

# 古在機構 (共鳴) Kozai Mechanism (“Resonance”)

小久保英一郎 (国立天文台)

Eiichiro Kokubo (National Astronomical Observatory of Japan)

## 概要

I briefly summarize the concept of the Kozai mechanism in which an asteroid with high eccentricity and inclination shows the libration of argument of pericenter around  $\pi/2$  or  $3\pi/2$  under the perturbation of Jupiter. The derivation of the disturbing function and the Hamiltonian map are presented. I also show the examples of the numerical integration.

## 1 はじめに

太陽 (中心天体)-木星 (摂動天体)-小惑星 (テスト粒子) 系のような制限3体問題を考える。このとき軌道離心率と軌道傾斜角の大きな小惑星の近点引数は、ある条件下で  $\pi/2$  もしくは  $3\pi/2$  のまわりを秤動 (振動) することが知られている (Kozai 1962)。この秤動はしばしば古在共鳴と呼ばれる。しかし、後で示すようにこれは物理的な意味での共鳴ではない。なのでここでは古在機構と呼ぶことにする。

古在機構の応用範囲は広い。太陽系では上記の小惑星の場合だけでなく、太陽-惑星-惑星、太陽-惑星-彗星、惑星-太陽-衛星などの系に応用されている。また、近年発見されている太陽系以外の惑星系でも、中心星-惑星-惑星、主星-伴星-惑星 (連星系) などの系に応用されている。

ここでは簡単に永年摂動論の考え方と古在機構の概念について解説し、数値計算例を示す。より詳しくは、原論文 (Kozai 1962) や文献 (Kinoshita & Nakai 1991, 1999) などを参照して欲しい。

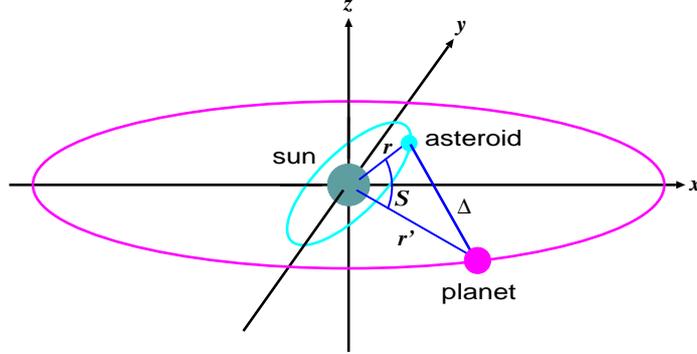


図 1: Schematic illustration of the model.

## 2 モデル

$a$	semimajor axis
$e$	eccentricity
$i$	inclination
$\Omega$	longitude of ascending node
$\omega$	argument of pericenter
$\varpi$	longitude of pericenter

$n$	mean motion
$l$	mean anomaly
$f$	true anomaly

表 1: List of symbols.

ここでは摂動天体が被摂動天体の外側にある場合を考える。例として太陽(中心天体)-惑星(摂動天体)-小惑星(テスト粒子)の制限3体問題を考える(図1)。他の系の場合はそれぞれ対応する天体に読みかえればよい。

太陽(質量  $m$ ) のまわりに小惑星(質量 0、位置  $\mathbf{r}$ ) がある。惑星(質量  $m'$ 、位置  $\mathbf{r}'$ ) は小惑星から十分に遠いとする。表1に軌道要素の記号をまとめる。以下でプライム(') なしは小惑星、プライムつきは惑星の軌道要素を表すとする。

## 3 小惑星の運動方程式

惑星の軌道面を  $x$ - $y$  平面とし ( $i' = 0$ )、座標原点を太陽にとる。小惑星の運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k^2 m \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \quad (1)$$

となる。ここで  $k^2$  は重力定数である。惑星の摂動を表す摂動関数  $R$  は

$$R = k^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad (2)$$

である。 $\Delta$  は惑星と小惑星間の距離で

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S \quad (3)$$

である。ここで  $S$  は太陽から見た惑星と小惑星のなす角度である (図 1)。式 (2) の右辺第 1 項が摂動の直接項、第 2 項は間接項 (惑星が太陽をゆらす効果) である。 $\cos S$  を球面三角公式の余弦定理を使って書き変えると

$$\cos S = \cos(\omega + f) \cos(\omega' + f') + \sin(\omega + f) \sin(\omega' + f') \cos i \quad (4)$$

となる。

小惑星の単位質量当たりのハミルトニアンは 2 体問題のハミルトニアン  $F_K$  と摂動関数を使って

$$F = F_K - R(\mathbf{r}, t) = -\frac{k^2 m}{2a} - R(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

