

天体力学N体力学研究会(三鷹2009)集録

計算と理論の最前線 =
多倍長 × 精度保証 + 積分可能性 × 正則化可能性

平成 21 年 3 月 13 日 (金) ~ 14 日 (土)
国立天文台 (三鷹) すばる解析研究棟・大セミナー室

編集委員

齋藤正也

統計数理研究所

柴山允瑠

京都大学数理解析研究所

関口昌由

木更津工業高等専門学校

Proceedings of the 41st Symposium on Celestial Mechanics (eds. Masaya Masayoshi Saito, Mitsuru Shibayama & Masayoshi Sekiguchi), 13-14 March 2009 at National Astronomical Observatory of Japan, Mitaka, Tokyo, Japan.

目次

研究会要旨	ii
プログラム	iii
アブストラクト	v
無衝突緩和での準平衡状態	1
井口修 (Osamu Iguchi)	
力学系の解の特異点の構造と可積分性	6
石井雅治 (Masaharu Ishii)	
NIR lightcurve of (832) Karin and its rotation	14
伊藤孝士 (Takashi Ito)	
遅い動きと小さな量: カオスと多倍長計算	24
小西哲郎 (Tetsuru Konishi)	
Mixed Precision Iterative Refinement for Solving Linear Systems of Equations using IEEE754 Double Precision Arithmetic and Multiple Precision Arithmetic and its Application to Fully Implicit Runge-Kutta Method	34
幸谷智紀 (Tomonori Kouya)	
3 体問題の衝突特異点が正則化可能となる場合に関する考察	48
柴山允瑠 (Mitsuru Shibayama)	
水星の等級計算と水星食の解析	59
相馬充 (Mitsuru Soma), 宮下和久 (Kazuhisa Miyashita)	
KAM Theory, Aubry-Mather Theory and Hamilton-Jacobi Equation	67
曾我幸平 (Kohei Soga)	
Hénon 写像の記号列に関するいくつかの問題	75
山口喜博 (Yoshihiro Yamaguchi), 谷川清隆 (Kiyotaka Tanikawa)	

第 41 回 天体力学 N 体力学研究会

計算と理論の最前線 = 多倍長 × 精度保証 + 積分可能性 × 正則化可能性

会場: 国立天文台 (三鷹) すばる解析研究棟・大セミナー室

日程: 2009 年 3 月 13 日 (金) 午後-14 日 (土)

内容: 天体力学, N 体力学の研究は数値計算, 理論による研究がともに重要である. これらの互いの研究を刺激し促進するために, 本研究会のテーマは数値計算, 理論の二本立てとする.

数値計算部門 (1 日目) では「多倍長 × 精度保証」をテーマとする. 天体力学の様々なモデル (例えば太陽系モデルなど) において存在すると思われるアーノルド拡散のようなデリケートな現象を数値的に観測するには, 多倍長計算や精度保証数値計算などの高精度な数値計算が必要である. これらの高精度計算は通常の倍精度計算に比べて演算コストがきわめて高いため, 利用は限られ来た. しかし, 近年 GP-GPU などの廉価な演算アクセラレータの利用が広がり始めており, これらを活用した高速化により, 利用範囲の拡大が待たれる. このように, 開発・利用の両面から多倍長, 精度保証数値計算の理解を深め, 天体力学, N 体力学の数値的な研究を促進したい.

理論部門 (2 日目) では「積分可能性 × 正則化可能性」をテーマとする. N 体問題の理論的研究の重要なテーマの 1 つとして特異点解析がある. 3 体問題の特異点に着目した研究はパンルベから始まる. 力学系の特異点の構造と可積分性にはなんらかの関連性があると期待されるが, 未解決な部分も多いと思われる. 本研究会では, N 体問題に限らず力学系の特異点と可積分性の関連性に焦点を当て, 問題点を明確にし, 特異点解析による研究のさらなる発展を目指したい.

謝辞: 本集録出版費を研究費から支出して頂いた, 木更津工業高等専門学校機械工学科の高橋秀雄先生に感謝致します. 講演者, 集録原稿の執筆者, 研究集会開催にあたりご協力くださった方々に改めてお礼申し上げます.

プログラム (* は招待講演)

3月13日(金)

12:55 - 13:00 開会あいさつ

<< 多倍長計算・I >> (座長: 小西哲郎)

13:00 - 13:30 齋藤正也 (統計数理研究所)

GP-GPUによる高速な多倍長演算器の実装に向けて

13:30 - 14:00 幸谷 智紀 (静岡理科大学)*

連立一次方程式はどこまで速く解けるのか? -多倍長計算を用いた反復改良法-
(Coffee Break)

<< 多倍長計算・II >> (座長: 谷川清隆)

14:15 - 14:45 小西 哲郎 (名古屋大学)*

遅い動きと小さな量: カオスと多倍長計算

14:45 - 15:15 中里 直人 (会津大学)*

四倍精度演算の高速化

(Coffee Break)

<< 天体力学 >> (座長: 関口昌由)

15:30 - 16:00 井上 茂樹 (東北大学)

密度一定コア構造による dynamical friction 抑制のメカニズム

16:00 - 16:30 相馬 充 (国立天文台), 宮下和久 (穂高東中学校)

水星の等級計算と水星食の解析

17:00 - 18:30 ポスター発表

18:30 - 20:30 懇親会 (コスモス会館)

3月14日(土)

<< 積分可能性×正則化可能性 >> (座長: 関口昌由)

9:10~9:40 柴山允瑠 (京都大学)

3体問題の衝突特異点が正則化可能となる場合に関する考察

9:45~10:45 吉田春夫 (国立天文台)*

ハミルトン系の可積分性と解の特異点の古典的正則化可能性

11:00~12:00 石井雅治 (椋山女学園大学)*

力学系の特異点の構造と可積分性

(昼食)

<< 衝突多様体 >>(座長: 齋藤正也)

13:00~13:30 佐野光貞 (京都大学)*

古典クーロン三体問題: 特異性と非可積分性

13:35~14:35 矢ヶ崎一幸 (岐阜大学)*

2等辺3体問題における3重衝突の正則化と相対周期軌道の存在

(Coffee Break)

<< 力学系 >>(座長: 柴山允瑠)

14:50~15:20 藤原 俊朗 (北里大学)*

与えられた曲線上の三体コレオグラフィ

15:30~16:30 曾我幸平 (早稲田大学)*

KAM Theory, Aubry-Mather Theory and Hamilton-Jacobi equation

16:30~16:35 閉会あいさつ

ポスター発表 (五十音順)

荒木田英禎 (早稲田大学)

Lemaitre-Tolman-Bondi 時空における惑星運動と天文単位の永年的変化

井口修 (お茶の水女子大学)

無衝突緩和での準平衡状態

伊藤孝士 (国立天文台)

若い小惑星 (832)Karin の多色測光観測と自転

井上 茂樹 (東北大学)

密度一定コア構造による dynamical friction 抑制のメカニズム

原田 雄司 (国立天文台)

かぐや (SELENE) の子衛星の高精度位置決定: 多周波数同一ビーム法に基づく相対 VLBI 観測

山口 喜博 (帝京平成大学)

エノン写像における記号化

吉田二美 (国立天文台)

An Insight into the Solar System History through the Size Distribution of Jupiter's Trojans

アブストラクト

口頭発表 (プログラム順)

- GP-GPU による高速な多倍長演算器の実装に向けて

齋藤正也 (統計数理研究所)

本研究会では、多倍長計算環境の開発とその天体力学への応用をテーマとして、両方面の専門家による招待講演を設定した。その導入として、多倍長計算が天体力学になぜ必要なのかを述べ、続いて多倍長計算はどのように実現されるのかの理解を得るために、基礎的なアルゴリズムを紹介する。最後に、実装環境の有力な候補として、近年、数百 GFLOPS の高い演算能力を持つことから HPC(High Performance Computing) の分野で注目を集めている GPGPU について紹介する。

- 連立一次方程式はどこまで速く解けるのか? –多倍長計算を用いた反復改良法–

幸谷 智紀 (静岡理科大学)

多倍長計算は、悪条件問題を解く場合やユーザの精度要求が厳しい場合には有効なものであるが、現状ではソフトウェアで実装されることが多いため、IEEE754 単精度・倍精度計算に比べて多大な計算時間を要するのが普通である。今回取り上げる Buttari らの提唱する混合精度反復改良法は、正確さが要求される部分を高い精度で実行し、計算量が多い部分を低い精度で実行することで、条件数があまり大きくない連立一次方程式の近似解を精度を落とすことなく高速に解くことができるというものである。本講演では多倍長計算を用いた混合精度反復改良法によって、近似解の精度と計算時間がどの程度低減されるのかを数値実験によって示すと共に、これが有用であろうと思われる陰的 Runge- Kutta 法の高速度にどの程度寄与できるのか、その可能性についても言及したい

- 遅い動きと小さな量：カオスと多倍長計算

小西 哲郎 (名古屋大学)

保存系のカオスでは、安定・不安定多様体のわずかなずれとそれに伴うセパトリス内外のゆっくりした移動や、多自由度系でのアーノルド拡散のように、極めて遅い運動と、それを特徴づける特異的に小さな量がしばしば登場する。このように、カオス系の数値計算では高い精度が要求されることがある。今回は、多倍長計算ライブラリ `cln[1]` を用いて、安定・不安定多様体の交差角や「アーノルド拡散」を数値計算した例を紹介し、多倍長計算で何が

出来るかを探ってみる。

- cln : Class Library for Numbers , <http://www.ginac.de/CLN/>
- Tetsuro Konishi, "Slow Dynamics in Mutidimensional Phase Space: Arnold Model Revisited", Advances in Chemical Physics vol.130 partB (2005) 423-436

- 四倍精度演算の高速化

中里 直人 (会津大学)

本発表では、ハードウェアを活用した四倍精度演算の高速化について概説する。倍精度では演算精度が足りない場合、様々な方法により多倍長演算をおこなうことができる。その一つの手法として、2つの倍精度変数の和として数値を表現する方法がある。このDD演算の方法で、比較的容易に四倍精度相当の演算をおこなうことができる。しかし、DD演算の方法では、1回の四倍精度演算あたりに約20回の倍精度演算が必要であり、結果として、その実効的な性能は約0.1 GFLOPSとなる(Core i7 2.67 MHz SSE2 利用せずシングルコアの場合)。我々は、DD演算の手法をGRAPE-DRやGPUなどのSIMD型演算装置に適用することで、その性能評価をおこなった。これらのSIMD型演算装置の倍精度演算性能は、通常のCPUの50-100倍に達するため、効率の低下を補うことができ、二重指数型積分公式や重力多体計算では、約2-5 GFLOPSの性能を得ることができた。一方で、DD演算の手法では、その性質上効率低下を避けることができない。我々は、FPGA等の低コストで開発可能なLSI上に四倍精度演算器を実装することで、より高速な四倍精度演算の実現をめざしており、その見通しについて報告する。

- 密度一定コア構造による dynamical friction 抑制のメカニズム

井上 茂樹 (東北大学)

銀河ハローが球状星団に及ぼす dynamical friction の効果は、矮小銀河において顕著に現れる。そのため、矮小銀河中の球状星団の存在を説明出来ないとする問題を"dynamical friction problem"と呼ぶ。近年、矮小銀河が中心部で密度が一定となるようなハロー構造を持っていれば、その中で dynamical friction が劇的に弱められるという事が発見された。しかし、なぜそうなるのかという具体的な機構は明確には解明されていなかった。本研究ではN体シミュレーションを用いて、このメカニズムは、球状星団がコア内に侵入することによって引き起こされる、銀河外縁部での resonance 効果である、と解明する事に成功した。

- 水星の等級計算と水星食の解析

相馬 充 (国立天文台), 宮下和久 (穂高東中学校)

2008年12月29日昼に月による水星の掩蔽があり、滋賀県の石田正行氏と静岡県鈴木寿氏により、その明縁出現のビデオ撮影がなされた。我々はそれらのビデオを、宮下が開発した測光用ソフトウェア Limovie を用いて解析し、得られたライトカーブを水星の輝度分布モデルによるライトカーブと比較して、水星の中心に対する現象時刻の推定を行った。水星の輝度分布は Hapke (1986, 1993) の関数を用いて計算した。Hapke の関数のパラメータの値には Mallama et al. (2002) に示されている位相角と等級の関係に合うように定めたものを用いた。その結果、水星という面積のある天体の掩蔽現象時刻から精密な月縁のデータを求めることができた。なお、Hapke の関数を用いると任意の位相角にする水星の等級を計算することができる。理科年表暦部で採用している水星の等級の計算式は水星の位相角によっては 0.6 等に達する誤差のあることが明らかになっており、米英暦では 2007 年版から新しい等級の計算式が採用されている。理科年表のこよみの利用に際してはその点に注意されたい。

- 3体問題の衝突特異点が正則化可能となる場合に関する考察

柴山允瑠 (京都大学)

McGehee の手法により、3体問題の3体衝突特異点は blow-up され、衝突多様体と呼ばれる多様体が現れる。3体衝突特異点の(位相的な意味での)正則化可能性は衝突多様体上の力学系で決まる。特異点の正則化不可能性から3体問題の非可積分性は導かれる。では、正則化可能なきはどうなるのか、可積分であるか、というのが自然と問題になる。この問題についてしばらく考えたが、まだ全く分からない。今回はこの問題について概説する。解決のためにいろいろと議論したり、アドバイスを頂ければ幸いである。

- ハミルトン系の可積分性と解の特異点の古典的正則化可能性

吉田春夫 (国立天文台)

ハミルトン力学系の可積分性と解の特異点の性質、すなわち古典的な意味での特異点の正則化可能性との関連についての話題を歴史的順序で述べる。またこの関係を注視することにより様々なレベルでの可積分性の必要条件が得られるが、それらを用いた可積分なハミルトン系のリスト作成に関する、現時点での到達点を概説する。

- 力学系の特異点の構造と可積分性

石井雅治 (栢山女学園大学)

2自由度 Hamilton 系を考える。系の解に現れる特異点の構造は、特異点の種類と特異点全体の分布とから成る。従来の研究によって、可積分性と特異点の種類との関係は或る程度解明され、非退化条件が満たされる場合、或る特異点は極または代数的であることが示されている。しかし、非退化条件が満たされない場合のこの関係、特異点分布との関係、また可積分性の十分条件については解明が進んでいない。可積分性の必要条件に限れば、非退化条件に依存しない一般理論が構築されているが、これは可積分性の全貌を特異点の構造に帰着し得るものではない。近年、我々は、Lie 群と系のトポロジーが特異点同士の関係に及ぼす影響を解析することによって、上記の関係や条件の総体をかなりの程度明らかにすることに成功した。結局、可積分性は、特定の特異点の種類だけでは十分に特徴付けることはできない性質であって、特異点の全体的様相に依拠した性質だったのである。発表では、これらの関係や条件、またこれらの成立根拠を話したい。

- 古典クーロン三体問題：特異性と非可積分性

佐野光貞 (京都大学)

ヘリウムを代表する二電子原子系（原子核一個、電子二個）の古典ダイナミクスを考える。重力の三体問題と同様に、系の特異性がこの系の解析に取って重要となる。この研究では、特に、共線形 eZe 配置の場合を主に考える。ここでは、非可積分性よりも踏み込んだ議論の足場を与えることを考える。三体衝突を扱うに必要となる McGehee 変換をクーロン系に応用した結果、見えてくることをお話する。具体的には、McGehee 変換によって導き出される三体衝突多様体とそれに付随した安定・不安定多様体の構造・三体衝突軌道の幾何学構造を調べることにより、原子核の質量をパラメータとすると、原子核の質量が十分大きければ（実際に大きい、陽子・電子の質量比は 1840 ほど）、系のダイナミクスが双曲系であると考えられる数値計算結果が得られた。この結果は、もちろん、物理学者からみた予想に過ぎないが、数学者や天体力学者に対して問題提起となると思われる。

- 2等辺3体問題における3重衝突の正則化と相対周期軌道の存在

矢ヶ崎一幸 (岐阜大学)

2等辺3体問題を取りあげ、3重衝突の正則化を行い、衝突多様体上の平衡点のヘテロクリニック・サイクルに収束する相対周期軌道の無限個の族がすることを示す。この目的のため

め、従来の結果を適用するだけでなく、2つのタイプのヘテロクリニック軌道がパラメータのより広い範囲にわたって存在することを、精度保証付数値計算を用いて証明する。さらに、得られた理論結果の理解のためヘテロクリニック軌道と相対周期軌道に対する数値計算を与える。また、数値結果により、その2つのタイプのヘテロクリニック軌道および相対周期軌道の族が、理論で示されたものよりもさらに広いパラメータの範囲で存在し、それらの族のあるものはオイラー解の分岐により生じることを示す。なお、本講演は柴山允瑠氏(京都大学)との共同研究に基づいている。

- 与えられた曲線上の三体コレオグラフィ

尾崎浩司(東海大学), 福田宏(北里大学), 藤原俊朗(北里大学)

Kepler が 400 年前に示したように、二体問題の場合には、惑星の軌道の形が楕円であることと角運動量の保存則を使えば、惑星の運動は決定される。(ゼロでない角運動量を指定した場合.)

三体問題の場合にも、その軌道の形から運動が定まるであろうか? この講演では、軌道の形によっては、そのとおりであることを示す。重心の保存と、角運動量がゼロでなければその保存則、ゼロならばエネルギーの保存則を使う。例として、等質量三体の、点対称な凸閉曲線上の運動と 8 の字の形をした曲線上の運動を述べる。前者の場合には、角運動量を指定するだけで、運動が一意的に定まる。後者の場合には、角運動量がゼロなので適当なポテンシャルとエネルギーを指定する。

こうして決まった運動が現実のものかどうかは、運動方程式を満たすかどうかで決定される。

- KAM Theory, Aubry-Mather Theory and Hamilton-Jacobi equation

曾我幸平(早稲田大学)

Hamilton 力学系の中心的問題の1つとして、不変トーラスを探す研究が古くからなされている。可積分 Hamilton 力学系の摂動問題に対して不変トーラス(KAM トーラス)の存在が示され、KAM 理論と呼ばれている。KAM 理論は一種の摂動論であるため、適用範囲は限られる。その範囲外にある Hamilton 力学系に対する不変トーラスを見つける一般論はない。また不変トーラスが存在するとも限らない。しかし twist 写像力学系に対して不変トーラスに似た不変集合(Aubry-Mather 集合)の存在が示され、Aubry-Mather 理論と呼ばれている。Aubry-Mather 理論は一種の変分法であるため、摂動論である KAM 理論とは異なる土台で議論がなされる。Aubry-Mather 理論は flow 系に拡張され、最近、ある

Hamilton-Jacobi 方程式の弱解との関連が明らかにされた。本講演では、まずこれらの事実を紹介する。次いで Hamilton-Jacobi 方程式の弱解を構成し KAM トーラス及び Aubry-Mather 集合を数値計算する方法を紹介する。

ポスター発表 (五十音順)

- Lemaitre-Tolman-Bondi 時空における惑星運動と天文単位の永年的変化

荒木田英禎 (早稲田大学)

今日の太陽系における位置天文観測技術は 9 ~ 11 桁という観測精度を達成する状況にあり、位置天文学において一般相対論的な枠組での理論構築が必須となっている。このような高精度観測データは重力理論の検証にとっても重要な役割を果たしており、これらの観測は今の所アインシュタインの理論 ($\beta = \gamma = 1$) を支持している。

その一方で、観測精度の向上により既存の理論的枠組では説明が困難な事例がいくつか報告されている。それらの中で我々は「天文単位の永年的変化」に強い関心を持っている。本発表ではこの問題を非一様宇宙モデルの Lemaitre-Tolman-Bondi メトリックを用いて考察し、太陽系のような重力的に束縛された系における宇宙論的効果の惑星運動への寄与と天文単位の永年的変化について議論する予定である。

- 無衝突緩和での準平衡状態

井口修 (お茶の水女子大学)

自己重力多体系で Cold Collapse 後に、系全体がビリアル比が-1 になる力学平衡の状態が現れる。特に初期のビリアル比が非常に小さい場合には、このビリアル平衡が局所的に成り立ち、温度分布が中心からの質量に線形である等の特徴的な状態が現れる。このような自己重力系の無衝突緩和によって現れる準平衡状態を、重力以外の中的な相互作用系で調べた。

- 若い小惑星 (832)Karin の多色測光観測と自転

伊藤孝士 (国立天文台)

2002 年に確認された極く若い小惑星族の筆頭構成員 (832) Karin はその表面に特異な色変化を持つなど、太陽系小天体の研究にとり極めて重要な意義を持つ。私達は Karin 族の確認直後からこの小惑星に関する多色測光観測を実施して来た。2003 年 9 月の衝での観測により特定位相に於いて相対反射率の傾きの増加、即ち赤化を検出した。しかしこの赤化部位

が2004年9月の観測では再確認されなかったために、2006年2月末の衝に近い時期に於いて近赤外領域に於ける三色同時測光を行い、この小惑星が衝突前の母天体表面の名残りと思われる赤い表面を本当に持つのかを検証した。今回はそうしたデータをまとめ、この小惑星の可能な形状および自転軸傾斜のモデル計算結果についても示したい。

- 密度一定コア構造による dynamical friction 抑制のメカニズム

井上 茂樹 (東北大学)

(口頭発表と同じ)

- かぐや (SELENE) の子衛星の高精度位置決定：多周波数同一ビーム法に基づく相対 VLBI 観測

原田 雄司 (国立天文台)

月重力の精密計測への応用を目指して、かぐや (SELENE) の子衛星の同一ビーム VLBI 観測を行なった。同一ビーム VLBI 観測によって、電離層・大気・局内の全ての遅延を相殺する事が可能となる。更に多周波数 VLBI 観測によって、サイクルアンビギュイティの絶対値を推定する事が可能となる。それらに基づく観測の結果、X 帯信号の相対位相遅延をピコ秒の精度で推定する事に成功した。この精度は従来の VLBI 観測と比較して桁違いに高い。本成果は月重力場モデルの改善にも寄与するであろう。

注：共同研究者の一覧は次の通りです。原田雄司、菊池冬彦、劉慶会、花田英夫、河野宣之、松本晃治、岩田隆浩、SanderGoossens、浅利一善、石原吉明、鶴田誠逸、石川利昭、野田寛大、並木則行、NataliaPetrova、平勁松、佐々木晶

- エノン写像における記号化

山口 喜博 (帝京平成大学)

面積ならびに方向保存エノン写像を考える。パラメーターを増加するにつれて周期軌道が出現する。スメールの馬蹄が生じるまでに可能なすべての周期軌道が生じる。周期軌道の記号列を決定する符号化の問題は解決されていない。楕円点から生じる周期軌道に対する記号化の一部がなされている。我々はサドルノード分岐で生じた対称周期軌道の記号化を行ったので報告する。

- An Insight into the Solar System History through the Size Distribution of Jupiter's Trojans

吉田二美 (国立天文台)

We investigated the size distributions of L4 and L5 Jupiter Trojans separately by Subaru telescope with Suprime-Cam. We found a slight difference between the size distributions of L4 Trojans and L5 Trojans with $D < 5\text{km}$. This slight difference in the size distributions of two swarms and some theoretical works together can give us a insight related to the origin of Trojans.

無衝突緩和での準平衡状態

井口修 (osamu@phys.ocha.ac.jp)

お茶の水女子大学 理学部物理学科

Abstract. 自己重力多体系で Cold Collapse 後に、系全体のビリアル比が -1 になる力学平衡の状態が現れる。特に初期のビリアル比が非常に小さい場合には、このビリアル平衡が局所的に成り立ち、温度分布が中心からの質量に線形である等の特徴的な状態が現れる。このような自己重力系の無衝突緩和によって現れる準平衡状態を、重力以外のべき的な相互作用系で調べた。

1. 自己重力系の準平衡状態

自己重力多体系で、初期のビリアル比 $b := |2K/W|$ (K と W はそれぞれ、系全体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギー) が十分小さい時 ($b \ll 1$)、 $t \sim t_{ff} := (G\rho)^{-1/2}$ で力学平衡状態 ($b = 1$) に落ち着く。系全体によって作られるポテンシャルの激しい変動による無衝突緩和の結果現れる準平衡状態において、特徴的な 3 つの性質が現れる (Iguchi et al. 2005, 2006)。

- 密度分布 $\rho(r) \propto (1 + r/r_0)^{-4}$
- 温度分布 $T(r) := K(r) \propto M(r)$
- 局所ビリアル比 $b(r) := |2K(r)/W(r)| = 1$

図 1 からわかるように、運動エネルギー $K(r)$ が中心からの質量 $M(r)$ に線形に比例しており、局所ビリアル比 $b(r)$ は図 2 のようにほぼ $b(r) = 1$ の局所ビリアル関係を満たしている。外側で $b(r)$ が大きくなっているのは、バウンドされていない粒子である。

Vlasov 方程式の定常解で球対称等方な場合には、Plummer 解が局所的ビリアル関係 ($b(r) = 1$) を満たしている。この Plummer 解は、定常解の中でエネルギー最小状態の解 (Aly 1989) であり、開放系での無衝突緩和で現れる準平衡状態の特徴付けとして、局所ビリアル平衡がどれくらい普遍的なのかを、重力相互作用以外のべき的な相互作用を持つ多体系で調べてみた。

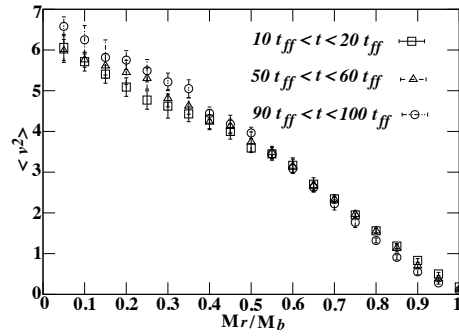


Figure 1. 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの温度分布。

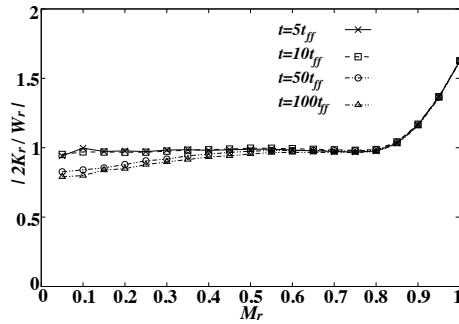


Figure 2. 典型的な Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの局所ビリアル比。

2. べき的ポテンシャル

ここで考える相互作用は、ポテンシャル $W(r) \propto r^{-\alpha}$ と書ける場合である。表1にあるように、べきの指数 α を変えることで、様々な性質の系を扱うことができる (Iguchi 2002)。 α を変えながらシミュレーションを行い、現れた準平衡状態を調べることで、無衝突重力多体系で現れる性質の普遍性や起源について考察することができる。

3. シミュレーション結果

無衝突緩和後に重力系で現れた3つの性質について、 α を変えたシミュレーションの結果を示す。粒子数はすべて4096の計算である。

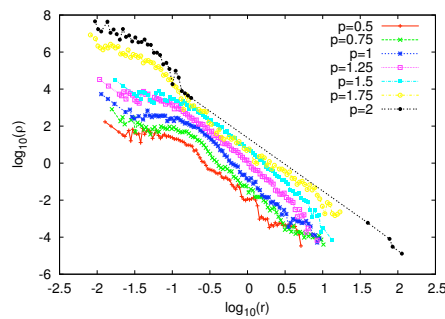
密度分布は、図3のようになった。ポテンシャルのべきが1.5より小さい時は、重力の場合と同じで、中心にflatなコアがあり、外側が -4 で落ちる分布になっていた。ポテンシャルのべきが1.5より大きい時は、ほとんどの粒子が蒸発してしまい、はっきりした構造が見られなかった。

Table 1. べき的ポテンシャル $W(r) \propto r^{-\alpha}$ で相互作用する系の特徴。

	$0 < \alpha < 2$	$\alpha < 0, 2 < \alpha$
比熱	負	正
	$\alpha < 3$	$3 < \alpha$
相加性	非相加	相加
	$\alpha < 0$	$0 < \alpha$
無限遠	∞	0

温度分布は、図4にみられるように、密度分布同様、ポテンシャルのべきが1.5より小さい時は、重力の場合と同じ線形関係が成り立つが、1.5より大きくなると関係が壊れている。正べきポテンシャルの場合は、等温分布になっていた。

べき的ポテンシャルの場合の局所ビリアル関係は、 $b(r) = \alpha$ となる。図5にみられるように、べきが1.5より小さい時は、重力の場合と同じく成り立つが、それ以外では関係が成り立っていなかった。

Figure 3. ポテンシャル $W(r) \propto r^{-p}$ で相互作用する系で Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの密度分布。

4. まとめ

自己重力多体系で無衝突緩和後に見られる準平衡状態の特徴的な性質である、密度分布、温度分布、局所ビリアル関係の3つの性質について、普遍性を見るために一般のべき的ポテンシャル $W(r) \propto r^{-\alpha}$ の場合について調べた。

数値シミュレーションから、どの性質も $0 < \alpha < 1.5$ の場合に、重力と同じ性質を示した。密度分布からわかるように、今回のシミュレーションにおいて $\alpha = 1.5$ はバウンドされる粒子が十分あるかどうかの境目になっていた。また、正べきポテンシャルでは等温分布になっており、実質的に開放系でないと重力系で見られる性質は現れなかった。この結果から、少なくとも、開放系で十分な粒子がバウンドできる場合に、重力と同じ準平衡状態が現れると思われる。この状況

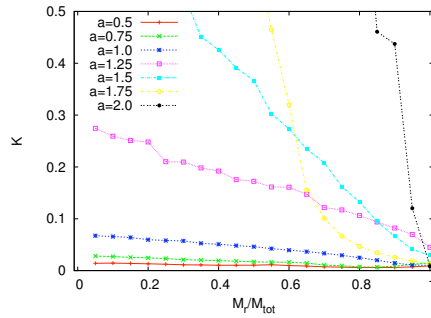


Figure 4. ポテンシャル $W(r) \propto r^{-a}$ で相互作用する系で Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの温度分布。

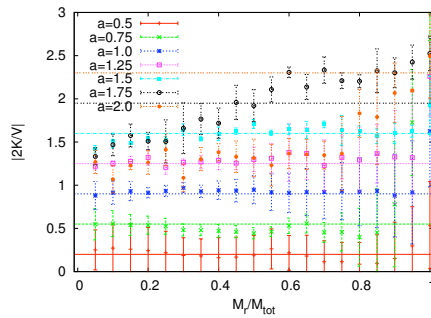


Figure 5. ポテンシャル $W(r) \propto r^{-a}$ で相互作用する系で Cold collapse を起こす数値シミュレーションでの局所ビリアル比。同じ色の水平線は、対応する局所ビリアル関係を表している。見やすくする為に、縦軸は適当にシフトしている。

を満たすポテンシャルの理論的なべきは、 $0 < \alpha < 2$ であり、今回の境界である 1.5 とはずれているが、これは粒子数が少なかったためだと思われる。

今後の課題としては、粒子数を増やして、重力と同じ性質が $0 < \alpha < 2$ で現れるのかを検証したい。また、局所ビリアル関係が開放系の無衝突緩和後の準平衡状態を特徴づける性質であるとする、Plummer 解の性質であるエネルギー最小状態との関係を明らかにすることで、エントロピーとは別の指標で開放系の無衝突緩和を考えたいと思う。

References

- Iguchi, O., Sota, Y., Tatekawa, T., Nakamichi, A., & Morikawa, M., 2005, Phys.Rev.E, 71, 016102
 Iguchi, O., Sota, Y., Nakamichi, A., & Morikawa, M., 2006, Phys.Rev.E, 73, 046112

Iguchi, O. 2002, Phys.Rev.E, 66, 051112

Aly, J.J. 1989 MNRAS, 241, 15

力学系の解の特異点の構造と可積分性

石井雅治 < mishii@na.rim.or.jp >
椋山女学園大学 現代マネジメント学部

A Structure of singularities of solutions of Dynamical Systems and Integrability

Masaharu ISHII
School of Modern Management, Sugiyama Jogakuen University

Abstract. We investigated a certain class of autonomous 2-degree of freedom Hamiltonian systems, and obtain a necessary and sufficient condition for nondegenerate integrability and a necessary condition for degenerate integrability. Distributions and characters of singularities of the solutions are roughly known from the conditions. Especially nondegenerate integrability requires Painlevé property. Further we classify chaos into chaos virtual and chaos real and say a hypothesis about these from observations of the distributions of singularities.

