

重力多体系の物理の基礎

小久保英一郎

国立天文台理論研究部

講義内容

- 重力の特徴
- 基本方程式
 - 運動方程式
 - ボルツマン方程式
- 力学平衡
 - ジーンズ定理
 - 力学平衡モデル
- ジーンズ方程式
- ビリアル定理
- 2体緩和
 - 力学的摩擦
 - 2体緩和時間

参考文献

[Galactic Dynamics](#) (Binney & Tremaine 1987)

恒星系力学のバイブル。恒星系力学全般を扱う。

[Dynamics of Galaxies](#) (Bertin 2000)

恒星系力学全般についての教科書。円盤銀河に詳しい。

[Dynamical Evolution of Globular Clusters](#) (Spitzer 1987)

球状星団の進化について。衝突系のバイブル。

[The Gravitational Million-Body Problem](#) (Heggie & Hut 2003)

球状星団の進化について。衝突系の新バイブル。

[Gravitational N-Body Simulations](#) (Aarseth 2003)

コード開発のパイオニアによる解説書。

重力の特徴

力の性質

- 万有である
- 引力のみである
- 遠距離力である
 - 遠距離相関
 - 現象の相似性 (特徴的スケールがない)

役割

- 不安定性による自発的構造形成

力の到達距離

湯川ポテンシャル

$$\phi \propto -\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

λ : 力の到達距離

力の到達距離

強い力 $\lambda \sim \text{fm}$

近距離力

弱い力 $\lambda \sim \text{fm}$

近距離力

電磁気力 $\lambda = \infty$

遠距離力

$\lambda_{\text{eff}} \sim \text{原子半径/デバイ半径}$

重力 $\lambda = \infty$

遠距離力

恒星系力学と天体力学

	恒星系力学	天体力学
対象	多体系	小数多体系
興味	分布関数	軌道
基本方程式	$\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{ \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i ^3}$	$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -Gm \frac{\mathbf{x}}{ \mathbf{x} ^3} + \mathbf{f}_p$
最近関連分野	プラズマ物理	古典力学

重力多体系

定義

重力で相互作用する多数の要素からなる系

系 (構成粒子)

- 惑星リング (リング粒子)
- 原始衛星系円盤 (微衛星)
- 微惑星系 (微惑星)
- 散開星団 (恒星)
- 球状星団 (恒星)
- 銀河 (恒星)
- 銀河群 (銀河)
- 銀河団 (銀河)
- 宇宙 (銀河)

重力多体系の支配方程式

運動方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}$$

- $3N$ 元連立 2 階常微分方程式
- 計算量 $O(N^2)$

重力多体系の支配方程式

分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

ポワソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho$$

$$\rho = m \int f d\boldsymbol{v}$$

(以下、簡単のため等質量系を考える)

無衝突ボルツマン方程式の導出

1 体分布関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

位相空間

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

位相空間での流れの速度

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{v}, -\nabla\Phi)$$

粒子保存 (連続) の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0$$

無衝突ボルツマン方程式 (f のラグランジュ微分)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

運動方程式とボルツマン方程式の関係

- ボルツマン方程式は $N \rightarrow \infty (m \rightarrow 0)$ にした運動方程式と等価。
- 運動方程式はラグランジュ的、ボルツマン方程式はオイラー的。
- $f = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(t))$ が運動方程式に従って変化するのは明らか。
- 運動方程式はボルツマン方程式の特性方程式になっている。

運動方程式とボルツマン方程式の関係 2

$f(x, v, t) = c$ という解曲面 S を考える (簡単のため 1 次元とする)

解曲面に垂直なベクトル n

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

無衝突ボルツマン方程式

$$n \cdot C = 0$$

$$C = \left(v, -\frac{d\Phi}{dx}, 1 \right) \quad (S \text{ 上にある})$$

特性方程式

S 上の微分 (dx, dv, dt) は C に平行でなくてはならない

$$\frac{dx}{v} = \frac{dv}{-d\Phi/dx} = \frac{dt}{1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}$$

力学平衡

定義

- 分布関数 f が時間的に定常である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

- 分布関数 f によって決まるポテンシャル Φ を固定して考えたときに、 f の時間微分が 0 になる。

(熱平衡とは限らない)

運動の積分

定義

ポテンシャル Φ のもとで、 x 、 v の関数 I が運動の積分であるとは、軌道にそって

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

が成り立つことである。

球対称の場合

- エネルギー E
- 角運動量 3 成分 J
- (近点経度)

