流体力学方程式の性質

花輪 知幸

2018 年 2 月 13 日

流体力学方程式

1. 流体力学方程式は波動方程式 (双曲型偏微分方程式)
   - 波動方程式の基本形: 移流方程式
   - 移流方程式
   - 特性速度と Riemann 不変量
2. 保存形式と差分法
   - 保存量、流束、原始変数
   - ガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int_s \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \quad = \quad \int_V \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} dV$$

このテキストでは、1. 流体力学方程式が波動方程式であることと、2, 流体力学方程式は保存形式で表されることを、学ぶ。1 では波動方程式の基本的な形である移流方程式の性質を学ぶと共に、特性速度 と Riemann 不変量という重要な概念を学ぶ。2. ではガウスの法則を使って Athena ++ で使われている流体力学方程式の積分形を求める。

流体力学方程式の基本形

流体力学方程式は次の 3 つにまとめられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \quad = \quad -\frac{1}{\rho} \nabla P + \boldsymbol{g} \tag{2}$$

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s \quad = \quad \frac{\Gamma - \Lambda}{T} \tag{3}$$

ここで各々の記号は ρ: 密度, $\boldsymbol{v}$: 速度, P: 圧力, $\boldsymbol{g}$: 重力加速度, s: 単位質量あたりのエントロピー, T: 温度, Γ: 単位質量あたりの加熱率, Λ; 単位質量あたりの冷却率を表す。D/Dt はラグランジュの時間微分 (流体素片に対する全微分)、$\partial/\partial t$ はオイラー微分 (座標を固定した偏微分) を表す。

式 (1) は質量保存則、式 (2) は運動方程式である。式 (3) は熱エネルギーの変化を表している。右辺に現れる項は核反応や化学反応・輻射による加熱や冷却を表している。核反応の場合、Γ は反応する核種の存在量や密度・温度の関数で表される。光学的に透明な場合、放射による冷却も温度や密度の関数として表すことができる。これらの項は問題設定に応じて適切な方法が知られているが、このテキストではこれ以上立ち入らない。

赤字の部分を除くと波動方程式になる。

波動方程式の基本形 1

大学でよく習う波動方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

という形をしている。この方程式は D'Alembert 解

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{5}$$

を持つことも習う。しかしこのテキストではより基本的な波動方程式として

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} - c\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

を考える。これらの方程式も D'Alembert 解の片方を満たすことはすぐに確認できる。この基本形の利点は、解の性質を理解しやすいことである。

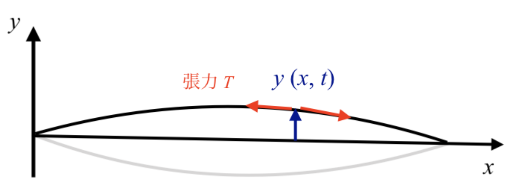
波動方程式の基本形 2

練習として、弦の振動について、波動方程式を求めてみよう。

$$\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

単位長さあたりの質量が λ で, 張力が T の弦を考えよう。後から使うので、弦の振動の伝播速度 c ($c^2 = T/\lambda$) を定義しておこう。



静止している時に 弦は x 軸上にあるとする。この時、弦の微小振動は

$$\lambda\frac{\partial v_y}{\partial t}-\frac{\partial T_y}{\partial x} \;=\; 0, \quad T_y=T\frac{\partial y}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial T_y}{\partial t}=T\frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{10}$$

によって表せる。ここで y は弦の垂直方向の変位、v_y は垂直方向の速度を表す。これらから、速度と 張力の時間変化を導くことができる。またその線形結合から、波動方程式の基本形を導くことができる。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} \;=\; \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_y}{\partial x}, \qquad\qquad \frac{\partial T_y}{\partial t}=T\frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{11}$$

ここで v_y の時間変化に T_y の時間変化の $\pm 1/\sqrt{\lambda T}$ 倍を加えると

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}\frac{\partial T_y}{\partial t}\pm\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}\frac{\partial T_y}{\partial x}\right]=0 \tag{12}$$