1. はじめに

微分方程式で表される非線型力学系で、その解を複素時間の平面上に拡張しよう。このとき解に現れる特異点は、系の何らかの大域的情報を含んでいると考えられる。この特異点を解析することによって系の大域的情報を得ようとする研究が“特異点解析”である。特異点解析の起源は、Kovalevskaja による 19 世紀末の、解の動く特異点が全て極であるという特性と系の可積分性との経験的相関に基づく探求にあるといわれている。

他方、Painlevé(とその弟子 Gambier)は、1900 年頃、2 階の有理的常微分方程式で解が複素時間平面上に動く分岐点を持たないものであって、線型方程式、代数的に求積可能な方程式、楕円関数の方程式のどれにも帰着されないものとして、今日“Painlevé 方程式”とよばれている 6 個の微分方程式を分類している。ここで利用された基準、すなわち解が動く分岐点を持たないという特性は、今日“Painlevé 特性”とよばれている。20 世紀後半には、Painlevé 特性よりやや強い上記の Kovalevskaja の特性(真性特異点を排除)の必要条件(“Painlevé テスト”とよばれる)が、可積分性の基準として特異点解析に広く利用され、多数の可積分系が発見されている。

このような基準は、その時点では数学的証明を欠いた経験的なものであったが、20 世紀の終わりには、吉田が或るクラスの非退化可積分 Hamilton 系に関し、或る(局所)解の特異点が極または有限多価になることを証明した[7]。このことは、系が非可積分か退化可積分である場合、この解の特異点は無限多価になることを意味している。ま

た、著者は同じ非退化可積分系に関し、特異点を持つ或る局所解に対する Lie 群の作用は、極または有限多価の性質を保つことを証明している[1]. しかしこれらの結果は、第一積分の退化性と非存在を区別できないという難点があった.

以上は、結果的に大域的な第一積分が発見されることがあったにせよ、解の或る特定の特異点近傍の性質に基づく発見であるか、この性質に関する理論であり、その意味において局所的なものであった. 例えば、Painlevé 方程式について、動く特異点の或るクラスが極であることは、Painlevé と Gambier によって示されているが、その全てが極であることは示されていない.

20 世紀の終りには、代数幾何の力学への応用が進んだこと等があり、解の特異点全体または多数の特異点を対象とする研究がなされるようになった. 大域的研究が始まったのである(代数幾何に基づく大域的研究は、特異点解析とはよばれないようである). Adler と van Moerbeke は解が書き下させる或るクラスの可積分系について、大域解の構造、特異点の性質や分布の詳細を明らかにしている. 神保は、Painlevé 方程式が、大域的にも Painlevé 特性を満たすことを証明した. また、Chang 等により、カオスの挙動を示す様々な系の特異点分布が数値的に調べられ、集積性を持つこと等が観察されている.

更に、岩崎等は 21 世紀の初頭に、Painlevé VI が、固定特異点を囲む特殊な周回経路上で時間発展に関し、カオスの挙動を示すという衝撃的な証明を行った[5, 6]. 事ここに至って、多数の可積分系を導いた Painlevé 特性とは何だったのか、可積分系と非可積分系の差異とは何か、改めて問い直される大問題として浮上してきた. またこの証明は、実の時間では観測されない、特異点の構造が生むカオスが発見されたことをも意味している.

以上の解の大域的研究からはやや外れるが、特異点解析に連なる系譜として、20 世紀の終りから非可積分性に関する証明技術も大きく発達している. 現在では、退化/非退化可積分の区別なく適用可能な、可積分性の必要条件が示されている.

以上の研究状況の下、我々は Hamilton 系の解の大域的性質を研究し、解が事前には書き下せない、或るクラスの 2 自由度系について、非退化可積分性の必要十分条件と退化可積分性の必要条件を得た. これによって両者の特異点の性質と分布とが或る程度明らかになった. 特に前者は Painlevé 特性を要請することがいえる. 以下、この必要十分条件とこの必要条件を述べる. また、退化可積分系や非可積分系に関する特異点分布の観察結果等に基づいて、カオスを潜在カオスと実カオスに分類し、これらに関する仮説を述べる.

2. 対象とする系と定義

実空間で定義された、次の 2 自由度 Hamilton 系を対象とする.

$$(2.1) \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}.$$

ここで、 t を \mathbb{C} 上に、 $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$ をそれぞれ \mathbb{C}^2 上に拡張して考え、 H は p, q の一価解析関数とする。ただし H の解析性は低次元の適当な除外集合の上で破れていても構わない。

系が、“相似不変性”を持つとは、(2.1)を次の変換で不変にする有理数 e_j ($j = 1, 2, 3, 4$) が存在することとする。

$$p_i \mapsto \theta^{e_i} p_i, \quad q_i \mapsto \theta^{e_{i+2}} q_i, \quad t \mapsto \theta^{-1} t.$$

以下では、系が相似不変性を持つことを仮定する。

この系が“可積分”であるとは、通常のとおり、 $\{H, \Phi\} = 0$ を満たす、 H とは独立の p, q の一価解析関数 $\Phi(p, q)$ が存在することとする。記号 $\{ \}$ は Poisson 括弧である。この Φ を第一積分とよぶ。

系が D 上で“非退化可積分”であるとは、 D 上で次の次元が 2 であることとする。

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{array} \right) \right\rangle_{Span}.$$

系が“特異点の回りで局所一般解”を持つとは、(一般性を失わず) $t = 0$ で、次の解の展開が存在することとする。

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p_i(t) &= t^{e_i} (p_{i,0} + v_{i,1} c_1 t^{r_1} + v_{i,2} c_2 t^{r_2} + v_{i,3} c_3 t^{r_3} + P_i(c_1 t^{r_1}, c_2 t^{r_2}, c_3 t^{r_3})), \\ q_i(t) &= t^{e_{i+2}} (q_{i,0} + v_{i+2,1} c_1 t^{r_1} + v_{i+2,2} c_2 t^{r_2} + v_{i+2,3} c_3 t^{r_3} + Q_i(c_1 t^{r_1}, c_2 t^{r_2}, c_3 t^{r_3})). \end{aligned} \quad (i = 1, 2)$$

$e_j \in \mathbb{Z}$: 少なくとも 1 個の e_j は負または非整数で、この j に対応する $q_{j-2,0}$ または $p_{j,0}$ は 0 でない。

$c_k \in \mathbb{C}$: 任意定数。

$r_k \in \mathbb{Z}$: Kovalevskaja 指数(以下、“KE” と略記)。

$v_k = (v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}, v_{4,k}) \in \mathbb{C}^4$: 独立な 3 個のベクトル。

$P_i(X, Y, Z), Q_i(X, Y, Z)$: 原点近傍で解析的で 2 次以上の項から成り、 $P_i(0) = Q_i(0) = 0$ 。

注 1: KE に制限を付けなければ、多くの系にこの局所一般解は存在する。

注 2: v_k の独立性により、十分小さい t に対し (p, q) の (t, c_1, c_2, c_3) による偏微分は、非退化。

注 3: いつでも、 $c_1 = H$ とできる。

注 4: 非退化可積分の場合、実質的に $c_2 = \Phi$ とできる。

以下、(2.2)を次で表記する。

$$p_i(t) = \xi_i(t; c_1, c_2, c_3), \quad q_i(t) = \zeta_i(t; c_1, c_2, c_3) \quad (i = 1, 2).$$

集合 $D_c(|t_0|) (\mathbb{C}^3)$ を、(2.2)が十分小さい t について収束する場合に、 $|t| < |t_0|$ で

(2.2)を収束させる (c_1, c_2, c_3) の領域とする. 相関収束半径 $\varepsilon \subset \mathbb{R}^4$ を使うと次で表せる.

$$D_c(|t_0|) = \bigcup_{(R_0, R_1, R_2, R_3) \in \varepsilon, R_0 = |t_0|} \tilde{D}_c(R_1, R_2, R_3),$$

$$(\tilde{D}_c(R_1, R_2, R_3) = \{ (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |c_1| < R_1, |c_2| < R_2, |c_3| < R_3 \}).$$

“基本軌道集合”を, 十分小さい正の $T (\in \mathbb{R})$ に対する, $0 < |t| < T$ での(2.2)の解軌道の全体, すなわち $\{ (\xi(t; c_1, c_2, c_3), \zeta(t; c_1, c_2, c_3)) \mid c \in D_c(T), 0 < |t| < T \} (\subset \mathbb{R}^4)$ とする.

“軌道集合”を, 基本軌道集合の軌道を可能な限り時間発展させて得られる集合(無限遠点はいれない)とする.

3. 多価性の分類

解の多価性を, 任意定数の多価性とみて, 次の Type I と Type II に分類できる. ここで, $x(t, c) = (p(t, \tilde{c}), q(t, \tilde{c}))$ とおいた. この分類が, 非退化可積分性の必要十分条件において重要となる. また, これらは Painlevé 特性や系の挙動と関係付けられる.

Type I: $x(t, c_*) = x(t, c_* + \Delta c) \quad (0 \neq \Delta c \in \mathbb{R}^3).$

Type II: $x(t, c_*) = x(t + \Delta t, c_* + \Delta \tilde{c}) \quad (0 \neq \Delta t \in \mathbb{R}, 0 \neq \Delta \tilde{c} \in \mathbb{R}^3).$

Type I も Type II 存在しないことは, 軌道集合上で $3 (= \dim - 1)$ 個の保存量が存在することとほぼ同値であり, 通常の可積分 Hamilton 系では生じない.

命題 3.1: (自励系における) Painlevé 特性の成立と, 高々 Type II の存在は必要十分である.

注 1: Type II は一種の複素 Poincaré マップを定義している.

注 2: いずれもなければ, 高々周期運動しか生じない.

注 3: 準周期運動には, Type I なしでよいが, Type II は必要.

注 4: Type I なしの Type II のみによるカオス系は, 発見されていない.

4. 非退化可積分性の必要十分条件

有理型局所一般解を持つ非退化可積分系に関しては, 軌道集合上で可積分性の必要十分条件が得られ, 解の構造, 特に特異点の構造がかなり明らかになる. また, 非退化可積分性は解に Painlevé 特性を要求すること, が示される.

定理 4.1: (2.1)は, $t = 0$ の回りで局所一般解(2.2)を持ち, その特異点は有理型 $(e_i \in \mathbb{R}, 0 \leq r_j \in \mathbb{Z})$ であり, (2.2)に 1 の冪根を掛けたものは解でないとする. このとき, 次の A と B は必要十分.

A. (2.1)は, 少なくとも軌道集合上で, 非退化可積分である.

B. 次の(1)と(2)が成り立つ.

(1) 軌道集合における解は Painlevé 特性を持つ.

(2) 次の a, b, c のいずれかが成り立つ.

- a. 軌道集合に軌道を持つほとんど全ての解は, 唯 1 つの特異点の近傍においてのみ, 局所一般解で表される.
- b. 軌道集合に軌道を持つほとんど全ての解は, 複数の特異点の近傍において, 局所一般解で表され, 局所一般解で表される特異点の位置の全ては, $t = m\Delta t_1$ ($m \in \mathbb{Z}$) で尽くされ, 各近傍において解は次で表される. ここで, $\Delta t_1 \neq 0$, $\Delta \tau_1 \neq 0$ であり, いずれも c_1, c_2 に依存する複素数値.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} p(t) &= \xi(t - m\Delta t_1; c_1, c_2, c_3 + m\Delta \tau_1), \\ q(t) &= \zeta(t - m\Delta t_1; c_1, c_2, c_3 + m\Delta \tau_1). \end{aligned}$$

- c. 軌道集合に軌道を持つほとんど全ての解は, 複数の特異点の近傍において, 局所一般解で表され, 局所一般解で表される特異点の位置の全ては, $t = m\Delta t_1 + n\Delta t_2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) で尽くされ, 各近傍において解は次で表される. ここで, $\Delta t_1 \neq 0$, $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$, $\Delta \tau_1 \neq 0$, $\Delta \tau_1 \neq \Delta \tau_2$ であり, いずれも c_1, c_2 に依存する複素数値.

$$(4.2) \quad \begin{aligned} p(t) &= \xi(t - m\Delta t_1 - n\Delta t_2; c_1, c_2, c_3 + m\Delta \tau_1 + n\Delta \tau_2), \\ q(t) &= \zeta(t - m\Delta t_1 - n\Delta t_2; c_1, c_2, c_3 + m\Delta \tau_1 + n\Delta \tau_2). \end{aligned}$$

注 1: (4.1), (4.2) は 1 種の実線型モノドロミーを与えている.

注 2: (2.2) が表す特異点分布は, 1 点のみ(B(2)a), 直線上の点列(B(2)b), 格子点列 (B(2)c) のいずれかである.

注 3: 一般に $\Delta t_1 \in \mathbb{R}$.

注 4: B(2)a が成り立つ場合, 挙動は一般に, 実時間発展について直線的.

注 5: B(2)b が成り立つ場合, 挙動は一般に, 実時間発展について準周期的.

注 6: B(2)c が成り立つ場合, 挙動は一般に, 実時間発展ともう 1 つの時間発展について 2 重準周期的.

注 7: 同じ軌道集合に軌道を持つ, 最低次が異なる局所有理型一般解が存在する場合, 上と同じ Δt_i について, (4.1), (4.2) が成り立つ.

注 8: 定理の前提を満たす系が豊富に存在するかは, いまのところわからない.

命題 4.2 :

- (1) B(1) と (2)a が成り立ち, $\Delta t_1 \in \mathbb{R}$ であり, かつ軌道集合の実の点の実の時間発展上に特異点が現れないなら, 実の積分面(実のレベルセット)は平面に同相で, 系は軌道集合上で H, Φ と独立な第一積分を持つ(超可積分).
- (2) B(1) と, (2)b または (2)c が成り立ち, $\Delta t_1 \in \mathbb{R}$, かつ軌道集合の実の点の実の時間発展上で特異点が現れないなら, 実の積分面は円柱またはトーラスのいずれかに同相.

定理と命題の証明(概要) $A \Rightarrow B$: 可積分性より大域的 Painlevé 特性が成り立ち B(1) がいえ, 命題 3.1 より Type I は存在しない. c_1, c_2 は大域的に一価なので, もし Type

II が存在すれば次となる.

$$(4.3) \quad x(t, c_1, c_2, c_3) = x(t - \Delta t, c_1, c_2, c_3 + \Delta \tau)$$

c_3 は, Φ から誘導される Lie 群が, c_1, c_2 のみを含む特解に作用した結果である(Φ に対応する角変数). 従って, 解 $x(t - \Delta t, c_1, c_2, c_3)$ に $\exp(\Delta \tau \mathbf{v}_\Phi)$ を作用すれば, 異時刻の同じ解 $x(t, c_1, c_2, c_3)$ に移る, と(4.3)をみることができる. このことは, 幾何的には, Lie 群の作用で軌道が異なる時刻の自分自身に重なることを意味する. この幾何的意味によって, 1 回でも重なりが生じれば, $\Delta \tau \mathbf{v}_\Phi$ の方向に無限回の重なりが生じること, また独立な $(\Delta t, \Delta \tau)$ は, 高々 2 種類しかないことがいえる. このことを, $t = 0$ の近傍で表せば, B(2)b または c となる. Type II が存在しなければ, B(2)a が成り立つ.

$B \Rightarrow A$: 大域的 Painlevé 特性が成り立つので Type I は存在しない. 従って, B(2)b または c が成り立てば, c_1, c_2 それぞれを p, q の関数とみたものが軌道集合上で一価かつ非退化になる. B(2)a が成り立てば, Type II が存在しないので, c_1, c_2, c_3 のそれぞれを p, q の関数とみたものが軌道集合上で一価かつ非退化になる.

5. 退化可積分性の必要条件

退化可積分とは, H と独立な第一積分 Φ は存在するものの, 軌道集合の或る低次元部分集合上で H, Φ のヤコビアンが退化するようにしかとれないこととする. この場合または第一積分が存在しない場合, KE が非有理数になり, 解が無限多価になることが示されている(吉田[7]). よって, KE の値だけでは退化と非存在を区別できない.

この場合について, 特異点の構造を含むより詳細な結果が得られた.

命題 5.1: 退化可積分のとき局所一般解が存在すれば, $\Phi = \tilde{\Phi}(H, c_2, c_3)$ ($c_1 = H$ に注意)が成り立つ. 基本軌道集合上で Φ の代わりに, 或る正の整数 l が存在して次を一価な第一積分にとれる.

$$(5.1) \quad (c_2 c_3)^l.$$

定理 5.2: (2.1)は, $t = 0$ の回りで局所一般解(2.2)を持ち, r_j ($j = 2, 3$)は非有理数であり, $0 \leq \text{Re}(r_j)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) Φ は次の変換で不変.

$$c_2 \mapsto \alpha c_2 + \beta c_3, \quad c_3 \mapsto \gamma c_2 + \delta c_3.$$

ここで, $\delta = w\alpha^{-1}$, $\beta = \gamma = 0$ または $\alpha = \delta = 0$, $\gamma = w\beta^{-1}$ ($w \in \mathbb{C} : w^l = 1$).

(2) 軌道集合に軌道を持つほとんど全ての解は, 複数の特異点の近傍において, 局所一般解で表され, 局所一般解で表される各特異点の近傍において解は次で表される. ここで, $\Delta t \neq 0$ であり, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と w は, 上の(1)を満たす値である.

$$(5.2) \quad \begin{aligned} p(t) &= \xi(t - \Delta t; c_1, \alpha c_2 + \beta c_3, \gamma c_2 + \delta c_3), \\ q(t) &= \zeta(t - \Delta t; c_1, \alpha c_2 + \beta c_3, \gamma c_2 + \delta c_3). \end{aligned}$$

(3) 上の(2)が成り立つとき, 任意の $m \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ(今のところ証明は全ての場合を尽くしてはいない).

$$(5.3) \quad x(t) = \eta(t - m\Delta t; c_1, (c_2, c_3) \mathbf{A}^m) \quad \left(\eta = (\xi, \zeta), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \right)$$

系 5.3: 局所一般解が(5.2)を満たさないなら, 系は退化可積分ではない. 加えて, 定理 4.1 の B(2)a, B(2)b, B(2)c のいずれをも満たさないなら, 第一積分は存在しない.

注: 定理の主張は線型化モノドロミーについての Ziglin の結果と極めて整合的である(特異点分布に関するものではないが, 伊藤による非線型モノドロミーについての結果[4]があり, この結果も定理の主張と極めて整合的).

6. 非可積分系に関する仮説

局所一般解(2.2)を利用して, 特異点の稠密な分布やフラクタル状の分布の存在が議論されている(吉田[8]). しかしこのような特異点分布と系の挙動との関係はわかっていない. このような特異点分布は, リーマン面の異なる葉の上の特異点を1枚の葉の上に見ている可能性があり, 少なくとも次が成り立つ.

命題 6.1: 上記の吉田によるフラクタル状の特異点分布の構成(自然境界になる)に関し, この特異点分布が構成できないリーマン面の切断が存在する(石井[3]).

ここでは, 複雑な特異点分布と系の挙動との関係について観察結果をまとめ, そこから導かれる仮説を述べる.

観察結果 6.2: Painlevé VI の数値解析の結果では, リーマン面の葉ごとに異なる特異点分布が, カオスを引き起こしている(石井[2]). ただし, 岩崎等が[5, 6]で示したように, 2つの固定特異点を8の字に回る複素時間発展についてのみこのような現象が観察され, 通常の実の時間発展については挙動の複雑さは現れない.

観察結果 6.3: 退化可積分系では, 局所解の無限多価性は挙動の複雑さとして現れない(前節を参照).

観察結果 6.4: 衝突が生じる系(重力ポテンシャル系等)では, 特異点近傍での挙動が, 直接, 実空間に顕現する. すなわち, 局所解の無限多価性($\text{Im}(r_2) \neq 0$)が, そのまま局所積分面の無限の振れとして実空間で観測される.

以上の観察結果から, 通常のカオスには, 解の多価性や複雑な特異点分布だけでなく, それを実の挙動と結びつけるなんらかの機構が必要であると推定できる. これに基づいて次の定義をおき, 仮説を述べる.

定義 6.5：“潜在カオス”とは、特異点を囲む閉回路の複素時間発展において生じるカオスであるとし、“実カオス”とは、実の無限の時間発展において生じるカオスであるとする。

仮説 6.6：自励 Hamilton 系のカオスの起源に関し次が成り立つ。

- (1) 潜在カオスは、リーマン面の葉ごとに異なる特異点分布から生じる。
- (2) 潜在カオスには、少なくとも2つの分岐特異点が必要である。
- (3) 実カオスは、潜在カオスの存在を前提とする。

注：Type II のみによるカオスは見つかっていないので、カオスは、実の直線的な無限の時間発展を要するという意味においてグローバルなもの、ではない可能性がある。

- (4) 潜在カオスの(1)の特異点分布が、何らかの機構を通して実のカオス挙動として顕現する。

注 1: Painlevé VI にはこの機構が存在しない(自励 Hamilton 系化した場合)。

注 2: 衝突が生じる系では、潜在カオスがむきだしの実カオスになる。

注 3: 非可積分系でも、 $(c_2, c_3)^I$ は基本軌道集合上で一価の第一積分になるので、非可積分系と退化可積分系との差異は、 $t = 0$ の近傍にはなく、(5.2)が成り立つか否かにある。

References

- [1] M. Ishii, “Symmetry and the Singular Point Analysis for Ordinary Differential Equations”, Prog. Theor. Phys., 87, 5, (1992), pp.1075- pp.1086.
- [2] 石井雅治, “Painlevé VI の複素時間における数値解析とカオス”, 社会とマネジメント(椋山女学園大学現代マネジメント学部紀要), 5, 2, (2008), pp.1- pp.10.
- [3] 石井雅治, “カオス系の解における特異点分布とみかけの自然境界”, 社会とマネジメント(椋山女学園大学現代マネジメント学部紀要), 6, 2, (2009), pp.1- pp.12.
- [4] H. Ito, “ On the holonomy group associated with analytic continuations of solutions for integrable system”, Bras. Mat., 21, 1, (1990), pp.95-pp.120.
- [5] K. Iwasaki and T. Uehara, “ An ergodic study of Painlevé VI”, Math. Ann., 388, 2, (2007), pp.295-pp.345.
- [6] K. Iwasaki, “Finite Branch Solutions to Painlevé VI Around a Fixed Singular Point”, arXiv:0704.0679v1 [math.AG], Preprint, pp.1-pp.46.
- [7] H. Yoshida, “Necessary Condition for the Existence of Algebraic First Integrals”, Celest. Mech., 31, (1983), pp.363-pp.379.
- [8] H. Yoshida, “Self-Similar Natural Boundaries of Non-Integrable Dynamical Systems in the Complex t Plane”, Chaos and Statistical Methods, Springer-Verlag, (1984), pp.42- pp.45.

NIR lightcurve of (832) Karin and its rotation

Takashi Ito

*Center for Computational Astrophysics (CfCA), National Astronomical
Observatory of Japan (NAOJ), National Institutes for Natural Sciences
(NINS), Osawa, Mitaka, Tokyo 181–8588, Japan.*

Abstract. (832) Karin, an S-type main belt asteroid, is the largest member of a very young asteroid family: the Karin family. This asteroid is likely a large fragment of a disruption event in the main asteroid belt about 5.8 million years ago. We carried out a near-infrared photometric observation of this asteroid in 2006 February near its opposition, and obtained its multicolor lightcurves over nearly the entire rotation phase. This asteroid has been reported to have surface color variation that may indicate the existence of both mature and fresh surfaces, perhaps caused by the disruption event that created the family. However, through our observation in near-infrared wavelength, this asteroid shows almost no surface color variation along its rotation phase. This result, together with the results of previous observations of this asteroid, might give us some insight into its spin axis orientation and hopefully its shape.

1. Introduction

The Karin family, a small asteroid cluster in the large Koronis family, was recognized quite recently with the estimated age of only about 5.8 million years. This family consists of about 70 asteroids with sizes ranging from about 1.5 km to 20 km in diameter. Most asteroid families are in general very old, and they have undergone significant collisional and dynamical evolution since their formation, which likely masks the properties of the original collisions. However, the remarkably young Karin family asteroids possibly preserve some signatures of the original collisional event that formed the family. This extraordinary feature of the Karin family provides us with several significant opportunities for the research of young asteroids such as detecting tumbling motion, obtaining distribution of rotation periods, and estimating the shapes of newly-created asteroid fragments.

