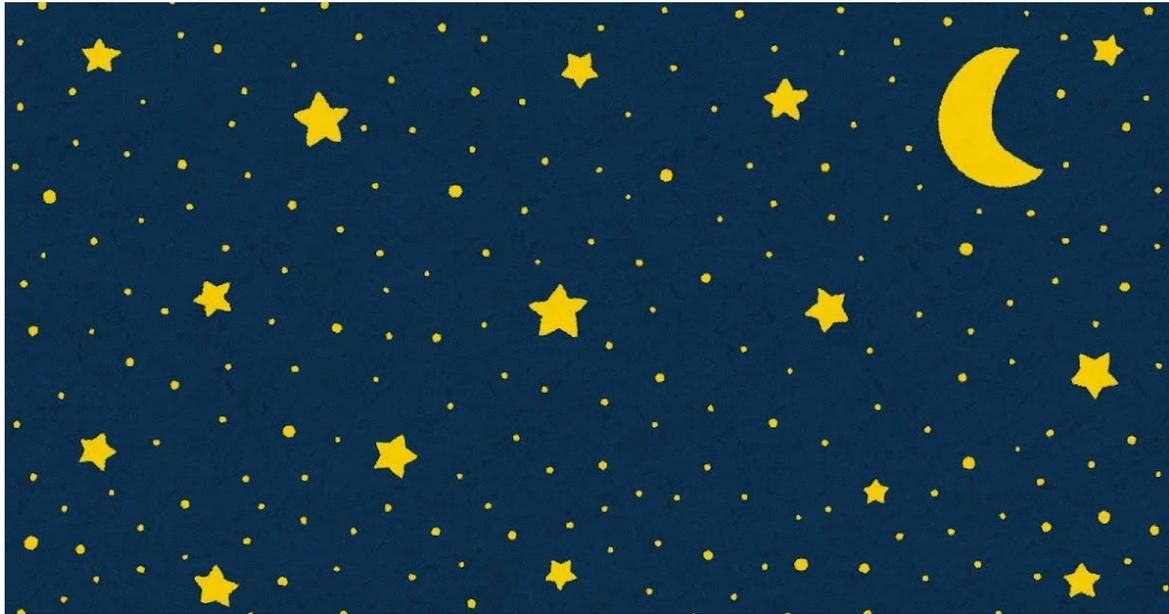
国立天文台CfCA 滝脇知也

この講義の趣旨

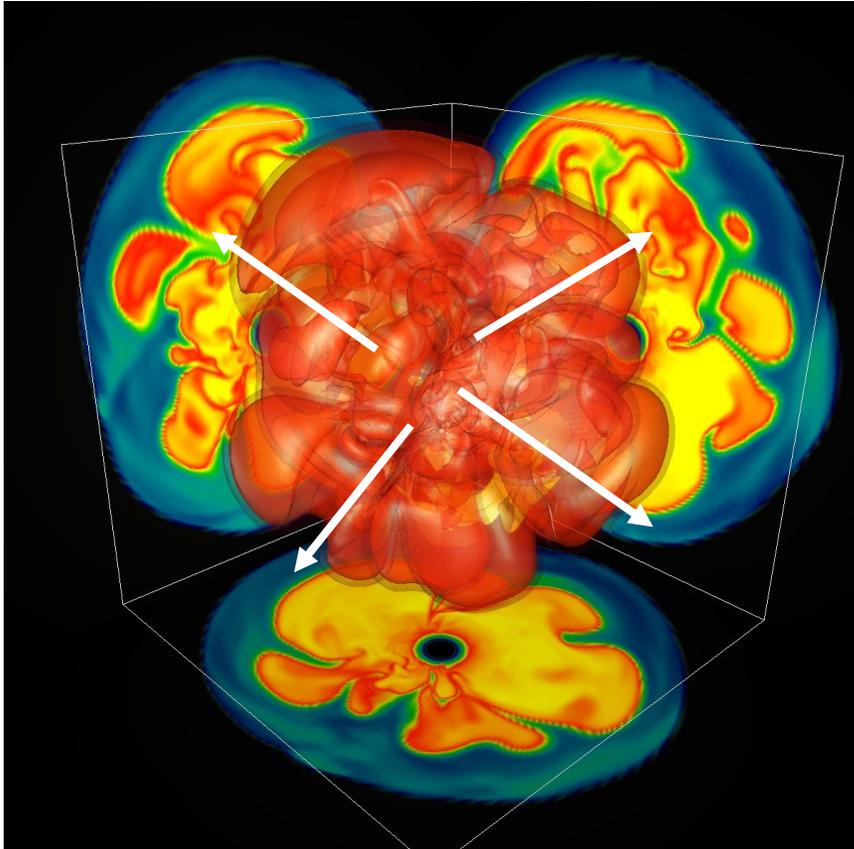
輻射流体シミュレーションのいろいろな手法について分かってもらう

輻射輸送

天体は基本的に光を発しており、天文学ではそれを観測することでその天体現象の性質を解明する。光の輸送を扱う輻射輸送は天文学にとって極めて重要。また、光は天体のエネルギー輸送を担うので、天体の熱史を考えるうえで極めて重要である。