が得られる。

$\boxed{\text{波動方程式の基本形 3}}$

前ページで求めた波動方程式の基本形は次のように書き直すことできる。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}\frac{\partial T_y}{\partial t}\pm\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}\frac{\partial T_y}{\partial x}\right]=0$$

$$\frac{\partial z_\pm}{\partial t} \;\pm\; c\frac{\partial z_\pm}{\partial x}=0 \tag{13}$$

$$dz_\pm \;\equiv\; dy\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}dT_y=dy\pm\frac{dT_y}{\lambda c} \tag{14}$$

$$c \;\equiv\; \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{15}$$

ここで c:は波の位相速度 = 特製曲線を、 $dz_\pm$ は波の振幅 (Riemann 不変量) を表す。この形にすると、波は振幅を保ちながら伝播することが分かりやすい。

$\boxed{\text{流体力学方程式は波動方程式 1}}$

エントロピー波 (寒冷前線)

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}s \;=\; 0 \tag{16}$$

前のスライドと加熱・冷却のない (断熱変化) ガスのエネルギー保存則は波動方程式に他ならないことがわかる。位相速度はガスの速度と一致し、Riemann 不変量は比エントロピーに他ならない。物理学ではこの波をエントロピー波と呼んでいる。風もなく、急に温度が下がる寒冷前線はエントロピー波の一例である。

流体力学方程式の他の部分も波動方程式であることを示すには熱力学の知識が必要である。熱力学によれば、すべての熱力学変数は 2 つの熱力学量の関数として表すことができる。ここでは独立な熱力学量として圧力 P と 比エントロピー s を独立変数とする。

熱力学の関係式を使うと

$$d\rho \;=\; \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P ds = \frac{dP}{c_s^2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P ds \tag{17}$$

が得られる。この関係式とエントロピー波の方程式を使うと、質量保存則は次のように書き直すことができる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) \;=\; 0 \tag{18}$$

$$\frac{1}{c_s^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P\right) + \rho\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{19}$$

この形にすると、質量保存則は運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P \;=\; 0 \tag{20}$$

と対照的な形となっていることが分かる。

流体力学方程式は波動方程式 2

前のスライドで導出した流体力学方程式で、すべての変数が x と t だけの関数である場合を考えよう。これは平面波 $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x(\partial/\partial x)$ を考えることと等しい。

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x\frac{\partial s}{\partial x} \;=\; 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \;=\; 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} \;=\; 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} \;=\; 0 \tag{24}$$

$$\frac{1}{c_s^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P\right) + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x} \;=\; 0 \tag{25}$$

式 (21), (23), (24) は波動方程式なので、残るのは式 (22) と (25) である。

流体力学方程式は波動方程式 3

弦の振動の時と同様に線形結合をとると、2 本の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c_s}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(v_x \pm c_s\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c_s}\frac{\partial P}{\partial x}\right) \;=\; 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} \;=\; 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} \;=\; 0 \tag{28}$$

位相速度: $v_x \pm c_s$, v_x (v_x はドップラー効果)

これらの波動方程式は音波を表している。音波の位相速度は流れの速度と音速と足し合わせたものである。流体力学方程式もガリレイ変換に対して不変である。

$\boxed{\text{流体力学方程式の保存型 1}}$

流体力学方程式のうち質量保存則は、積分形に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= 0 \\ \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{i,j,k} &\equiv \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \int_{y_j-\Delta y/2}^{y_j+\Delta y/2} \int_{z_k-\Delta z/2}^{z_k+\Delta z/2} \rho dx dy dz && (29) \\ F_{x,i+1/2,j,k} &= \int_{y_j-\Delta y/2}^{y_j+\Delta y/2} \int_{z_k-\Delta z/2}^{z_k+\Delta z/2} \rho v_x dy dz && (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta M_{i,j,k} &+ F_{x,i+1/2,j,k} - F_{x,i-1/2,j,k} + F_{y,i,j+1/2,k} - F_{y,i,j-1/2,k} \\ &+ F_{z,i,j,k+1/2} - F_{z,i,j,k-1/2} = 0 \qquad (31) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{流体力学方程式の保存型 2}}$

