

磁気流体力学方程式の性質

花輪 知幸

2018年2月13日

磁気流体力学方程式

1. 磁気流体力学の導出

- 磁気力, 磁気圧, 磁気張力
- 誘導方程式

2. 保存形式

- 保存量、流束、原始変数
- ストークスの定理

3. Alfvén 波 (横波)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \longrightarrow \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_C \mathbf{E} \times d\mathbf{s} = 0$$

磁気流体力学方程式の導出

磁気力 (ローレンツ力) による流体 (ガス) の速度変化を考慮する。

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

前提条件としてガスは電離していて、電気抵抗が小さいとする。最も単純な理想 MHD 方程式では青字の項 (変位電流) を落とす。

オームの法則を適用し、流体からみた電場 \mathbf{E}' と電流 \mathbf{j} の間に関係をつける。

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (1)$$

プラズマは電離していて、電気抵抗 η は十分に小さい。理想 MHD 方程式では $\eta = 0$ と近似する。

この関係式を取り入れると、磁場もガスと同じ速度 v で運動しているように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{mag}} &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{4\pi} - \nabla \frac{B^2}{8\pi} \\ &= \nabla \left(\frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} - \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{(\nabla \cdot \mathbf{B})}{4\pi} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3)$$

ベクトルの公式と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件を用いると、磁気力は磁気圧力の勾配と磁気張力に分解することができる。() 内は Maxwell の応力テンソル

磁気流体力学方程式の保存型 1

誘導方程式も保存形に書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v_y B_x - v_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z B_x - v_x B_z) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_x B_y - v_y B_x) + \frac{\partial}{\partial x} (v_z B_y - v_y B_z) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_z - v_z B_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v_z B_y - v_y B_z) = 0 \quad (7)$$

注意 ガウスの法則 (体積積分) ではなくストークの定理 (面積積分) が使われている。(Athena++ では CT 法によりこの問題を回避している。詳細は後に。)

磁気流体力学方程式の保存型 2

磁気張力も保存形に書ける。

$$F_{\text{mag},x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_x B_x}{4\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_x B_y}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x B_z}{4\pi} \right)$$

$$F_{\text{mag},y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_y B_x}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_y B_y}{4\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_y B_z}{4\pi} \right)$$

$$F_{\text{mag},z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_z B_x}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_z B_y}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_z B_z}{4\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} \right)$$

注意 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が正しく計算されていることを仮定している。差分法では差分誤差により $\nabla \cdot \mathbf{B}$ が発生し、それによる不自然な力が働くことがある。

磁気流体力学方程式の保存型 3

ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

を使うと、磁気力を保存形に表すことができる。

$$\rho \mathbf{v} \frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{4\pi} \times \mathbf{B} \right) \quad (9)$$

$$= -\mathbf{v} \cdot \nabla P - \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{4\pi} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (11)$$

式(11)の右辺 第2項は電磁エネルギーの消費 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ と等しい。

$$-\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{4\pi} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho H - P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \left[\rho H \mathbf{v} + \frac{\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{4\pi} \right] = 0 \quad (12)$$

磁場が加わることにより、エネルギー保存則には磁場のエネルギーの時間変化と Poynting フラックス (電磁的なエネルギーの流れ) が加わる。

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{Poynting Vector})$$

磁気流体力学方程式の保存型 4

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho H - P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \left[\rho H \mathbf{v} + \frac{\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{4\pi} \right] = 0$$

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} \quad (13)$$

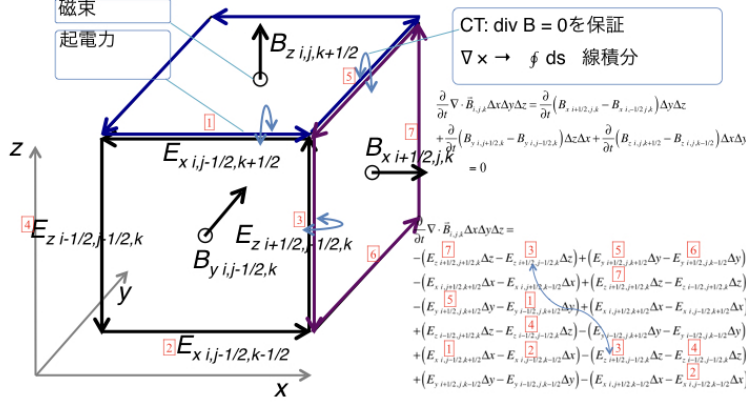
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H_{\text{tot}} - P_{\text{tot}}) + \nabla \cdot \left[\rho H_{\text{tot}} \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B}}{4\pi} \right] = 0 \quad (14)$$

$$H_{\text{tot}} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi} = H + \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi}, \quad P_{\text{tot}} = P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$$

保存型と離散化

Constraint Transport (CT)

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} & \frac{\partial B_{y,i,j-1/2,k}}{\partial t} = -\frac{E_{x,i,j-1/2,k+1/2} - E_{x,i,j-1/2,k-1/2}}{\Delta z} + \frac{E_{z,i+1/2,j,k} - E_{z,i-1/2,j,k}}{\Delta x} \\ \vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} & \frac{\partial B_{y,i,j-1/2,k} \Delta x \Delta z}{\partial t} = -(E_{x,i,j-1/2,k+1/2} \Delta x - E_{x,i,j-1/2,k-1/2} \Delta x) + (E_{z,i+1/2,j-1/2,k} \Delta z - E_{z,i-1/2,j-1/2,k} \Delta z) \end{cases}$$



