

惑星地球科学 I レポート課題：小惑星の形成と内部の溶融（補足説明）

2015 年 1 月 9 日 中本泰史 (nakamoto@geo.titech.ac.jp)

1 月 8 日の講義においてレポート課題を出しましたが、講義中黒板に記した一部の式に表記の誤りがあった可能性があります。また、議論に必要な数値を示していませんでした。申し訳ありません。ここで、それらを補います。

レポート課題

隕石は小惑星の破片である。隕石には、天体全体が大規模に溶融したのち固化したもの（鉄隕石やエイコンドライト隕石など）と、天体規模の溶融痕のないもの（コンドライト隕石）の 2 種類がある。一方、太陽系初期には放射性核種 ^{26}Al が存在していたことが示された。

これらのことをもとにして、太陽系初期における微惑星（小惑星）形成について論じよ。

提出締め切り: 2015 年 1 月 23 日 (金), 提出先: 教務課レポート提出ボックス

熱伝導方程式

考察に用いる熱伝導方程式は次です。(黒板の表記に誤りがあった可能性があります。)

$$\rho C \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = k \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) + \varepsilon(r, t) \quad (1)$$

各物理量の意味と数値

式 (1) の中の各文字の意味と、本課題で用いる数値は次の通りです。

小惑星中心からの距離	r
小惑星の半径	R
時刻	t
小惑星内部の温度	$T(r, t)$
小惑星内部の密度	$\rho = 3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
小惑星構成物質の単位質量あたりの熱容量	$C = 1 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$
小惑星内部の熱伝導率	$k = 2 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$
単位体積あたり単位時間あたりの発熱量	ε
^{26}Al 原子 1 個が放射壊変したときに出すエネルギー	$e_{26} = 3.6 \times 10^{-13} \text{ J}$
^{26}Al の半減期	$t_{1/2} = 7.2 \times 10^5 \text{ 年}$ $t_{\text{decay}} = t_{1/2} / \ln 2$
小惑星の固体質量に対する Al の質量割合	$f_{\text{Al}} = 0.02$
太陽系形成初期 ($t = 0$) における ^{26}Al と ^{27}Al の原子数比	$(^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_0 = 5.0 \times 10^{-5}$
^{27}Al 原子 1 個の質量	$m_{\text{Al}} = 27 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
小惑星の初期温度・表面温度	$T_b = 200 \text{ K}$
岩石が溶ける温度	1200 K もしくは 1500 K

ヒント

式 (1) は偏微分方程式ですが、これを微分方程式として解かなくても議論ができます。講義の際に説明しましたが、下のように右辺第 1 項と第 2 項の大きさを“時間”で言い換え、それらを使って温度変化の大まかな傾向を見ればよいわけです。

右辺第 1 項の評価

温度分布 $T(r, t)$ は、(a) 中心温度 $T(r = 0, t)$ は表面温度 $T(r = R, t)$ より高温、(b) 温度分布は r に対して上に凸な分布、と考えるとよい。すると、右辺第 1 項は次のように評価できる。

$$k \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \simeq k \frac{T(R, t) - T(0, t)}{R^2} \simeq -k \frac{T(0, t)}{R^2} \quad (2)$$

熱伝導の効果 (右辺第 1 項) による温度変化の目安時間 $t_{\text{熱伝導}}$ は、次のようにして得られる。まずは、ここでは中心 $r = 0$ での温度変化のみに注目することにする。熱伝導だけが起きているとき、それは冷却に寄与するので時間微分が負になることに注意すると、左辺の時間微分は、

$$\rho C \frac{\partial T(0, t)}{\partial t} \simeq -\rho C \frac{T(0, t)}{t_{\text{熱伝導}}} \quad (3)$$

と評価できる。すると式 (2), (3) より、

$$t_{\text{熱伝導}} = \frac{\rho C R^2}{k} \quad (4)$$

が得られる。熱伝導は、大きな天体 (R が大きい天体) で長い時間がかかることがわかる。

右辺第 2 項の評価

放射壊変に伴う加熱 (右辺第 2 項) による温度変化の目安時間 $t_{\text{放射壊変}}$ を見積もるために、中心 $r = 0$ での温度のみに注目することにして、左辺の時間微分を次のように評価する。

$$\rho C \frac{\partial T(0, t)}{\partial t} \simeq \rho C \frac{T(0, t) - T(0, 0)}{t_{\text{放射壊変}}} = \rho C \frac{\Delta T}{t_{\text{放射壊変}}}, \quad \Delta T = T(0, t) - T(0, 0) \quad (5)$$

$T(0, t)$ としてはたとえば、岩石が溶ける温度 (1200 K ないし 1500 K 程度) とか、初期温度の 2 倍の温度 $2T(0, 0)$ などを用いればよい (用いる温度によって変わる $t_{\text{放射壊変}}$ の値の数倍のずれは気にしない)。これより、次式が得られる。

$$t_{\text{放射壊変}} = \frac{\rho C \Delta T}{\varepsilon} \quad (6)$$

これを見ると、放射壊変加熱による温度上昇は、発熱量 (ε) が大きいほど短時間で起こることがわかる。小惑星の形成時刻 t_a に応じ、 ε が変化することに注意。

以上の 2 つの目安時間 $t_{\text{熱伝導}}$, $t_{\text{放射壊変}}$ を使うと、式 (1) は、次のように近似的に評価できる。

$$\rho C \frac{dT(0, t)}{dt} = -\frac{T(0, t)}{t_{\text{熱伝導}}} + \frac{T(0, t)}{t_{\text{放射壊変}}} \quad (7)$$

小惑星内部が溶融するためには少なくとも、式 (7) の右辺が正で、温度上昇が起きる状況でなければならない。また、温度上昇が起こったとしても、最高温度が 1200 K ないし 1500 K に達しないと岩石は溶けない。

以上をヒントにして、微惑星 (小惑星) 形成を論じて下さい。