質量保存則と Euler の運動方程式を組み合わせると、運動量保存則を導くことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right] &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v} \right] + \boldsymbol{\nabla} P &= \rho \boldsymbol{g} \end{aligned}$$

運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{I}) = \rho \boldsymbol{g} \qquad (32)$$

ただし外力 $\rho \boldsymbol{g}$ は源泉項、$\boldsymbol{I}$ は単位行列である。重力により加速されている分だけ全運動量が変化する。

$\boxed{\text{流体力学方程式の保存型 3}}$

粒子のエネルギー保存則は、運動方程式と速度の内積を取ることにより導かれる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \right) &= -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Phi = -\frac{D\Phi}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} && (33) \\ \frac{D}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Phi \right) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} && (34) \end{aligned}$$

流体の場合、流体の各部分 (流体素片) がエンタルピーで測られる熱エネルギーを持っていると考えると都合が良い。のちの便宜上単位質量当たりのエンタルピー (h) = 流体の熱エネルギー を定義する。単位質量の流体の体積が $V = 1/\rho$ であることに注目すると

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dP \tag{35}$$

が得られる。ここで圧力による仕事を計算すると

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\nabla P = \frac{1}{\rho}\left(\frac{DP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) = \frac{Dh}{Dt} - T\frac{Ds}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{36}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + h + \Phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{37}$$

ここでは加熱や冷却によるエントロピー変化はない $(Ds/dt = 0)$ とを仮定している。

流体力学方程式の保存型 4

$$\frac{DH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}H = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{38}$$

$$H = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + h = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \tag{39}$$

$$H\frac{\partial \rho}{\partial t} + H\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{40}$$

$$\rho\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}H\right) = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} + \frac{\partial P}{\partial t} \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H - P) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho H\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \tag{42}$$

理想気体の場合

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}, \qquad \rho H - P = \frac{\rho\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \tag{43}$$

流体力学方程式の保存型 5

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z} = \boldsymbol{S} \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho H - P \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ \rho H v_x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_y^2 + P \\ \rho v_y v_z \\ \rho H v_y \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{F}_z &= \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x \\ \rho v_z v_y \\ \rho v_z^2 + P \\ \rho H v_z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} + \Gamma - \Lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

$\boxed{\text{流体力学方程式の保存型 6}}$

保存量から原始変数へ

$$
{}^t\boldsymbol{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho H - P) = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4) \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho &= U_0, \quad v_x = \frac{U_1}{U_0}, \quad v_y = \frac{U_2}{U_0}, \quad v_z = \frac{U_3}{U_1} \\
P &= (\gamma - 1)\left[U_4 - \frac{(U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2}{2U_0}\right]
\end{aligned} \tag{47}
$$

原始変数

$$
{}^t\boldsymbol{V} = (\rho, v_x, v_y, v_z, P) = (V_0, V_1, V_2, V_3, V_4) \tag{48}
$$

$\boxed{\text{流体力学方程式の保存型 7}}$

保存形のメリット

- 全質量が完全に保存する。
- (外力がなければ) 全運動量、全エネルギーも保存する。
  - 粘性を入れても全運動量が保存する。
- 衝撃波の Rankine-Hugoniot 関係を自然に満たす。
  - 衝撃波静止系では $\boldsymbol{F}$ が連続 (波面が $x = \text{const.}$ の場合)

– エントロピー保存則? はなりたたない

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho s \boldsymbol{v}) \geq 0 \tag{49}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} - \frac{1}{c_s^2}\frac{DP}{Dt} \geq 0 \tag{50}$$