The Karin family is also quite interesting in its relation to the general difference of the reflectance spectrum of S-type asteroids from that of ordinary chondrites. Although S-type asteroids (like the Karin family members) are very

common in the inner main belt, their reddened reflectance spectra are different from those of ordinary chondrites, the most common meteorites. Though there is little observational confirmation on the relation between asteroid age and the degree of surface alteration, space weathering have been thought responsible for the spectral mismatch. In particular, since (832) Karin is the largest fragment of a recent asteroid disruption, it is possible that this asteroid has both young and old surfaces together: a young surface that was exposed from the interior of the parent body by the family-forming disruption, and an old surface that used to be the parent body surface exposed to space radiation over a long time. Therefore, if the mixture of these two surfaces is detected by multicolor observation of this asteroid, it could have significant implication for research on the evolution of asteroid surface spectra.

Driven by these motivations, we have begun a program since November 2002 to observe the lightcurves of all the Karin family members. The potential result derived from our observation could be a strong constraint on laboratory and numerical experiments of collisional fragmentation and space weathering. In this paper we report the result of our near-infrared multicolor observation of the largest member of this asteroid family, (832) Karin. Our largest purpose to publish this manuscript is to present near-infrared lightcurves of this asteroid that were obtained near its opposition in the spring of 2006, which have not been on previous literature yet. Not only for confirming whether or not this asteroid has in homogeneous color pattern on its surface, but the lightcurves of this asteroid we obtained will serve as an important constituent in future when we construct a detailed shape model of this asteroid that includes information about its spin axis direction, together with the lightcurves that we have already obtained in visible wavelengths from other observation opportunities in the past.

In Section 2 we describe the observing instrument and our observation method. Section 3 is devoted for describing the observation result. Section 4 goes to some discussions and interpretation of the results.

2. Observation method

We carried out simultaneous imaging observations of (832) Karin in the near-infrared bands J ($1.25\mu\text{m}$), H ($1.63\mu\text{m}$), and K_s ($2.14\mu\text{m}$) from February 17 (UT) to 21 (UT), 2006, when the asteroid was close to its opposition (the exact opposition was on March 10, 2006). See Table 1 for detail of the observation parameters. We used a near-infrared camera called SIRIUS equipped with the 1.4-m Infrared Survey Facility (IRSF) telescope at Sutherland, South Africa. The camera is equipped with three 1024×1024 pixel HgCdTe (HAWAII) arrays. Two dichroic mirrors enable simultaneous observations in the three bands. The image scale of the array is $0''.45/\text{pixel}$, giving a field of view of $7'.7 \times 7'.7$. We measured more than 300 independent data points of the asteroid for each of the J , H , and K_s bands with the exposure time of 15 seconds. Typical

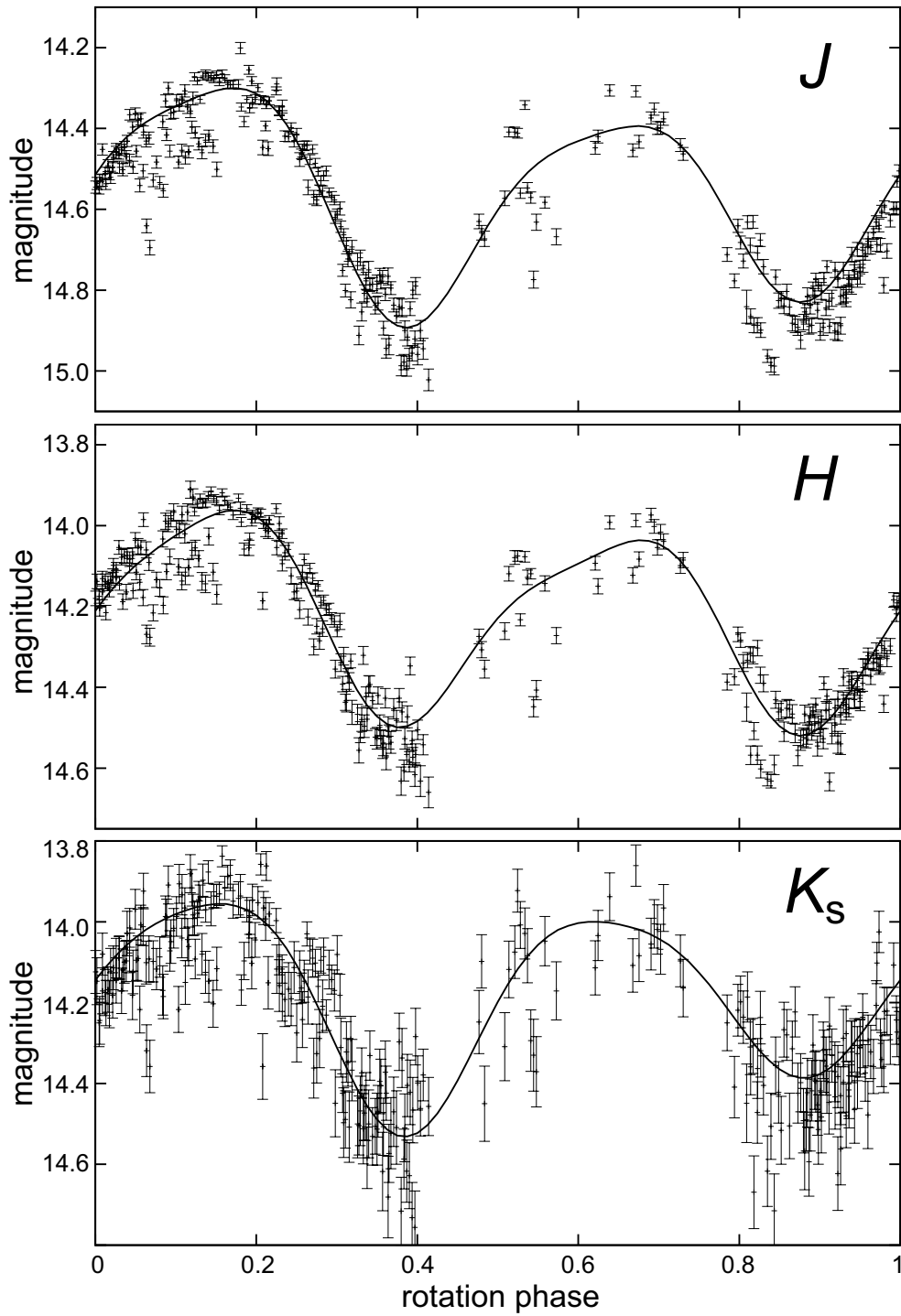


Figure 1. J , H , K_s lightcurves of (832) Karin. The rotational period is 18.15 ± 0.05 hours. Solid lines are the best fit curves for each of the data sets: fourth-order Fourier series.

Table 1. Major parameters during our near-infrared multicolor observations of (832) Karin. From the left, UT date referring to the mid-time of each night, distances (AU) between the asteroid and the Sun (r) and the Earth (Δ), observer-centered ecliptic longitude (λ) and latitude (β), and the solar phase angle (α) of this asteroid. The unit of angles is degree.

Date (UT)	r	Δ	λ	β	α
20060217.02	3.0666	2.1450	173.660	-1.433	7.979
20060218.03	3.0670	2.1391	173.487	-1.437	7.629
20060219.00	3.0673	2.1337	173.318	-1.441	7.289
20060220.01	3.0677	2.1283	173.138	-1.445	6.931
20060221.02	3.0681	2.1232	172.953	-1.448	6.569

seeing was $1''.4$ (FWHM) in the K_s band during our observation period. Two standard stars in the faint infrared standard star catalog were also observed (Persson 9143 and 9149) several times at each night for photometric calibration. We used the NOAO IRAF software package to reduce the data. We applied the standard procedures for near-infrared array image reduction, including dark current subtraction, sky subtraction, and flat-fielding.

Lightcurves from the photometric data were constructed following one of the standard procedures. Principally this method is an iterative repetitions of frequency analysis and fitting to Fourier series. We use Lomb's spectral analysis method and the WindowCLEAN analysis for frequency analysis of the lightcurves, and fit the data with a fourth-order Fourier series. Since we carry out relative photometry of an asteroid and nearby stars in the same frame, we have to be particularly careful when we combine the lightcurves of several observing runs. We combine the lightcurves of multiple observing runs based on the zero-level of each of the frames to obtain final result.

3. Observation results

In Fig. 1 we showed the phased lightcurves of (832) Karin at J , H , and K_s bands after calibrating with the photometric standard stars, together with their best fit sinusoids. In total there are 301 data points on each of the panels in Fig. 1. Through the period analysis, we determined the rotation period of this asteroid as 18.15 ± 0.05 hours for J , H , and K_s . This value is very close to what has been reported as the rotation period of this asteroid, 18.35 ± 0.02 hours through the lightcurve observation in the visible wavelengths. The difference between these two period values is only about twelve minutes, and we do not think this is significant, judging from the rather scattered lightcurve data shown in Fig. 1. The maximum peak-to-peak variation magnitudes of the lightcurves deduced from the best fit curves shown in Fig. 1 are ~ 0.57 for J , ~ 0.56 for H , and

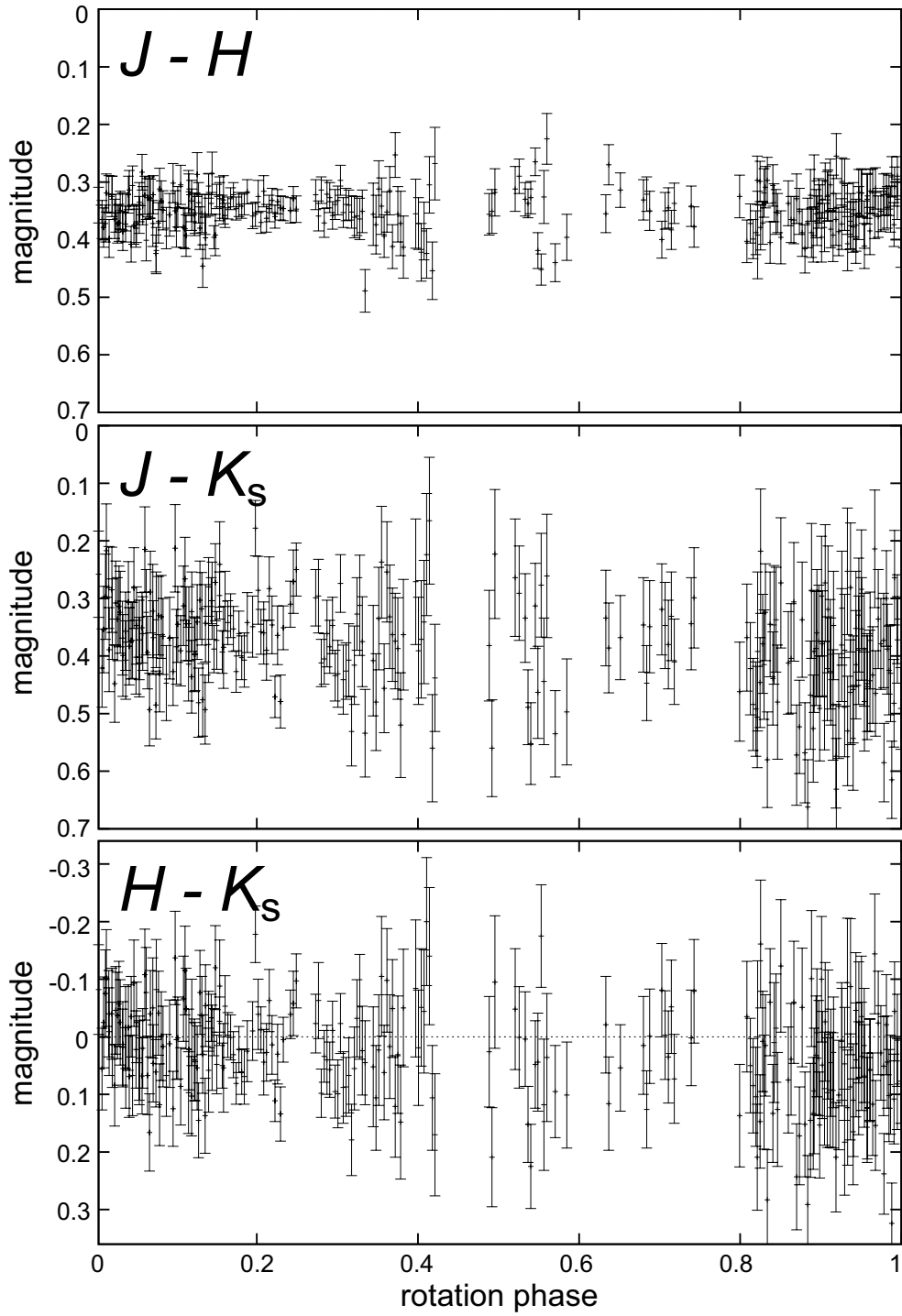


Figure 2. Relative magnitude of $J-H$, $J-K_s$, and $H-K_s$ calculated from the lightcurve data shown in Fig. 1.

~ 0.51 for K_s . The J band amplitude, ~ 0.57 , is greater than the lightcurve amplitude of this asteroid obtained by previous optical observations in R band. This is not surprising because at this observation period in 2006 February we looked at the asteroid from a different direction than at previous observation opportunities. Also, since our observation was performed in the near-infrared wavelengths, the lightcurve amplitude can be somewhat different from that in the visible wavelength.

As seen in Fig. 1, the lightcurve data that we obtained covers almost all of the rotational phase of this asteroid. Readers will notice that data points are sparser, as well as scattered, between the rotation phase 0.4 to 0.8 compared with other phase range. This is mainly because one of the observing nights, 2006 February 19 (UT), suffered from a relatively poor sky condition: barely photometric.

We plotted the color differences of this asteroid such as $J-H$, $J-K_s$, and $H-K_s$ as shown in Fig. 2. We calculated the errors of these values from the photometry errors of each of the J , H , and K_s images: For example, the error of $J-H$ is $\sqrt{\delta J^2 + \delta H^2}$ where δH and δJ are the photometry errors of the H and J images (i.e. basically the square root of the counts that are calculated by IRAF packages).

Looking at the three panels in Fig. 2, none of $J-H$, $J-K_s$, or $H-K_s$ values shows significant change throughout the asteroid's rotation. Although there seems a small color change at phase ~ 0.4 (such as relatively large $J-K_s$ and $H-K_s$ values), so far we cannot be quite sure if this feature is really significant or not because this part of data is followed by the data points that are rather scattered (rotation phase 0.4–0.8). We need more observation data for this rotation phase in order to confirm whether or not the apparent color variation really exists.

To inspect the potential surface color variation of this asteroid in more detail, we calculated the wavelength dependence of the relative reflectance of this asteroid (Fig. 3). The relative reflectance in Fig. 3 is normalized at the wavelength of J band, $1.25\mu\text{m}$. Note that here we subtracted the solar values of $J-H = 0.23$, $J-K_s = -0.29$, and $H-K_s = 0.06$ from the asteroid's data. Actually it is not so straightforward for us to tell whether the surface color of this asteroid is really "red" or not only from the data in this wavelength range from $1.25\mu\text{m}$ to $2.14\mu\text{m}$: For S-type asteroids like (832) Karin in general, spectral difference between weathered (and hence red) surface and fresh (not red) surface typically appears in shorter wavelength range, such as $\sim 1\mu\text{m}$, which is not included in our current observation data. Nevertheless, it is clear that there seems no significant difference in the relative reflectance of this asteroid at any part of the rotation phase, as is easily seen in Fig. 3.

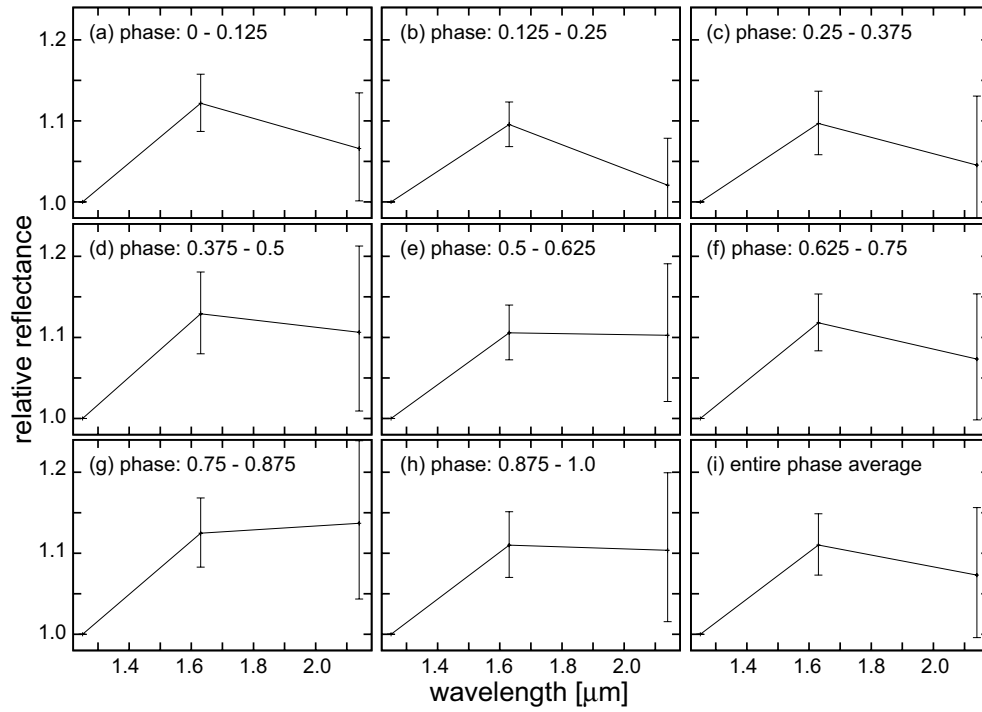


Figure 3. Wavelength dependence of relative reflectance in J , H , and K_s band normalized at the J band wavelength, $1.25\mu\text{m}$, divided in each of the rotation phase ranges (the panels (a) to (h)). The panel (i) shows the average values of the relative reflectance of this asteroid over the entire rotation phase.

4. Discussion

Ever since (832) Karin was identified in 2002 as the largest member of an extremely young asteroid family, many observing attempts have been carried out to detect potential color variation on its surface. Several years ago two observation results were reported that claimed that this asteroid had a heterogeneous surface, some part being typically “red” i.e. very old and mature. This red surface was observed near the opposition in 2003 September through a near-infrared spectroscopy as well as through a multicolor photometry in visible wavelengths. At that opposition, heliocentric true longitude of Karin was $\sim 338^\circ$ with respect to the ecliptic and mean equinox of ICRF/J2000.0 reference frame. Note that at that opposition Karin was relatively close to its perihelion (its argument of perihelion ω during this opposition was $\sim 325^\circ$), so Karin was relatively brighter due to its smaller distance from the Earth.

Recently, results of spectral observation in visible and near-infrared wavelengths were reported, claiming that there is no anomalous color change on the surface of this asteroid. Both of these observations were carried out around the opposition in 2006 March, at nearly the same time as our observation that we have reported in this manuscript. At this opposition, heliocentric true longitude of Karin was $\sim 165^\circ$, and Karin was rather close its aphelion (argument of perihelion $\omega \sim 153^\circ$) and relatively dark. As we have described in this manuscript, we could not detect any significant surface color difference on Karin’s surface at this opposition. In this term our result is consistent with what was already presented. We should also note that our own multicolor observation in visible wavelengths in 2004 September, a year after the opposition in 2003 September, did not detect the red surface on the asteroid.

The key to solving this problem – whether this asteroid has a significant surface color variation or not – lies in determining the spin axis direction and the shape of this asteroid. If Karin’s obliquity (i.e. the angle between its equator and its orbital plane) is so large that its spin axis is close to its orbital plane, it might account for the fact that this asteroid occasionally shows surface part with a different color as it rotates, such as at the opposition in 2003 September. Having the lightcurves that we obtained this time, together with the lightcurves that we have obtained in previous observation opportunities, it is principally possible for us to determine the spin axis direction of this asteroid, as well as to construct its synthetic shape model. This kind of model, when established, will enable us to confirm whether or not Karin really possesses a red, mature surface that was once reported but received with some skepticism.

One thing that we might have to keep in mind when we discuss and compare surface colors and spectra of a certain object by various authors and literature is the effect of backscattering that can cause opposition surge and variation of slope parameters. It is already known that apparent spectrum of the solar system objects can be quite different when their solar phase angle is very large.

Although we are not yet sure how serious this effect could be when the solar phase angle is very small (such as when the object is around the opposition), influence of the backscattering effect on color and spectrum of the solar system small bodies, as well as its dependence on wavelengths, must be explored in much more detail in future observations.

(832) Karin will come to its opposition to the Earth about every 15 months. While we can obtain information of this asteroid around any oppositions, the opposition in 2013 September will be one of the best opportunities for us to get significant information of the surface property of this asteroid, since at this opposition we will be able to observe this asteroid from nearly the same direction as we did in 2003 September when the property of red surface was once observed. Observation of this asteroid at this opportunity will definitely add something else to our current knowledge of this intriguing asteroid.

References

- Chapman, B., C.R. Enke, Merline, W.J., Tamblyn, P., Nesvorný, D., Young, E.F., and Olkin, C. (2007) Young Asteroid 832 Karin shows no rotational spectral variations, *Icarus*, **191**, 323–329.
- Clark, B.E., Hapke, B., Pieters, C., and Britt, D. (2002) Asteroid space weathering and regolith evolution, in Bottke, W.F., Cellino, A., Paolicchi, P., and Binzel, R.P. eds., *Asteroids III*, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 585–599.
- Delsanti, A., Peixinho, N., Boehnhardt, H., Barucci, A., Merlin, F., Doressoundiram, A., and Davies, J.K. (2006) Near-infrared color properties of Kuiper belt objects and Centaurs: final results from the ESO large program, *Astron. J.*, **131**, 1851–1863.
- Dermawan, B., Nakamura, T., Fukushima, H., Sato, H., Yoshida, F., and Sato, Y. (2002) CCD photometry of the MUSES-C mission target: Asteroid (25143) 1998 SF36, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **54**, 635–640.
- Harris, A.W. and Lupishko, D.F. (1989) Photometric Lightcurve observations and reduction techniques, in Binzel, R.P., Gehrels, T., and Matthews, M.S. eds., *Asteroids II*, The University of Arizona Press, Tucson, 39–53.
- Ito, T. and Yoshida, F. (2007) Color variation of a very young asteroid, Karin, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **59**, 269–275.
- Kusakabe, N., Tamura, M., Nakajima, Y., Kandori, R., Ishihara, A., Nagata, T., Nagayama, T., Nishiyama, S., Baba, D., Sato, S., Sugitani, K., Turner, E.L., Abe, L., Kimura, H., and Yamamoto, T. (2005) Near-infrared photometric monitoring of the pre-main-sequence object KH 15D, *Astrophys. J.*, **632**, L139–L142.

- Lomb, N.R. (1976) Least-squares frequency analysis of unequally spaced data, *Astrophys. Space Sci.*, **39**, 447–462.
- Magnusson, P. (1989) Pole determinations of asteroids, in Binzel, R.P., Gehrels, T., and Matthews, M.S. eds., *Asteroids II*, The University of Arizona Press, Tucson, 1180–1190.
- Marzari, F., Farinella, P., and Davis, D.R. (1999) Origin, aging, and death of asteroid families, *Icarus*, **142**, 63–77.
- Michel, P., Benz, W., and Richardson, D.C. (2003) Disruption of fragmented parent bodies as the origin of asteroid families, *Nature*, **421**, 608–611.
- Nagayama, T., Nagashima, C., Nakajima, Y., Nagata, T., Sato, S., Nakaya, H., Yamamuro, T., Sugitani, K., and Tamura, M. (2003) SIRUS: A near infrared simultaneous three-band camera, *Proc. SPIE*, **4841**, 459–464.
- Nakajima, Y., Kato, D., Nagata, T., Tamura, M., Sato, S., Sugitani, K., Nagashima, C., Nagayama, T., Iwata, I., Ita, Y., Tanabe, T., Kurita, M., Nakaya, H., and Baba, D. (2005) Near-infrared imaging observations of the N159/N160 complex in the Large Magellanic Cloud: large clusters of Herbig Ae/Be stars and sequential cluster formation, *Astron. J.*, **129**, 776–789.
- Nesvorný, D. and Bottke, W.F. (2004) Detection of the Yarkovsky effect for main-belt asteroids, *Icarus*, **170**, 324–342.
- Nesvorný, D., Bottke, W.F., Dones, L., and Levison, H.F. (2002) The recent breakup of an asteroid in the main-belt region, *Nature*, **417**, 720–722.
- Persson, S.E., Murphy, D.C., Krzeminski, W., Roth, M., and Rieke, M.J. (1998) A new system of faint near-infrared standard stars, *Astron. J.*, **116**, 2475–2488.
- Roberts, D.H., Lehar, J., and Dreher, J.W. (1987) Time series analysis with CLEAN I. Derivation of a spectrum, *Astron. J.*, **93**, 968–989.
- Sasaki, S., Nakamura, K., Hamabe, Y., Kurahashi, E., and Hiroi, T. (2001) Production of iron nanoparticles by laser irradiation in a simulation of lunar-like space weathering, *Nature*, **410**, 555–557.
- Sasaki, T., Sasaki, S., Watanabe, J., Sekiguchi, T., Yoshida, F., Kawakita, H., Fuse, T., Takato, N., Dermawan, B., and Ito, T. (2004) Mature and fresh surfaces on the newborn asteroid Karin, *Astrophys. J.*, **615**, L161–L164.
- Vernazza, P., Rossi, A., Birlan, M., Fulchignoni, M., Nedelcu, A., and Dotto, E. (2007) 832 Karin: Absence of rotational spectral variations, *Icarus*, **191**, 330–336.
- Yoshida, F., Dermawan, B., Ito, T., Sawabe, Y., Haji, M., Saito, R., Hirai, M., Nakamura, T., Sato, Y., Yanagisawa, T., and Malhotra, R. (2004) Photometric observations of a very young family-member asteroid (832) Karin, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **56**, 1105–1113.