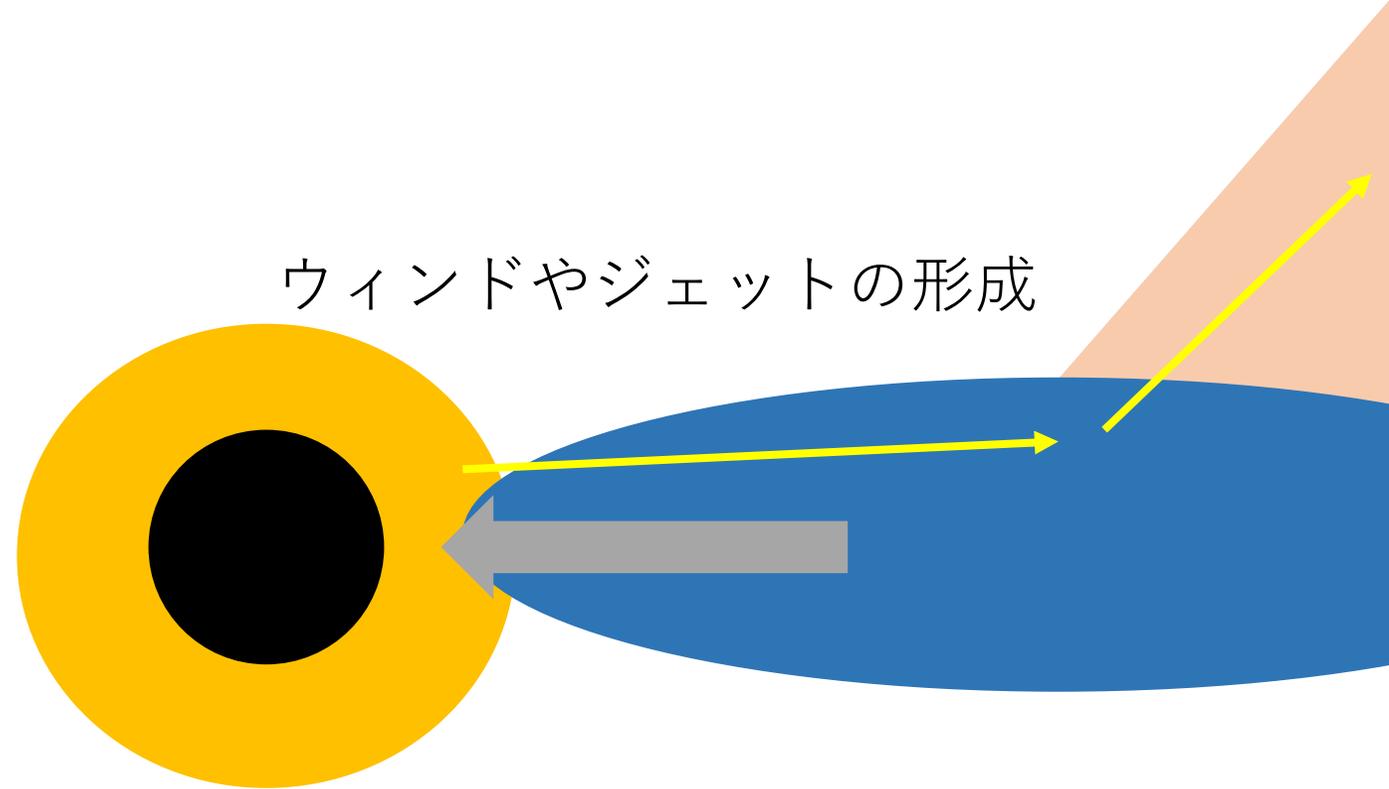


輻射が重要になる天体の例



超新星爆発, ニュートリノ加熱で爆発

Takiwaki et al. (2016)



ウィンドやジェットの形成

中心天体への降着、円盤
中心天体 = 原始星、中性子星、ブラックホール

輻射輸送計算（モーメント法）

輻射輸送を解く有望な方法として輻射流体シミュレーションがある。
物質の流体計算と同様な枠組みで計算することができる。

物質の流体計算

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\partial_t \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = 0$$

密度と運動量の方程式

輻射流体計算(モーメント法)

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

エネルギー密度と
エネルギーフラックスの方程式

圧力の部分が違うことに注意すること。

輻射輸送計算（モーメント法）

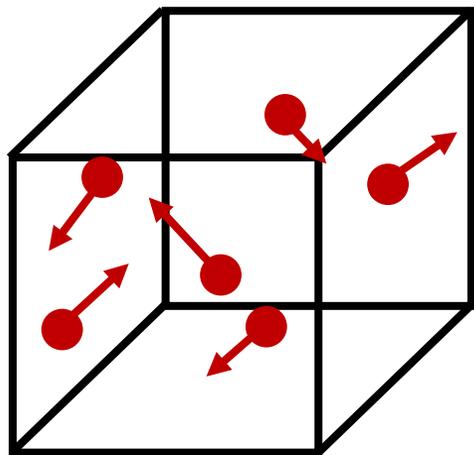
流体計算と相違点。物質との相互作用の強さによって振る舞いが違う。

光学的に**厚い**場所 = 物質との相互作用**強い** = 物質と**似た**運動

光学的に**薄い**場所 = 物質との相互作用**弱い** = 物質と**違う**計算

光学的に厚い場所

粒子の運動量が等方的。

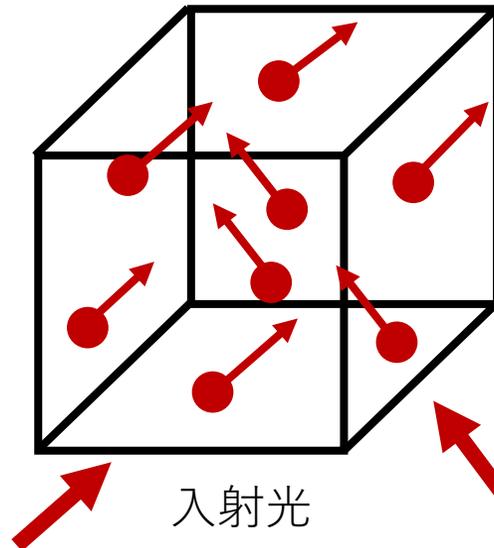


相互作用が強く
影響しあって
ランダム化(等方
向化)する。

(平均速度は差し引いている)

光学的に薄い場所

粒子の運動量が非等方的。

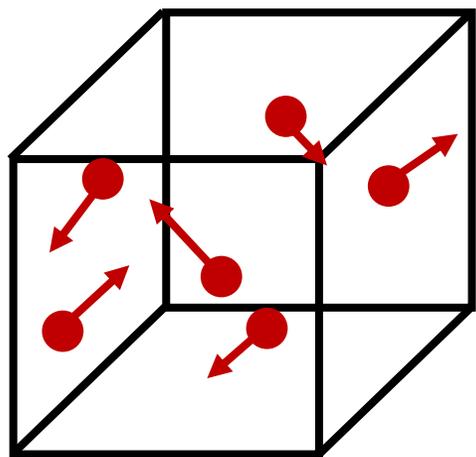


相互作用が弱く
もともとの運動量の
ままである。

輻射輸送計算（モーメント法）

光学的な厚さの違いは圧力テンソルの違いに反映される

粒子の運動量が等方的。

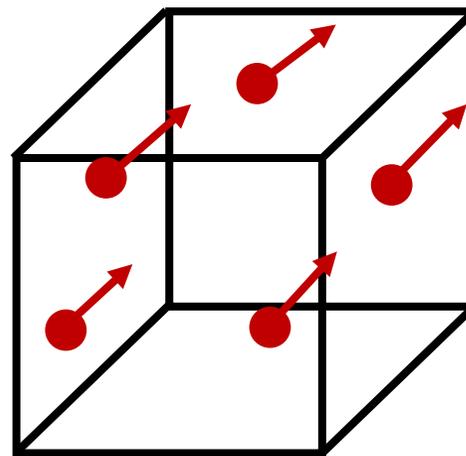


相互作用が強いので影響しあって等方化する。

$$\mathbf{p} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

流体だと状態方程式で
圧力（スカラー）が分かる

粒子の運動量が非等方的。



相互作用が弱いので
もともと持っていた
運動量のままでいる。

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

輻射流体には圧力テンソルが必要（後述）。

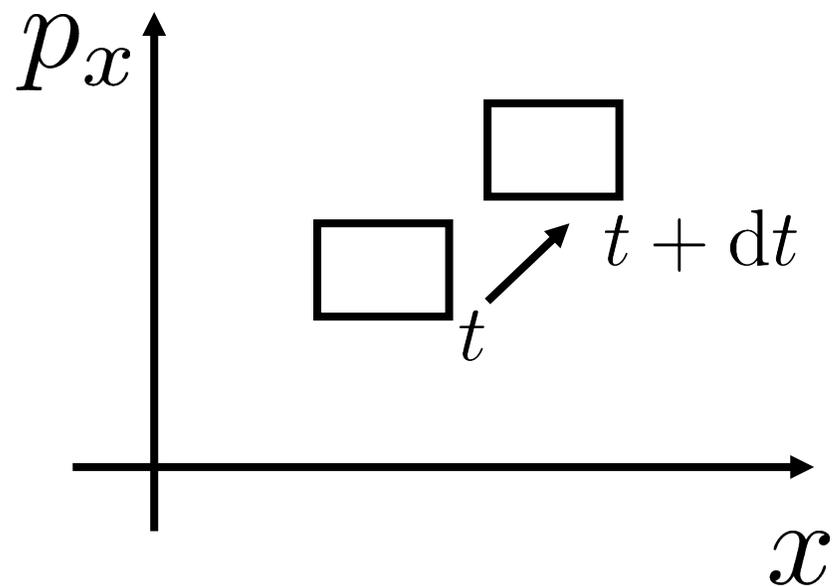
輻射輸送計算の基礎

輻射流体の方程式は近似された式。

原理的な式はボルツマン方程式と呼ばれる分布関数に関する方程式。

密度: $dx dy dz$ の中に含まれる粒子の数

分布関数: $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$ の中に含まれる粒子の数



粒子数保存 (運動量空間も考慮)