統合は準静的な変化に対してだけ。

- 円柱座標, 球座標へ適用が簡単
- 粘性も取り入れやすい

$\boxed{\text{数値格子と保存型 1}}$

離散化 (原始的)

$$\rho_{i,j,k} = \rho(x_i, y_j, z_k) \tag{51}$$

$$x_i = i\Delta x \tag{52}$$

$$y_j = j\Delta y \tag{53}$$

$$z_k = k\Delta z \tag{54}$$

離散化 (セル平均)

$$\rho_{i,j,k} = \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \int_{y_j-\Delta y/2}^{y_j+\Delta y/2} \int_{z_k-\Delta z/2}^{z_k+\Delta z/2} \frac{\rho(x', y', z')}{\Delta x \Delta y \Delta z} dx' dy' dz'$$

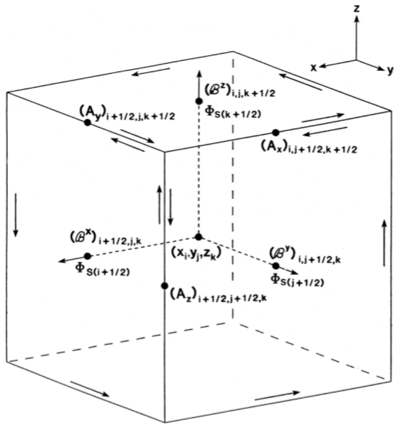
$\boxed{\text{数値格子と保存型 2}}$

変数の値を評価する点

1. セルの中心 (x_i, y_j, z_k),
2. 面の中心 $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$,
3. 辺の中心 $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_k)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

$$\iiint U d\boldsymbol{V} + \iint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$



U は体積平均, $\boldsymbol{F}$ は面平均 Evans & Hawley 88 より

数値格子と保存型 3

保存則を利用した差分方程式 (時間 1 次・空間 1 次)

$$
\begin{aligned}
U_{i,j,k}(t+\Delta t) &= U_{i,j,k}(t) - \frac{F_{x.i+1/2,j,k} - F_{x,i-1/2,j,k}}{\Delta x} \\
&\quad - \frac{F_{y,i,j+1/2j,k} - F_{y,i,j-1/2,k}}{\Delta y} \\
&\quad - \frac{F_{z,i,j,k+1/2} - F_{z,i,j,k-1/2}}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

積分表示

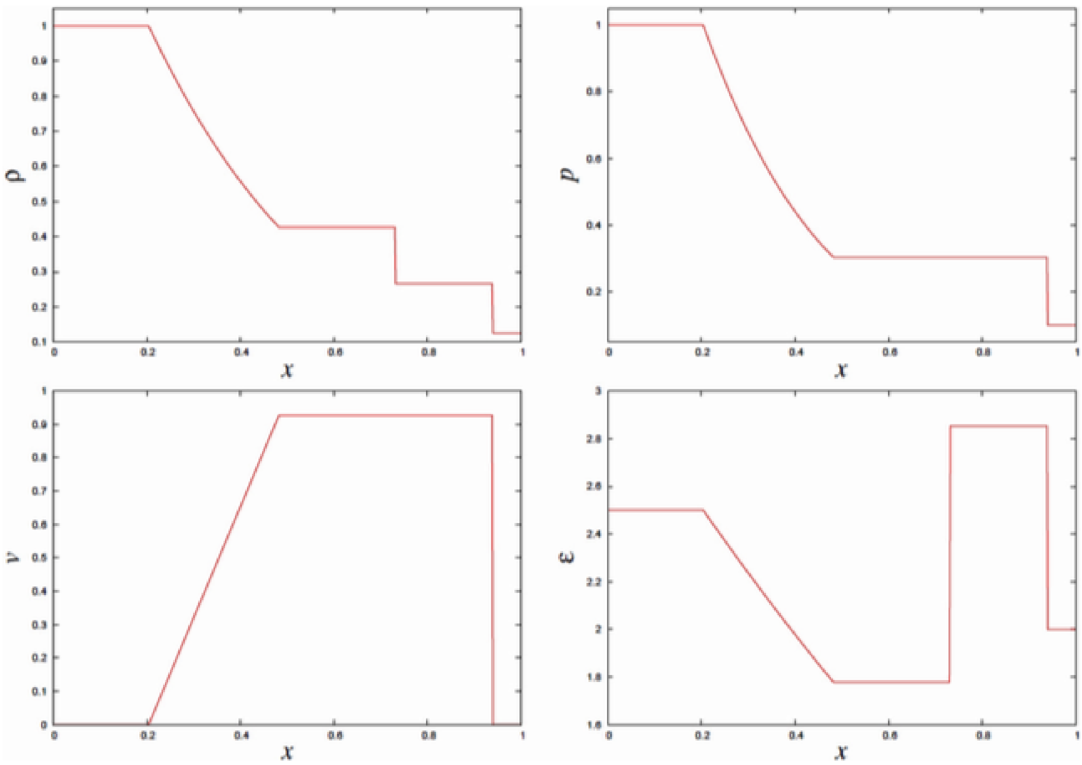
$$
\begin{aligned}
\iiint U(t+\Delta t)dxdydz &= \iiint U(t)dxdydz \\
&- \iint F_x\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)dydzdt \\
&+ \iint F_x\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right)dydzdt \ldots
\end{aligned}
$$