遅い動きと小さな量：カオスと多倍長計算

小西哲郎

名古屋大学理学部物理学教室 R 研

Abstract. 数値計算には誤差がつきものであるが、系がカオス的であるときには特に誤差の影響が顕著である。では、多倍長計算で精度を向上させ誤差の影響を少なくすることが出来たならば、カオスについてどのようなことが新たにわかるであろうか。今回は、多倍長計算ライブラリ CLN を用いて不変多様体の交差角およびアーノルド拡散を数値計算した例を紹介し、多倍長計算で何が出来るかを探ってみる。

目次

1. はじめに	25
2. カオスと多倍長計算	25
2.1. 高精度で計算したい	25
2.2. 多倍長計算	25
2.3. 多倍長計算ライブラリ CLN	26
2.4. 多倍長計算はカオスの役に立つのか？	26
3. カオスにおける特異的に小さな量	26
3.1. 不変多様体の交差角	27
交差角とは何か：	27
交差角は小さい！（こともある）：	27
交差角の計算：	28
3.2. アーノルド拡散	29
アーノルド拡散とは：	29
アーノルド拡散は遅い：	31
アーノルド拡散の計算：	31
4. まとめと展望	32

1. はじめに

本稿は筆者の以前の研究 (Konishi (1999, 2005)) に基づいて書かれています。したがって、書かれている内容には古くなっている部分もあるかもしれませんので、その点御容赦ください。

2. カオスと多倍長計算

2.1. 高精度で計算したい

多体問題 (多自由度のハミルトン力学系) の運動方程式を数値積分する場合、誤差の問題には気をつけることがある。多自由度のハミルトン力学系はほとんどの場合非可積分であり、その運動はカオス的である。すなわち、初期値が微小に異なる2つの軌道を考えて、2つの軌道の間はずれ $\delta x(t)$ は長時間後には

$$\left| \overrightarrow{\delta x(t)} \right| \propto \exp(\lambda t) \left| \overrightarrow{\delta x(0)} \right|, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

と指数関数的に拡大してしまう。

また、運動方程式の数値積分に用いられるインテグレーターを写像と考えた場合、これも本質的にはカオス的であり、数値積分の各ステップで発生する様々な誤差 (丸め誤差、桁落ち、…) は、時間が経つとともに増大していく。このように数値積分で誤差が増えるのはもちろん悩ましいことであり、問題によっては深刻な困難である。

2.2. 多倍長計算

増大する誤差を解決する方法はいくつか提案されているが、そのうちのひとつが本研究会の他の発表でも取り上げられているような多倍長計算である。すなわち、通常の数値計算では、変数は FORTRAN なら REAL*8, C, C++ なら double など、10進数で16桁程度しか精度を持たないが、それをより長い桁数だけ確保できるようにした方法が多倍長計算である。

多倍長計算は次のような特徴を持つ：

- 浮動小数点計算のビット長をユーザーが拡張指示可能。
- 解は通常の数値計算同様、近似解でしかない。
- 汎用的。様々な問題に適用できる。

これらの特徴は、数値計算で厳密な結果が得られる精度保証計算とは対照的である。

多倍長計算を用いるには、いくつかの方法がある。

- アプリケーションに組み込まれているもの (Mathematica, maxima, ...)
- 既存の言語 (C, C++, etc.) にライブラリとして追加するもの (GMP (GNU mp), CLN, hfloat, ...)
- その他

2.3. 多倍長計算ライブラリ CLN

ここで CLN について簡単に紹介する。(Haible (1995,1999))

CLN は C++ 上で用いる多倍長計算のライブラリである。変数の精度は変数ごとにユーザーが定める事が出来る。(プログラム内でデフォルトの精度を定めることもできる。) REAL*128 などの型があるわけではない。

CLN では、+, -, *, / の四則計算や、exp, sin, cos, tan などの各種の関数はほとんど通常の記法をそのまま使う事が出来るので、精度と変数を設定してしまえば、あとはユーザーはそれが CLN を使っていることをあまり意識せずに済む。また、多倍長計算ではない通常のプログラムを CLN を使うように書き換えるのも比較的容易である。

2.4. 多倍長計算はカオスの役に立つのか？

CLN を用いてロジスティック写像 $x \mapsto x' = ax(1-x)$ を計算した例を以下にあげる。この写像では、 $a = 4$ の場合に厳密解がある (Ulam & von Neumann (1947); Umeno (1997, 1999)) ので、それとのずれの時間発展をプロットしたのが図1(左)である。見てのとおり、誤差は小さいながら指数的に増大している。当然の事で

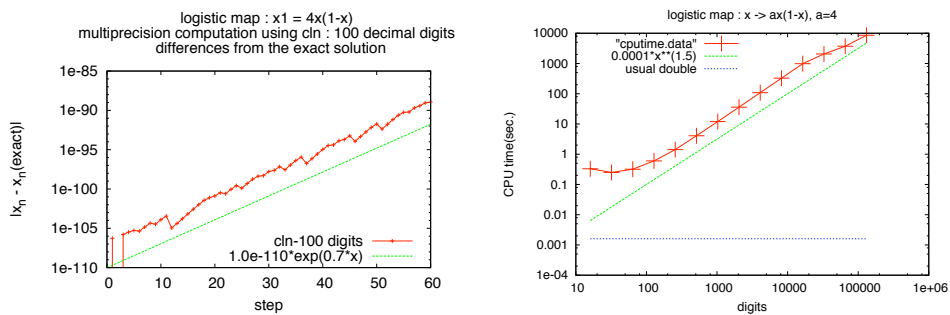


Figure 1. (左) ロジスティック写像を CLN で計算した例。精度は 10 進で 100 桁を指定。厳密解 $x_n^{(ex)} = \sin^2(2^n \varphi_0)$ との差の絶対値 $|x_n - x_n^{(ex)}|$ をとり、その時間発展をプロットした。(右) ロジスティック写像を計算した場合の計算時間と桁数の関係。

あるが、長時間計算した場合、多倍長計算を用いても誤差が増大してしまうのである。(いわば「焼け石に水」) また、図1(右)に見られるように、精度をあげると必要な計算時間は増大する。この場合には桁数に関して指数的に増大している。当り前の話ではあるが、多倍長計算を導入したからといって手放しでは喜べないのである。

3. カオスにおける特異的に小さな量

では、カオス研究には多倍長計算は役に立たないのであろうか？

前節では、多倍長計算をしても長時間では誤差が増大してしまうことを見た。しかし、逆に言えば、比較的少ない計算で捉えられる現象であるならば、多倍長計算は有効である可能性がある。ここではそのような現象として2つ、

- 不変多様体の交差角
- アーノルド拡散

を考える。

3.1. 不変多様体の交差角

交差角とは何か： まず不変多様体の交差角について簡単に述べる。

可積分系とそれに摂動が入った系とを考える。可積分系ではなめらかにつながっていた不安定多様体 W^u と安定多様体 W^s が、摂動が入ることによってなめらかにはつながらず、ずれが生じ、有限の角度で交わってしまう。このときの交差の角度のことをここでは不変多様体の交差角と呼ぶ。(図2) W^u と W^s がなめらかにつながらず有限の角度で交わることにより系が一価の解析的積分を持たない、すなわち非可積分であることが言える。(大貫義郎・吉田春夫 (1994)) このことから、 W^u と W^s の交差はカオスの発生を特徴づける現象であるとも見ることが出来、その特徴を表す量が交差角 θ である。

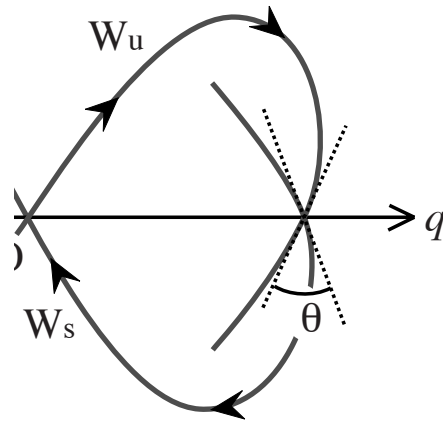


Figure 2. Separatrix splitting と交差角 θ の模式図。

交差角は小さい!(こともある): さて、図2のような模式図あるいはシミュレーションで描いた図では、分かりやすいようにある程度大きな角度で交差している図を描くことが多い。しかし、実際にはこの交差角は非常に小さくなりうる事が知られている。(Lazutkin et al. (1989); Nakamura & Hamada (1996); Tobvis et al. (1994, 1998); Hirata et al. (1999); 平田吉博 (2000)) 例えば、Standard map

$$\begin{aligned} p' &= p + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi q), \\ q' &= q + p'. \end{aligned}$$

においては、交差角は (Lazutkin et al. (1989))

$$\theta_{st} \sim \frac{c_{st}}{K} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{K}}\right), \quad c_{st} = 1118.827706\dots \quad (2)$$

であり、また、double well map

$$\begin{aligned} p' &= p - \varepsilon(2q^3 - q), \\ q' &= q + \varepsilon p' \end{aligned}$$

では、交差角は (Nakamura & Hamada (1996))

$$\theta_{\text{dw}} \sim \frac{c_{\text{dw}}}{\varepsilon^5} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\right), \quad c_{\text{dw}} = 5.00 \times 10^4, \quad (3)$$

となる。

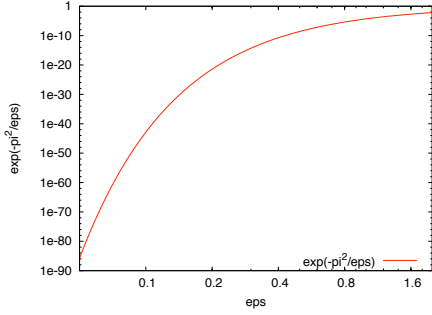


Figure 3. $\exp(-\pi^2/\varepsilon)$ のグラフ。

Standard map も double well map も、交差角は

$$\theta \propto \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right) \quad (4)$$

の形をしている。これらに限らず、

$$(q, p) \mapsto (q', p'), \quad \begin{cases} p' &= p - \varepsilon f(q) \\ q' &= q + \varepsilon p' \end{cases} \quad (5)$$

の形、すなわち、Newton の運動方程式を素朴に離散化した形の保測写像においては、交差角は式 (4) の形を持つことが解析的な計算により示される。(Tobvis et al. (1994, 1998); Hirata et al. (1999))

式 (4) のグラフを図 3 に示す。 ε が小さくなると交差角が急激に小さくなるのがわかる。

交差角の計算： 解析的な計算で評価が得られている交差角であるが、これを数値計算で確かめるのは難しい課題である。原理的には、不安定および安定多様体の交点においてそれぞれの規格化された接ベクトル \vec{v}_u, \vec{v}_s をつくり、ここから

$$\theta = \cos^{-1}(\vec{v}_u \cdot \vec{v}_s) \quad (\text{ただし } |\vec{v}_u| = |\vec{v}_s| = 1) \quad (6)$$

とすれば交差角 θ が求まるはずである。しかし、非可積分性が弱く交差角 θ が小さい場合、 \vec{v}_u と \vec{v}_s の違いは微小なので、微小量 η (これは交差角 θ と同じ程度の小さい量である) を用いて

$$\vec{v}_u \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_s \equiv \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{v}_u| = |\vec{v}_s| = 1 \quad (7)$$

と書くことが出来る。すると、

$$\vec{v}_u \cdot \vec{v}_s \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix} \right\} = 1 + \eta(\alpha \cdot \delta\alpha + \beta \cdot \delta\beta) \quad (8)$$

よって交差角 θ は

$$\theta = \cos^{-1}(1 + \eta(\alpha \cdot \delta\alpha + \beta \cdot \delta\beta)) \quad (9)$$

となる。括弧の中の 2 項めは微小量 η に比例し、この項が図 3 に見るように非常に小さい場合、例えば $1 + 10^{-20}$ などとなる場合には、倍精度程度では求まらない

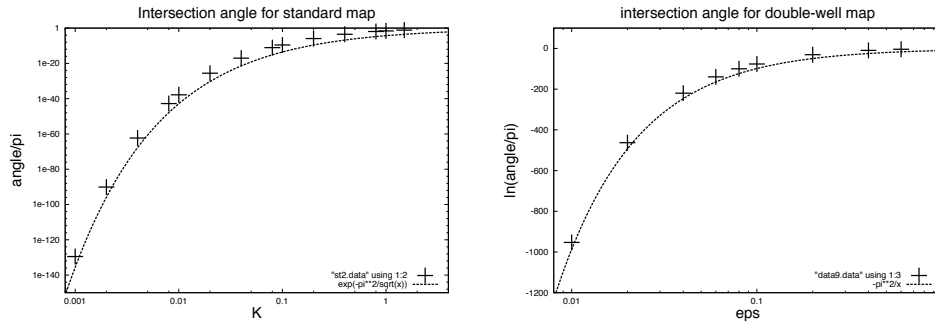


Figure 4. standard map(左)と double well map (右)の交差角。精度は10進で1000桁。点線は評価式(2)

いことになってしまう。これは困ったことである。カオスの起源とでも言うべき現象が数値計算で捉えられないのは満足いく状況では無い。

多倍長計算を用いると、交差角 θ を高精度で求めることが出来る。これは Simó らによりなされた。(Simó & Fontich (1985))。ここでは Konishi (1999); 小西哲郎 (2000) の結果を挙げる。計算においては、双曲型不動点近傍にて接ベクトル $\vec{v}_u^{(0)}$ および $\vec{v}_s^{(0)}$ を作り、これらを時間的に正および負の方向に発展させて交点での \vec{v}_u, \vec{v}_s を作り、後は式(6)にて θ を計算すれば良い。図4に、standard map および double well map に対して多倍長計算ライブラリ CLN を用いて交差角を計算した結果を示す。どちらの場合も数値計算は解析的な結果と良く一致している。極めて小さな角度まで計算できていることは多倍長計算の効果である。

前節では多倍長計算でもカオスでは良い近似解が得られない可能性を述べたが、この場合にうまくいっているのは、双曲型不動点から交差点までは W^u および W^s は規則的に伸びていて、誤差の増大が少ないからであると考えられる。

3.2. アーノルド拡散

アーノルド拡散とは： 以下では次に、多倍長計算をカオス系に用いたもう一つの例として、アーノルド拡散を数値的に検証したという研究を紹介する。(Konishi (2005))

アーノルド拡散とは、多自由度のハミルトン系で見られる現象で、摂動を受けて保存量が増減していく過程の一つであり、多自由度系における緩和の素過程とも考えられるものである。

可積分なハミルトニアン $H_0(I)$ に微小な摂動 $\varepsilon H_1(I, \varphi)$ が加わると、 H_0 での保存量 I はもはや保存量ではなくなり時間的に変化を始める。このとき、系の自由度 N が小さいと、系の相空間には規則的な運動をする部分 (KAM トーラス) が残っていて、これが相空間を分断し、カオス的な軌道も相空間(あるいは等エネルギー面)全体を動くことは出来ない。ところが、系の自由度 N が大きくなると、KAM トーラスは N 次元しか持たないために、KAM トーラスが $2N$ 次元の相空間を分割することが出来ず、カオス軌道は相空間全体を動くことが出来るようになる。(図5)

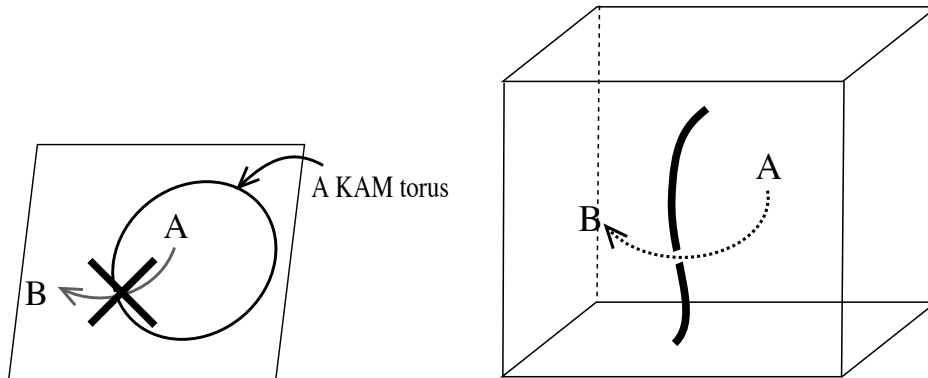
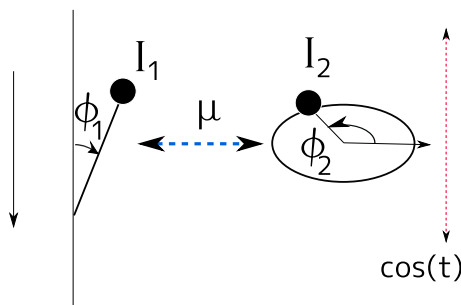


Figure 5. 相空間と不変多様体の次元の模式的表現。(左)1自由度系の場合。1次元の不変多様体(ここでは周期軌道)が2次元の相空間を区切っているため、その内側と外側が分離されていて、系は閉じ込められている。(右)多自由度系の場合。不変多様体はあるものの、その余次元が1より大きい(ここでは2)ので、系はその“脇”をとって相空間の広い領域を動くことができる。

これは単に多自由度ではカオス軌道の各部分がトポロジカルにはつながっている、ということを示しただけであるが、Arnoldは、ある簡単なモデルを用いて、実際に保存量に変化していく機構が存在することを示すことが出来た。(Arnold (1964))これがアーノルド拡散である。



ArnoldがArnold diffusion(と今日呼ばれているもの)の存在を示すために論文(Arnold (1964))で用いたモデル(Arnold modelとここでは呼ぶ)は、次のハミルトニアンで定義される:

$$H = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1) \times [1 + \mu(\sin \varphi_2 + \cos t)] \quad (10)$$

Figure 6. Arnold modelの模式図

すなわち、系は「単振り子」+「回転子」の形をしている。模式的には

図6の様に書かれる。

この系で着目する「保存量だったもの」は回転子の作用 I_2 である。図7に示すように、 $I_2 = \omega$ での不安定多様体 W_u と $I_2 = \omega'$ での安定多様体 W_s とが交差することで、 $I_2 = \omega$ にあった系が $I_2 = \omega' = \omega + \Delta I_2$ へと移る。すなわち、 I_2 の値が ΔI_2 だけ変化する。この過程を繰り返していくことにより、 I_2 の値は大きく変化することが出来る。

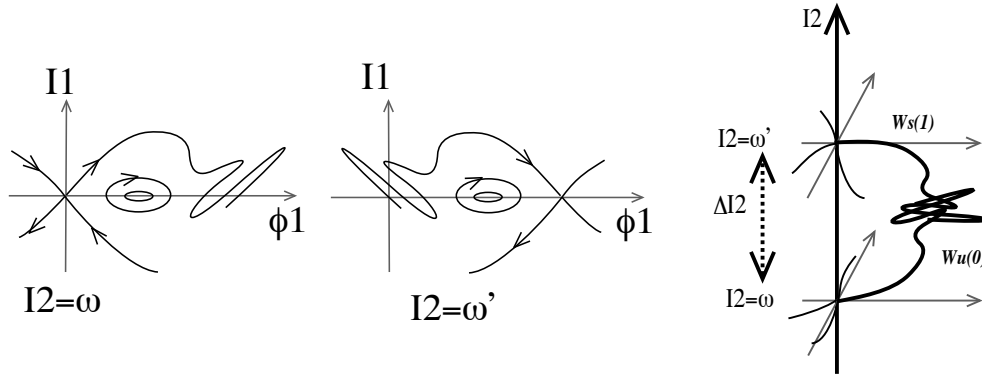


Figure 7. (左) Arnold model(10)における不安定および安定多様体の模式図 および (右) それを高次元で接続してみた図

アーノルド拡散は遅い： Arnold は、結合定数 μ に関する摂動計算により、この ΔI_2 を

$$|\Delta I_2| \sim 4\pi\mu \exp\left(-\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (11)$$

と評価した。すなわち、 ε が小さいときには、 I_2 は極めてゆっくりと変化する。逆にいうと、回転子の作用 I_2 が $\mathcal{O}(1)$ 程度変化するためには非常に長時間を要する。これが「アーノルド拡散は遅い」と言われる所以である。

アーノルド拡散の計算： アーノルド拡散は有名な現象であるが、しかし、それを実際に捉えたという報告は少ない。特に、アーノルドがその論文で述べた意味でのアーノルド拡散を実際に見たという数値的あるいは観測的報告は、著者の知る限り見当たらなかった。特に、アーノルドが述べたように、作用のずれが本当に小さい量なのか、特異的な依存性を示すものなのか、など、基本的なことがアーノルド拡散については分かっていなかったのである。アーノルド拡散は少なくともその名前は良く知られていることを考えるとこれは驚きである。しかし、素朴な数値計算では式 (11) で与えられる作用のずれが小さすぎて捉えきれない。そこで多倍長計算の登場である。1回のずれ ΔI_2 ならば多倍長計算で追えると考えられるので、アーノルドの原論文にあったモデルを CLN を用いて数値計算し、摂動計算での評価が正しいかどうかなどを確かめてみる。

運動の過程では、 (I_1, φ_1) はほぼ周期的に単振り子の運動をする。回転子の作用 I_2 は (I_1, φ_1) が双曲型不動点から離れると初期値から外れ、双曲型不動点近傍に戻って来るとまた元の初期値近傍に戻る。この戻って来たときの I_2 の値のずれ ΔI_2 が今問題になる量である。 I_2 はもともと 1 程度の量で、それのごくわずかなずれを見ようとしているので、多倍長計算が有効になるのである。

具体的には、多倍長演算ライブラリ CLN を用いて、典型的には 10 進で 1000 桁で数値計算を行った。運動方程式の時間発展は 8 次の symplectic integrator で time step $\Delta t = 10^{-2}$ を用いた。また、 $\varepsilon = 0.004$ の場合は 10 次で $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ を用いた。(注：パラメタの選定は改良の余地があるかもしれない)

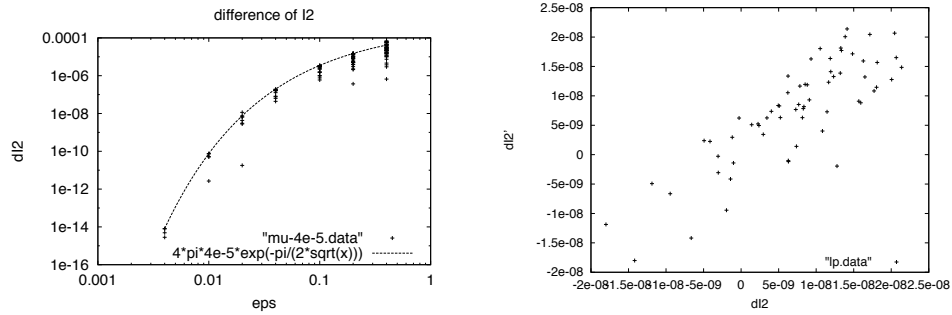


Figure 8. (左) ΔI_2 の ε 依存性を CLN で計算したもの。点線は摂動計算による評価式 $\Delta I_2 \sim 4\pi\mu \exp(-\pi\omega/2\sqrt{\varepsilon})$ (11) (右) ΔI_2 をつぎつぎとプロットしたもの: $(\Delta I_2, \Delta I_2')$ データは左図と同じ物。

結果を図8に挙げる。この数値計算結果はアーノルドのオリジナルな評価(11)とよく一致する。また、 ΔI_2 のリターンマップをとってみると、 ΔI_2 は正の強い相関を持っている事が分かり、「アーノルド『拡散』」とは呼ばれているものの、少なくとも短時間では拡散的では無いこともわかる。

4. まとめと展望

多倍長計算のライブラリ CLN を使って、安定、不安定多様体の交差角や、アーノルド拡散の大きさなど、保存系カオスの特異的に小さな量を取り出すことが出来た。特に、原論文 (Arnold (1964)) の意味でのアーノルド拡散を数値的に確認できた。ただし、アーノルド拡散の計算は、インテグレータの精度も含めて改良が必要であると考えられる。

今回紹介した計算では、全ての計算を多倍長演算を用いたが、CLN のようなライブラリでは、精度はプログラム内で動的に変更することが可能である。そこで、今後は、高精度が必要なところだけ (例えば衝突近傍など) を多倍長変数で計算して全体の精度を確保しつつ高速化も図る、ということも可能かもしれない。

参考文献

Arnold, V. 1964, Sov. Math. Dokl., 5, 581

Haible, B. 1995,1999, CLN, a Class Library for Numbers, <http://www.ginac.de/CLN/>

Hirata, Y., Nozaki, K., & Konishi, T. 1999, Prog. Theor. Phys., 101, 1181

Konishi, T. 1999, Direct measurement of intersection angle of invariant manifolds for area preserving mappings, <http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9911010/>

- , 2005, *Adv. Chem. Phys.*, 130B, 423
- Lazutkin, V. F., Schachmannski, I. G., & Tabanov, M. B. 1989, *Physica*, D 40, 235
- Nakamura, K., & Hamada, M. 1996, *J. Phys.*, A 29, 7315
- Simó, C., & Fontich, E. 1985, in *Singularité, feuilletages et mécanique hamiltonienne*, ed. J.-P. Dufour (Paris: Hermann)
- Tobvis, A., Tsuchiya, M., & Jaffé, C. 1994, *Exponential asymptotic expansions and approximations of the unstable and stable manifolds of the Hénon map*, preprint
- , 1998, *Chaos*, 8, 665
- Ulam, S. M., & von Neumann, J. 1947, *Bulletin of American Mathematical Society*, 53, 1120
- Umeno, K. 1997, *Physical Review E*, 55, 5280
- Umeno, K. 1999, in *数理解析研究所講究録*, Vol. 1098, 104–117
- 小西哲郎. 2000, in *研究集会「数理解析の諸問題と力学系」報告集*, 47–61
- 大貫義郎・吉田春夫. 1994, *岩波講座現代の物理学*, Vol. 1, 力学 (岩波書店)
- 平田吉博. 2000, in *研究集会「数理解析の諸問題と力学系」報告集*, 47–61

Mixed Precision Iterative Refinement for Solving Linear Systems of Equations using IEEE754 Double Precision Arithmetic and Multiple Precision Arithmetic and its Application to Fully Implicit Runge-Kutta Method

Tomonori Kouya <tkouya@cs.sist.ac.jp>

Shizuoka Institute of Science and Technology

Abstract. Buttari et al. have proposed the mixed precision iterative refinement using the IEEE754 single and double precision arithmetic for solving linear systems of equations. We broaden the scope of applications of the mixed precision iterative refinement by using a combination of double precision arithmetic and multiple precision arithmetic, and show that the new method has higher performance and yields more precise solutions than the original method. Finally, through our numerical experiments, we demonstrate that the fully implicit Runge-Kutta methods with the mixed precision iterative refinement can speed up.

1. Introduction

In 1967, C. Moler proposed the original iterative refinement for solving linear systems of equations. His idea is based on Newton method to be applied to a n -th dimensional equation such as

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

In this case, the iteration formula is

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k) \right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad (2)$$

where $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) / \partial \mathbf{x}$ is Jacobian matrix of given function \mathbf{f} .

If (1) is the linear system of equations such as

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

the correspondent Jacobian matrix is given as the constant matrix A . So the Newton iteration changes the following algorithm:

$$\mathbf{r}_k := \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k \quad (3)$$

$$\text{Solve } A\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k \text{ for } \mathbf{z}_k \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_k \quad (5)$$

The above one is the algorithm of iterative refinement for solving linear systems of equations. Although these iterations are not theoretically necessary, actual finite precision floating-point arithmetic generally create nonzero residual \mathbf{r}_k due to round-off errors occurring in these processes. Therefore several iterations are executed to minimize the norms of residuals in many cases. The residuals must be precise in order to obtain the high precision approximations \mathbf{x}_k .

Buttari et al. shows that when the condition number $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ is not so large in comparison with the precision of employed floating-point arithmetic, the sufficient condition for convergence of mixed precision iterative refinement is satisfied even if the precision of (4) is lower than the residuals. Their benchmarks clarify that their proposed one in which (3) and (5) are calculated with IEEE754 double precision (simply double precision or DP) and the linear system of equations (4) with IEEE754 single precision (single precision or SP) can perform better than purely double precision direct method. Their proposed one needs well-tuned computation environment on which single precision computation is certainly faster than double precision computation, such as Cell Broadband Engine or a combination of standard CPUs and well-tuned LAPACK like ATLAS or GotoBLAS.

In this paper, we firstly explain the mixed precision iterative refinement proposed by Buttari et al. and confirm that it can be extended with multiple precision environment. Secondly we will experiment their original SP-DP (single precision - double precision), MP-MP (multiple precisions) and DP-MP iterative refinements applied to well- and ill-conditioned problems on standard PC environment and demonstrate that our proposed DP-MP iterative refinement can obtain the maximum speedup ratio while achieving MP accuracy. Finally, we will benchmark a fully implicit Runge-Kutta method with DP-MP iterative refinement in order to show its advantage.

2. Theory of Mixed Precision Iterative Refinement

We suppose that the targeted linear system of equations is

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (6)$$

where the coefficient matrix A is always normal. And we also suppose that any elements of A and \mathbf{b} in (6) can be given in any expected precision.

Buttari et al. have proven that mixed precision iterative refinement can obtain the approximation at the same level of relative errors as by using standard methods for solving linear systems of equations which purely uses L decimal digits floating-point arithmetic. Moreover their proposed mixed precision iterative refinement can gain better performance if (4) is calculated with $S (< L)$ decimal digits. They have also maintained that the algorithm employed in this part must be numerically stable, concretely like GMRES method or direct method. In this paper, we employ the direct method by LU factorization with partial pivoting as solver for (4). In this case, (4) is expressed as

$$(PLU)\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k.$$

Before iterations, A must be factorized into PLU , where P is a permutation matrix identified with partial pivoting. Forward and backward substitutions are executed only in the process of iterations.

The whole algorithm of the mixed precision iterative refinement corresponding to the formulas (3) - (5) is as follows:

1. $A^{[L]} := A, A^{[S]} := A^{[L]}, \mathbf{b}^{[L]} := \mathbf{b}, \mathbf{b}^{[S]} := \mathbf{b}^{[L]}$
2. $A^{[S]} := P^{[S]}L^{[S]}U^{[S]}$
3. Solve $(P^{[S]}L^{[S]}U^{[S]})\mathbf{x}_0^{[S]} = \mathbf{b}^{[S]}$ for $\mathbf{x}_0^{[S]}$
4. $\mathbf{x}_0^{[L]} := \mathbf{x}_0^{[S]}$
5. For $k = 0, 1, 2, \dots$
 - (a) $\mathbf{r}_k^{[L]} := \mathbf{b}^{[L]} - A\mathbf{x}_k^{[L]}$
 - (b) $\mathbf{r}_k^{[S]} := \mathbf{r}_k^{[L]}$
 - (c) Solve $(P^{[S]}L^{[S]}U^{[S]})\mathbf{z}_k^{[S]} = \mathbf{r}_k^{[S]}$ for $\mathbf{z}_k^{[S]}$
 - (d) $\mathbf{z}_k^{[L]} := \mathbf{z}_k^{[S]}$
 - (e) $\mathbf{x}_{k+1}^{[L]} := \mathbf{x}_k^{[L]} + \mathbf{z}_k^{[L]}$
 - (f) Exit if $\|\mathbf{r}_k^{[L]}\|_2 \leq \sqrt{n} \varepsilon_R \|A\|_F \|\mathbf{x}_k^{[L]}\|_2 + \varepsilon_A$,

where $A^{[S]}$ and $\mathbf{b}^{[L]}$ means the approximated matrix and vector rounded to S or L decimal digits floating-point numbers.

