

特集 ケプラーの法則から四百年 (仮題)
伊藤孝士 いたう たかし (国立天文台)

1609年、ガリレオ・ガリレイは自ら製作した望遠鏡を用いて天体の観測を開始した。それから四百年目に当たる本年は世界天文年とされ、天文学に関する各種の事業が多く、国々で進められている。しかし、その同じ1609年に現在ではその名を冠して「ケプラーの法則」と称される法則群の第一と第二をヨハネス・ケプラーが発表したことは、存外知られていないようである。

ケプラーの法則

ケプラーの法則は太陽を周回する惑星運動の特性を表現したもので、以下の三つの法則から成る。

第一法則：惑星は太陽を焦点のひとつとする楕円の軌道上を運行する。

第二法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は軌道上のどの場所でも一定である。

第三法則：惑星の公転周期の二乗と軌道半長径の三乗の比は惑星に依らず一定である。

これらの法則はティコ・ブラーエの詳細な観測結果を整理する作業の中でケプラーが経験的に見出したものであった。太陽と惑星を一組の質点と看做し、それらがニュートンの万有引力に従って互いに引き合う系（重力二体問題）ではこの三法則が厳密に成立する。もちろん二つの天体が太陽と惑星である必要はなく、太陽と彗星でも地球と月でも、それらを質点と看做してしまえばケプラーの法則は成り立つ。ケプラーの法則は重力二体問題を記述する運動方程式の解（ケプラー軌道と呼ばれる）を求める過程で自然に導かれるし、その逆に、ケプラーの法則だけを用いて万有引力の性質 — その大きさが天体間の距離の二乗に反比例する力 — を導くことも可能である。

ケプラーの第一法則は惑星の軌道が古代より信じられて来たような円やその重ね合わせではなく、一般には楕円になることを明快に述べている。太陽が楕円の中心ではなく焦点に位置するという事

実も興味深い。現代の知識から見れば上述した二体問題の運動方程式を解くことでこの事実は数式の上ではすぐに示される（初期に与えられるエネルギーによっては天体の軌道は放物線や双曲線にもなり得る）。但し、惑星軌道が「どうして」円ではなく楕円になるのか？というまったく素朴な問いに対して直感的な回答を示すことはさほど容易ではないかもしれない。この場合、「方程式を解けばそうなるから」では答えにならない。

ケプラーの第二法則の記載は三つの法則の中でもっとも回りくどいが、これは現代の用語で言えば角運動量保存則に相当する。この法則でケプラーが言おうとした所を定性的に記せば次のようになる。「惑星は太陽の近くにある時には速く運動し、太陽から遠ざかるとその運動は遅くなる。」大雑把に言えばその原因は、太陽から惑星が受ける力（加速度）が太陽に近いほど強いからである。強い万有引力を受けた惑星は太陽への落下を避けるかのようにその運動速度を上げる。地球のように軌道が真円に近い天体ではその違いは顕著ではないが、細長い楕円軌道を持つ彗星などはその大半の時間を太陽からもっとも遠い地点（遠日点）付近で過ごす。そうした天体も時折り太陽の近くに回帰して私達にその姿を見せるが、ケプラーの第二法則が述べる通り太陽近傍（近日点付近）での速度は大きく、滞在時間は短く、私達の目の前をあっという間に通り過ぎて再び遠日点への長い旅路に着く。

第三法則の実用性

ちょうど四百年前に発表されたケプラーの第一・第二法則はニュートン力学の美しい帰結のひとつであり、現代的な視点から見れば実用性と言うよりも宇宙の秩序を端的に表す象徴という意味合いを強く持つものと言えよう。一方、ケプラーの法則のうち現在の天文学研究の現場でもっとも

実用性が高いのは、第一・第二法則のしばらく後に発表された第三法則だと思われる。現役の天文学者に「ケプラーの法則とは何であるか述べて」と尋ねてみれば、大半が最初に第三法則を思い浮かべるのではないかと推測される。もしかすると第一法則と第二法則については記憶が怪しく、どんな法則だっけ？と首をかしげる者すら多いかもしれない。第三法則の記述に現れる軌道半長径とは惑星の軌道を表す楕円の長径の半分である。これの三乗と惑星の公転周期の二乗が比例するのだから、すなわち第三法則は惑星の軌道が大きければ惑星がそこを一周するのに要する時間が長くなることを示している。定性的には第二法則と似たような事実を意味するとも言えるこの法則はしかし、その数学的表現が極めて単純であることから現代の天文学に於いても重用されている。惑星の軌道半長径を a 、公転角速度の平均値を $n (=2\pi/\text{公転周期})$ 、太陽の質量を M 、惑星の質量を m 、万有引力定数を G とすると、ケプラーの第三法則の表現はわずかに以下のみである。

$$n^2 a^3 = G(M+m)$$

一般に惑星の質量は太陽の質量に比べて大変に小さい ($m \ll M$) ので、 $G(M+m)$ は GM とほぼ等しい。これにより、 $n^2 a^3$ はケプラーの言葉通り惑星の種類に依らない定数であることが分かる。