ジーンズ定理

定理

任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

証明

必要性

f 自体運動の積分を定義を満たしている。

十分性

f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれの項が 0 になる。

力学平衡モデル

球対称モデル

$$f(E, J)$$

速度分散等方モデル

$$f(E)$$

ポワソン方程式

$$\rho = m \int f \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi \right) d\mathbf{v}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

解の構成法

1. f を v で積分することにより、 $\rho(\Phi)$ を求める。
2. ポワソン方程式に ρ を代入し、 $\Phi(r)$ を求める。

球対称等方モデルの例

等温モデル

$$f \propto e^{-E}$$

King モデル

$$f \propto \begin{cases} e^{-E} - e^{-E_0} & \text{if } E < E_0 \\ 0 & \text{if } E > E_0 \end{cases}$$

E_0 : 脱出エネルギー

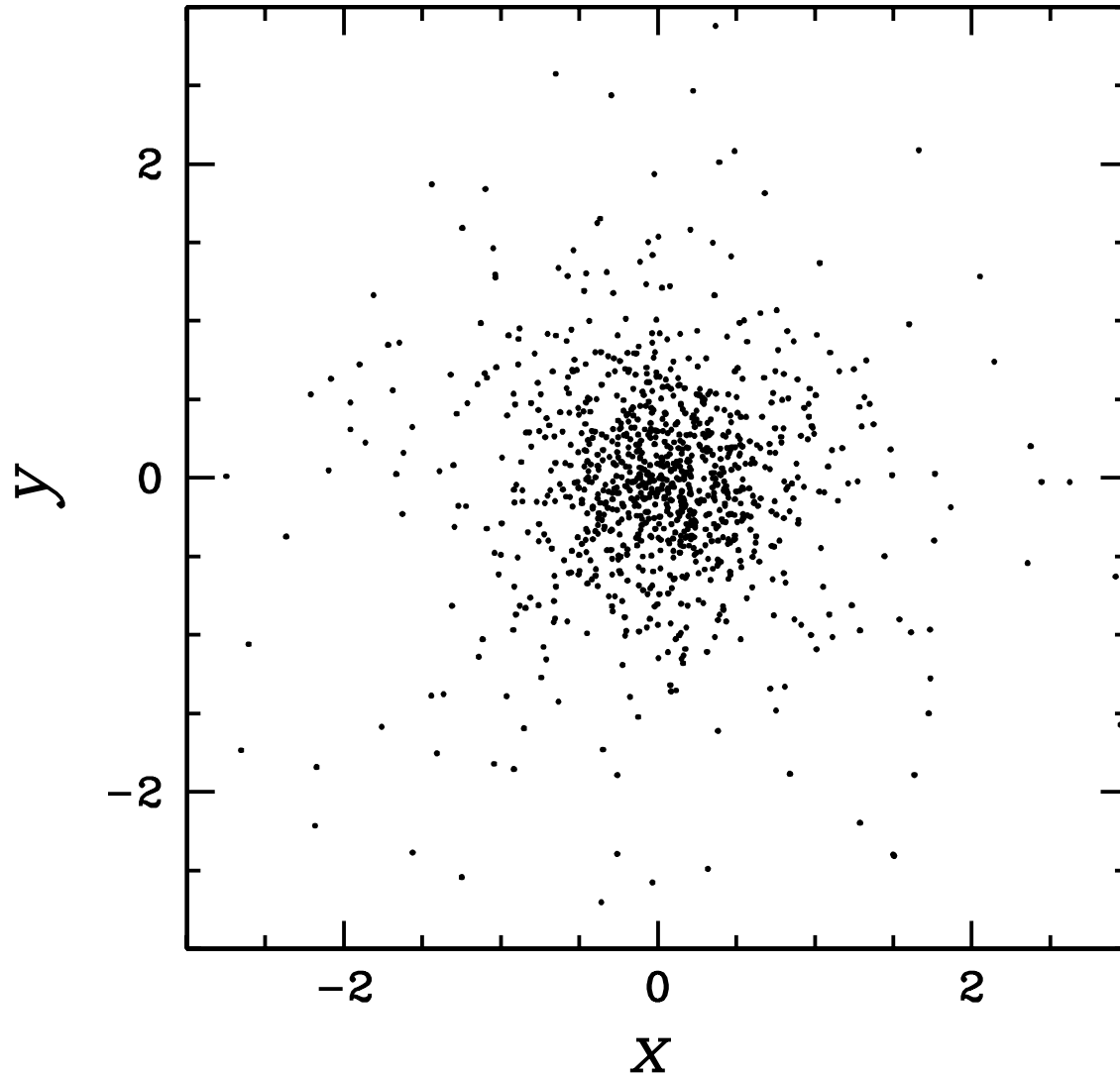
Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}$$