と書ける。これは保存量ではないことに注意。

## 4 摂動関数の展開

惑星の軌道半径が小惑星の軌道半径より十分大きい ( $r' \gg r$ ) として

$$\frac{r'}{\Delta} = \left[ 1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos S \right]^{-1/2} \quad (6)$$

をルジャンドル多項式を使って展開する。展開して  $(r/r')^2$  の項までを取ると

$$\frac{r'}{\Delta} \simeq 1 + \left( \frac{r}{r'} \right) P_1(\cos S) + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos S) \quad (7)$$

となる。これを使うと摂動関数は

$$R \simeq \frac{k^2 m'}{r'} \left[ \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos S) \right] = \frac{k^2 m' a^2}{a'^3} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) \right] \quad (8)$$

となる。ここで摂動関数の中で小惑星の運動に寄与しない  $k^2 m'/r'$  を無視した。また、間接項 ( $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r'^3$ ) は  $P_1(\cos S) = \cos S$  の項と相殺してしまうので、摂動には効かない。

## 5 摂動関数の軌道平均

軌道の長期的な変化を見るため、摂動関数を軌道平均して短周期項を落す。これは惑星を軌道の形のリングに近似することに対応する。周期  $T$  の軌道での軌道平均を以下のように表す。

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dl \equiv \langle \rangle_l \quad (9)$$

小惑星と惑星の軌道運動で平均すると摂動関数は

$$\begin{aligned} \langle \langle R \rangle_{l'} \rangle_l &\simeq \frac{k^2 m' a^2}{a^3} \left[ -\frac{1}{2} \left\langle \left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \right\rangle_{l'} \right\rangle_l + \frac{3}{2} \left\langle \left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \cos^2 S \right\rangle_{l'} \right\rangle_l \right] \\ &= \frac{m'}{m+m'} \frac{n'^2 a^2}{\eta^3} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (3 \cos^2 i - 1) + \frac{15}{16} e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right] \quad (10) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $k^2(m+m') = n'^2 a^3$  を使った。また、 $\eta = \sqrt{1-e^2}$  である。摂動関数を見てわかるようにここまでの展開では摂動関数に被摂動天体の  $\Omega$  や摂動天体の  $\varpi'$  が現れない、つまり軸対称な摂動関数 (リングポテンシャル) になっている。

軸対称な摂動関数の下では角運動量の  $z$  成分が保存する。この場合、角運動量  $L_z$  は

$$L_z = \sqrt{k^2 m a (1 - e^2)} \cos i \quad (11)$$

である。

## 6 ラグランジュの惑星方程式

ラグランジュの惑星方程式から軌道平均後の小惑星の運動方程式は

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \omega} \quad (13)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cot i}{na^2 \eta} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \omega} \quad (14)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \eta} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i} \quad (15)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \eta \sin i} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i} \quad (16)$$

となる。これ以降簡単のため  $\langle \langle \rangle \rangle_l$  を単に  $\langle \rangle$  と表す。

$\dot{a} = 0$  ( $\langle R \rangle$  に元期近点離角  $\sigma$  が現れない) から小惑星の軌道長半径に永年変化がないことがわかる。

長期的に見て  $\dot{\omega} = 0$ 、つまり、近点引数に永年変化がない場合が古在機構である。このとき  $\dot{\omega} = \dot{\omega} + \dot{\Omega} = \dot{\Omega}$  になっている。このために共鳴と呼ばれることがある。しかし、これは外力の振動数と系の固有振動数が一致するという意味での共鳴の条件とは違う。

普通は運動方程式 (13)-(16) を数値的に積分して軌道進化を計算するが、木下、中井はヤコビ楕円関数を用いて解析解を与えている (Kinoshita & Nakai 1999)。

## 7 ハミルトニアンマップ

小惑星のハミルトニアンを軌道平均すると

$$\langle F \rangle = -\frac{k^2 m}{2\langle a \rangle} - \langle R \rangle \quad (17)$$

となる。これは時間に陽に依存しないので保存量となる。今の場合  $a$  は一定なので  $\langle R \rangle$  が保存することになる。 $\langle R \rangle$  をさらに簡単にした  $R^*$  を

$$R^* = (2 + 3e^2)(3 \cos^2 i - 1) + 15e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \quad (18)$$

と定義する。

角運動量の  $z$  成分の保存を使うことによって  $R^*$  から  $i$  を消去することができる。角運動量の  $z$  成分保存から

$$\eta \cos i = \text{const.} \equiv \pm \sqrt{h} \quad (19)$$

となる。これを使うと  $R^*$  は

$$R^* = (2 + 3e^2) \left( \frac{3h}{\eta^2} - 1 \right) + 15e^2 \left( 1 - \frac{h}{\eta^2} \right) \cos 2\omega \equiv c \quad (20)$$