$$f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}dt, \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}dt, t + dt) - f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0$$

$$\partial_t f + \dot{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \partial_{\mathbf{p}} f = 0$$

$$\partial_t f + \underset{\text{速度}}{\mathbf{v}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \underset{\text{重力}}{\mathbf{F}_{\text{grav}}} \cdot \partial_{\mathbf{p}} f = 0 \quad \text{ボルツマン方程式}$$

輻射輸送計算の基礎

ボルツマン方程式を輻射の方程式に直していく。

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F}_{\text{grav}} \cdot \partial_{\mathbf{p}} f = 0$$

重力を無視して光速で割る。 $\mathbf{v} = \mathbf{n}c$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

輻射の方程式では分布関数よりも輻射強度(intensity)を用いる。

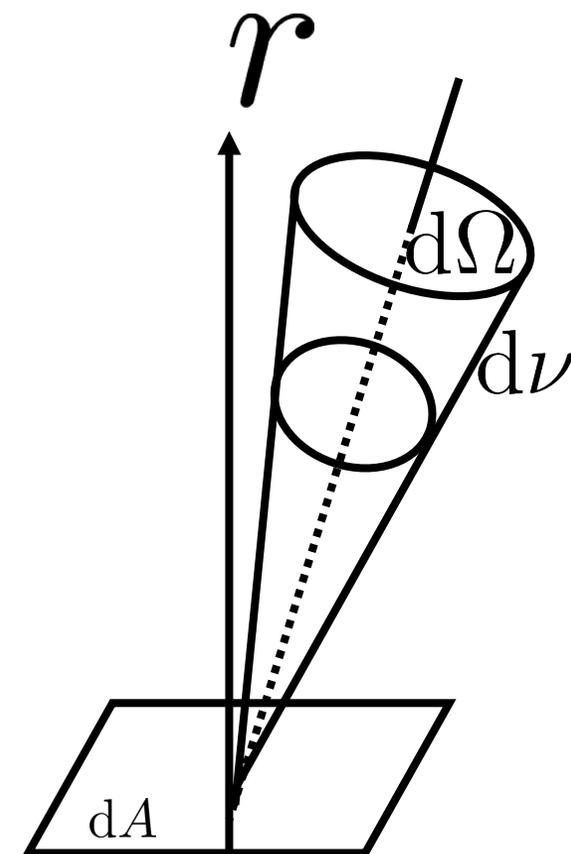
$$\mathcal{I} = \frac{\nu^3}{(\hbar c)^3} f$$

意味は以下。左辺は運ばれるエネルギーの総量。

$$dE = \mathcal{I} dA dt d\Omega d\nu$$

単位は energy/time/area/solid angle/frequency

$$\mathcal{I} [\text{erg/s/cm}^2/\text{sr/Hz}]$$



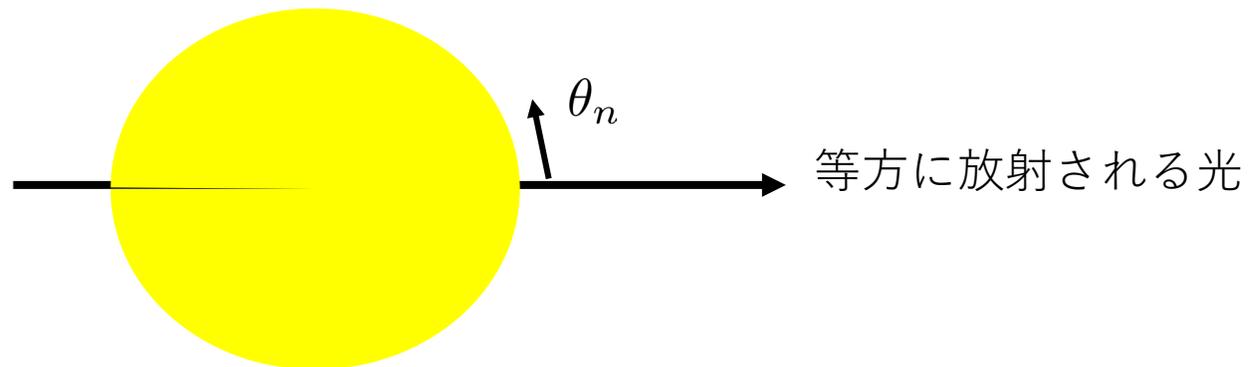
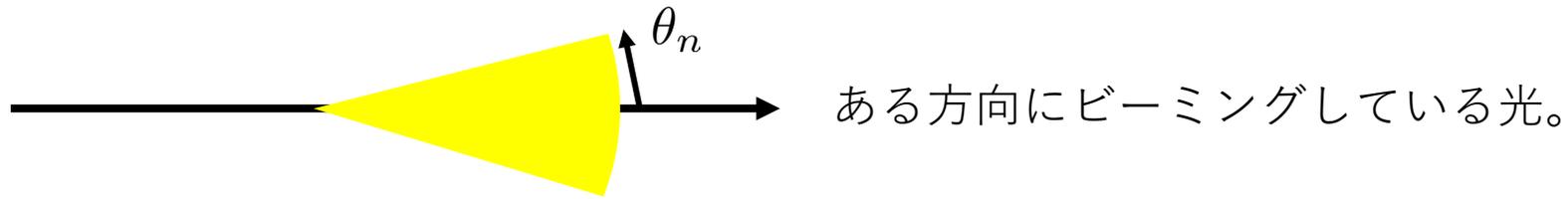
運動量空間

輻射輸送計算の基礎

$$\mathcal{I}(x, y, z, \nu, \theta_n, \phi_n) [\text{erg/s/cm}^2/\text{sr/Hz}]$$

$$dE = \mathcal{I} dA dt d\Omega d\nu$$

空間 x, y, z 地点において周波数 ν の光が θ_n 方向に進む（その分だけいなくなる）光の強さ。



輻射輸送計算の基礎、モーメント法

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{I} = 0 \quad \mathcal{I} [\text{erg/s/cm}^2/\text{sr/Hz}]$$

エネルギーフラックスは以下のように定義される。

$$F_i = \iint n_i \mathcal{I} d\Omega d\nu [\text{erg/cm}^2/\text{s}]$$

エネルギーEが光速で輸送されると思うと

$$E = \frac{1}{c} \iint \mathcal{I} d\Omega d\nu [\text{erg/cm}^3]$$

上記の積分により輻射流体の方程式を得る

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

単位ベクトルを書けて積分する

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zi}}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

ストレステンソルは以下のように定義される。

$$P_{ij} = \frac{1}{c} \iint n_i n_j \mathcal{I} d\Omega d\nu [\text{erg/cm}^3]$$