Plummer モデル

$$f \propto (-E)^{7/2}, \quad \rho \propto (c^2 + r^2)^{-5/2}$$

$$N = 1024$$



ジーンズ方程式

無衝突ボルツマン方程式の速度空間のモーメント

速度の0次モーメント: 速度空間で積分

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\nu = \int f d\mathbf{v}, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d\mathbf{v}$$

速度の1次モーメント: v_j をかけて速度空間で積分

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$$

(1度は自分で導くこと)

流体のオイラー方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

オイラー方程式

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

ジーンズ方程式の応用

球対称系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} \left[2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}) \right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr}$$

等方速度分散系

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} = -\nu \frac{d\Phi}{dr} = -\nu \frac{GM(r)}{r^2}$$

質量分布

$$M(r) = -\frac{r \overline{v_r^2}}{G} \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right)$$

観測 $[(\nu(r), \overline{v_r^2}(r))] \rightarrow$ 質量分布 $M(r)$

テンソルビリアル定理

ジーンズ方程式の空間のモーメント

空間の1次モーメント: x_k をかけて空間で積分
($\nu \rightarrow \rho$ にしておく)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}$$

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d\mathbf{x}$$

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \sigma_{jk} d\mathbf{x}$$

$$W_{jk} = -\frac{1}{2} G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}$$

(1度は自分で導くこと)

スカラービリアル定理

定常状態のテンサービリアル定理のトレース

$$2K + W = 0$$

$$K = \frac{1}{2} \int \rho(\boldsymbol{x}) \overline{v^2} d\boldsymbol{x}, \quad W = -\frac{1}{2} \int \int \rho(\boldsymbol{x}) \rho(\boldsymbol{x}') \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{x}'$$

全エネルギー

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W$$

- 全エネルギーは、ポテンシャルエネルギーの 1/2 で、絶対値は運動エネルギーに等しい。
- 系の見かけの比熱が負

ビリアル定理の応用

系

定常状態: 質量 M 、速度分散 $\langle v^2 \rangle$

スカラービリアル定理

$$M\langle v^2 \rangle + W = 0 \rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g} \simeq 0.4 \frac{GM}{r_h}$$

$$\text{重力半径: } r_g = \frac{GM^2}{|W|}$$

$$\text{半質量半径: } r_h \simeq 0.4r_g$$

系の質量

$$M \simeq \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{0.4G}$$

観測 ($\langle v^2 \rangle, r_h$) \rightarrow 質量 M

衝突項

ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}}$$

衝突項

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}} : 2 \text{ 体散乱の効果}$$

衝突系と無衝突系

考えている時間スケールで

衝突系 : 2 体緩和で系が進化

無衝突系 : 2 体緩和の効果が無視可能

2体緩和

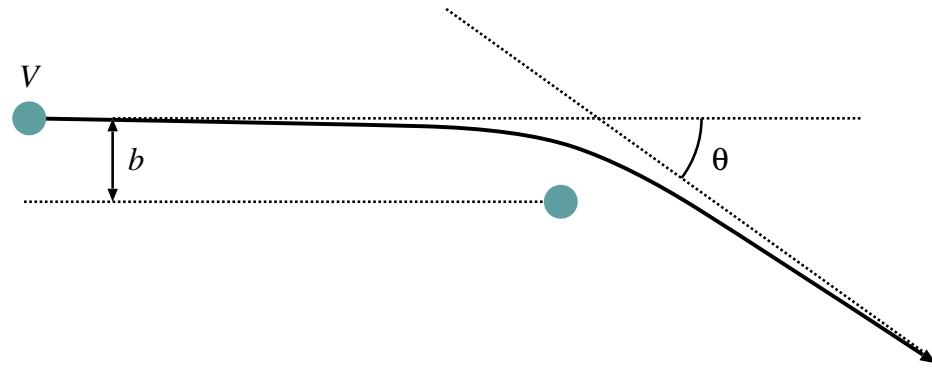
原因は何か？

- 系が有限粒子数で構成されているための効果
- 滑らかな平均ポテンシャルからの粒子によるずれによる進化

無視できない場合

- 衝突系 (球状星団、散開星団、銀河中心、微惑星系など)
- 無衝突系の全ての N 体シミュレーション (数値誤差の主要因)