現代の応用例

惑星の質量が太陽の質量に比べてとても小さい、言葉を変えれば太陽重力に比べてそれ以外の天体間に働く重力が小さいと言うことは、太陽系天体の軌道運動に関してケプラーの法則がいつも高い精度で成立することを意味する。これがために私達はケプラーの法則を安心して普段の研究に使うことが出来る。私達が生きているような時間スケールでは惑星の軌道が大きく変わることもなく、理科年表に記載された地球の軌道要素は昨年も今年も来年もほとんど変わらない。流星群は毎年同じような時期に発生し、火星は二年二ヶ月弱の周期で確実に地球に接近し、周期彗星は高い確率で一

公転周期の後には再び私達の前に出現する。既に四十万個以上が発見されている小惑星もその大半は各々のケプラー軌道に沿って整然とした運動を続ける。無論のこと長い時間スケールで見れば天体運動のケプラーの法則からのずれ、つまり太陽重力以外の微弱な力こそが太陽系の進化の原動力であり、46億年前に存在した塵とガスの混合物を現在の太陽系にまで至らしめた要因であることは今や学界の常識である。けれどもひとたび惑星が完成し、惑星間空間がほぼ空になってしまった現在の太陽系は再び太陽重力の支配する世界となり、そこではケプラーの法則が幅を効かせるようになる。そしてケプラーの法則は私達の太陽系ばかりではなく、この宇宙一般に於いて重い天体の周りを軽い天体が回る場所の大半で成り立っているはずである。例えば昨今では太陽系以外の惑星系の発見が相次いでおり、2009年1月現在で既に三百個以上の太陽系外惑星系が確認されている。そのほとんどは視線速度法（ドップラー偏移法）と呼ばれる方法で発見されているが、これは観測者に対する恒星の視線方向速度の変化を高精度の分光観測で検出する方法である。惑星を持つ恒星をこの方法で観測した時に真っ先に判明するのは惑星運動の反作用として動き回る恒星の視線速度の周期変動である。その周期は惑星の公転周期を反映し、それがケプラーの第三法則を介して惑星の軌道半長径に焼き直される。これなどは、四百年前に経験的に見いだされたケプラーの法則が現代でも研究現場の最前線で活用されている典型的な例と言えよう。

ケプラー方程式

ケプラーの法則に関連し、やはりヨハネス・ケプラーの名を冠し現在でも頻繁にお目に掛かるひとつの方程式について触れておく。その名も正に「ケプラー方程式」と呼ばれ、ケプラーの法則とも密接な繋がりを持つものである。ケプラー方程式は $u - e \sin u = l$ という極めて単純な形をしている。 e は惑星軌道の離心率（円軌道からのずれ

を表す量)、 u は軌道上の惑星位置を幾何学的に表す角度のひとつ(離心近点離角)、 l は時刻に比例する変数(平均近点離角)であり、ケプラー方程式はある時刻(l)を与えてその時の惑星の位置(u)を $u = u(l)$ の形で得るための方程式である。ケプラーの法則は惑星運動が持つ一般的な性質を概ね記述してはいるものの、ケプラーの法則だけを使って特定の時刻に惑星が軌道上のどの位置にいるのかを計算できるわけではない。だがこうした計算が可能になれば天体の軌道運動を予測するような理論的研究のみならず、特定の天体を確実に視野に捉える必要のある観測的研究も成立しない。その意味でケプラー方程式は惑星だけではなく彗星や小惑星といった小天体や人工衛星など、およそ軌道運動というものをを行う天体の力学に関したあらゆる局面に登場する。

かくも重要であり、ケプラーの法則と同様にヨハネス・ケプラーの名を冠しているにも関わらず、ケプラー方程式の知名度は高いとは言えない。その理由のひとつは、ニュートン力学体系の見事な発現とも言えるケプラーの法則と比べて天体の具体的な軌道位置を計算するという目的を負ったケプラー方程式はやや実面的側面が強すぎ、一般的な物理教育では例題として扱いにくいという事情があるのかもしれない。もう一つの理由は、その単純な形とは裏腹にケプラー方程式が解析的な解を持たない、いわゆる超越方程式に分類されることであろう。ケプラー方程式の解 $u(l)$ を得るにはベッセル関数のような特殊関数の世話になるかニュートン法などの数値的な方法を使う必要があり、努力すればいつかは美しい解析解に辿り着くという代物ではない。ケプラー方程式の解法に関する研究はその高い実際性により基礎天文学の中でも独特の地位を保っており、これに関する論文や書籍は 21 世紀の現代でも続々と発表されている。計算機による数値解法が発達した現在ではケプラー方程式研究の勢いは更に増しているようにすら思われる。

これまでの 400 年、これからの 400 年

現代天文学の最先端に於いてもケプラーの法則やケプラー方程式が頻繁に現れる状況を目にする時、この四百年という時間の中で人間が為し遂げたことと為し遂げなかったことに思いを馳せる研究者は少なくないだろう。聞けば、世界天文年のもっぱらガリレオ・ガリレイの業績を記念する事業であると思いついでいる人も多いそうである。だが天文学の研究現場では今やガリレオの名を耳にすることは多くない。その意味で、ガリレオと同じく四百年前という時代に生きたケプラーの研究を改めて思い起こし、さらには今から四百年後の世界で彼の名を持つ法則や方程式がどのような学術的位置を占めているのかについて想像を巡らせることもまた、世界天文年が持つ一興であろう。