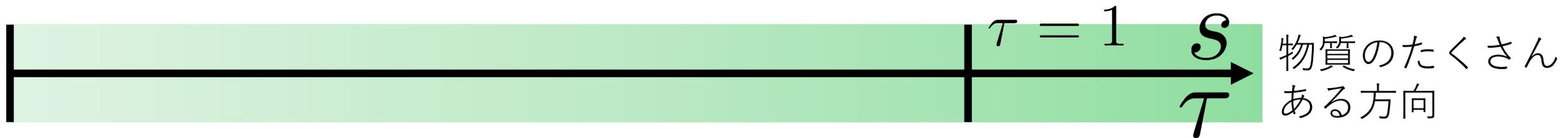
(EとPは同じ単位のほうが、あとあとやりやすい
この段階ではc^2をかけた定義のほうが自然に見える
だろうが)

物質と輻射の相互作用(吸収)

物質と輻射の相互作用が右辺のソースタームに現れる。
簡単のため定常、空間1次元の問題を考える。

ソースタームが吸収(absorption)だけの場合。
吸収とは物質に光が吸収されるような反応。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathcal{I} = j - \alpha \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{I}}{ds} = -\alpha \mathcal{I}$$



$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \exp(-\alpha s) = \mathcal{I}_0 \exp(-\tau) \quad \tau < 1 \text{ 光学的に疎(optically thin)}$$

$\tau = \alpha s$ 光学的距離

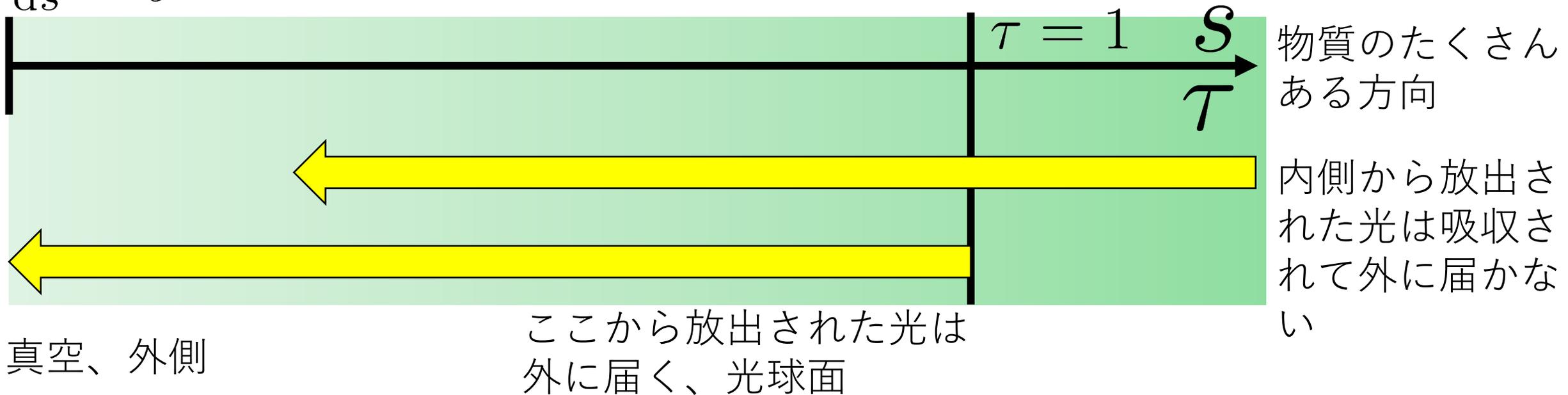
$\tau > 1$ 光学的に密(optically thick)

$\tau = 1$ となる s は平均自由行程と呼ばれる。

物質と輻射の相互作用(放出)

ソースタームが吸収 + 放出(emission)の場合。
放出とは物質が光を放出されるような反応。

$$\frac{d\mathcal{I}}{ds} = j - \alpha\mathcal{I}$$



物質と輻射の相互作用(散乱)

ソースタームが散乱(scattering)の場合。
 散乱は光の運動方向を変える。
 一方向に集中した光の運動を等方向に
 均す働きをする。

$$\frac{d\mathcal{I}}{ds} = -\sigma \left(\mathcal{I} - \int \mathcal{I} d\Omega / 4\pi \right)$$

角度平均からのズレ

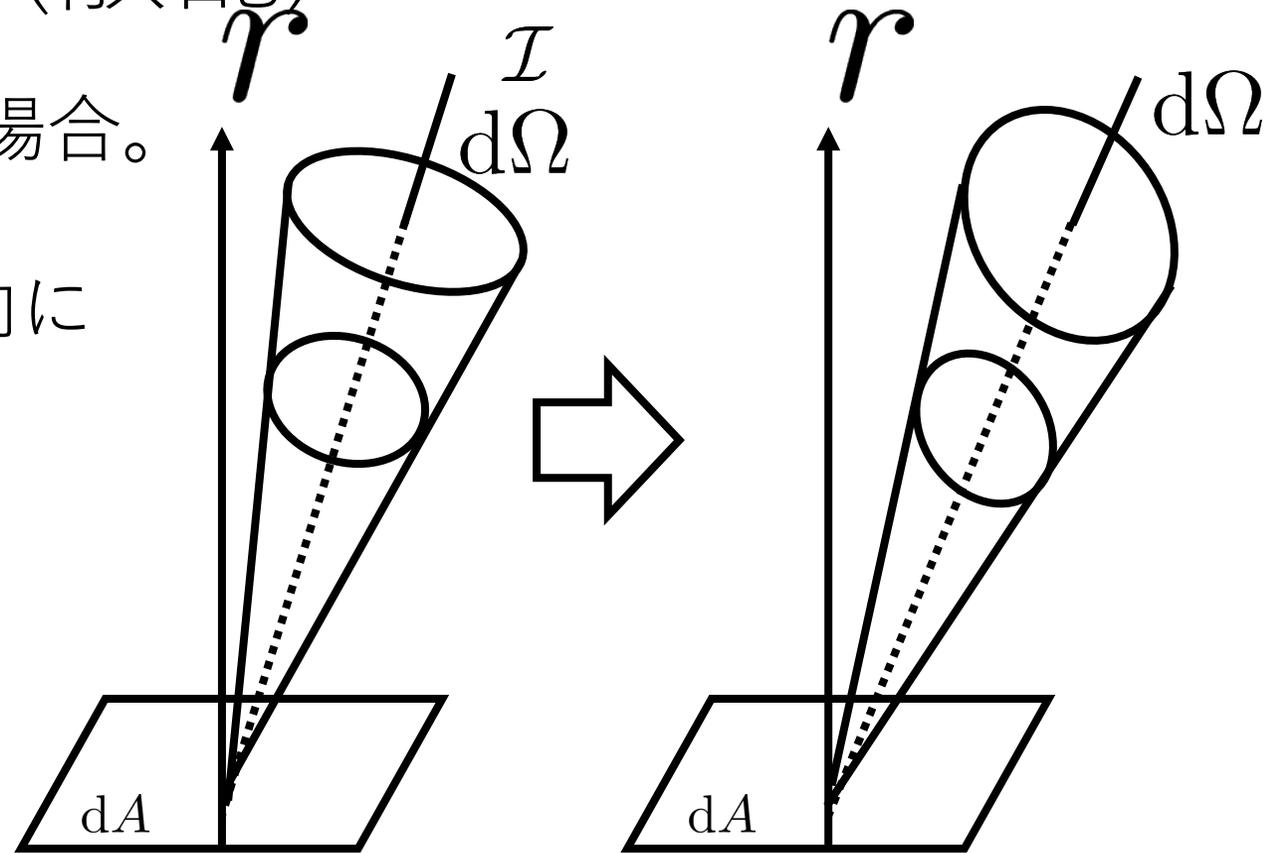
吸収の時と同様に以下の量が定義できる

$\tau = \sigma s$ 光学的距離

$\tau = 1$ となるsは平均自由行程と呼ばれる。

$\tau < 1$ 光の強度分布が等方向化していない

$\tau > 1$ 光の強度分布が等方向化している=> P_{ij} ストレステンソルが等方。



物質と輻射の相互作用

物質と輻射の相互作用が右辺のソースタームに現れる。

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = Q_0$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