CT法では $\nabla \cdot \mathbf{B}$ の発生を防ぐために、 \mathbf{B} を計算に使ったセルの面で定義する。初期に6つの面から流入・流出する磁束が釣り合うようにしておくと、計算機の丸め誤差の程度で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が保証される。これは磁場を定義した面の枠に沿って電場を線積分 ($\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$) するからである。どの辺に電場が発生しても、一つのセルを貫く磁場の総量は変化しないように設計されている。

CT法を用いない場合は、発生した $\nabla \cdot \mathbf{B}$ を適当な方法 (例えば Dedner の方法) により消去させなければならない。一方で CT法では、磁気力を計算するために、面で定義された磁場からセル中心での磁場を推定しなくてはならない。

MHD 波1

全ての変数が (x, t) の関数の時、MHD 方程式は次のように書き表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho H_{\text{tot}} - P_{\text{tot}} \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + \frac{-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ \rho v_x H_{\text{tot}} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) B_x}{4\pi} \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$H_{\text{tot}} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{4\pi}, \quad P_{\text{tot}} = P + \frac{B^2}{8\pi}$$

形式的には8本の方程式であるが、 B_x の時間発展を計算する部分は自明である。従って自由度は7で、MHD方程式は7本の波動方程式で7種類の波動を記述していると考えられるべきである。

MHD 波 2

より簡単な状況として物理量が次のように表し、MHD 線形波動方程式を導こう。

$$\rho = \rho_0 + \varrho(x, t) \quad (16)$$

$$v_x = u_x(x, t) \quad (17)$$

$$v_y = u_y(x, t) \quad (18)$$

$$v_z = u_z(x, t) \quad (19)$$

$$P = P_0 + p(x, t) \quad (20)$$

$$B_x = B_{x,0} \quad (21)$$

$$B_y = B_{y,0} + b_y \quad (22)$$

$$B_z = b_z \quad (23)$$

ここで $\varrho, u_x, u_y, u_z, p, b_y, b_z$ は 1 次の微小量とする。

MHD 波 3

微小量について 1 次の微小量だけ残すと MHD 方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varrho \\ \rho_0 u_x \\ \rho_0 u_y \\ \rho_0 u_z \\ \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B_{y,0} b_y}{4\pi} \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho_0 u_x \\ p + \frac{B_{y,0} b_y}{3\pi} \\ -\frac{B_{x,0} b_y}{4\pi} \\ -\frac{B_{x,0} b_z}{4\pi} \\ u_x H_{\text{tot},0} - \frac{(u_x B_{x,0} + u_y B_{y,0}) B_{x,0}}{4\pi} \\ u_x B_{y,0} - u_y B_{x,0} \\ -u_z B_{x,0} \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

ここで u_z と b_z は他の物理量と独立に求められることに気がつく。これらの波動が Alfvén 波 (横波) である。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_z \mp \frac{b_z}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_z \mp \frac{b_z}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) = 0 \quad (25)$$

これらの他に流体力学の時と同様に MHD 方程式にはエントロピー波が含まれている。

$$\frac{Ds}{dt} = 0 \text{ または } \frac{D\rho}{Dt} - \frac{1}{c_s^2} \frac{DP}{Dt} = 0 \text{ エントロピー波} \quad (26)$$

もともと 7 種類の波動があるので、残りの波動は 4 種類である。7 - 2 - 1 = 4: Fast & Slow magneto-sonic waves × 2

MHD 波 4

1次元 MHD 波の位相速度

$$\lambda = \begin{cases} v_x & \text{エントロピー波} \\ v_x \pm \frac{|B_{x,0}|}{\sqrt{4\pi\rho_0}} & \text{Alfvén 波} \\ v_x \pm c_f & \text{Fast MHD wave} \\ v_x \pm c_s & \text{Slow MHD wave} \end{cases} \quad (27)$$

初期状態で $B_{z,0} \neq 0$ の場合も、次の変換により Alfvén 波を分離することができる。

$$u_{\perp} = \frac{v_y B_{y,0} + v_z B_{z,0}}{\sqrt{(B_{y,0})^2 + (B_{z,0})^2}}, \quad b_{\perp} = \frac{b_y B_{y,0} + b_z B_{z,0}}{\sqrt{(B_{y,0})^2 + (B_{z,0})^2}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_{\perp}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{x,0} b_{\perp}}{4\pi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} b_{\perp} - \frac{\partial}{\partial x} (u_{\perp} B_{x,0}) = 0 \quad (29)$$

Athena++ で標準となっている HLLD (Miyoshi+05) ではエントロピー波と Alfvén 波と残りに分けて計算している。エントロピー波を分けることにより、圧力や速度が等しく、温度 (または密度) だけが異なる接触不連続面をより鮮明に捉えられる。また性質が異なる横波を分離することにより、磁場ねじれの減衰を抑えている。