We will describe the conditions for convergence of the S - L decimal digits mixed precision iterative refinement below.

The symbols ε_S and ε_L denote the machine epsilons in S and L decimal digits floating-point arithmetic, respectively. In L digits arithmetic, (3) can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k, \\ \text{where } \|\mathbf{e}_k\| &\leq \varphi_1(n)\varepsilon_L (\|A\| \cdot \|\mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{b}\|). \end{aligned} \quad (7)$$

The residual \mathbf{r}_k contains the computational error \mathbf{e}_k . In similar way, we can express (5) as

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_k + \mathbf{f}_k, \\ \text{where } \|\mathbf{f}_k\| &\leq \varphi_2(n)\varepsilon_L (\|\mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{z}_k\|). \end{aligned} \quad (8)$$

Moreover (4) can be also expressed as

$$\begin{aligned} (A + H_k)\mathbf{z}_k &= \mathbf{r}_k, \\ \text{where } \|H_k\| &\leq \phi(n)\varepsilon_S \|A\|. \end{aligned} \quad (9)$$

At this time, we denote that $\alpha_F, \beta_F \in \mathbb{R}$ are as follows:

$$\begin{aligned} \alpha_F &= \frac{\phi(n)\kappa(A)\varepsilon_S}{1 - \phi(n)\kappa(A)\varepsilon_S} + 2\varphi_1(n)\kappa(A)\varepsilon_L + \varphi_2(n)\varepsilon_L \\ &\quad + 2(\varphi_1(n)\varepsilon_L)\varphi_2(n)\kappa(A)\varepsilon_L \\ &= \psi_F(n)\kappa(A)\varepsilon_S \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \beta_F &= 4\varphi_1(n)\kappa(A)\varepsilon_L + \varphi_2(n)\varepsilon_L + 4(1 + \varphi_1(n)\varepsilon_L)\varphi_2(n)\kappa(A)\varepsilon_L \\ &= \rho_F(n)\kappa(A)\varepsilon_L \end{aligned} \quad (11)$$

If the conditions

$$\frac{\rho_F(n)\kappa(A)\varepsilon_S}{1 - \psi_F(n)\kappa(A)\varepsilon_S} < 1 \text{ and } \alpha_F < 1 \tag{12}$$

are satisfied, we can expect that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{\beta_F}{1 - \alpha_F} \|\mathbf{x}\|. \tag{13}$$

It means that the normwise relative error in the approximation \mathbf{x}_k can reach the order of $\beta_F/(1 - \alpha_F)$.

Therefore S - L mixed precision iterative refinement can certainly converge if

$$\kappa(A)\varepsilon_S \ll 1 \tag{14}$$

is satisfied. According to the large condition number $\kappa(A)$, it needs to be larger computational digits S enough to converge. On the other hand, it requires more computational cost and its advantage would decrease. In addition, the question why we require $L > S$ digits approximation would occur in spite of small $\kappa(A)$. The cases that S - L mixed precision iterative refinement will be advantageous are :

- to require over L digits approximation if $\varepsilon_S^{-1} > \kappa(A)$
- to be in computational environment that S digits arithmetic can be executed much faster than L digits arithmetic

and vice versa. Figure 1 explains such circumstances.

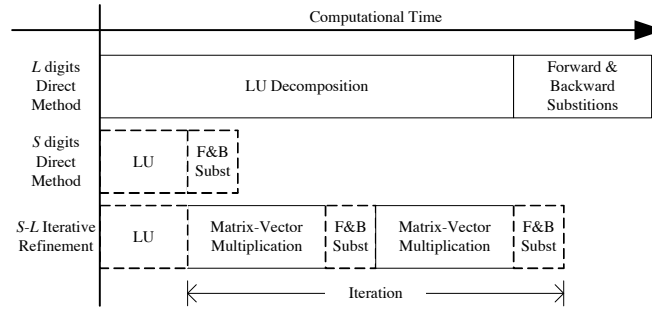


Figure 1. Structure of Computational Time of Mixed Precision Iterative Refinement

3. Iterative Refinements with Multiple Precision Floating-point Arithmetic

Multiple precision floating-point arithmetic more than quadruple precision implemented as software libraries generally needs much more computational cost than IEEE754 single or double precision floating-point arithmetic embedded as hardware units on CPUs. For that reason, mixed precision iterative refinement which uses S decimal digits and L decimal digits floating-point arithmetic, can gain better performance than, and the

approximation at the same level of relative errors as by direct methods which purely uses L decimal digits floating-point arithmetic, if users require U decimal digits approximation more than quadruple precision and U is much less than $\log_{10} \kappa(A)$, where $L > U + \log_{10} \kappa(A)$ and $S > \log_{10} \kappa(A)$. So we select 3 combinations of precisions (SP-DP, DP-MP and MP-MP) to be applied in mixed precision iterative refinement, which can optimize the level of relative errors and computational costs.

1. $\kappa(A) < 10^7 \implies$ Single Precision($S = 7$)-Double Precision($L = 15$): SP-DP type
2. $\kappa(A) < 10^{15} \implies$ Double Precision($S = 15$)-Quadruple Precision or Multiple Precision($L > 30$): DP-MP type
3. $\kappa(A) > 10^{15} \implies$ Quadruple Precision or Multiple Precision - Multiple Precision : MP-MP type

DP-MP and MP-MP iterative refinements in above combinations can gain better performance than original SP-DP type proposed by Buttari et al. We can expect that DP-MP iterative refinement will gain the best performance in them, because it uses high-speed hardware computation (DP) and slow software computation (MP).

But actual performances of these mixed precision iterative refinements depend on the computation environments on which they are executed. As Figure 1 maintains, S - L iterative refinement would be meaningless if S decimal digits computation could not be executed faster than L decimal digits one. For that reason, we set S and L as $L/S \geq 2$ in our numerical experiments described in this paper. It is one of future works to minimize the ratio L/S enough to gain better performed mixed precision iterative refinement.

4. Performance Evaluation

In this section, we evaluate performances of SP-DP, MP-MP and DP-MP iterative refinements on the following environment:

CPU Intel Core2Quad 6600

RAM 4GB

OS CentOS 5.2 x86_64

C compiler GCC 4.1.2(gcc and gfortran)

Multiple Precision Library MPFR 2.3.2/GMP 4.2.1 + BNCpack 0.7b

Linear Algebra Computation Library LAPACK 3.2, ATLAS 3.8.3

SP and DP computations are executed by using BNCpack without taking advantages of CPU architectures, original LAPACK (compiled with gfortran), its tuned ATLAS and GotoBLAS. Core2Quad contains 4 cores, but we did not use any parallelization.

MP computation is executed by using BNCpack based on MPFR/GMP. Multiple precision floating-point variables provided by MPFR and GMP are able to have any length of bits of mantissas, so mixed precision computations are freely executed in any positions of codes.

We set the parameters for stopping rule as

$$\varepsilon_R := \varepsilon_L, \varepsilon_A := 0, \quad (15)$$

in order to obtain the best approximation as far as we use less than L decimal digits computation.

4.1. Performance Evaluation of SP-DP Iterative Refinement

To prepare test problems for numerical experiments, we create the dense square matrix with fixed condition number by multiplying normal matrix X generated by using standard random generator, its inverse matrix X^{-1} and the diagonal matrix $D = \text{diag}(n, n-1, \dots, 1)$ as follows:

$$A = XDX^{-1} \quad (16)$$

So we can obtain well-conditioned matrix A with $\kappa_2(A) = n$. We employ a true solution as $\mathbf{x} = [1 \ 2 \ \dots \ n]^T$ and create test problems with correctly rounded A and $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$. Due to limitation of main memory, the maximum dimension n is 4096. In all cases we create, SP-DP iterative refinement can converge after 2 or 3 iterations.

First, we show the wall-clock times to execute IEEE754 double precision direct methods (LU decomposition with partial pivoting, and forward and backward substitutions) and speedup ratio of single precision direct method (= wall-clock time of DP direct method / wall-clock time of SP direct method) in Figure 2.

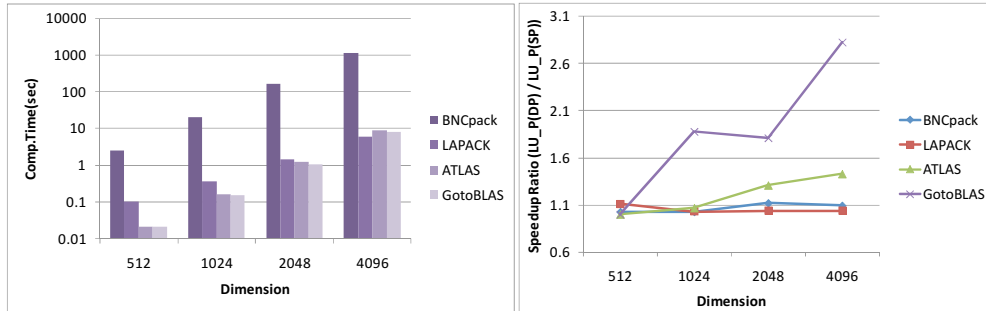


Figure 2. Computational Time (sec) of DP Direct Method(Left) and Speedup Ratio (Right) of SP Direct Method versus DP Direct Method

Among DP computation libraries, the performance of BNCpack is the worst and others are at the same level of performance with growing dimensions. GotoBLAS can especially obtain the best performance in small dimensions and the largest speedup ratio of SP direct method. These benchmarks show that the SP-DP iterative refinement using GotoBLAS can obtain the best performance on our PC environment.

Next, we show speedup ratios of SP-DP iterative refinement (= wall-clock time of DP direct method / wall-clock time of SP-DP iterative refinement) and maximum elementwise relative errors of approximations obtained by direct and iterative refinements in Figure 3.

We can recognize that relative errors of SP-DP iterative refinements are entirely 2 or 3 decimal digits larger than of DP direct method, but we cannot maintain that

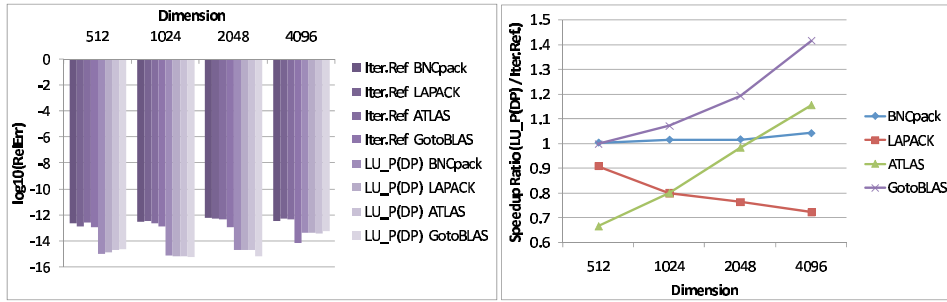


Figure 3. Relative Error of DP Direct Method and SP-DP iterative refinement (Left) and Speedup Ratio of SP-DP iterative refinement (Right)

such tendency toward relative error is definite, because the approximation obtained by iterative refinement with GotoBLAS can obtain the best accuracy for 4096 dimensional problem. We also can recognize that the accuracies of approximations obtained by both methods are closer with growing dimensions of problems.

These benchmarks shown in Figure 2 attest to well-tuned high performance linear computation libraries able to execute faster SP computation than DP computation for SP-DP iterative refinement. GotoBLAS produces the largest speedup ratio as we expected, but LAPACK or ATLAS may do worse.

4.2. Performance Evaluation of MP-MP Iterative Refinement

We evaluate the performance of MP-MP iterative refinement by using the well-conditioned problem (16). Due to limitation of main memory, we set the dimensions as $n = 128, 256, 512$ and 1024 , computational digits as $L = 50, 100$ and 200 . S is fixed as $L/2$. For comparison, the wall-clock times of purely L digits direct methods are shown in Table 1.

Table 1. Computational Time of Multiple-precision Direct Method (sec)

n	$L = 50$	100	200
128	0.15	0.24	0.46
256	1.81	1.97	5.66
512	13.83	23.59	44.7
1024	93.90	160.51	264.94

Figure 4 shows the relative errors of MP-MP iterative refinement and the speedup ratio of MP-MP ($L/2-L$) iterative refinement versus L digits direct methods.

Similarly, in the case of SP-DP type, the approximations obtained by MP-MP iterative refinement can be 2 or 3 decimal digits worse than by MP direct method. The speedup ratio can be about 1 to 2 times larger. For the test problems, we can expect that MP-MP iterative refinement can perform better if we select much less S than L . These results suspect that we can obtain the best performance with DP-MP iterative refinement.

Next we use Lotkin matrix (17) as a example of ill-conditioned problems.

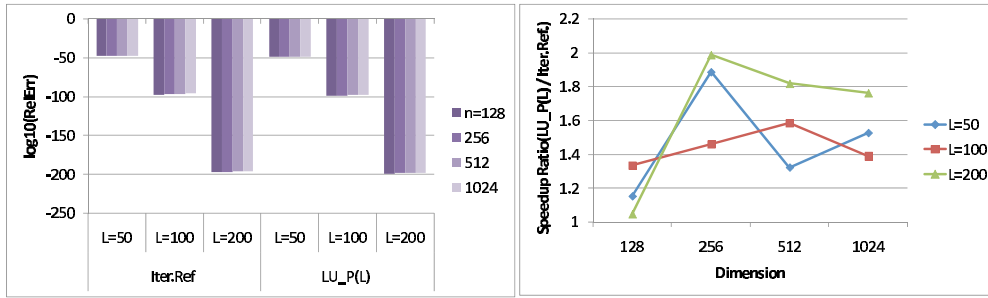


Figure 4. Relative Error of Multiple-precision Direct Method and MP-MP iterative refinement (Left) and Speedup Ratio of MP-MP iterative refinement (Right)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & 1/(2n-1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

All elements in the first row are replaced to 1 on Hilbert matrix which is also well-known as ill-conditioned. The condition number of Lotkin matrix is the same order as Hilbert matrix. If the order of the condition numbers is larger than the number of decimal digits, $A^{[L]}$ rounded in L decimal digits have the smaller condition numbers than true one (Table 2). In this case, this phenomenon occurs in the 512th dimensional Lotkin matrix rounded in 500 decimal digits.

Table 2. Condition Numbers of Lotkin Matrices

n	$\log_{10}(\kappa_1(A^{[L]}))$		
	$L = 500$	1000	2000
64	96.0	96.0	96.0
128	193.9	193.9	193.9
256	389.8	389.8	389.8
512	506.0	781.6	781.6

Table 3. Computational Time of Multiple-precision Direct Method (sec): $L = 500, 1000$ and 2000

n	Comp.Time (sec)		
	$L = 500$	1000	2000
64	0.19	0.57	2.19
128	1.51	4.50	17.47
256	12.15	35.96	139.51
512	97.00	286.76	1115.88

For these reasons, MP-MP iterative refinement in 500 decimal digits computation can converge for under 128th dimensional problems, for under 256th dimensional ones in 1000 decimal digits computation, and for under 512th dimensional ones in 2000 decimal digits computation. As shown in Figure 5, the relative errors of approximations is at the same level as L decimal digits direct method if converged. In case of 1000 decimal digits and 512th dimensional problem, direct method can obtain 200 decimal digits approximation but MP-MP iterative refinement cannot converge due to about

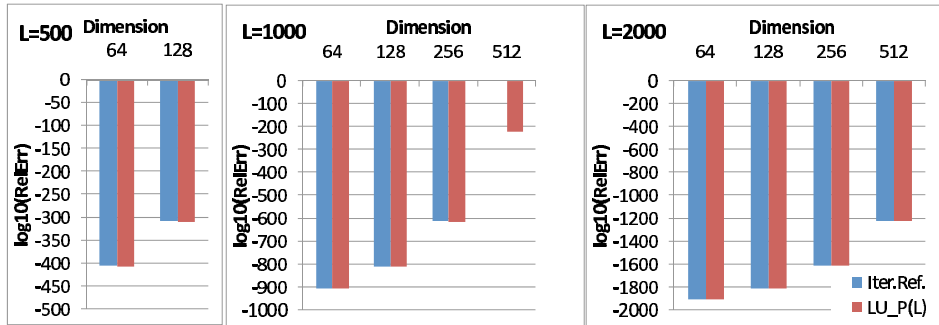


Figure 5. Relative Error of MP Direct Method and MP-MP Iterative Refinement for Lotkin Matrix: $L = 500$ (Left), $L = 1000$ (Middle) and $L = 2000$ (Right)

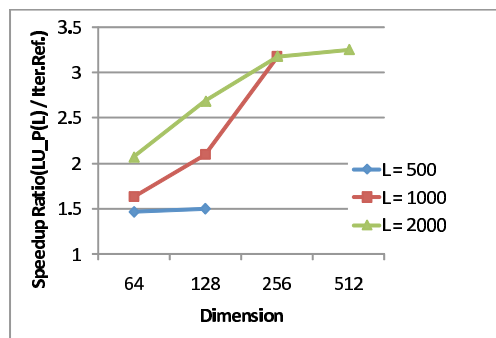


Figure 6. Speedup Ratio of MP-MP Iterative Refinement: Lotkin Matrix

800 decimal digits ($S = 500$) lack of accuracy. In similar case of well-conditioned problems, more decimal digits MP-MP iterative refinement can perform about 1.5 to 3.4 times much better MP than direct method as shown in Figure 6.

4.3. Performance Evaluation of DP-MP Iterative Refinement

We here evaluate DP-MP iterative refinement by using well-conditioned linear system of equations (16). In this algorithm, LU factorization outside iterations and forward and backward substitutions inside them are executed in DP arithmetic. On the other hand, the residuals and renewal of approximations inside them are done in MP arithmetic. This combination causes limitation of accuracy for approximation due to occurring underflow in DP arithmetic. If the length of exponent in MP floatint-point number is longer than DP's one, the renewal of approximation cannot be invalid when the norm of residual is under about 1.0×10^{-308} . For that reason, we limit the computational digits to $L = 50, 100$ and 200 and the dimension of test problems $n = 128$ to 1024 . The results are described as below.

Table 4 shows the relative errors and iterative times of DP-MP iterative refinement. For comparison, the results of MP-MP iterative refinements are shown at first column in it.

Table 4. \log_{10} (Relative Error) and Iterative Times (in Parenthesis) of DP-MP Iterative Refinement

	$L = 50$				
n	MP-MP	BNCpack	LAPACK	ATLAS	GotoBLAS
128	-47.63 (2)	-49.10 (4)	-49.02 (4)	-49.23 (4)	-49.21 (4)
256	-46.71 (2)	-48.84 (4)	-48.80 (4)	-48.74 (4)	-49.12 (4)
512	-47.24 (2)	-48.09 (4)	-48.41 (4)	-48.76 (4)	-48.79 (4)
1024	-46.96 (2)	-48.75 (4)	-48.61 (4)	-48.32 (4)	-48.36 (4)
n	$L = 100$				
128	-97.38 (2)	-98.94 (7)	-98.69 (7)	-98.93 (7)	-98.86 (7)
256	-96.93 (2)	-99.04 (7)	-98.96 (7)	-99.04 (7)	-98.94 (7)
512	-96.18 (2)	-98.00 (7)	-98.43 (7)	-98.62 (7)	-98.60 (7)
1024	-95.56 (2)	-98.66 (7)	-98.71 (7)	-98.60 (7)	-98.64 (7)
n	$L = 200$				
128	-197.39 (2)	-198.50 (14)	-198.59 (14)	-196.97 (13)	-198.64 (13)
256	-196.38 (2)	-198.65 (14)	-198.68 (14)	-198.71 (14)	-198.38 (13)
512	-196.13 (2)	-198.20 (14)	-198.04 (14)	-198.42 (14)	-198.56 (13)
1024	-196.11 (2)	-198.46 (14)	-198.52 (14)	-198.56 (14)	-195.25 (13)

There is very little difference between the relative errors of approximation of DP-MP iterative refinement and of MP-MP type one. In many cases, DP-MP type can obtain a little bit more precise than MP-MP type. When the ratio L/S is larger, the speed of convergence of iterative refinement is slower. For that reason, DP-MP type requires more than 2 to 7 times iterations than MP-MP type. Figure 7 shows the speedup ratio of DP-MP type versus MP-MP type.

Throughout these numerical experiments, we can recognize that more computational digits tend to reduce the speedup ratio. This is because MP computations of residuals in more iterations reduce the speedup gained by LU factorization as Table 4

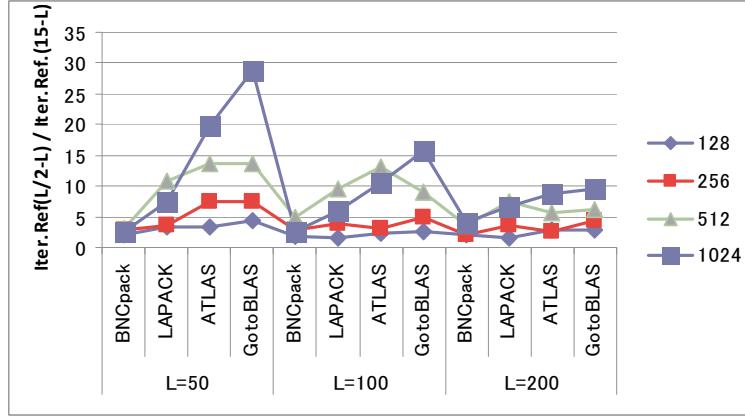


Figure 7. Speedup ratio: MP-MP versus DP-MP

shows. Even though there are such disadvantages, actual DP-MP iterative refinement can perform 10 (in 50 decimal digits) to 30 (in 200 decimal digits) times better with GotoBLAS, 1.8 to 4 times better with BNCpack at least.

5. Application to Fully Implicit Runge-Kutta Methods with DP-MP Iterative Refinement

As mentioned above, the DP-MP mixed precision iterative refinement can perform better to relatively well-conditioned linear systems of equations from which DP direct method can obtain precise solutions. The advantage will be maximized for fully implicit Runge-Kutta (IRK) methods.

For the initial value problem for n -th dimensional ordinary differential equation (ODE)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}, \quad (18)$$

we discretize it over integration interval $[x_0, \alpha]$ with constant stepsize $h = (\alpha - x_0)/(2 \cdot 4^l)$. When we obtain new approximation $\mathbf{y}_{i+1} \approx \mathbf{y}(x_0 + ih)$ from the former \mathbf{y}_i , we must solve the nonlinear system of equations

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_i + c_1 h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{1j} \mathbf{k}_j) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_i + c_2 h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{2j} \mathbf{k}_j) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m = \mathbf{f}(x_i + c_m h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{mj} \mathbf{k}_j) \end{cases},$$

and then we calculate \mathbf{y}_{i+1} as follows:

$$\mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{k}_j,$$

where m means a number of stages of IRK method, and c_p , a_{pq} and w_q are constants chosen in IRK method. In our numerical experiments, we select 3 stages 6th order Gauss type formula.

To solve the nonlinear system of equations above, Newton's iteration is often applied as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{(l+1)} \\ \mathbf{k}_2^{(l+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^{(l+1)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{(l)} \\ \mathbf{k}_2^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^{(l)} \end{bmatrix} - J^{-1}(\mathbf{k}_1^{(l)}, \dots, \mathbf{k}_m^{(l)}) \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{(l)} - \mathbf{f}(x_i + c_1 h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{1j} \mathbf{k}_j^{(l)}) \\ \mathbf{k}_2^{(l)} - \mathbf{f}(x_i + c_2 h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{2j} \mathbf{k}_j^{(l)}) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^{(l)} - \mathbf{f}(x_i + c_m h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{mj} \mathbf{k}_j^{(l)}) \end{bmatrix},$$

where $J(\mathbf{k}_1^{(l)}, \mathbf{k}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{k}_m^{(l)})$ means

$$J(\mathbf{k}_1^{(l)}, \mathbf{k}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{k}_m^{(l)}) = \begin{bmatrix} I_n - J_{11} & -J_{12} & \cdots & -J_{1m} \\ -J_{21} & I_n - J_{22} & \cdots & -J_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J_{m1} & -J_{m2} & \cdots & I_n - J_{mm} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

In above formulas, I_n means n -th dimensional identity matrix and J_{pq} means

$$J_{pq} = h a_{pq} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(x_i + c_p h, \mathbf{y}_i + h \sum_{j=1}^m a_{pj} \mathbf{k}_j^{(l)}) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

where $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$ is the Jacobian matrix of \mathbf{f} .

We can expect that the linear system of equations emerged from Newton's iteration, have the property that $J(\mathbf{k}_1^{(l)}, \mathbf{k}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{k}_m^{(l)}) \rightarrow I_{mm}$ in case of $h \rightarrow 0$. Due to that property, DP-MP iterative refinement may be applicable to them for IRK method with small h , because they would be well-conditioned in many cases. In such situations, DP-MP iterative refinement may speed up IRK method requiring MP approximation.

To confirm the hypothesis, we prepare the constant linear ODE

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = -A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = [1 \dots 1]^T,$$

with the well-conditioned 128th dimensional matrix A ($\|A\|_1 \approx 10^3$) based on (16), and then apply the 3 stages, 6th order Gauss type $L = 50$ decimal digits IRK method to it. Figure 8 shows the history of relative errors in the approximations versus stepsize h , and the histories of condition numbers and Frobenius norms of $J(\mathbf{k}_1^{(l)}, \mathbf{k}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{k}_m^{(l)})$.

In case of $h = 512$, we can recognize that the approximation \mathbf{y}_i can reach about 24 decimal digits precision and that the condition numbers decrease in 3.8×10^3 to 1.7. These facts verify the applicability of DP-MP iterative refinement to the linear ODE. We show the speedup ratio of IRK method with DP-MP iterative refinement versus with direct method in Figure 9.

IRK method with DP-MP iterative refinement can perform about 7.5 to 8.9 times (with GotoBLAS) better than with direct method. In case of with BNCpack, it can do about 3.8 to 4.8 times better at least.

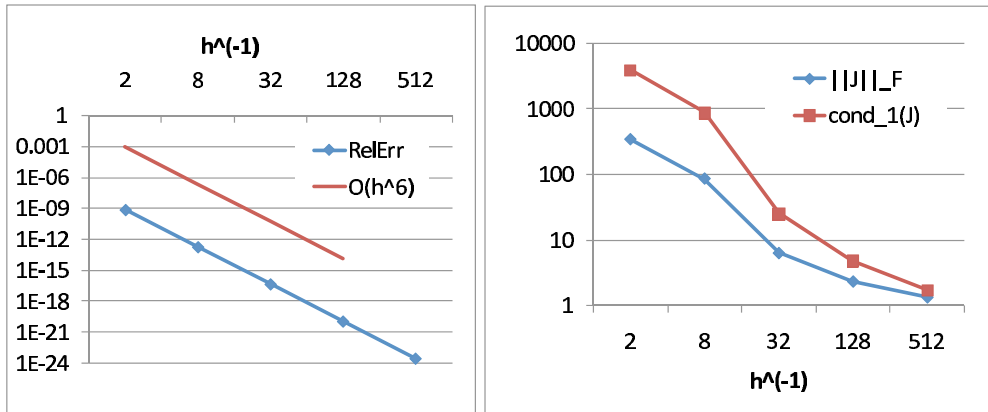


Figure 8. History of Maximum Relative Errors (Left), Frobenius Norms and Condition Numbers of J (Right)

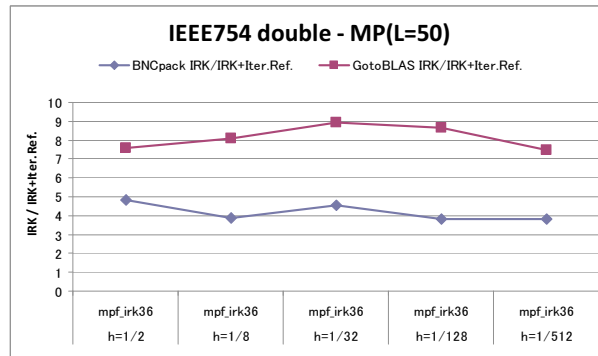


Figure 9. Speedup ratio of Implicit Runge-Kutta Method (50 Decimal Precision): DP-MP vs Direct Method

6. Conclusion and Future Works

Numerical experiments we mentioned above clarify that all types of mixed precision iterative refinements can bring us the approximation at the same level of relative error as L decimal digits direct method if the sufficient conditions for convergence are satisfied, that well-tuned LAPACK like GotoBLAS or ATLAS enable us to perform DP-MP iterative refinement as well as SP-DP type in comparison with direct method, and that the application to fully implicit Runge-Kutta methods may provide us enough efficiency.