となり、 $e$  と  $\omega$  だけの関数になる。角運動量 ( $h$ ) を与え、 $\omega$ - $e$  面でエネルギー ( $c$ ) の等値線 (等ハミルトニアン線) を描いたものをハミルトニアンマップと呼ぶ。等ハミルトニアン線から、小惑星の運動を解かなくても  $e$  と  $\omega$  の大局的なふるまいを知ることができる。すなわち、軌道平均後の

ハミルトニアンは保存するので、 $e$  と  $\omega$  は等ハミルトニアン線にそって変化する。

式 (20) を  $\omega$  について解くと

$$\omega = \frac{1}{2} \arccos \alpha \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{c(1 - e^2) - (2 + 3e^2)(3h - 1 + e^2)}{15e^2(1 - e^2 - h)} \quad (22)$$

となる。 $e$  の取り得る範囲は  $|\alpha| \leq 1$  で決まる。また、式 (19) より  $0 < i < \pi/2$  なら  $e_{\max}$  のとき  $i_{\min}$  となり  $\pi/2 < i < \pi$  なら  $e_{\max}$  のとき  $i_{\max}$  となる。

## 8 数値計算例

近点引数が秤動する場合と回転する場合について、ハミルトニアンマップと軌道積分の例を示す。太陽のパラメータは  $m = 1.0$ 、惑星のパラメータは  $m' = 0.001$ 、 $a' = 5$ 、 $e' = 0$  である。また、小惑星の初期軌道要素は  $a_0 = 2.5$ 、 $e_0 = 0.3$ 、 $i_0 = 1.0$ 、 $\Omega_0 = 0$  で、 $h = 0.27$  となる。軌道積分は小惑星の周期で約  $4 \times 10^4$  周期行なっている。

### 秤動 (libration)

初期の  $\omega_0 = 1.0$  のとき、 $c = -0.68$  となる。この場合、 $\omega$  は  $\pi/2$  近傍で秤動が可能である (図 2)。この秤動が古在機構である。このとき  $a$ 、 $e$ 、 $i$  には永年変化はない (図 2 左)。これは長周期ではエネルギーが保存し、かつ角運動量の  $z$  成分が保存しているためである。

軌道積分による小惑星の  $\omega$ - $e$  面での進化がほぼ等ハミルトニアン線にそっていることがわかる (図 2 右)。ずれは摂動関数の導出で無視した高次の項の影響である。

ハミルトニアンマップを見てわかるように、秤動領域の中心部には軌道がほとんど変化しない、つまり軌道の安定領域が存在する。

秤動する場合について可能な最大離心率  $e_{\max}$  を求める。 $\omega_0 = \pi/2$  で  $e$  が最小値  $e_0$  をとり、このときの軌道傾斜角を  $i_0 (< \pi/2)$  とする。 $\omega = \pi/2$ 、

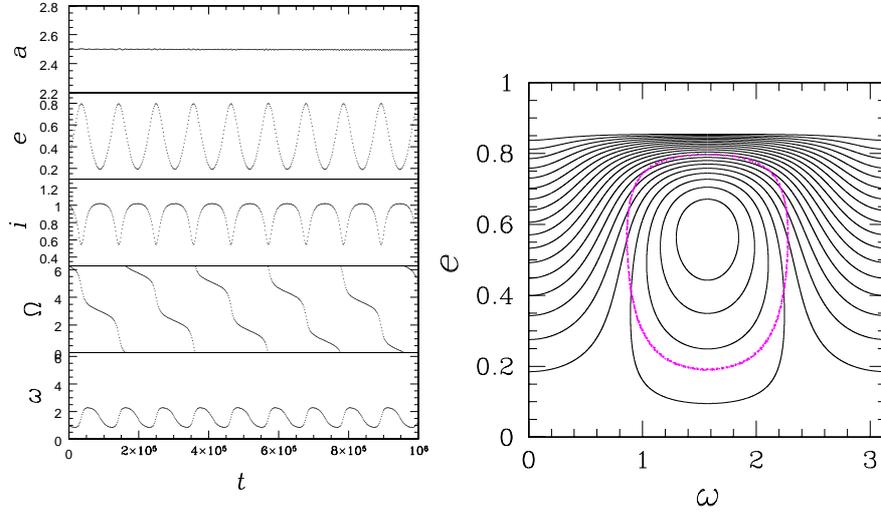


図 2: Orbital evolution for the libration case ( $h = 0.27$  and  $c = -0.68$ ). Time evolution of the orbital elements (left) and the Hamiltonian map (right). The dots on the Hamiltonian map show the results of the numerical integration.