物質の方程式もエネルギー保存と運動量保存を満たすようなタームが入る。

$$\partial_t e_{\text{tot}} + \nabla \cdot ((e_{\text{tot}} + p)\mathbf{v}) = -Q_0$$

$$\partial_t \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = -\mathbf{Q}$$

輻射場 + 流体場はエネルギー保存と運動量保存を満たす。

いろいろな輻射の解き方

- 物質だけ解いて冷却タームだけ入れる
- Flux-limited diffusion
- M1-Closureスキーム
- ボルツマン方程式、輻射強度方程式

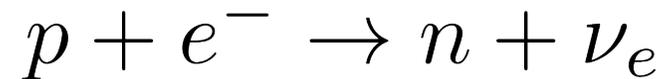
冷却ターム (光学的に薄い場合)

物質の方程式に冷却タームのみ入れる。輻射の運動は解かない。
昔はよくやられていた。今でもアイデアとしては重要。

$$\partial_t e_{\text{tot}} + \nabla \cdot ((e_{\text{tot}} + p)\mathbf{v}) = -Q_0$$

光学的に薄い場合、 Q_0 は単純な冷却率。

例えば大質量星の中でニュートリノ放出。



$$Q \sim 232 \times 10^{-6} \frac{\rho}{m_u} \left(\frac{kT}{2\text{MeV}} \right)^6 [\text{erg/cm}^3/\text{s}] \quad (\text{Janka 2001})$$

冷却率は素粒子物理に基づく計算で求めて、それを天文で使いやすいような公式にすることが多い。

冷却ターム (光学的に厚い場合) leakage scheme

光学的に厚い場合、

Q_0 は平衡状態にあるものが拡散時間かけて外にでてくると近似。

$$Q_0 = \frac{E_{\text{equiv}}}{\tau_{\text{diff}}}$$

周波数依存性がある方程式

$$\partial_t E_\nu + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu$$

平衡状態を仮定、左辺はゼロ。

$$E_\nu = \frac{j_\nu}{c\kappa_\nu} \propto \nu^3 \exp\left(\frac{-\nu}{kT}\right)$$

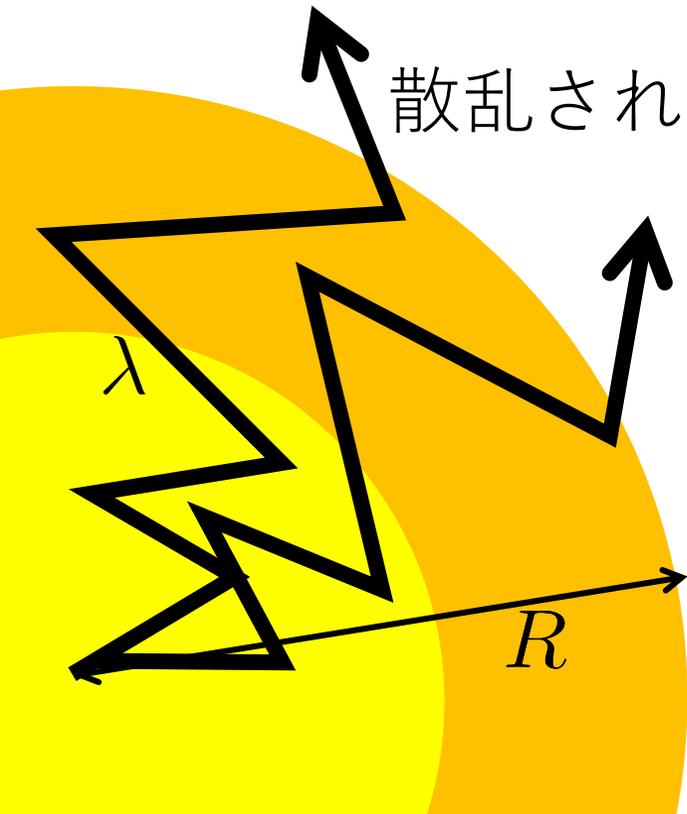
ここでMaxwell Boltzmann分布が出てくる理由は難しいので省略。

$$E_{\text{equiv}} = \int d\nu E_\nu$$

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{3R^2}{\pi^2 c \lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} \text{ は平均自由行程}$$

散乱されながら出てくる



輸送方程式を解く

輻射の輸送方程式を解いていく。流体は動かないとする。

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

$$\partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -c\kappa_{\text{sc}} \mathbf{F}$$

拡散近似

光学的に厚い場合の解き方

$$\partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -\kappa_{\text{sc}} c \mathbf{F}$$

$$\longrightarrow c^2 \nabla \frac{E}{3} = -\kappa_{\text{sc}} c \mathbf{F}$$

$$\longrightarrow \mathbf{F} = -\frac{c}{3\kappa_{\text{sc}}} \nabla E$$

運動量が等方向化して
エネルギーだけで書ける。

$$\mathbf{P} = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \frac{E}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

$$\longrightarrow \partial_t E - \nabla \cdot \left(\frac{c}{3\kappa_{\text{sc}}} \nabla E \right) = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

拡散方程式 エネルギーの方程式のみ解く

Flux-limited diffusion (FLD)