Our future work is to investigate mixed precision refinement method's applicability to more general class of initial value problems for ordinary differential equations through various numerical experiments. Especially the most important problems are time-dependent partial differential equations. In many cases, the discretization for these PDEs lead to ODEs with sparse matrices, so iterative methods such as Krylov subspace methods will be more expected than direct methods as we experimented in this paper. Buttari et al. have already proved that SP-DP iterative refinement method can enhance the performance of Krylov subspace methods. According to their results, we can expect more highly performance for DP-MP and MP-MP iterative refinements applied to Krylov subspace methods.

References

- Swox AB. GNU MP. <http://gmp.lib.org/>.
- A.Buttari, J.Dogarra, Julie Langou, Julien Langou, P.Luszczek, and J.Karzak. Mixed precision iterative refinement techniques for the solution of dense linear system. *The International Journal of High Performance Computing Applications*, Vol. 21, No. 4, pp. 457–466, 2007.
- A.Buttari, J.Dongarra, J.Kurzak and P.Luszczek, and S.Tomov. Using mixed precision for sparse matrix computations to enhance the performance while achieving 64-bit accuracy. *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 34, No. 4, pp. 1–22, 2008.
- S.P.Nørsett E.Hairer and G.Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1996.
- G.W.Stewart. *Matrix Algorithms Volume I: Basic Decompositions*. SIAM, 1998.
- Tomonori Kouya. BNCpack. <http://na-inet.jp/na/bnc/>.
- LAPACK. <http://www.netlib.org/lapack/>.
- MPFR Project. The MPFR library. <http://www.mpfr.org/>.
- ATLAS: Automatically Tuned Linear Algebra Software. <http://math-atlas.sourceforge.net/>.

3体問題の衝突特異点が正則化可能となる場合に関する考察

柴山允瑠 (sibayama@kurims.kyoto-u.ac.jp)

京都大学数理解析研究所

1. はじめに

Kovalevski は剛体の運動方程式の特異点が正則化可能性に着目し、可積分となる新しいパラメータの値を見出した。この研究が微分方程式論における特異点解析の起源であろう。

n 体問題についても、特異点解析は Painlevé により研究され始め、現在も継続している。 n 体問題の場合の特異点は衝突特異点である。非衝突特異点というものもあるが、それは 2, 3 体問題には存在しないことを Painlevé が示しているのでここでは考えない。Sundman や Levi-Civita は 2 体衝突特異点が正則化可能であることを示した。つまり、2 体衝突解は衝突の前後に対して一意かつ解析的に解が接続できる。その後、Siegel は 3 体衝突特異点が正則化不可能であることを証明した。また、Easton (1971) は特異点の正則化可能性について新たな定義を与え (ここでは位相的正則化可能性と呼ぶ)、2 体衝突の位相的正則化可能性を証明した。さらに、McGehee (1974) は斬新な座標系の導入により、直線 3 体問題の 3 体衝突がほとんどの質量に対して位相的に正則化不可能であることを証明した。Devaney (1980) は二等辺 3 体問題について同様のことを示している。直線 3 体問題の場合、3 体衝突特異点の正則化不可能からカオス的な現象が見出される。そのことは非可積分であることを示唆する (明確に述べた文献はないが)。では、正則化可能なときはどうなるのか、可積分であるか、というのが自然と問題となる。この問題は解決していない。ここではこの問題について概説する。

なお、ここでの可積分とは自由度の個数の第一積分 (保存量) が存在し、互いに包換的 (Poisson 可換) であること、つまり Liouville 可積分を意味する。

3 体問題の可積分性と特異点解析の研究に関連する歴史を概観すると下記のようなになる。

- 位置、運動量の代数関数で表される未知の第一積分の非存在 (Bruns 1890 年).
- 微小パラメータ (質量) について解析的な第一積分の非存在 (Poincaré 1892 年頃)
- n 体問題の特異点の研究 (Painlevé 1895 年)
- 2 体衝突特異点の正則化可能性 (Sundman 1912 年, Levi-Civita 1920 年).
- 3 体衝突特異点の正則化不可能性 (Siegel 1941 年)

- 位相的正則化可能性の定義と2体衝突の位相的正則化可能性の証明 (Easton 1971年)
- 衝突多様体の導入により, 直線3体問題の3体衝突はほとんどの質量に対し位相的正則化不可能であることを証明 (McGehee 1974年)
- 例外的な場合は直線3体問題には3体衝突が位相的正則化可能 (Simó 1980年)
- 二等辺3体問題における衝突多様体理論 (Devaney 1980年)
- Ziglin 解析による非可積分性の証明 (吉田春夫, Morales, Ramis, 1987年～)
- 微小質量の場合に正則化した無限遠点の横断的ホモクリニック軌道から非可積分性を導く証明 (Xia, 1994年)
- 衝突多様体理論からカオス的(双曲(記号)力学系的)な現象が導かる (Saari & Xia (1989), Meyer & Wang (1995), Kaplan (1999)).

直線3体問題(図1)や二等辺3体問題(図2)は平面あるいは空間3体問題の部分問題であり, それらが非可積分であれば平面, 空間3体問題も非可積分である. 従って, 非可積分性を示すにはこれらの部分問題について考えれば十分であろう.

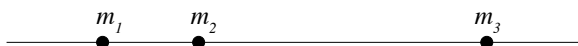


Figure 1. 直線3体問題

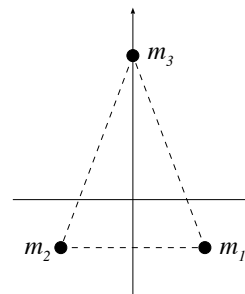


Figure 2. 二等辺3体問題

以下では, 主に直線3体問題の非可積分性と特異点の位相的正則化可能性との関わりについて論ずる.

2. 微分方程式の特異点の正則化可能性

正則化可能性の定義は一意に定まっていない. ここでは, Easton (1971) によって導入された定義を採用する.

常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

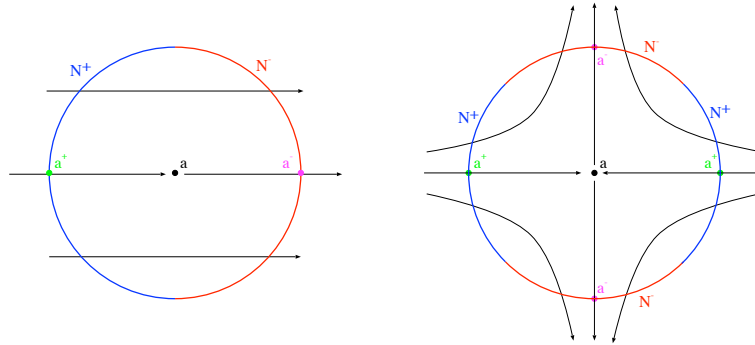


Figure 3. 特異点 a が正則化可能な場合と不可能な場合

を考える. $x = a$ が $f(x)$ の特異点であるとする (a は特異点の集合でも良い). $N \subset \mathbb{R}^n$ を a の近傍とし, 次のように, N の境界 ∂N の部分集合を定める.

$$N^+ = \{x(0) \in \partial N \mid \text{小さい } t > 0 \text{ に対して, } x(-t) \notin N\} \text{ (入口集合)}$$

$$N^- = \{x(0) \in \partial N \mid \text{小さい } t > 0 \text{ に対して, } x(t) \notin N\} \text{ (出口集合)}$$

$$a^+ = \{x(0) \in N^+ \mid \text{軌道が定義できるすべての } t > 0 \text{ に対して, } x(t) \in N\}$$

$$a^- = \{x(0) \in N^- \mid \text{軌道が定義できるすべての } t > 0 \text{ に対して, } x(-t) \in N\}$$

軌道にそって自然に連続写像 $f : N^+ \setminus a^+ \rightarrow N^- \setminus a^-$ が定義できる. この連続写像が連続写像 $F : N^+ \rightarrow N^-$ に拡張できるとき, 特異点 a は (位相的) 正則化可能であるという (Figure 3).

3. 直線 3 体問題と二等辺 3 体問題の 3 体衝突の正則化可能性

直線 3 体問題と (平面) 二等辺 3 体問題について考える (Figure 1, 2). これらの問題の場合, 通常 2 体衝突が起こるが, その場合はエネルギーを保ったまま跳ね返るとする. これは直感的には, 平面あるいは空間 3 体問題において 2 質点が接近したときの振る舞いについて, 2 質点の角運動量を 0 にした極限として考えると自然である (図 4). 数学的にも, 適当な座標変換により微分方程式における 2 体衝突特異

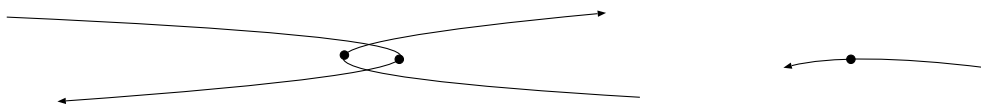


Figure 4. 2 体接近

点は正則化できる.

直線3体問題と二等辺3体問題の3体衝突特異点は、それぞれMcGehee (1974)とDevaney (1980)によりblow-upする手法が開発された。3体衝突特異点はblow-upすると衝突多様体と呼ばれる2次元多様体となる(図5, 6)。

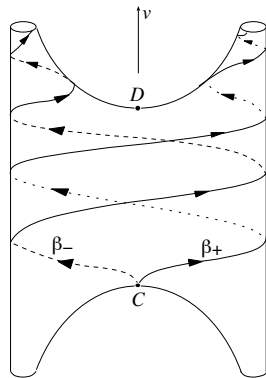


Figure 5. 直線3体問題の衝突多様体

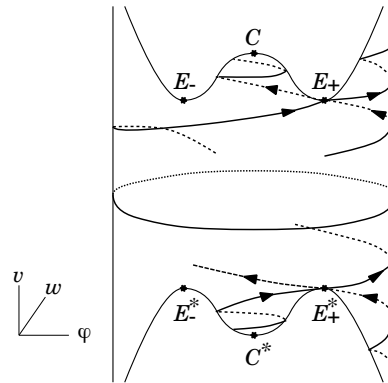


Figure 6. 二等辺3体問題の衝突多様体

もとの方程式における3体衝突特異点が衝突多様体になっているから、特異点を含む近傍 N は衝突多様体の近傍としてとらなければならない。McGeheeとDevaneyはそれぞれの問題において、衝突多様体上で下の平衡点のすべての不安定曲線(不安定多様体)が上の平衡点に収束せず「腕」を上っていくときには3体衝突特異点が正則化不可能であることを証明した。また、Simó (1980)は、直線3体問題において衝突多様体上で下の平衡点の2本の不安定曲線がともに上の平衡点に収束すれば正則化可能であることを証明している。直線3体問題について3体衝突特異点近傍の振る舞いを模式的に描くと図7のようになる。

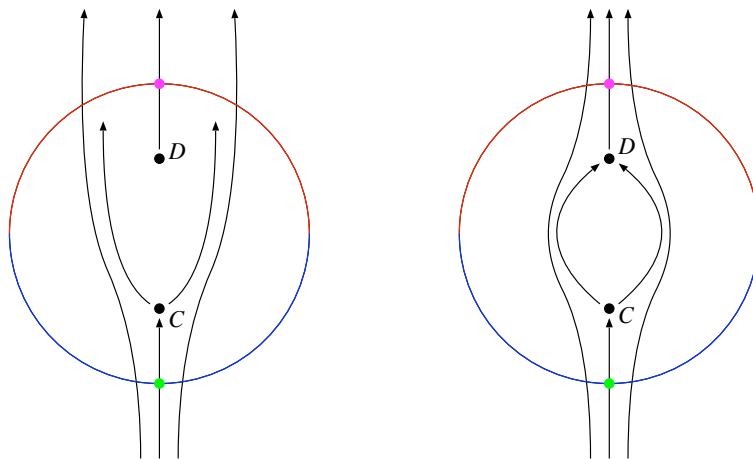


Figure 7. 3体衝突特異点が正則化可能な場合と不可能な場合の模式図

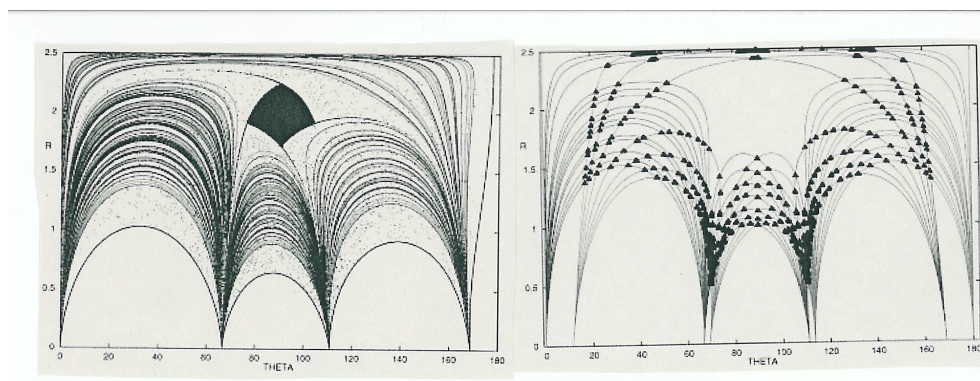


Figure 8. 直線3体問題のPoincaré断面 (Tanikawa & Mikkola (2000a)からの引用). 双曲力学系的な構造が現れていることが観測できる.

可積分性との関連を考えてみる. 特異点が正則化不可能で, さらに下の平衡点の不安定多様体の分岐が別々の“腕”を上っていく場合には, カオス的な現象が現れることは数値的に観測されているし (Tanikawa & Mikkola (2000a), Tanikawa & Mikkola (2000b), Saito & Tanikawa (2004), Saito & Tanikawa (2007), Saito & Tanikawa (2009), Figure 8), 理論的にも正当化されている (Saari & Xia (1989), Meyer & Wang (1995), Kaplan (1999)). 明確に述べた論文はないが, これらの場合系は非可積分であることは間違いなさそうである. また, 一般に ($W^u(C)$ の2曲線が同じ腕を上る場合なども) 正則化不可能であれば, 非可積分であると思われる. 以上の議論にはまだ厳密な証明が必要であるが, こんかいはその逆, すなわち「正則化可能 \implies 可積分」を検証したい.

その前に, 可積分と分かっている特別な場合を考えておこう. 直線3体問題において, 両端の2質点の質量が0とすると分離した2つの直線2体問題を考えることと同等となり, 可積分となる. また, 二等辺3体問題において対称的な位置にある2質点を0とすると平面2体問題と同等となり, 可積分である. これら場合, 3体衝突特異点は正則化可能となる.

さて, 「正則化可能 \implies 可積分」は成立するであろうか. つまり, 直線3体問題あるいは二等辺3体問題で, 質量が0でなく特異点が正則化可能となった場合, 可積分性はどうなるのであろうか?

二等辺3体問題では, 2質量が0以外の場合に3体衝突が正則化可能となる場合はないのでこの問題は起こらない. しかし, 直線3体問題では2質量が0以外にも正則化可能となる場合が無限にある. よって, 以下では直線3体問題について考える.

4. 直線3体問題の衝突特異点が正則化可能となる質量

直線3体問題の微分方程式は McGehee 座標では,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= \frac{\lambda(1-s^2)}{\sqrt{W(s)}}rv \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{W(s)}\left(1 - \frac{1-s^2}{W(s)}(v^2 - 4rh)\right) \\ \frac{ds}{d\tau} &= w \\ \frac{dw}{d\tau} &= -s + \frac{2s(1-s^2)}{W(s)}(v^2 - 2rh) + \frac{1}{2}\frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2) - \frac{\lambda(1-s^2)}{2\sqrt{W(s)}}vw\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$W(s) = \frac{2\sin 2\lambda}{\lambda} \left(\frac{m_1m_2(1-s)}{(b_2-b_1)\text{Sn}(\lambda(1+s))} + \frac{m_2m_3(1+s)}{(a_3-a_2)\text{Sn}(\lambda(1-s))} + \frac{m_1m_3(1-s^2)}{(b_2-b_1)\sin(\lambda(1+s)) + (a_3-a_2)\sin(\lambda(1-s))} \right)$$

であり, $\lambda, a_2, a_3, b_1, b_2$ は質量で定まる定数, h はエネルギー一定数, $\text{Sn}(x) = \sin x/x$ である. また, エネルギー関係式は

$$\frac{1}{2} \left(v^2 + \frac{w^2W(s)}{(1-s^2)^2} - \frac{W(s)}{1-s^2} \right) = hr$$

となる. $r = \sqrt{m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2}$ であるので, エネルギー固定のもとで3体衝突特異点 $\{r=0\}$ は衝突多様体と呼ばれる2次元多様体となる. Simo('80)の数値計算によると, 3体衝突が正則化可能となる質量は以下の図9の通りである.

5. 非可積分性

結局, C から D へのヘテロクリニック軌道が2つ存在するときの可積分性が分からない. では, D から C へのヘテロクリニック軌道に着目して, 可積分性を検証する.

Euler 配置を保つ相似解は D から C へのヘテロクリニック軌道に対応する. この軌道は McGehee の座標では,

$$r = \frac{W(0)}{2h} \text{sech}^2 \frac{\lambda t}{2}, \quad v = -\sqrt{W(0)} \tanh \frac{\lambda t}{2}, \quad s = w = 0$$

と表される.

この軌道に沿った直交変分方程式は

$$\delta s' = \delta w, \quad \delta w' = \left(1 + \frac{W''(0)}{2W(0)} \right) \delta s - \frac{\lambda v}{2\sqrt{W(0)}} \delta w$$

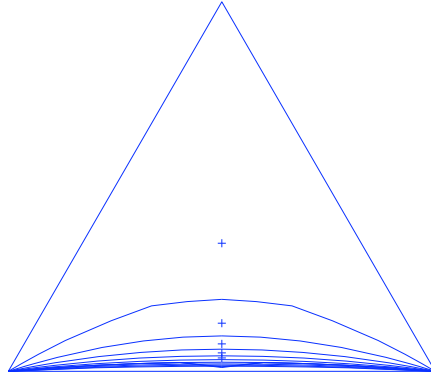


Figure 9. Simó (1980) による数値計算

$m_1 + m_2 + m_3 = 1$ のもとで, 質量パラメータの集合は正三角形で表される. 上部, 左下, 右下の頂点はそれぞれ $m_2 = 1(m_1 = m_3 = 0)$, $m_1 = 1(m_2 = m_3 = 0)$, $m_3 = 1(m_1 = m_2 = 0)$ に対応する.

である. ここで, $\delta s = 0$ 上で $\delta s' > 0$, $\delta w = 0$ 上で $\delta w' > 0$ であることから $\Gamma := \{\delta s > 0, \delta w > 0\}$ は前方不変であることが分かる. $T_C W^u(C)$ は Γ に含まれるので, 切断面 $\{v = 0\}$ における $W^u(C)$ の接線も Γ に含まれる. reversibility より $W^s(D)$ は $W^u(C)$ を s 軸について反転したものだから, $W^s(D)$ と $W^u(C)$ は横断的に交わることが分かる. つまり, D から C への横断的ヘテロクリニック軌道が存在する.

また, Shibayama (2009) で二等辺3体問題に対して用いた手法を同様に, 自由落下軌道を調べることにより, 可算無限個のヘテロクリニック軌道が存在することもわかる. さらに (不) 安定多様体の解析性よりこれらのヘテロクリニック軌道は (位相的に) 横断的である. 従って, D から C への可算無限個の横断的なヘテロクリニック軌道が存在する.

McGehee 座標に関して解析的な第一積分 F が存在したとする. F は $W^u(D)$, $W^s(C)$ 上で同じ値をとることと横断性により, dF はヘテロクリニック軌道上で 0 とならなければならない. ヘテロクリニック軌道は無限個あり集積点を持つことも分かるので, 解析性によりそのような F は定数関数である. 従って, McGehee 座標に関して解析的な第一積分は常に存在しない.

非可積分性の主張としてはまだ仮定が強すぎる気がする. なぜなら, $m_1 = m_3 = 0$ といった可積分の場合も以上のことは成立する. それらの場合, 存在する第一積分には $1/r$ の項が含まれており, McGehee 座標系において解析的でなく, そのような第一積分が自然と現れるからである.

6. ハミルトン系の一般論としては

一般のハミルトン系では, 特異点の (位相的な) 正則化可能性と力学系の可積分性の関連性はあるのか?

一般論としては関連性は見えない. それぞれの場合に例を挙げる.

- 正則化可能かつ可積分: 2体問題
- 正則化可能かつ非可積分: 制限3体問題 (特異点は2体衝突のみであり, 正則化可能)
- 正則化不可能かつ可積分: 3渦問題 (Hiraoka (2008))
- 正則化不可能かつ非可積分: (平面あるいは空間)3体問題

3体問題の3体衝突多様体には無限遠にのびる「腕」があることが効果的で, 正則化不可能性から非可積分性が導かれる. 3渦問題の衝突多様体には「腕」がない. どうやら, 特異点の Easton の意味での正則化可能性だけから可積分性を判定する

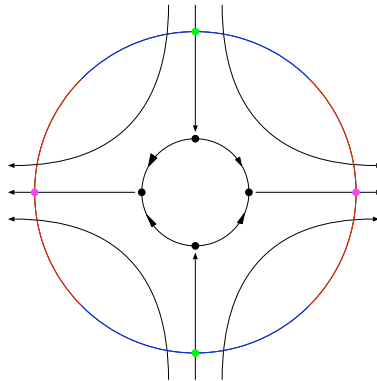


Figure 10. 3渦問題の3体衝突近傍の模式図 (Hiraoka 2008)

のは困難なようである.

問題 一般論としては正則化可能と可積分の明確な関係はないのであろうか. 何らかの改良により, Painlevéらの夢を実現することができるのであろうか.

7. Ziglin 解析

一方で, Ziglin 解析を用いた直線3体問題の非可積分性の証明もなされている. 直線3体問題を適当な変数変換で, $\ddot{q} = -\nabla V(q)$, $q \in \mathbb{R}^2$ の形にする. $-c = \nabla V(c)$ なる c が存在する (この c は中心図形 (central configuration) に対応する).

V のヘッシアン $\nabla^2 V(c)$ の固有値の1つは -2 であり, もう1つを λ とする. Yoshida (1987), Morales-Ruiz & Ramis (2001) の研究により, もし直線3体問題が可積分であるならば, λ は $-\frac{j(j-1)}{2} + 1$ ($j \in \mathbb{N}$) という形の整数である.

$m_1 = m_3$ の場合は λ は容易に計算可能であり, $\lambda = -\frac{16}{7m_2+1}$ である ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$ としている). それ以外の場合の λ を求めるのは非常に困難であるが, 試みてみよう. 極座標 $q = r(\cos \theta, \sin \theta)$ を用いると, $V(q) = r^{-1}g(\theta)$ と表される. $-q = \nabla V(q)$ を極座標で表すと,

$$-r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = r^{-2} \left(-g(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + g'(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right)$$

従って, 中心図形に対応する $(r, \theta) = (r_c, \theta_c)$ は $g'(\theta_c) = 0, r_c^3 = g(\theta_c)$ により定まる. また, 一般に

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

であるから,

$$\text{trace} \nabla^2 V(q) = \Delta V(q) = r^{-3}(g(\theta) + g''(\theta)).$$

従って, 中心図形に対しては

$$\text{trace} \nabla^2 V(c) = 1 + \frac{g''(\theta_c)}{g(\theta_c)}.$$

$\nabla^2 V(c)$ の 1 つの固有値は -2 と分かっているので, 残りの固有値 λ は

$$\lambda = 3 + \frac{g''(\theta_c)}{g(\theta_c)}$$

である.

まとめると, $g'(\theta_c) = 0$ なる θ_c に対して, $\lambda = 3 + g''(\theta_c)/g(\theta_c)$ が $-\frac{j(j-1)}{2} + 1$ ($j \in \mathbb{N}$) の形の整数にならなければ非可積分である. ただし,

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{m_1^3 m_2^3}{m_1 + m_2} |\sin \theta|} + \sqrt{\frac{m_2^3 m_3^3}{m_2 + m_3} |\sin(\theta - c_2)|} + \sqrt{\frac{m_1^3 m_3^3}{m_1 + m_3} |\sin(\theta - c_3)|},$$

$$\tan c_2 = \sqrt{\frac{m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 m_3}}, \quad \tan c_3 = -\sqrt{\frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2 m_3}}$$

である.

やはり, λ を手計算で求めるのは無理だが, 数値計算してみると図 11 のようになる. 正則化可能となる質量と全然一致しない.

問題 衝突多様体理論と Ziglin 解析の関係はないのか?

8. まとめ

1. 直線 3 体問題や二等辺 3 体問題の場合, 3 体衝突の位相的正則化不可能性からカオス的な現象が導かれ, それは非可積分性を示唆する (3 節).

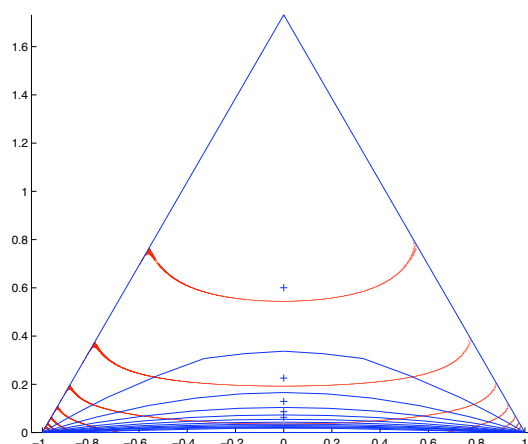


Figure 11. λ が $-\frac{j(j-1)}{2} + 1$ 型の整数になる質量(赤)と3体衝突が正則化可能となる質量(青)

2. 正則化可能性によらず, McGehee 座標系で解析的な第一積分は存在しないことを証明した(これが今回の主結果である, 5節).
3. 一般論的には, 正則化可能性と可積分性の関連はよく分からない(6節).
4. Ziglin 解析と衝突多様体理論はどちらも特異点の構造に深く関わっているにも関わらず, 関連性がよく分からない(7節).

References

- Devaney, R. 1980, *Invent. Math.*, 60, 249–267
- Easton, R. 1971, *J. Diff. Eqns*, 10, 92–99
- Hiraoka, Y., 2008, *Nonlinearity*, 21, 361–379.
- Kaplan, S. R., 1999, *Contemp. Math.*, 246, 143–162
- McGehee, R. 1974, *Invent. Math.*, 27, 191–227
- Meyer, K., Wang, Q., 1995, *J. Diff. Eqns*, 119, 284–309
- Morales-Ruiz, J. J., Ramis, J.P., 2001, *Methods Appl. Anal.*, 8, no. 1, 113–120
- Saari, D., Xia, Z., 1989, *J. Diff. Eqns*, 82, 342–355
- Saito, M. M., Tanikawa, 2004, *K. ASP Conf. Ser.*, 316, 63–69
- Saito, M. M., Tanikawa, K. 2007, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 98, 95–120
- Saito, M. M., Tanikawa, K. ,2009, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 103, 191–207
- Shibayama, M., 2009, Free-fall and heteroclinic orbits to triple collisions in the isosceles three-body problem, *J. Math. Kyoto Univ.*, to be published
- Simó, C., 1980, *Celestial. Mech.*, 21, 25–36

Tanikawa, K., Mikkola, J., 2000, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 76, 23–34

Tanikawa, K., Mikkola, J., 2000, *CHAOS*, 10, 649–657

Yoshida, H., 1987, *Physica*, 29D, 128–142

水星の等級計算と水星食の解析 An analysis of a lunar occultation of Mercury

相馬充 (mitsuru.soma@nao.ac.jp)
Mitsuru SÔMA
国立天文台

宮下和久 (k.miyash@js5.so-net.ne.jp)
Kazuhisa MIYASHITA
長野県安曇野市立穂高東中学校

Abstract. A lunar occultation of Mercury was observed with video equipment on 2008 December 29 by two Japanese amateur astronomers Masayuki Ishida and Hisashi Suzuki. Although the event occurred in the daytime, the light variation during the event was successfully analyzed using Limovie, software to analyze light variation during occultations (Miyashita et al. 2006), and using the functions by Hapke (1986, 1993) for the brightness distribution on Mercury's apparent disk we were able to obtain precise central times of the reappearances of Mercury, which enable us to get precise lunar limb corrections. It is noted that the magnitude of Mercury given in the "Calendar and Ephemeris" published annually by the National Astronomical Observatory of Japan has errors of up to 0.6 magnitude. This is because it is based on the expression by Danjon (1949, 1953) and it is recommended that a more recent expression for Mercury's magnitude, such as that of Hilton (2005), should be used.