2体散乱



フィールド粒子 ($m, v = 0, n$) の中を進むテスト粒子 ($m = 0, v$) を考える

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = v \sin \theta = 2v \frac{b/b_0}{1 + (b/b_0)^2}, \quad b_0 = \frac{Gm}{v^2}$$

2 次の平均変化

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta v_{\perp}^2 2\pi n v b db \sim \frac{G^2 n m^2 \ln \Lambda}{v}$$

$$\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

b_{\max} : 系のサイズ, b_{\min} : 90度散乱のインパクトパラメータ

緩和時間

緩和時間

$$T_{\text{relax}} \equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \sim \frac{v^3}{G^2 n m^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{\ln N} T_{\text{cross}}$$

$$T_{\text{cross}} = \frac{R}{v}$$

(ビリアル定理から $v^2 \simeq GNm/R$)

例

天体	N	$T_{\text{cross}}[\text{y}]$	$T_{\text{relax}}[\text{y}]$
銀河	10^{11}	10^8	10^{18}
球状星団	10^5	10^5	10^9

有限質量粒子の場合

フィールド粒子 ($m_f, \boldsymbol{v}_f, n_f$) の中を進むテスト粒子 (m_t, \boldsymbol{v}_t) を考える。
相対速度を $V = \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_t$ とする。

散乱角

$$\tan \theta = \frac{2b}{(b/b_0)^2 - 1}, \quad b_0 = \frac{G(m_t + m_f)}{V^2}$$

速度変化

$$\Delta v_{\perp} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin \theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{b/b_0}{1 + (b/b_0)^2}$$

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos \theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (b/b_0)^2}$$

有限質量粒子の場合

簡単のため、 $v_f = 0$ とする。

(速度分布がある場合も計算できるが、今回は省略。本質はこの場合と同じ。)

平均速度変化

$$\langle \Delta v_{\perp} \rangle = 0$$

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

1 次の効果 (力学的摩擦)

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\frac{4\pi G^2 n_f m_f (m_t + m_f) \ln \Lambda}{V^2}$$

- エネルギー等分配の効果
- 質量の大きな粒子にほど強くはたらく
- 大きさはほぼ質量密度 ($n_f m_f$) に比例

2次の効果

$$\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda}{V}$$

$$\langle \Delta v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{4\pi G^2 n_f m_f^2}{V}$$

- 拡散によるランダム速度の増加
- 大きさは質量分布に依存

2体緩和時間

等質量粒子からなり、速度がマクスウェル分布をしている系の2体緩和時間
局所的な見積もり

$$\begin{aligned} T_{\text{relax}} &\equiv \frac{v^2}{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle} \\ &= 0.34 \frac{\sigma^3}{G^2 \rho m \ln \Lambda} \\ &= \frac{1.8 \times 10^{10}}{\ln \Lambda} \left(\frac{\sigma}{10 \text{kms}^{-1}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{10^3 M_{\odot} \text{pc}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} [\text{year}] \end{aligned}$$

大域的な見積もり

$$\begin{aligned} T_{\text{relax}}^{\text{half}} &\simeq \frac{0.14N}{\ln(0.4N)} \sqrt{\frac{r_h^3}{GM}} \\ &= \frac{6.5 \times 10^8}{\ln(0.4\Lambda)} \left(\frac{M}{10^5 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{r_h}{\text{pc}} \right)^{3/2} [\text{year}] \end{aligned}$$

よくある間違い

- $T_{\text{relax}}^{\text{half}} >$ 宇宙年齢なので 2 体緩和は効かない
 - ρ 大、もしくは σ 小のところでは T_{relax} は短い
- ソフトニングが大きいので 2 体緩和は効かない
 - Λ を小さくする (b_{min} を大きくする) だけ
- PM 法などでは 2 体緩和は効かない
 - Λ を小さくする (b_{min} を大きくする) だけ

非現実的な 2 体緩和の回避方法

- 基本的には粒子数を増やす他にない!

結果の正しさの確認

ただ1回計算しただけでは、計算の正しさについてほとんどなにもわからない。

系統的に計算方法を変えて2回以上計算すると、非常に有用な情報が得られる。

- 時間ステップを変えて計算
- 粒子数を変えて計算
- 積分公式を変えて計算
- 精度を変えて計算