光学的に薄い近似では運動量が一方方向に集中する。

$$\mathbf{F} = E c \mathbf{n} \quad \mathbf{n} = -\frac{\nabla E}{|\nabla E|}$$

光学的に厚い近似では等方。

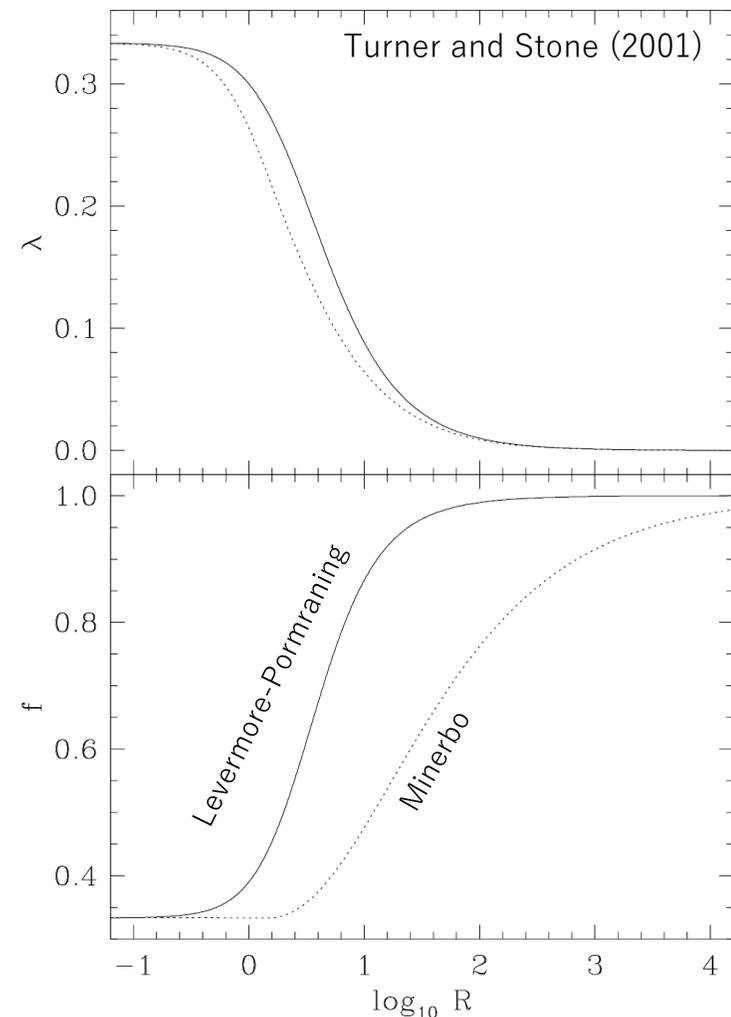
$$\mathbf{F} = -\frac{c}{3\kappa_{\text{sc}}} \nabla E$$

光学的に厚い近似と光学的に薄い近似をつなげる。

$$\mathbf{F} = -\frac{c\lambda}{\kappa_{\text{sc}}} \nabla E \quad R = \frac{|\nabla E|}{\kappa_{\text{sc}} E}$$

$$\lambda(R) = \begin{cases} \frac{1}{3} & R \rightarrow 0 \\ \frac{1}{R} & R \rightarrow \infty \end{cases} \quad \lambda(R) = \frac{2+R}{6+3R+R^2} \quad \text{関数形はいくつか提案がある (Levermore-Pomraning, Minerbo, etc).}$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E \quad \text{エネルギーの方程式のみ解く}$$



M1-Closure

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

$$\partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -c\kappa_{\text{sc}} \mathbf{F}$$

エネルギーとフラックスの方程式を解く。圧力をE,Fから推測する。

$$\mathbf{P} = \frac{3(1-\chi)}{2} \mathbf{P}_{\text{thick}} + \frac{3\chi-1}{2} \mathbf{P}_{\text{thin}} \quad \mathbf{P}_{\text{thick}} = \frac{E}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{\text{thin}} = E \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

x方向にフラックスが強いとして

$$f = \frac{|F|}{Ec} \quad \chi = \frac{3+4f^2}{5+2\sqrt{4-3f^2}} \quad \chi = \begin{cases} \frac{1}{3} & f \rightarrow 0 \\ 1 & f \rightarrow 1 \end{cases}$$

関数形はいくつか提案がある(Levermore-Pomraning, Minerbo, etc)。

M1-Closure

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

$$\partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -c\kappa_{\text{sc}} \mathbf{F}$$

エネルギーとフラックスの方程式を解く。圧力をE,Fから推測する。

$$\mathbf{P} = \frac{3(1-\chi)}{2} \mathbf{P}_{\text{thick}} + \frac{3\chi-1}{2} \mathbf{P}_{\text{thin}}$$

$$\mathbf{P}/E = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{このkをエディントンテンソルと呼ぶ}$$

Variable Eddington factor

$$\partial_t \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} \mathbf{E}$$

$$\partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -\kappa_{\text{sc}} c \mathbf{F}$$

Intensityも簡単に計算してそこからエディントンテンソルを計算してしまう。そこからPを推定する。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathcal{I} = j - \alpha I - \sigma \left(\mathcal{I} - \int \mathcal{I} d\Omega / 4\pi \right)$$

$$\mathbf{P}/E = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}$$

Full Boltzmann

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mathcal{I} = j - \alpha I - \sigma \left(\mathcal{I} - \int \mathcal{I} d\Omega / 4\pi \right)$$

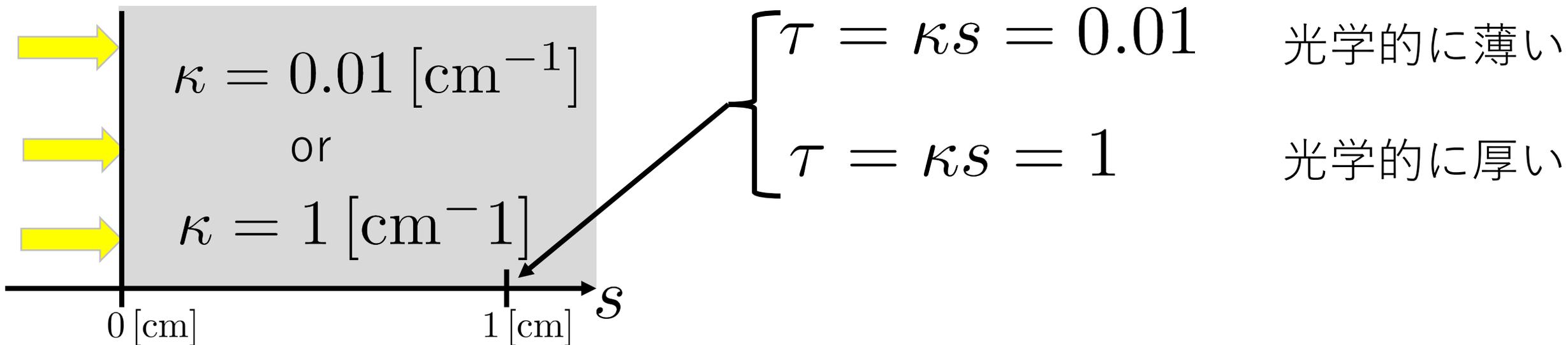
$$\mathcal{I}(x, y, z, \nu, \theta_n, \phi_n) [\text{erg/s/cm}^2/\text{sr/Hz}]$$

見た目は難しくないが、intensityは6次元の依存性があり、1次元毎に100 grid切ると 100^6 のグリッドとなりデータ量と計算量が膨大となる。富岳などでチャレンジが行われている。