Keywords: magnitude of Mercury, planetary occultation, lunar limb profile

1. はじめに

2008年12月29日昼に起きた月による水星の掩蔽は、国内のアマチュア観測者により観測が行われ、ビデオ撮影がなされた。筆者らはそれらのビデオの提供を受け、測光用ソフトウェア Limovie (宮下ら 2005) による測光と、それにより得られたライトカーブと水星の輝度分布モデルとの比較により現象時刻の推定を行った。水星の輝度分布モデルには Hapke の関数を用いた。その結果、従来は困難とされてきた、面積のある天体の掩蔽現象から月縁を推定できるような精密な時刻データを得ることができた。

なお、Hapke の関数を用いると、任意の位相角に対する水星の等級を計算することができる。理科年表暦部と暦象年表で採用している水星の等級の計算式は、

水星の位相角によっては 0.6 等に達する誤差があることが明らかになっているので、そのデータを用いる際には注意されたい。

本報告の解析結果について、詳しくは国立天文台報に発表する予定である。

2. 観測と測光

観測は滋賀県の石田正行氏と静岡県の鈴木寿氏により行われた。両観測地における星食の状況を図1に示す。この星食が見られる地域は図2に示すとおりで、日本は昼間の現象ながら、南中前後の現象で、条件の良い場所に位置していたことがわかる。観測地や機材のデータは後に説明する解析結果とともに表1に示した。

表1 観測記録と解析結果

(経緯度は世界測地系, 時刻は 2008 年 12 月 29 日の UTC)

観測者	石田正行 (滋賀県守山市)	鈴木寿 (静岡県浜松市)
観測地	東経 135° 56' 33".6 北緯 35° 06' 22".3 標高 85m	東経 137° 42' 48".4 北緯 34° 45' 53".8 標高 50m
望遠鏡	30cm シュミットカセグレン	25cm バイカーリッチークレチアン
ビデオカメラ	WATEC WAT100N 高速シャッター使用	WATEC WAT100N Shuter Speed: 7 (1/10000) Gain Control: Manual 3/14 目盛り
	Gamma: OFF	Gamma: OFF
記録	miniDV カムコーダーに録画	miniDV カムコーダーに録画
出現中心時刻	05h 08m 24.69s ± 0.10s	05h 13m 40.16s ± 0.08s
月の秤動 (l, b)	(-3°.034, +2°.358)	(-3°.076, +2°.340)
位置角	273°.762	269°.664
月縁の高さ	-1".899	-2".283
Watts のデータ	-1".87	-2".54

水星は 12 時 20 分 (JST) 頃に月の暗縁に潜入したが、雲の通過により両氏とも観測することはできず、14 時過ぎ (JST) に起こった明縁からの出現についてのみ観測がなされた。それぞれの観測とも、昼間の現象であるにもかかわらず、適切な感度やゲインの調整がなされていることから、撮影されたビデオはノイズの少ないたいへん安定した画像となっている。また、星像の白飛び (サチレーション) もなく、光量変化を測定するのに最適なビデオであった。

この現象は月の明部からの出現であり、測光用ソフトウェア Limovie を用いてバックグラウンドの明るさを正確に差し引き、水星の光量変化を測定した。そのライトカーブを図3に示す。光量はゆるやかな曲線を描いて増加している。滑らかな曲線は後に説明する水星の輝度分布のモデルから計算しフィットさせたものである。

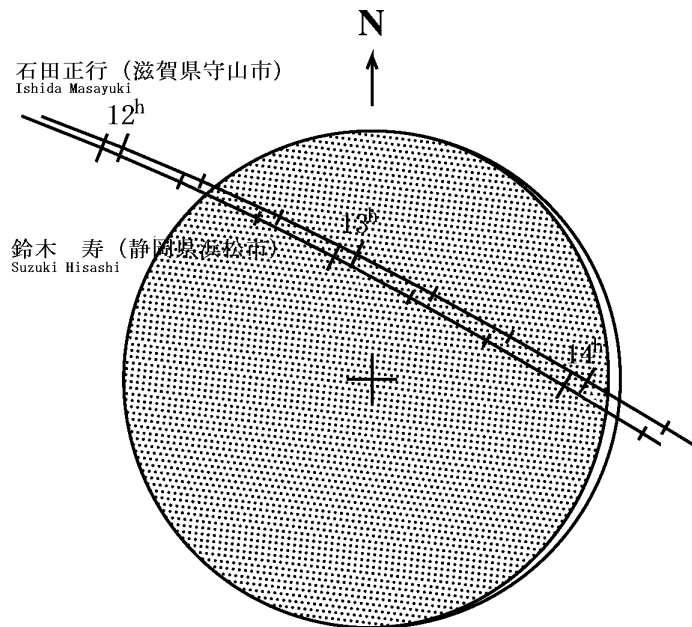


図1. 2008年12月29日の水星食の状況図

3. シミュレーションとの比較と時刻測定

3.1. 水星食の時刻測定の困難点

水星は、月と同じような満ち欠けがある。そのため、円形または楕円形に見える天体と異なり、一般的には現象中央時刻の光量は掩蔽前の50%にはならない。したがって、ライトカーブにおける光量50%のフレームを特定してそれを現象中心時刻として推定する、という方法を用いることはできない。さらに、ライトカーブには大気のシンチレーションによるノイズが乗っていることから、特定の値のフレームをもって正確な現象時刻とすることはできない。また、ノイズ低減のためにフレーム間の移動平均などの処理を行ったとしても、それでは誤差を見積もる方法がない。これらの理由に加え、光電管ではバックグラウンドの値を正確に差し引くことが困難であることや、眼視観測やビデオモニターの目視による方法では、月縁と水星の縁の接触の時刻について、数秒の誤差が見込まれることなどから、従来は、水星食などの面積を持った天体の掩蔽現象から正確な現象時刻を求めることは困難とされてきた。

3.2. シミュレーションモデルの作成

時刻の推定における以上の問題を解決するには、光量の観測値を、食現象において期待される光量変化のモデルによって近似させ、モデル上での現象中央時刻をもって求める時刻とすればよい。モデルが適正であれば、得られた時刻は最確値となるはずであり、誤差も計算によって見積もることが可能となる。



図2. 水星食が見られる範囲

この方法において、正確な時刻測定を行うためには、比較するモデルは、可能な限り正確に現象の様子を表現していなければならない。Hapke (1981, 1984, 1986) の関数を用いると、月や水星などの固体表面を持つ天体について、天体表面における反射光の強度分布を推定することができる。そこで、パソコン上で Hapke の関数により水星表面の輝度分布を計算するソフトウェアを作成した。Hapke の関数に必要な 6 種類のパラメーターについては、Mallama et al. (2002) が、従来の地上観測に加え、SOHO により得られた画像も用いて、水星の等級の観測値と Hapke の関数によるモデルとの比較を行い、広い範囲の位相角について適合する値を得ており、水星表面の反射特性をよく表していると考えられることから、それを用いた。Mallama et al. による解析結果は、現在の米英暦 *The Astronomical Almanac* の水星の等級の計算の基礎にもなっている。

次いで、プログラムは、計算された輝度分布から、月縁に対する任意の水星の向きに対して、0.01 秒ごとに月縁が掩蔽しながら移動した場合に起こる光量変化を計算した。この計算においては、月縁の起伏が及ぼす影響は小さいと判断し、月縁が直線であるとの仮定のもとに解析を行った。観測にフィットさせた光度変化は図 3 に滑らかな曲線で示した。また、得られた現象中心時刻は表 1 に示した。

4. 月縁の地形の推定

月と惑星の位置計算には JPL の最新のこよみ DE421 (Folkner et al. 2008) を用い、月の半径として 1738.0908 km を採用して、今回の水星食の現象時刻から月縁のデータを求めた。結果は表 1 に示してある。月の秤動は Eckhardt (1981,

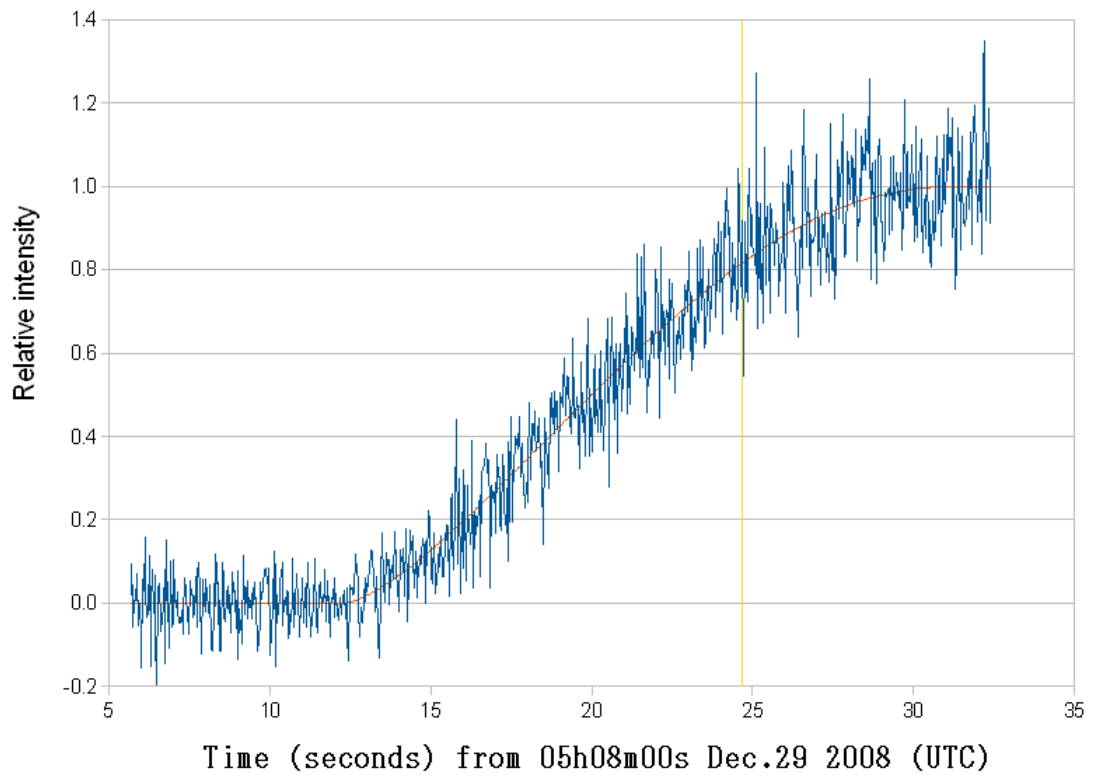


図3. 出現時のライトカーブ
(石田氏の観測)

1982)に基づき, 米英曆 *The Astronomical Almanac* 掲載の月の秤動と同じ定数を採用して計算した. 解析に際して, 結果を月のこよみの与える重心に準拠する値にするため, 月の位置には重心と形状中心の差の補正を行っていない. 求めた位置角は月の自転軸の北極方向から反時計回りに測った角である. また, 月縁の高さは月の採用半径からのずれを月の平均距離 384399.05 km から見た値に換算している. 表 1 には比較のために, Watts (1963) による月縁データも示した.

月縁データは日食の解析から太陽の直径の変化を求める際にも重要である (Sigismondi et al. 2009). 詳細な月面地形は, 日本の月探査衛星「かぐや」により求められた (Araki et al. 2009). そのデータの精度を調べるためにも, 今回得られたような月縁データは貴重である.

なお, 上記に加え, 月縁の傾斜として次の値が求められている.

石田氏の観測 $1/\cos(Ctt)$ を増大させる側に 3.7°

鈴木氏の観測 $1/\cos(Ctt)$ を増大させる側に 5.7°

ここで, Ctt は月の進行方向を 0 度とし, そこから北方向に $+$, 南方向に $-$ の符号をつけて測った方向角 (コンタクトアングル) である.

5. 水星の等級の計算式

前述の Hapke の関数を用いると, 任意の位相角に対する水星の等級を計算することができる. 理科年表や暦象年表の水星の等級の位相角による変化の式は Danjon (1949, 1953) によっているが, これは位相角 169° 付近で実際より 0.6 等も暗いなど, 誤差が無視できないことが明らかになっている (相馬 2009). 理科年表暦部や暦象年表を利用する際には, その点に注意されたい. 現在の米英曆では, 最近の SOHO 宇宙船の観測結果も含めて求められた Hilton (2005) による計算式が用いられているが, これは Hapke の関数を用いて計算したものとよく一致している.

6. 結論

水星食を撮影したビデオから光量の変化を測定し, 水星の光量分布モデルとの比較により幾何学的現象中央時刻を推定した. 光量変化はモデルとたいへんよく一致していることから, 高い精度で現象時刻を求めることができたと考えられる. また, 測定された現象時刻は良好な整約結果を示していることに加えて, 月縁の傾斜に関する情報も得られることから, 月縁の地形を求めるデータとして有用である. 従来, 面積を持った天体は食現象の測定に適さないとされてきたが, 表面の輝度分布を見積もることが可能な天体においては, この手法を用いることにより, 恒星による掩蔽と同様に, 月縁の形状のデータを得るなどの精密な位置測定に対して用いることができるようになると期待される.

理科年表暦部と暦象年表の水星の等級の誤差が無視できない点も明らかにした.

謝辞.

石田, 鈴木の両氏には, 日中の現象という厳しい条件にも関わらず観測に取り組み, 質の高い観測ビデオを提供くださった. また, シミュレーションの作成にあたっては, Anthony Mallama 氏からご指導をいただいた. これらの皆様に感謝する.

References

- Araki H., Tazawa S., Noda H., Ishihara Y., Goossens S., Sasaki S., Kawano N., Kamiya I., Otake H., Oberst J., and Shum C. (2009), “Lunar Global Shape and Polar Topography Derived from Kaguya-LALT Laser Altimetry”, *Science*, **323**, 897–900.
- Danjon A. (1949), “Photométrie et Colorimétrie des Planètes Mercure et Vénus”, *Bull. Astron.*, **14**, 315–345; Danjon A. (1953), “Erratum”, *Bull. Astron.*, **17**, 363.
- Eckhardt D.H. (1981), “Theory of the libration of the moon”, *The Moon and the Planets*, **25**, 3–49.
- Eckhardt D.H. (1982), “Planetary and earth figure perturbations in the librations of the moon”, in *High Precision Earth Rotation and Earth-Moon Dynamics*, ed. O. Calame, pp. 193–198.
- Folkner W.M., Williams J.G., and Boggs D.H. (2008), “The Planetary and Lunar Ephemeris DE421”, JPL Interoffice Memorandum 343R-08-003.
- Hapke B. W. (1981), “Bidirectional reflectance spectroscopy. III. Correction for macroscopic roughness”, *Reports of Planetary Geology Program*, p. 475.
- Hapke B. (1984), “Bidirectional reflectance spectroscopy. III – Correction for macroscopic roughness”, *Icarus*, **59**, 41–59.
- Hapke B. (1986), “Bidirectional reflectance spectroscopy. IV – The extinction coefficient and the opposition effect”, *Icarus*, **67**, 264–280.
- Hilton J.L. (2005), “Improving the visual magnitudes of the planets in the Astronomical Almanac. I. Mercury and Venus”, *The Astronomical Journal*, **129**, 2902–2906.
- Mallama A., Wang D., Howard R.A. (2002), “Photometry of Mercury from SOHO/LASCO and Earth – The Phase Function from 2 to 170°”, *Icarus*, **155**, 253–264.
- 宮下, 早水, 相馬 (2006), 「ビデオ画像用光量測定ソフトウェア Limovie の開発と星食観測への応用」, 国立天文台報, **9**, 1–26.
- Sigismondi C., Dunham D.W., Guhl K., Andersson S., Bode H., Canales O., Colona P., Farago O., Fernández-Ocaña M., Gabel A., Haupt M., Herold C., Nugent R., Oliva P., Patel M., Perello C., Rothe W., Rovira J., Schaefer T., Schnabel C., Schwartz D., Selva A., Strickling W., Tegtmeier, A., Tegtmeier C., Thome B., Warren W.H. (2009), “Baily’s beads atlas in 2005–2008 eclipses”, *Solar Physics*, in press.
- 相馬 (2009), 「暦象年表改訂版の問題点」, 国立天文台報, **12**, 1–11.

Watts C.B. (1963), "The Marginal Zone of the Moon", *Astronomical Papers Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, **17**, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

KAM Theory, Aubry-Mather Theory and Hamilton-Jacobi Equation

曾我幸平

早稲田大学基幹理工学研究科

1. Hamiltonian Dynamics and Hamilton-Jacobi Equation

本稿では、以下のような C^2 -Hamilton 関数 H に対する正準方程式を考える.

$$H(q, p) : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$$q'(s) = H_p(q(s), p(s)), \quad p'(s) = -H_q(q(s), p(s)). \quad (1.2)$$

(\mathbb{T}^n 上の関数を, 表記を変えることなく, \mathbb{R}^n 上の \mathbb{Z}^n -周期関数ともみなす.) 正準方程式 (1.2) の流れ及び初期値 (θ, I) なる解をそれぞれ次のように表す.

$$\phi_H^s, \quad \phi_H^s(\theta, I)$$

Hamilton 力学系の中心的問題の 1 つとして, 「 ϕ_H^s -不変トーラスを探す研究」が古くからなされている. n 次元多様体 \mathcal{I} が ϕ_H^s -不変トーラスであるとは, 次のことが成り立つ場合をいう: \mathcal{I} は \mathbb{T}^n の $\mathbb{T}^n \times D$ への滑らかな埋め込みでありかつ各 $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_H^s(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}.$$

本稿では n 次元の ϕ_H^s -不変トーラスだけを考えることにして, これを単に不変トーラスと呼ぶことにする.

1.1.

ある正準方程式が可積分な場合 (相空間は $\mathbb{T}^n \times D$ とは限らない), これを適当な正準変換によって, 次の形をした Hamilton 関数

$$H(q, p) = H_0(p) : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.3)$$

の正準方程式に変換できることがある. 一般に, H が (1.3) の形を持つならば正準方程式 (1.2) は直ちに解かれる:

$$\phi_H^s(\theta, I) = (q(s), p(s)) = (\partial_p H_0(I)s + \theta, I) \pmod{1}.$$

さらに不変トーラスとして, 各 $I \in D$ に対して

$$\mathcal{I} = \mathbb{T}^n \times \{I\}$$

を得る. 各 \mathcal{I} 上, 全ての軌道は同じ傾き

$$\lambda = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{q}(s)}{s} = \partial_p H_0(I)$$

を持つ直線となる. ただし $\tilde{q}(s)$ は $q(s) \in \mathbb{T}^n$ の \mathbb{R}^n への持ち上げである ($q(s) = \tilde{q}(s) \pmod{1}$). λ を軌道の回転数ベクトルという.

1.2.

Hamilton 関数 (1.1) が次の形を持つ場合を考える.

$$H(q, p) = H_0(p) + H_1(q, p).$$

これは可積分系の摂動問題として自然に現れる. 「 H_1 が十分小さいとき不変トーラスは存在するか」という問題は, Hamilton 力学系の基本問題として長年研究されている. この問題の数学的困難は, 摂動論的アプローチにおいて現れる項 $1/(\omega \cdot z)$ の処理である. ただし $\omega \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$ である. 各 ω に対して, 必ず非有界列 $z_i \in \mathbb{Z}^n$ が存在して, $\omega \cdot z_i$ は 0 に収束する. この困難は「小分母の問題」と呼ばれる. Kolmogorov (1954) によって大きな前進がもたらされた. Kolmogorov は, $\omega \cdot z$ の 0 に収束する速さが $\|z\|$ の負べきで下から抑えられるような ω が測度正で存在することに注目し, Newton 法のように急速に収束する逐次近似法を考案して, 不変トーラスが多数存在することを主張した. このような ω を Diophantine ベクトルという. 後に厳密な証明が Arnold (1963) によって与えられた. 時を同じくして, Moser (1962) はツイスト写像力学系に対する同様の問題を厳密に解決した. これら三者に始まる力学系理論は, 頭文字を採って, 「KAM 理論」と呼ばれる. 以下は Hamilton 力学系に対する最も標準的な KAM 定理である.

定理 1 (KAM) D を有界閉領域とする. 次の (A1)-(A3) を仮定する.

(A1) $H(q, p) = H_0(p) + H_1(q, p)$ は $\mathbb{T}^n \times D$ のある複素近傍 G で解析的.

(A2) $H_0(p)$ は非退化, すなわち H_0 の Hessian 行列のランクは D 上で常に n .

(A3) $\|H_1\| = \sup_G |H_1(q, p)|$ は十分小さい.

このとき, 不変トーラス \mathcal{I} の族が存在して, その全体は以下の測度評価を満たす.

$$\text{mes}[\cup \mathcal{I}] \rightarrow \text{mes}[\mathbb{T}^n \times D] \quad \text{as } \|H_1\| \rightarrow 0.$$

定理 1 で保障される不変トーラス \mathcal{I} は, 特に「KAM トーラス」と呼ばれ次の性質を持つ:

(1) \mathcal{I} はある実解析的な関数 $f(q) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ のグラフとなる. すなわち

$$\mathcal{I} = \{(q, f(q)) \mid q \in \mathbb{T}^n\}.$$

(2) \mathcal{I} は Lagrangian 多様体となる.

(3) 各 \mathcal{I} に対して Diophantine ベクトル $\lambda \in \partial_p H_0(D)$ が存在して, \mathcal{I} 上の全ての軌道

は回転数ベクトル λ を持つ.

(2) より, (1) の f はある実解析的なスカラー関数 $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の勾配となる. (3) より, 1本の軌道は \mathcal{I} を稠密にへめぐる. H の値は軌道に沿って不変なので, 次の関係を得る.

$$H(\tilde{q}, \nabla S(\tilde{q})) = \text{const.} \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

すなわち KAM 理論は, $H(q, p) = H_0(p) + H_1(q, p)$ に対する Hamilton-Jacobi 方程式の実解析的な解を与える.

1.3.

KAM 理論において, 仮定 (A3) は技術的にも数学的にも重要である. 摂動を大きくするにつれて, KAM トーラスは少なくなり, 代わりにカオスと呼ばれる不変トーラスには拘束されない軌道が多数発生する. その様子は数値計算で容易に目視される. 一般の Hamilton 関数 (1.1) に対して, 不変トーラスを見つける統一的方法は今のところ無い. しかしながら, 探すべき対象を不変トーラスではなくもう少し広い対象にすると, KAM 理論に類似の議論が可積分系の摂動問題とは異なる Hamilton 力学系のクラスで可能になる. この先駆的な研究は, Fathi と E (1999) による. A. Fathi は n -自由度自励系を取り扱い, W. E は 1-自由度非自励系を取り扱う. それぞれ, Hamilton-Jacobi 方程式と Hamilton 力学系との興味深い関係が明らかにされている.

問題のモチベーションは次の通りである. Hamilton 関数 (1.1) に対して以下の Hamilton-Jacobi 方程式を考える.

$$H(\tilde{q}, \nabla S(\tilde{q})) = h \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (h: \text{const.}). \quad (1.4)$$

この非線形偏微分方程式の一般初期値問題に対する「特性曲線の方法」は, 局所的な滑らかな解を保障する解法として良く知られている. 今の場合, 特性曲線は正準方程式 (1.2) の解である. これに関連して, 次のことが成り立つ.

命題 2 $S \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 -関数とする. S が Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) を満たしかつ ∇S が \mathbb{Z}^n -周期的ならば, ∇S の “グラフ”

$$\mathcal{I} = \{(\tilde{q}, \nabla S(\tilde{q})) \bmod 1 \mid \tilde{q} \in \mathbb{R}^n\}$$

は正準方程式 (1.2) の不変トーラスになる. またこの逆も正しい.

残念ながら Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) に対しては, 一般に C^1 -解すら期待できない. したがって Hamilton-Jacobi 方程式の解析は, 通常「粘性解」と呼ばれる弱解の範疇で行われる. 偏微分方程式論の立場から観ると, KAM トーラスの存在は極めて例外的状況である. Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) の粘性解の存在は, Lipschitz 連続関数のクラスで期待される. Lipschitz 連続関数 S はほとんど至る所微分可能なので, ∇S の “グラフ” は意味を持つ. ただし ∇S は一般に不連続になるので, ∇S が \mathbb{Z}^n -周期的であっても, その “グラフ” は \mathbb{T}^n に同相とは限らない. 自然な問題として, 例えば次のことが挙げられる.

- Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) の粘性解で, ∇S が \mathbb{Z}^n -周期的になるものは存在するか?

- 存在するならば, ∇S の“グラフ”は ϕ_H^s -不変になるか?
- 不変になるならば, その上の各軌道の回転数はどのようにになるか?

1.4.

1.3 で挙げた問題を以下に示した簡単な C^2 -Hamilton 関数で考える.

$$\mathcal{H}(q, p) = H(q_1, q_2, p_1) + p_2 = \frac{1}{2}p_1^2 - F(q_1, q_2) + p_2 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

これは周期外力付単振り子の Hamilton 関数 $H(x, t, u)$ を拡大相空間でみたものである. \mathcal{H} に対応する Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) $_{\mathcal{H}}$ を形式的に \tilde{q}_1 で微分して, $u = S_{\tilde{q}_1}$, $\tilde{q} = (x, t)$ と置くと, 次に示した周期外力付 Burgers 方程式を得る.

$$u_t + uu_x = F_x. \quad (1.5)$$

この非線形偏微分方程式は, 流体の衝撃波を記述する方程式として, 主に初期値問題が「エントロピー解」と呼ばれる弱解の範疇で詳細に研究されている. 不連続関数もエントロピー解として許される. $\bar{u}(x, t)$ を周期外力付 Burgers 方程式 (1.5) の \mathbb{Z}^2 -周期エントロピー解で

$$\langle \bar{u} \rangle = \int_0^1 \bar{u}(x, t) dx = C \quad (C: \text{const.})$$

を満たすものとする. このような \bar{u} は任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して少なくとも 1 つは存在する (例えば Jauslin et al. (1999) を参照). 簡単な計算により, 次のことを満たす Lipschitz 連続な \mathbb{Z}^2 -周期関数 $v(x, t)$ が $\bar{u}(x, t)$ から構成できる.

$$\begin{aligned} v_t + H(x, t, C + v_x) &= \bar{H}(C) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (\text{粘性解の意味で}), \\ \bar{H}(C) &= \iint_{[0,1]^2} H(x, t, \bar{u}(x, t)) dx dt, \\ C + v_x &= \bar{u} \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

ここで $S^C(\tilde{q}) = C\tilde{q}_1 + v(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ は Hamilton-Jacobi 方程式 (1.4) $_{\mathcal{H}}$ の粘性解であり, ∇S^C は \mathbb{Z}^2 -周期である. 良く知られた粘性解の表現公式から, $v(x, t)$ は $H(x, t, C + p)$ の p に関する Legendre 変換 $L^C(x, t, \xi)$ を用いて次のように表示される.

$$v(x, t) = \inf_{\eta \in AC, \eta(t)=x} \left\{ \int_{\tau}^t L^C(\eta(s), s, \eta'(s)) ds + v(\eta(\tau), \tau) \right\} + \bar{H}(C)(t - \tau).$$

ここで AC は絶対連続関数を表し, $\tau < t$ は任意の数である. この関係式が議論の要となる. 右辺の変分問題を $(CV)_{\tau}^{x,t}$ と表す. 変分問題 $(CV)_{\tau}^{x,t}$ の minimizer $\gamma : [\tau, t] \rightarrow \mathbb{R}$ は存在し, L^C に関する Euler-Lagrange 方程式の解となる. したがって

$$(X(s), U(s)) = (\gamma(s), C + L_{\xi}^C(\gamma(s), s, \gamma'(s))) \quad \text{mod } 1$$

は非自励正準方程式

$$X'(s) = H_u(X(s), s, U(s)), \quad U'(s) = -H_x(X(s), s, U(s)) \quad (1.6)$$

を満たす. 次の定理は E (1999) による.

