# シンプレクティク数値積分法について

国立天文台 天文学データ解析計算センター 伊藤孝士 (tito@cc.nao.ac.jp)

**シンプレクティク数値積分法とは？** ハミルトン力学系の時間発展 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \to (\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')$ はシンプレクティク二次形式 $d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q}$を保存する写像、すなわちシンプレクティク変換（正準変換）になっている。シンプレクティク数値積分法 (symplectic integrators) はこのシンプレクティク変換を忠実に再現することを目指した数値解法である。

**シンプレクティク数値積分法の特徴** シンプレクティク変換を再現するという本然的な性質から、シンプレクティク数値積分法はシンプレクティク二次形式を保存し、必然的に位相空間内での体積も保存される。実際的な数値計算の場面に於いてそれよりも重要になるのはエネルギーの計算誤差に時間とともに増大する成分（永年誤差）が存在しないことであろう (Yoshida 1993)。これはシンプレクティク数値積分法が実は『代理』ハミルトニアン$\tilde{H} = H + H_{err}$ の時間発展を厳密に追っており、真のハミルトニアン $H$との差 $H_{err}$は（少なくとも準周期的な運動の場合には）時間とともに増大しないという事実に拠っている。惑星系のようにケプラー運動に近い運動が基本となる系では軌道運動数値積分の主要な誤差は天体の経度の誤差であり、これは全エネルギーの誤差を時間で積分した量に比例する。従って、エネルギーの計算誤差に時間に比例した成分が存在するか否かは長期の計算に於いて致命的な差となって現れる。重力 $N$体系の計算に於いては角運動量が厳密に保存されるという性質 (Yoshida 1990) も重要である。また、シンプレクティク数値積分法の背景である解析力学には長年にわたる膨大で美しい知識体系の蓄積があるため、これに立脚した理論的発展の余地が広く存在している。例えば各自由度毎に独立したステップ幅を与える individual stepsize method (Saha and Tremaine 1994), 或る種の special startup procedure を用いて誤差を軽減する方法 (Saha and Tremaine 1992, Wisdom *et al.* 1996), 特定の系について正則化を行い close encounter に対処する方法 (Mikkola 1997) などである。

**高精度化・高速化** シンプレクティク積分法の核心は、ハミルトニアンを積分可能ないくつかの部分に分割し、各々を交互に評価して行くということである。まず最初に思い付くのは運動エネルギーとポテンシャルへの分割 $H = T(p) + V(q)$ であろう。ところで、惑星系のように二体問題に近い運動が基本となる系では、$H = H_{kep}(q,p) + \epsilon H_{int}(q)$ のようにケプラー運動とそれに対する相互摂動という形式にハミルトニアンを分割することができる。ケプラー運動のハミルトニアン $H_{kep}(q,p)$ は一見して可積分には見えないが、これは直交座標 $(q,p)$ を使っているためで、例えば二体問題を表わす正準変数 Delauney variables を用いれば $H_{kep} = H_{kep}(L)$ のように可積分の形式に書くことができる。すなわちハミルトニアンを $H = H_{kep}(L) + \epsilon H_{int}(q)$ の形に分割し、交互に評価して行くことが可能になるのである。惑星系の場合にはケプラー運動のハミルトニアンに対して相互摂動のハミルトニアンが非常に小さく ($\epsilon \sim 10^{-3}$), 従って誤差ハミルトニアン $H_{err}$も $\epsilon$倍になる。このことによって計算誤差の劇的な減少を達成することができる (Kinoshita *et al.* 1991, Wisdom and Holman 1991)。また、誤差を同程度に保とうと思えば従来型 $H = T(p) + V(q)$ に比べて圧倒的な高速化を実現することができる。この方法では二種類の変数 ($L$ と $q$) が混在しているため、混合変数法と呼ばれる。

**適用範囲と将来の発展** ハミルトン系、特に可積分に近い摂動力学系を扱う場合にはこのように大いなる長所を持つシンプレクティク積分法だが、もちろん万能ではない。散逸系では使えないし、可変刻み幅を採用することが本質的に困難である。混合変数法は摂動が小さくなければ意味がなく、close encounter を扱うにはかなりの工夫が必要となる。しかしながら、天体の運動の基本であるハミルトン系の振舞いを極めて忠実に再現するシンプレクティク積分法の需要は今後ますます増大して行くことであろう。それぞれの研究者がそれぞれの問題意識で改良を加えたシンプレクティク積分法が世に問われ、更なる発展がなされることを期待するものである。

## References

Kinoshita, H. and Nakai, H. *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **50**, 59, 1991.

Mikkola, S. preprint, 1997.

Saha, P. and Tremaine, S. *Astron. J.*, **104**, 1633, 1992.

Saha, P. and Tremaine, S. *Astron. J.*, **108**, 1962, 1994.

Wisdom, J. and Holman, M. *Astron. J.*, **102**, 1528, 1991.

Wisdom, J. Holman, M. and Touma, J. In *Integration Algorithms and Classical Mechanics*, American Mathematical Society, 1996.

Yoshida, H. preprint, 1990.

Yoshida, H. *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **56**, 27, 1993.