具体例

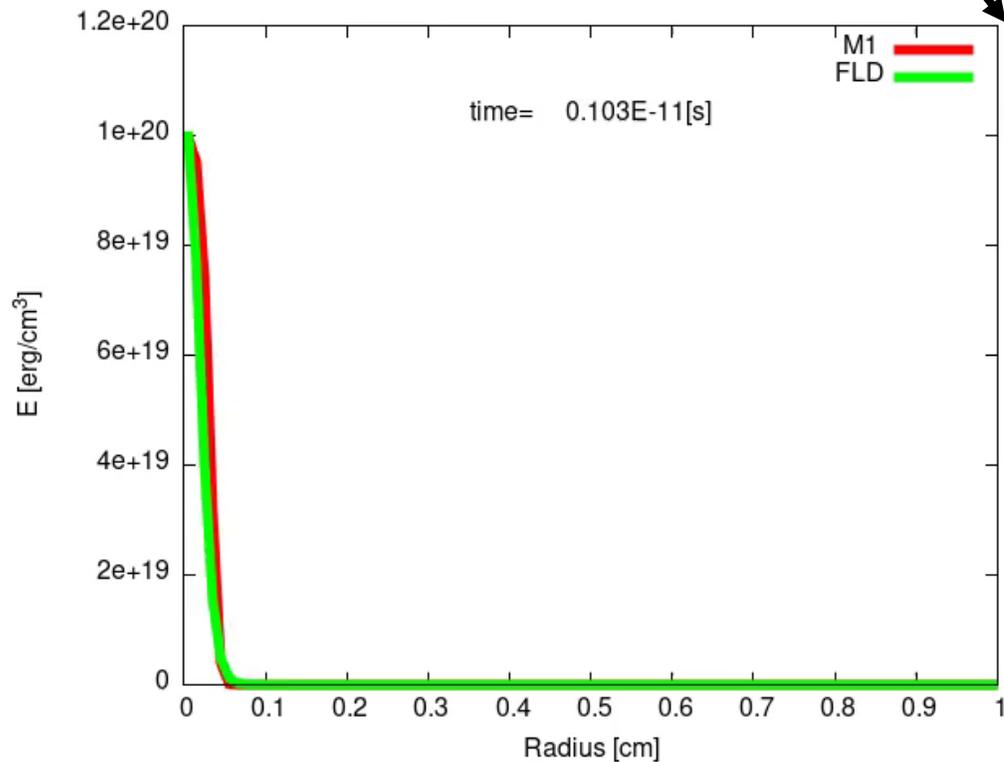
$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = J - c\kappa_{\text{abs}} E$$

境界から光を入れる。オパシティは二通り



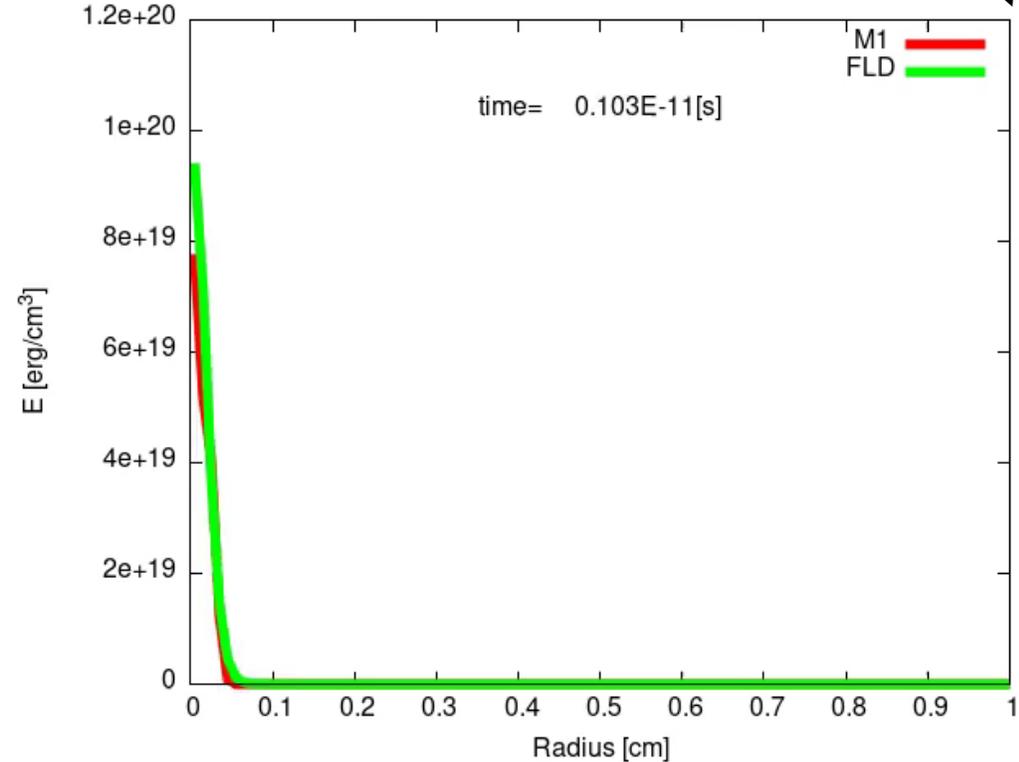
具体例

$$\kappa = 0.01 [\text{cm}^{-1}] \quad \tau = 0.01$$



光学的に薄い
光が減衰せず、光速で進む。

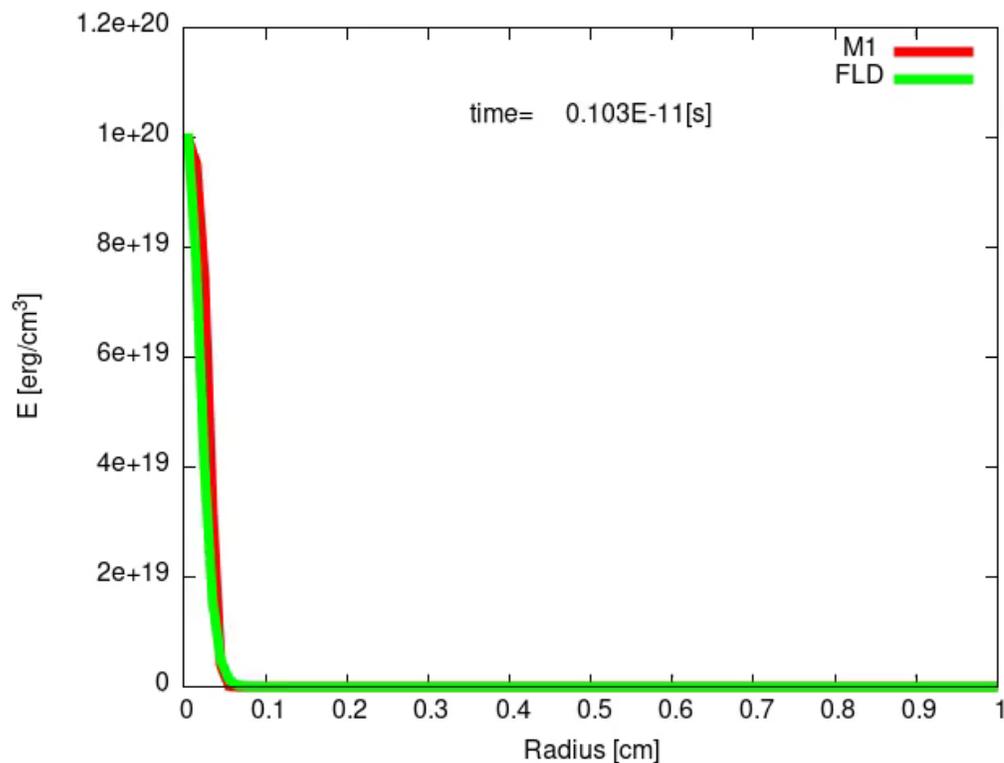
$$\kappa = 1 [\text{cm}^{-1}] \quad \tau = 1$$