近似 Riemann 解法 1

表 1: 衝撃波管問題 (Sod's shock tube problem)

	L ($x<0$)	R ($x \geq 0$)
ρ	$\rho_{\mathrm{L}}(=1.0)$	$\rho_{\mathrm{R}}(=0.125)$
P	$P_{\mathrm{L}}(=1.0)$	$P_{\mathrm{R}}(=0.1)$
v_x	$v_{\mathrm{L}}(=0)$	$v_{\mathrm{R}}(=0)$

( ) 内はよく引用される初期値。任意の値ついて解が知られている。



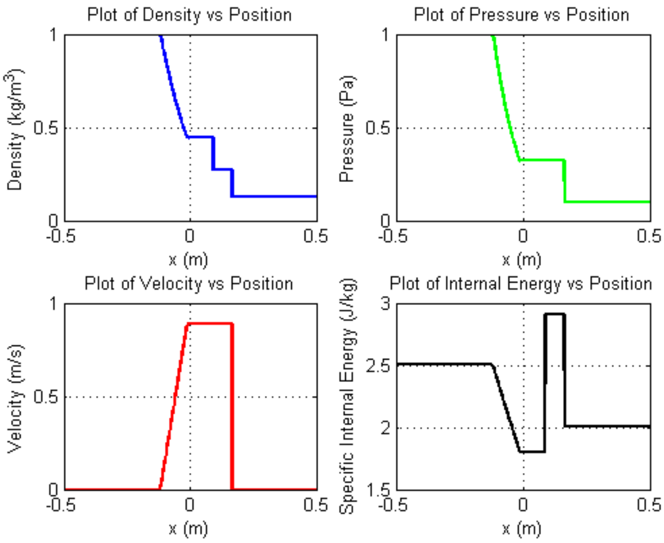
$\gamma = 1.4$, $t = 0.25$ (Lora-Clavijo+13)

Riemann 解 (相似解)

$$\rho(x,t) = \varrho(x/t),\ \ P(x,t) = \Pi(x/t),\ \ v(x,t) = u(x/t). \tag{55}$$

上図に示されるように、初期に速度が 0 でも圧力差により速度が変化し、流れが発生する。近似 Riemann 解法でこの効果「近似的」に取り入れ、セルの境界 (面) での流れ (=数値流束) を計算している。Riemann 解の近似的な求め方の違いにより HLLE, HLLD, Roe など複数の方法が提案されている。`Athena++` では HLLD を標準としている。

$\boxed{\text{近似 Riemann 解法 2}}$



衝撃波管問題の解 (MathWorks より転載)

$\boxed{\text{近似 Riemann 解法 3}}$

$$\text{任意の体積について}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} U(x', t+\Delta t)dx' &= \int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} U(x', t)dx' \\ &- \int_t^{t+\Delta t} F(x_j+\Delta x/2, t')dt' \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} F(x_j-\Delta x/2, t')dt'\end{aligned}$$

という形の保存則 (HLL) が求められる。ここで注意するべきことは、右辺にフラックス F の時間積分が現れることである。時間発展により変化した後の F を求めなければ良い解は得られない。