つまり  $e$  が最小と最大のときの式 (19) と式 (20) を連立させて  $e$  について解くと  $e_{\max}$  が得られ

$$e_{\max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 i_0} \quad (23)$$

となる。これから秤動する領域が存在するための初期の  $i_0$  の条件は

$$i_0 \geq \arccos \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.68472 \text{ (39.2315}^\circ\text{)} \quad (24)$$

となる。

## 回転 (circulation)

初期の  $\omega_0 = 0.0$  のとき、 $c = 0.67$  となる。この場合、 $\omega$  は秤動せず回転する (図 3)。この場合も秤動と同じように  $a$ 、 $e$ 、 $i$  に永年変化はない (図 3 左)。やはり等ハミルトニアン線と軌道進化がほぼ合っていることがわかる (図 3 右)。

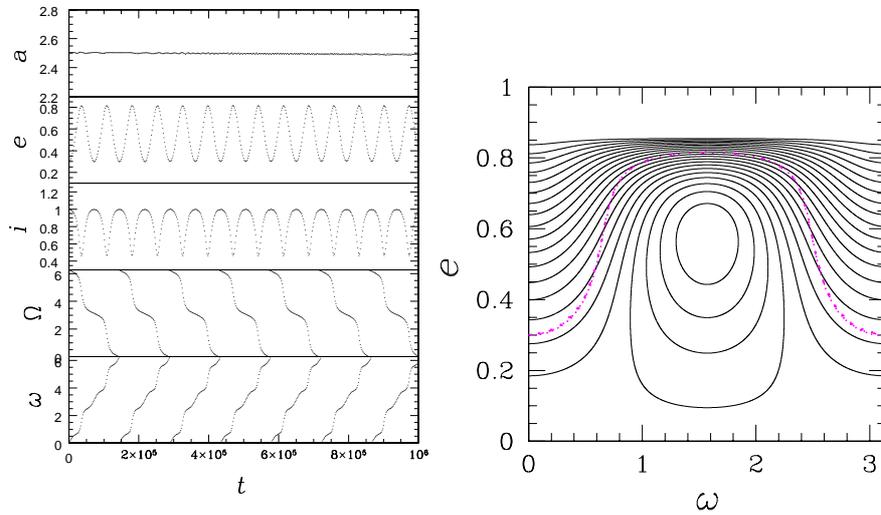


図 3: The same as Fig.2 but for the circulation case ( $h = 0.27$  and  $c = 0.67$ ).

秤動と回転の境界領域では  $e$  が大きく変化する領域がある。この領域では初期に  $e$  が 0 に近くても、1 に近いところまで大きくなる可能性がある。この現象が古在共鳴と呼ばれる場合もあるので注意されたい。

## まとめ

古在機構は、制限 3 体問題で大きな軌道離心率と軌道傾斜角をもつテスト粒子の近点引数が  $\pi/2$  もしくは  $3\pi/2$  まわりで秤動する、というものである。永年摂動論を用いるとこれを理論的に説明することができる。制限 3 体問題における永年摂動論で、 $r/r'$  は 2 次、 $e$  と  $i$  は 4 次までの摂動関数の特徴は次のようになる。

- 軸対称である。すなわち角運動量の  $z$  成分が保存する。
- 保存量である。すなわちエネルギーが保存する。

この摂動関数のもとでテスト粒子の軌道要素の永年変化を計算し、近点引数が秤動する場合が古在機構である。ちなみに、先に述べたように古在機構は物理的な意味での共鳴ではないし、もちろん永年共鳴でもない。

近年、古在機構は、摂動天体が被摂動天体の内側にある場合、平均運動共鳴と同時に起きる場合、摂動天体と被摂動天体の軌道が交差している場合、さらに制限問題ではない場合などにまで拡張されている。ここでは取り上げないが、興味があれば最近の論文を読んでみて欲しい。

## 参考文献

- Kozai, Y., 1962, Secular Perturbation of Asteroids with High Inclination and Eccentricity, *AJ*, 67, 591
- Kinoshita, H., Nakai, H., 1991, Secular Perturbation of Fictitious Satellites of Uranus, *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 52, 293
- Kinoshita, H., Nakai, H., 1999, Analytical Solution of the Kozai Resonance and its Application, *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 75, 125

## 謝辞

本稿をまとめるにあたり、木下宙氏から貴重な意見をいただいた。ここに感謝する。