光学的に厚い
光が減衰する。 $F \propto \exp(-\kappa s)$

具体例

$$\kappa = 0.01 \text{ [cm}^{-1}\text{]}$$



FLDでも解けているが、
問題がある。

FLDの場合、拡散方程式を安定に解く
ためdtが小さくなる
よって陰解法がよく使われるが、並列
計算しにくいので大規模しにくい。

$$\Delta t \leq \frac{\kappa}{2} \frac{\Delta x^2}{c}$$

M1だと $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ なので $\frac{\kappa \Delta x}{2}$ 分小さい
 Δt が要求される。

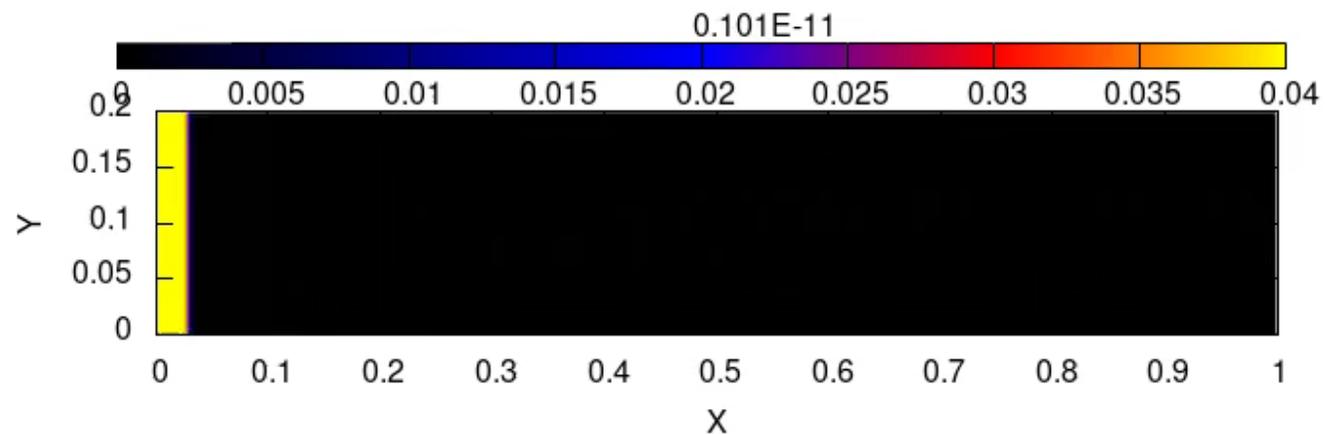
今100meshなので $\Delta x = 0.01 \text{ [cm]}$

$$\frac{\kappa \Delta x}{2} = 0.5 \times 10^{-4}$$

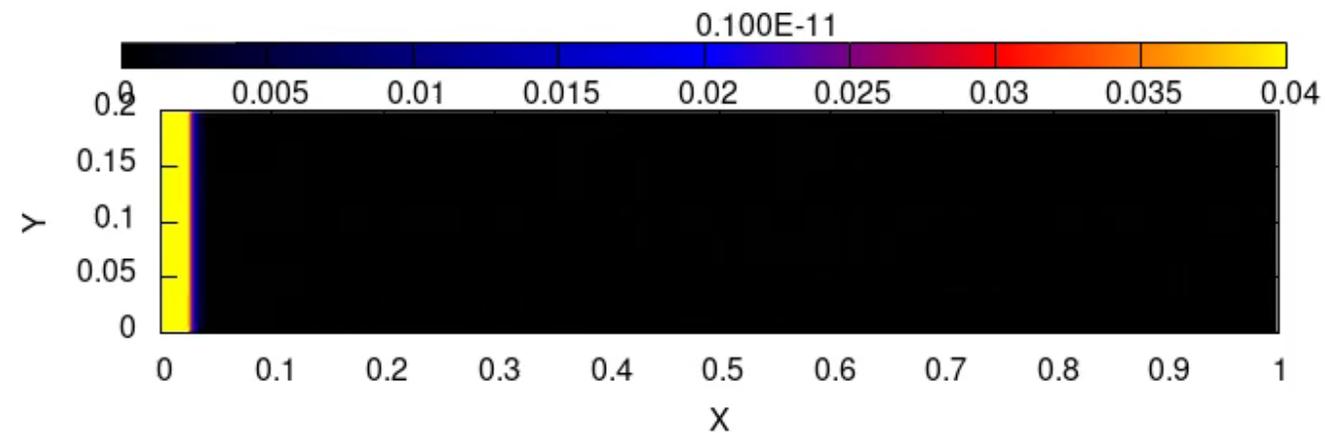
1万分の1のdtじゃない解けない。

オパシティや密度が低い問題にはFLD
を用いないこと！

具体例



M1-Closure

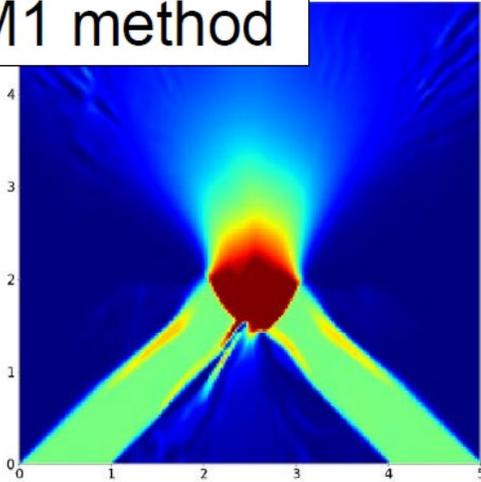


FLD

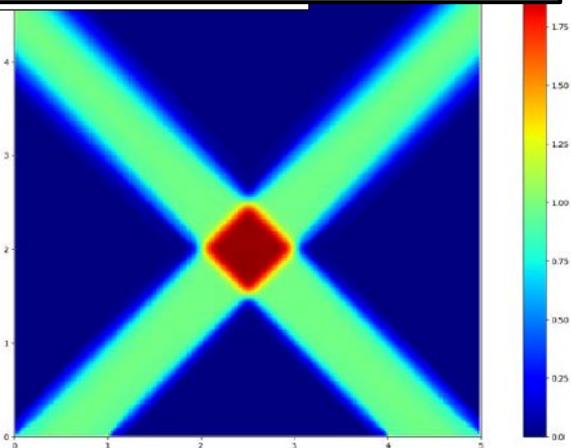
陰になる部分にまで光がまわりこんでしまう。

具体例

M1 method



Variable Eddington factor



M1-CLOSUREは光学的に疎な領域で、ビームがクロスする問題が解けない。M1-CLOSUREは等方+一方向の輻射が仮定されている。エネルギーとフラックスから分布を再構築するので致し方ない。

複雑な光線を解きたい場合はVariable Eddington factorやBoltzmann方程式を解く必要がある。

まとめ

- 輻射輸送は天文の研究では非常に大事
- Boltzmann方程式やintensityを解くのが原理的だが、計算コストが高い。
- 状況に応じていろいろな近似手法がある。
- 近年人気のM1-Closure法を中心に紹介した。

注意

この講義の趣旨は輻射流体シミュレーションのいろいろな手法について分かってもらうことなので、以下のようなフォーマリズム上の難しいところを避けて、流体シミュレーションとの差異に着目している。必要な人はさらに勉強を進めると良い。

- 特殊対論的取り扱い（流体静止系でみるのか実験室系でみるのか）
- 一般相対論的取り扱い

参考文献

Shibata et al. (2011) PTEP, 125, 1255