定理 3 1. 各 $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\gamma(t) = x$ なる $\gamma(s) : (-\infty, t] \rightarrow \mathbb{R}$ で次の性質を持つものが存在する (*one-sided minimizer*): 任意の区間 $[t_1, t_0] \subset (-\infty, t]$ に対して $\gamma|_{[t_1, t_0]}$ は変分問題 $(CV)_{t_1}^{\gamma(t_0), t_0}$ の *minimizer* となり, 各点 $(\gamma(s), s)$ ($s < t$) において v は x -微分可能で

$$v_x(\gamma(s), s) = L_\xi^C(\gamma(s), s, \gamma'(s)).$$

2. $\gamma^*(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で次の性質を持つものが存在する (*two-sided minimizer*): 任意の区間 $[t_1, t_0] \subset \mathbb{R}$ に対して $\gamma^*|_{[t_1, t_0]}$ は変分問題 $(CV)_{t_1}^{\gamma^*(t_0), t_0}$ の *minimizer* となり, 各点 $(\gamma^*(s), s)$ ($s \in \mathbb{R}$) において v は x -微分可能で

$$v_x(\gamma^*(s), s) = L_\xi^C(\gamma^*(s), s, \gamma^{*'}(s)).$$

3. $\bar{H}(C)$ は C にのみ依存し, $C \in \mathbb{R}$ の関数として C^1 -級で, $\bar{H}'(C)$ は単調増加である.

$$4. \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\gamma(s)}{s} = \bar{H}'(C), \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\gamma^*(s)}{s} = \bar{H}'(C).$$

5. 各 *one-sided minimizer* γ に対して *two-sided minimizer* γ^* が存在して

$$|\gamma(s) - \gamma^*(s)| \rightarrow 0 \quad \text{as } s \rightarrow -\infty.$$

定理 3 から, 非自励正準方程式 (1.6) の解として

$$(X(s), U(s)) = (\gamma(s), C + v_x(\gamma(s), s)) \pmod{1}, \quad s \leq t,$$

$$(X^*(s), U^*(s)) = (\gamma^*(s), C + v_x(\gamma^*(s), s)) \pmod{1}, \quad s \in \mathbb{R}$$

が存在することがわかる. したがって, 非自励正準方程式 (1.6) の解 $(X(s), U(s))$ に対して $c(s) = (X(s), s, U(s)) \pmod{1}$ と置くと, $c(s)$ がある $s = t_0$ で

$$\text{graph}(\bar{u}) = \{(x, t, C + v_x(x, t)) \pmod{1} \mid x, t \in \mathbb{R}\}$$

に属するならば, $c(s)$ は $s \leq t_0$ で常に $\text{graph}(\bar{u})$ に拘束される. $c(s)$ は $s \rightarrow -\infty$ で, $\text{graph}(\bar{u})$ の部分集合

$$\Gamma^*(\bar{u}) = \{(\gamma^*(s), s, \bar{u}(\gamma^*(s), s)) \pmod{1} \mid s \in \mathbb{R}, \gamma^*: \text{two-sided minimizer}\}$$

に漸近する. 初期点が Γ^* に属す $c^*(s)$ は, $s \in \mathbb{R}$ で常に $\text{graph}(\bar{u})$ に拘束される. ∇S^C の “グラフ” は, 後ろ向きに $\phi_{\mathcal{H}}^s$ -不変であり, この上の全ての軌道は後ろ向きに回転数ベクトル $(\bar{H}'(C), 1)$ を持つ. また ∇S^C の “グラフ” の部分集合で $\phi_{\mathcal{H}}^s$ -不変となるものが存在して, この上の全ての軌道は回転数ベクトル $(\bar{H}'(C), 1)$ を持つ. 非自励正準方程式 (1.6) の time-1 map に対して, ツイスト写像力学系に関する Aubry と Mather の結果が成り立つ. 以上の議論で本質的な仮定は, H の狭義凸性: $H_{uu} > 0$ と superlinear 性: $\lim_{|p| \rightarrow \infty} H(x, t, p)/|p| \rightarrow \infty$ である.

2. Difference Approximation to $\text{graph}(\bar{u})$ and $\Gamma^*(\bar{u})$

上述の議論で最も興味深い対象は $\text{graph}(\bar{u})$ と $\Gamma^*(\bar{u})$ である. Lax-Friedrichs 差分法を用いて \bar{u} の近似解が構成できて, それを用いることで $\Gamma^*(\bar{u})$ の近似ができる (Nishida & Soga). その数学的詳細は割愛することにして, 数値計算の結果を紹介する. 周期外力として次の例を採る.

$$F(x, t) = -\frac{1}{10} \cos(4\pi x) \sin(2\pi t).$$

Figure 1 は, 近似された $\text{graph}(\bar{u})$, $\Gamma^*(\bar{u})$ および $c(s)$ の, 断面 $\mathbb{T} \times \{t = 0\} \times \mathbb{R}$ による切り口を表す. 断面に広く散らばる小点は, 1 本のカオス軌道が描いたものである. その中に横たわる不連続曲線 (見易くするために不連続点もつないである) が, ある C に対する $\text{graph}(\bar{u})$ の切り口である. $\text{graph}(\bar{u})$ に乗った 8 つの大きな点が $\Gamma^*(\bar{u})$ の切り口である. 今の場合, $\Gamma^*(\bar{u})$ は周期 4 を持つ 2 本の周期軌道から成る.

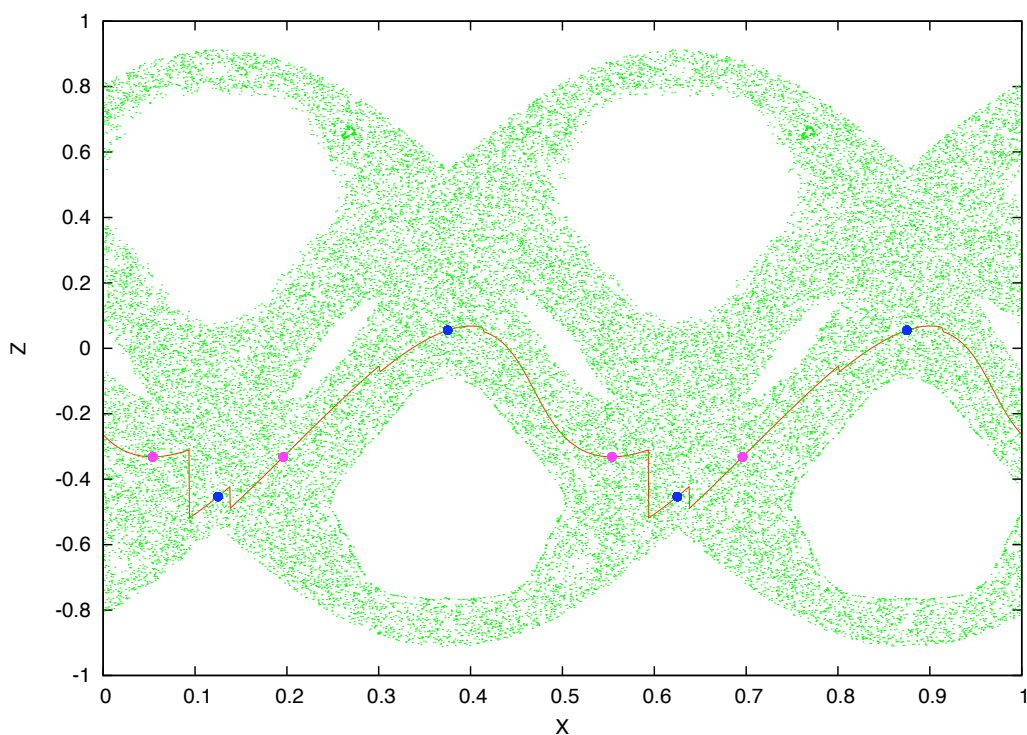


Figure 1.

Figure 2 は $\Gamma^*(\bar{u})$ を \mathbb{T}^2 へ射影したものである.

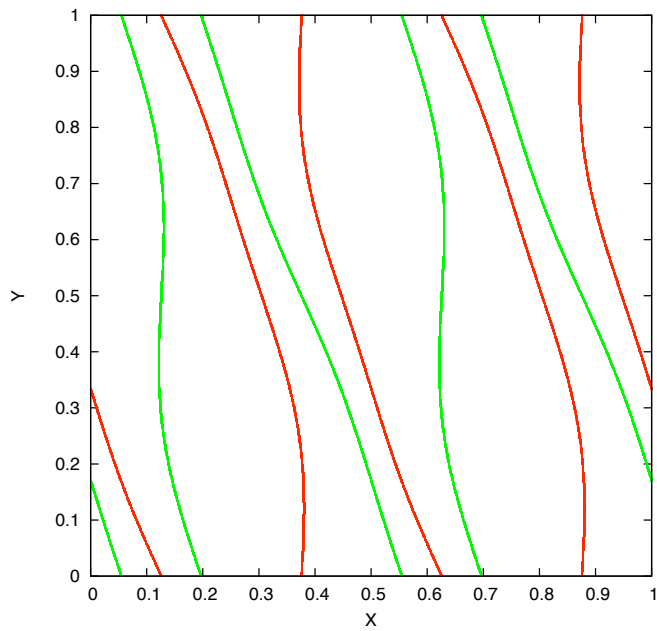


Figure 2.

Figure 3, 4 は, $\text{graph}(\bar{u})$ 上の各軌道 $c(s)$ が後ろ向きに $\Gamma^*(\bar{u})$ へ漸近する様子を \mathbb{T}^2 へ射影して表している.

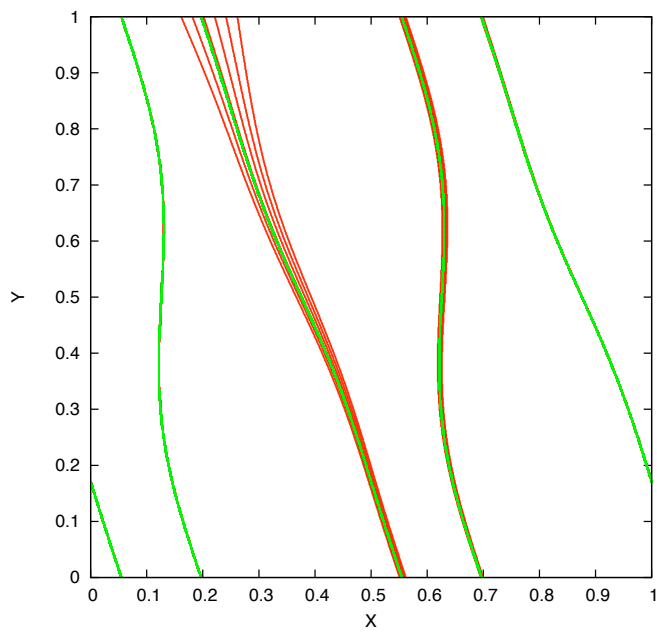


Figure 3.

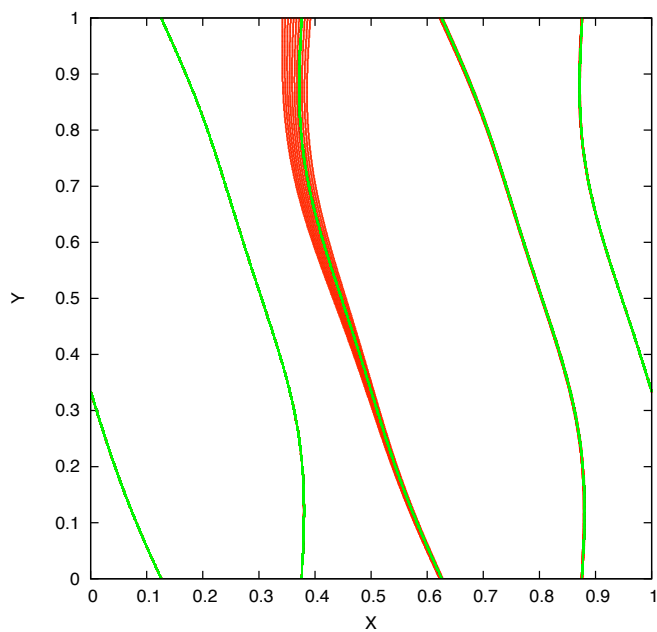


Figure 4.

References

Arnol'd, V. I. 1963, Russ. Math. Surv. 18, 9

Fathi, A. Weak KAM theorem in Lagrangian Dynamics, to appear from Cambridge Univ. Pr.

Jauslin, H. R., Kreiss, H. O., & Moser, J. 1999 Proc. Sympos. Pure Math. 65, 133

Kolmogorov, A. N. 1954, Dokl. Akad. Nauk SSSR 98, 527

Moser, J. 1962, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, Math-Phys. Kl., 1

Nishida, T & Soga, K. Difference approximation to Aubry-Mather sets of the forced Burgers equation, in preparation

E, W. 1999, Comm. Pure Appl. Math. 52, 811

Hénon 写像の記号列に関するいくつかの問題

山口喜博 (chaosfractal@mac.com)

帝京平成大学

谷川清隆 (tanikawa.ky@nao.ac.jp)

国立天文台

スモールホースシュー (HS) 中の軌道は記号 0 と 1 の記号列で記述される [1]. しかし記号列は抽象的で, 記号列より軌道の性質が分かりづらい. われわれは面積ならびに方向保存 Hénon 写像 [2] ($T: y_{n+1} = y_n + a(x_n - x_n^2), x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, a \geq 0$) を利用して, 周期軌道とホモクリニック軌道の記号列に物理的な意味を与えた. これをもとに HS に含まれる周期軌道とホモクリニック軌道の記号列に関する以下の問題を考えた.

ここで使用する Hénon 写像に関する性質は補遺にまとめてある. Hénon 写像のサドル不動点 P の安定多様体 W_s と不安定多様体 W_u の構造は Fig.1(a) と (b) に示してある. これらの弧を用いて, HS を構成するための最初の領域 Z を用意する.

I. 周期軌道に関して

(a) 例として周期 5 の記号列を考える. 6 タイプ ($(2^5 - 2)/5 = 6$) の記号列がある. つまり $1^20^3, 10^4, 1^40, 101^20, 1^30^2, 1010^2$ の 6 タイプである. 記号列から組みひもを作り, トレイントラック法 [3,4] とか Burau 行列法 [5,6] を利用すると位相的エントロピーの下界が得られる. 以下では簡単のため位相的エントロピーの下界のことを単に位相的エントロピーと呼ぶ. 最初の 4 つから得られる位相的エントロピーはゼロであるが, 残りの 2 つからは正の位相的エントロピーが得られる. 記号列の並びつまり記号列の形を見るだけで位相的エントロピーがゼロなのか正なのか判断できるだろうか.

(b) Hénon 写像の楕円型不動点 Q の回転分岐で Q の周りに周期軌道が生じる. この周期軌道に対する記号列の構成規則は Dullin–Meiss–Sterling (DMS) [7] によって得られている [補遺 (iii) を見よ]. I(b) における $1^20^4, 10^5, 1^40^2, 101^30, 1^50$ は DMS の規則に従って構成できる. 一方, 1010^3 と 1^30^3 はサドルノード分岐で生じた周期 5 の軌道である. サドルノード分岐で生じた周期軌道に対する記号列をどのように決めたらよいか. 記号列の構成規則はどのようにしたら得られるのだろうか.

(c) 周期数を固定する. つまり記号列の長さを決める. 更に位相的エントロピーが正の記号列のみ考える. 位相的エントロピーが最大の記号列と最小の記号列は何だろうか. 位相的エントロピーが最大の組みひもと最小の組みひもは何だろうかとも言い替えられる [8]. 位相的エントロピーが最大の記号列と最小の記号列で

記述される軌道の Z の内部における運動の仕方がかなり異なるのではないだろうか. つまり位相的エントロピーの大小を Z の内部での運動の反映である内核の形を見るだけで判断できないだろうか.

II. ホモクリニック軌道に関して

ホモクリニック軌道の記号列は $0^\infty 1 \omega 10^\infty$ と書ける. ω は記号 $0, 1$ の有限の長さの記号列である. ここでは ω の長さが 1 以上のホモクリニック軌道を考える. われわれは ω を内核と呼び, $C = 1\omega 1$ は核と呼ぶ. 上記の記号列の $0^\infty 1$ と 10^∞ が表している軌道点は Z の境界にある. また ω の長さが 1 のとき, この内核が表している軌道点も Z の境界にある. つまり (ω の長さ- 1) 個の軌道点は Z の内部にある. ここで C から計算された位相的エントロピーを $h_{\text{top}}(C)$ と書き, 2 つの核 (C, C') の順序関係を $C \rightarrow C'$ と書く.

(a) $\omega = 0$ または 1 は, HS が存在していることを意味する. よって長さが 2 以上の内核を考える. 長さが 2 以上の内核 ω に対して何か物理的な意味を与えられないだろうか. つまり Z の内部での運動と内核の構造を関係付けることができないだろうか.

(b) $C \rightarrow C'$ でかつ $h_{\text{top}}(C) > h_{\text{top}}(C')$ を満たす一連の順序関係が得られないだろうか [9]. 核に対する順序関係を見つける事はかなり難しい. そのせいか今までに見つかっている順序関係は自明のものがほとんどである. 例え $C \rightarrow C'$ が示せても, 位相的エントロピーの大小を決めるためにはどうしても数値計算に頼らざるをえない. 数値計算に関しては II(d) の問題がある. そのため核に対する順序関係だけで満足するしかないのだろうか. どのような性質を持った核が順序付けられるのだろうか.

(c) 内核の長さを決めるときに得られる位相的エントロピーとして最大の位相的エントロピーを与える内核は何か. 逆に最小の位相的エントロピーを与える内核は何か. この問題は I(d) の問題とも関連している.

(d) 技術的な問題. C が生じる状態でトレリスを構成し, P.Collins のトレリス法 [10] で位相的エントロピーを計算する. この値を $h_{\text{top}}^T(C)$ とする. 一方, 記号列より組みひもを作り位相的エントロピーを計算する. この値を $h_{\text{top}}^B(C)$ とする. C によっては $h_{\text{top}}^T(C) = h_{\text{top}}^B(C)$ を満たすが, $h_{\text{top}}^T(C) > h_{\text{top}}^B(C)$ となることもある. 例を紹介する. 核 $C = 1010$ に対して $h_{\text{top}}^T(C) = \ln 1.9688$ で, $h_{\text{top}}^B(C) = \ln 1.7953$ である. また核 $C' = 0110$ に対しては, $h_{\text{top}}^T(C') = h_{\text{top}}^B(C') = \ln 1.8037$ である. 一方, 順序関係として $C \rightarrow C'$ が成立している. この場合, 位相的エントロピーとして $h_{\text{top}}^T(C) = \ln 1.9688$ を採用すれば, $h_{\text{top}}(C) > h_{\text{top}}(C')$ が成り立つ. しかし, トレリス法による計算は長さが 4 程度の核なら簡単であるが, 8 にもなるとトレリスのグラフを描くだけでも大変である. 組みひも法ならばこのような核に対しても簡単に計算できる.

参考文献

- [1] 多くのテキストに説明がある.
- [2] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. 113(2005), 935-951.
- [3] M. Bestvina and M. Handel, Ann. Math. 135 (1992), 1-51.
- [4] T. Hall のホームページ.
http://www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html
- [5] 松岡隆, 物性研究 67-1 (1996), 1-56.

[6] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. 107(2002), 1117-1145.
 [7] H.R.Dullin, J.D.Meiss and D.G.Sterling, SIAM J. App. Dyn. Sys. 4(2005), 515-562.
 [8] E.Hironaka and E. Kin, Algebraic & Geometric Topology 6(2006), 699-738.
 [9] これに関しても多くの論文がある. ここでは代表的な論文を2つ掲げておく.
 A. de Carvalho and T.Hall, Experimental Math. 11(2002), 271-288.
 P.Collins, Experimental Math. 14(2005), 75-86.
 [10] P. Collins, Int. J. Bifurcation and Chaos, 12 (2002), 605-617.

補遺 面積保存・方向保存 Hénon 写像について

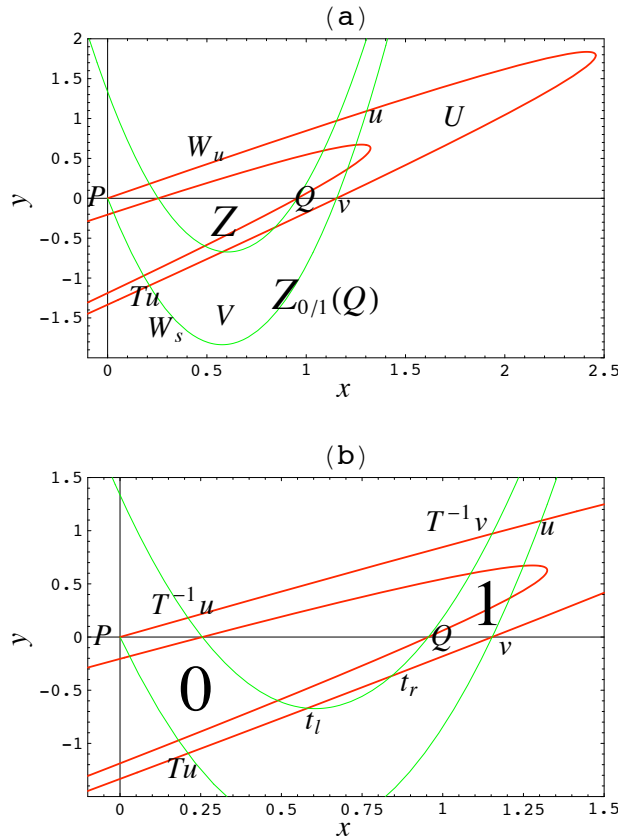


Figure 1. (a) エノン写像の安定多様体 W_s と不安定多様体 W_u . 2つホモクリニックローブ U, V , 領域 Z ならびに Q の共鳴領域 $Z_{0/1}$ の定義. (b) 記号 0 と 1 の定義. ($a = 5.5$).

(i) 不動点 $P = (0, 0)$ はサドル. このサドルの不安定多様体 W_u と安定多様体 W_s の弧で Z を構成する. $a \geq 5.17661 \dots$ では Z に HS が存在する.

Fig.1(a),(b) に HS が完成した後の不安定多様体と安定多様体の構造を示してある. Fig.1(a) において, 4つの弧 $[P, u]_{W_u}$, $[u, v]_{W_s}$, $[v, T u]_{W_u}$, $[T u, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域が Z である. 議論で必要となる領域を定義する. ホモクリニックローブ U は2つの弧 $[u, v]_{W_u}$ と $[u, v]_{W_s}$ で囲まれた閉領域であり, ホモ

クリニクローブ V は 2 つの弧 $[v, Tu]_{W_u}$ と $[v, Tu]_{W_s}$ で囲まれた閉領域である. 不動点 Q の閉共鳴領域 $Z_{0/1}$ を $Z_{0/1} = Z \cup U \cup V$ とする. (iv) で述べる対合 h を用いると, $U = hV$, $Z = hZ$, $Z_{0/1} = hZ_{0/1}$ が成り立つ. 4 つの弧 $[P, T^{-1}u]_{W_u}$, $[T^{-1}u, t_l]_{W_s}$, $[t_l, Tu]_{W_u}$, $[Tu, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域に軌道点があるとき記号は 0 とする (Fig.1(b) を見よ). 4 つの弧 $[T^{-1}v, u]_{W_u}$, $[u, v]_{W_s}$, $[v, t_r]_{W_u}$, $[t_r, T^{-1}v]_{W_s}$ で囲まれた閉領域に軌道点があるとき記号は 1 とする.

(ii) 不動点 $Q = (1, 0)$ は $0 < a < 4$ では楕円点, $a > 4$ では反転型サドル. ここで楕円型と言うとき, 楕円点の場合と反転型サドルである場合を含む. 周期軌道に対する回転数を定義する. 周期を q とする. 1 周期の間に楕円型不動点 Q の周りを回転した回数が p であるとき, 回転数を p/q と定義する. 不動点の回転数は $0/1$ である.

(iii) 臨界値 $a_c = 4 \sin^2(p\pi/q)$ で, Q より回転数 p/q の周期軌道が 2 個 (サドルと楕円点) 生じる. この分岐を回転型分岐と呼ぶ. 回転分岐で生じた周期軌道の記号列の構成規則 [7] を以下に示す.

既約分数 p/q ($0 < p/q < 1/2$) の Farey 分割を $FP[p/q] = \{p_l/q_l, p_r/q_r\}$ ($p = p_l + p_r, q = q_l + q_r, p_r q_l - p_l q_r = 1$) とする. 回転数 p/q のサドルの記号列を $S(p/q)$ とし, 楕円型の記号列を $E(p/q)$ とする. 回転数 p_r/q_r のサドルの記号列を $S(p_r/q_r)$ とし, 楕円型の記号列を $E(p_r/q_r)$ とする. 同様に $S(p_l/q_l)$ と $E(p_l/q_l)$ も導入する. ここで $S(0/1) = 0$ とする. $E(0/1) = 1$ であるが以下の規則では使用しない. また $S(1/2) = 11$ とし $E(1/2) = 10$ とする. 規則のために $S(1/2)$ を便宜的に導入した. 記号列の構成規則を以下に示す.

$$S(p/q) = S(p_r/q_r)S(p_l/q_l) = 11s, \quad E(p/q) = 10s.$$

ここで s は長さ $q - 2$ の記号列である. 例を示す. $S(1/3) = S(1/2)S(0/1) = 110$, $E(1/3) = 100$, $S(2/5) = S(1/2)S(1/3) = 11100$, $E(2/5) = 10110$.

[iv] T は可逆な写像である. つまり T は 2 つの対合 g と h の積で $T = h \circ g$ と書ける. 対合 g と h は下記のように定義されている.

$$g(x, y) = (x, -y - a(x - x^2)), \quad h(x, y) = (x - y, -y).$$

2 つの対合 g と h の不動点の集合が対称線である. つまり $S_g: y = -(a/2)(x - x^2)$ と $S_h: y = 0$ である. それぞれの対称線を 2 つのブランチに分ける. S_g で $x > 1$ の領域にあるブランチを S_g^+ とし, $x < 1$ の領域にあるブランチを S_g^- とする. S_h^\pm も同様に定義する.

[v] 回転型分岐で生じた周期軌道はすべて対称な周期軌道である. つまり対称線上に軌道点をもつ. 特にすべての楕円型周期軌道は S_g^+ 上に軌道点をもつ [7]. この事実より S_g^+ は主軸と呼ばれる.

[vi] 対称周期軌道を考える. 周期数が偶数の場合, S_g 上に 2 点軌道点をもつか, または S_h 上に 2 点軌道点をもつ. 周期数が奇数の場合, S_g 上に 1 点軌道点をもち, かつ S_h 上に 1 点軌道点をもつ. 回転分岐で生じた対称周期軌道の回転数は $0 < p/q < 1/2$ を満たし既約分数である. 周期倍分岐は回転分岐に含めない. なぜなら周期倍分岐ではサドル軌道と楕円軌道が対で生じないからである. サドルノード分岐で生じた対称周期軌道の回転数 p/q は, $0 < p/q \leq 1/2$ を満たすが必ずしも既約分数であるとは限らない.

[vii] ホモクリニック点 u, v は主ホモクリニック交差点と呼ばれる. u の記号列は $0^\infty 10^\infty$ であり, v の記号列は $0^\infty 110^\infty$ である. これらの記号列から得られる位相的エントロピーはゼロである. t_l の記号列は $0^\infty 1010^\infty$ であり, t_r の記号列は $0^\infty 1110^\infty$ である. これらの記号列から得られる位相的エントロピーは $\ln 2$ である. 記号列 $0^\infty 1\omega 10^\infty$ の ω の左にある 1 から右にある 1 の間にホモクリニック軌道が k 回 Q の周りを回転したとする. これよりホモクリニック軌道の Q の周りの回転回数は $(k+1)$ 回である. ちなみに主ホモクリニック軌道の回転回数は 1, t_l と t_r の軌道の回転回数は 2 である.

最後にホモクリニック軌道に対して回転比 $= k / (\text{内核の長さ} + 1)$ を導入する. 回転比を周期軌道の回転数と同様に扱う.